

УДК 621.314

В. В. Самотий, д. т. н., проф.;

У. Ю. Дзелендзяк

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТРИФАЗНОГО ОДНОПІВПЕРІОДНОГО ВИПРЯМЛЯЧА

Наведено математичну модель трифазного однопівперіодного випрямляча, орієнтовану на неявні методи чисельного інтегрування, а також запропоновано методу аналізу перехідних і усталених режимів його роботи.

Вступ

Трифазні випрямлячі широко застосовуються в силових системах, де необхідно мати постійну напругу за наявності джерел змінної напруги. Вони в порівнянні з однофазними випрямлячами мають значно кращі якісні показники, а тому набули широкого застосування. Наприклад, їх застосовують для керування швидкістю обертання двигунів постійного струму. Якщо ми хочемо дослідити поведінку такого випрямляча в динаміці, то перш за все необхідно вивести його диференціальні рівняння. Такі рівняння можна отримати лише з певними допущеннями. Вони дають можливість знехтувати другорядними процесами і виділити основні. Це спрощує задачу, робить її доступною для розв'язування. Основним питанням при виведенні рівнянь динаміки трифазного однопівперіодного випрямляча є врахування нелінійних характеристик його елементів — трансформатора та тиристорів.

Розрахунок перехідного процесу зводиться до задачі Коші — це інтегрування рівнянь динаміки одним з чисельних методів з заданими початковими умовами. Аналіз періодичного режиму є складнішою задачею, бо передбачає обчислення початкових умов, що задовольняють умову періодичності. Ми пропонуємо метод аналізу перехідних та періодичних режимів роботи трифазного однопівперіодного випрямляча, що описується жорсткими диференціальними рівняннями. Враховуючи широке застосування таких випрямлячів, дана робота є актуальною і має практичне значення.

Аналіз публікацій

З теоретичної точки зору трифазний однопівперіодний випрямляч можна розглядати як електромагнетне коло, електрична частина якого містить тиристри. Тому доцільно зробити огляд праць, де висвітлені питання побудови математичних моделей нелінійних електромагнетних кіл, а також керованих напівпровідникових вентилів.

Сучасна методика аналізу режимів роботи нелінійних електромагнетних кіл викладена в роботі [5]. Коефіцієнтами рівнянь динаміки є статичні та диференціальні магнетні опори, які є функціями магнетних потоків віток. Проте такий підхід передбачав застосування явних методів чисельного інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь.

Моделювання роботи тиристорів умовно можна поділити на дві групи. Перша розглядає тиристор як певну нелінійну електричну ланку [1], а друга подає його ідеальним ключем [3]. Перша модель не змінює структуру електричного кола, а лише вносить в нього нелінійні елементи. Проте при тривалих комутаціях призводить до невідповідності закону збереження енергії. Друга — змінює структуру електричного кола. Тут випрямляч буде описуватися декількома системами диференціальних рівнянь. Їх кількість визначається кількістю можливих комбінацій відкритих і закритих вентилів, що суттєво ускладнює алгоритм аналізу режимів роботи.

Періодичний режим можна отримати прямим інтегруванням рівняння динаміки до усталення процесу, проте, для тривалих перехідних процесів, такий шлях є неефективним. Існують методи, які не вимагають тривалого інтегрування рівнянь динаміки. До них належать частотні, зокрема, метод гармонічного балансу [2], екстраполяційний [6, 8] і метод Ейприла—Трика [7], який ще інколи називають моделлю чутливостей до початкових умов. В роботі [4] показано, як застосувати цю модель до нелінійних електромагнетних кіл. Проте, робота [4] спрямована на використання виключно явних методів чисельного інтегрування, що суттєво звужує клас вирішуваних задач.

Тому аналіз періодичних режимів будемо виконувати екстраполяційним методом [6, 8], бо він є простіший від методу Ейприла—Трика [7].

Виведення рівнянь динаміки

Принципова схема трифазного однопівперіодного випрямляча наведена на рис. 1. Вона містить трансформатор, три тиристри T_1, T_2, T_3 , ємнісний фільтр C і навантаження r_H . В даній схемі можливі чотири комбінації відкритих і закритих тиристорів, а саме: 1. T_1 — відкритий, T_2, T_3 — закриті; 2. T_2 — відкритий, T_1, T_3 — закриті; 3. T_3 — відкритий, T_1, T_2 — закриті; 4. T_1, T_2, T_3 — закриті. Для запису рівнянь динаміки необхідно записати рівняння кожної комбінації, а потім звести їх до єдиної системи шляхом введення додаткових логічних змінних, які будуть визначати стан тиристорів.

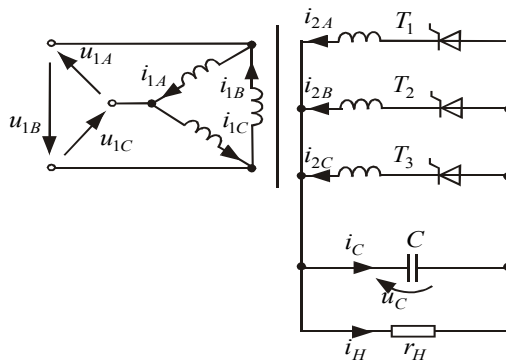


Рис. 1. Принципова схема трифазного однопівперіодного випрямляча

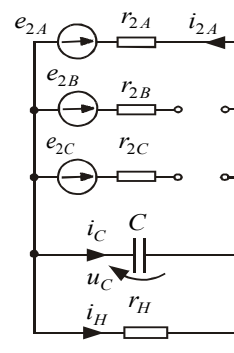


Рис. 2. Розрахункова схема вторинної сторони трансформатора першої комбінації

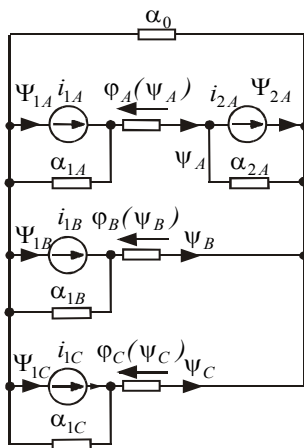


Рис. 3. Розрахункова схема магнетного кола

Розглянемо першу комбінацію, яка зводиться до режиму роботи трансформатора в разі обриву фаз B і C . Розрахункова схема вторинної сторони трансформатора показана на рис. 2, а магнетного кола на рис. 3. Згідно з цими схемами можна записати такі рівняння:

$$\left. \begin{aligned} i_{1j} &= \alpha_{1j}(\Psi_{1j} - \Psi_j); & i_{2A} &= \alpha_{2A}(\Psi_{2A} - \Psi_A); \\ i_{1A} + i_{2A} &= \Phi_A(\Psi_A) + \alpha_0(\Psi_A + \Psi_B + \Psi_C); \\ i_{1B} &= \Phi_B(\Psi_B) + \alpha_0(\Psi_A + \Psi_B + \Psi_C); \\ i_{1C} &= \Phi_C(\Psi_C) + \alpha_0(\Psi_A + \Psi_B + \Psi_C); \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$d\Psi_{1j}/dt = u_{1j} - r_{1j}i_{1j}; \quad d\Psi_{2A}/dt = -u_C - r_{2A}i_{2A}; \quad (2)$$

$$\frac{du_C}{dt} = \left(i_{2A} - \frac{u_C}{r_H} \right) / C_1, \quad (3)$$

де $j = A, B, C$ — індекси однойменних фаз; i_{1j}, i_{2A} — струми обмоток; Ψ_{1j}, Ψ_{2A} — повні потокозчеплення обмоток; α_{1j}, α_{2A} — обернені індуктивності розсіяння обмоток; α_0 — обернена індуктивність розсіяння нульової послідовності; Ψ_i — робочі потокозчеплення фаз; u_C — напруга конденсатора C ; r_{1j}, r_{2A} — активні опори первинної і вторинної обмоток відповідно; r_H — опір навантаження; u_{1j} — напруги живлення.

Для розв'язування диференціальних рівнянь застосуємо неявний метод Ейлера

$$y_{m+1} = y_m + \left(\frac{dy_{m+1}}{dt} + \frac{dy_m}{dt} \right) \Delta t / 2. \quad (4)$$

Введемо нові позначення $y_0 = y_m$; $y = y_{m+1}$. Розкладемо рівняння (2), (3) за формулою (4):

$$\Psi_{1j} = \Psi_{1j0} + (u_{1j} - r_{1j}i_{1j}) \Delta t; \quad \Psi_{2A} = \Psi_{2A0} + (-u_C - r_{2A}i_{2A}) \Delta t; \quad u_C = u_{C0} + (i_{2A} - u_C/r_H) \Delta t. \quad (5)$$

В результаті ми отримали систему алгебричних рівнянь (1) і (5), розв'язавши яку маємо

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{1j} &= k_{2j} + k_{3j}\Psi_j; & \Psi_{2A} &= b_{3A} + b_{4A}\Psi_A; & \Psi_{2B} &= \Psi_B; & \Psi_{2C} &= \Psi_C; \\ u_C &= k_1 u_{C0} + k_1 \alpha_{2A} (\Psi_{2A} - \Psi_A) \Delta t / C; & F(\Psi) &= A\Psi + B = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

де $\Psi = (\Psi_A, \Psi_B, \Psi_C)^T$ — матриця-стовпець робочих поточкозчеплень фаз;

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= (1 + \Delta t / (r_H C))^{-1}, & k_{1j} &= (1 + r_{1j} \alpha_{1j} \Delta t)^{-1}; & k_{2j} &= k_{1j} (\Psi_{1j0} + u_{1j} \Delta t); \\ k_{3j} &= k_{1j} r_{1j} \alpha_{1j} \Delta t; & b_{2A} &= (1 + \alpha_{2A} \Delta t (k_1 \Delta t / C + r_{2A}))^{-1}; \\ b_{3A} &= k_{2A} (\Psi_{2A0} - k_1 u_{C0} \Delta t); & b_{4A} &= k_{2A} \alpha_{2A} (k_1 \Delta t / C + r_{2A}) \Delta t; \\ A &= A_0 - E_0 \alpha_0; & A_0 &= \text{diag}(\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C); & B &= (\alpha_{1A} k_{2A} + \alpha_{2A} b_{3A}, \alpha_{1B} k_{2B}, \alpha_{1C} k_{2C})^T. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Тут E_0 — матриця розмірністю 3×3 всі елементи якої рівні 1;

$$\alpha_j = \alpha_{1j} (k_{3j} - 1) + \alpha_{2j} (b_{4j} - 1) - \alpha'_j, \quad j = A, B, C. \quad (8)$$

У виразі (7) позначені обернені статичні індуктивності фаз, які визначаємо за кривими намагнечування $\alpha'_j = \Phi_j(\Psi_j) / \Psi_j$.

Виконавши аналогічні перетворення для решти комбінацій та узагальнивши їх з допомогою додаткових логічних змінних m_A, m_B, m_C , отримаємо кінцевий результат

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= (1 + \Delta t / (r_H C))^{-1}; & k_{1j} &= (1 + r_{1j} \alpha_{1j} \Delta t)^{-1}; & k_{2j} &= k_{1j} (\Psi_{1j0} + u_{1j} \Delta t); \\ k_{3j} &= k_{1j} r_{1j} \alpha_{1j} \Delta t; & b_{2j} &= (1 + \alpha_{2j} \Delta t (k_1 \Delta t / C + r_{2j}))^{-1}; \\ b_{3j} &= m_j b_{2j} (\Psi_{2j0} - k_1 u_{C0} \Delta t); & b_{4j} &= m_j b_{2j} \alpha_{2j} (k_1 \Delta t / C + r_{2j}) \Delta t + 1 - m_j; \\ \alpha_j &= \alpha_{1j} (k_{3j} - 1) + \alpha_{2j} m_j (b_{4j} - 1) - \alpha'_j. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$B = (\alpha_{1A} k_{2A} + \alpha_{2A} b_{3A}; \alpha_{1B} k_{2B} + \alpha_{2B} b_{3B}; \alpha_{1C} k_{2C} + \alpha_{2C} b_{3C})^T. \quad (10)$$

Рівняння (6) також можна узагальнити

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{1j} &= k_{2j} + k_{3j}\Psi_j; & \Psi_{2j} &= b_{3j} + b_{4j}\Psi_j; \\ u_C &= k_1 u_{C0} + \frac{k_1 \Delta t}{C} (m_A \alpha_{2A} (\Psi_{2A} - \Psi_A) + m_B \alpha_{2B} (\Psi_{2B} - \Psi_B) + m_C \alpha_{2C} (\Psi_{2C} - \Psi_C)). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Щоб визначити робочі поточкозчеплення фаз, необхідно розв'язати систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$F(\Psi) = A\Psi + B = 0. \quad (12)$$

Систему рівнянь (11) розв'язуємо ітераційним методом Ньютона

$$\Psi^{(k+1)} = \Psi^{(k)} - \left(F'(\Psi^{(k)}) \right)^{-1} F(\Psi^{(k)}), \quad (13)$$

де $F'(\Psi)$ — частинна похідна рівняння (11), яка буде збігатися з матрицею A , якщо в останній прийняти

$$\alpha_j = \alpha_{1j}(k_{3j} - 1) + \alpha_{2j}(b_{4j} - 1) - \alpha''_j. \tag{14}$$

Ітераційний процес (19) зупиняється тоді, коли виконається умова його збіжності

$$\left| \frac{\Psi^{(k+1)} - \Psi^{(k)}}{\Psi^{(k+1)}} \right| < \varepsilon, \tag{15}$$

де ε — похибка збіжності ітераційного процесу.

Маючи робоче потокозчеплення згідно з (10) визначаємо Ψ_{1j} , Ψ_{2j} , u_C , а струми обмоток визначаємо за формулами

$$i_{1j} = \alpha_{1j}(\Psi_{1j} - \psi_j), \quad i_{2j} = \alpha_{2j}(\Psi_{2j} - \psi_j). \tag{16}$$

Змінюючи поточний час та розв'язуючи (11) за формулою (12), ми отримуємо розрахунок перехідного процесу. Умови відкриття і закриття тиристорів визначаються так:

а) якщо всі тиристори закриті, то відкриваємо тиристор, для якого виконається умова

$$-d\psi_j/dt - u_C \geq 0, \quad m_j = 1; \tag{17}$$

б) якщо тиристор j -ої фази відкритий, то перевіряємо умову його закриття

$$i_{2j} = 0, \quad di_{2j}/dt < 0, \quad m_j = 0. \tag{18}$$

Вимушений періодичний режим можна отримати шляхом інтегрування рівнянь динаміки до усталення процесу. Проте, накопичення похибок чисельного інтегрування та відсутність критерію завершення перехідного режиму привели до появи методів прискореного пошуку періодичних режимів. Найбільшого поширення набули два методи — це модель чутливостей до початкових умов [8] та екстраполяційний ε -алгоритм [6, 8]. Для даного прикладу перевагу слід надати останньому, оскільки він є значно простіший в алгоритмічному відношенні.

Результати чисельного аналізу

На рис. 4, 5 наведено результати розрахунку періодичного режиму трифазного однопівперіодного випрямляча. Початкові умови визначалися екстраполяційним методом [8]. В розрахунках використані дані модельного випрямляча: $r_{1j} = 0,75$ Ом; $r_{2j} = 1,5$ Ом; $\alpha_{1j} = \alpha_{2j} = 142$ Гн⁻¹; $\alpha_0 = 167$ Гн⁻¹; $r_H = 10$ Ом; $u_1 = 311 \sin(\omega t + 5)$ В; $\omega = 314,1593$ рад/с; $C = 0,7$ мФ. Крива намагнетичування апроксимована трьома ділянками, дві з них є рівняннями прямих, а одна кубічним сплайном

$$\varphi(\psi) = \begin{cases} a_1\psi; & |\psi| > \psi_1; \\ S_3(\psi); & \psi_1 \leq |\psi| \leq \psi_2; \\ a_2\psi - a_0; & |\psi| > \psi_2. \end{cases} \tag{19}$$

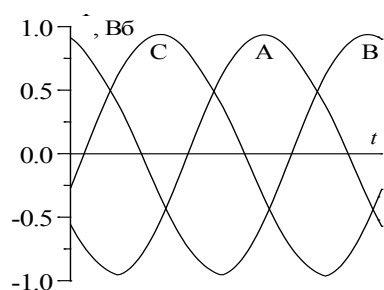


Рис. 4. Усталені значення робочих потокозчеплень фаз

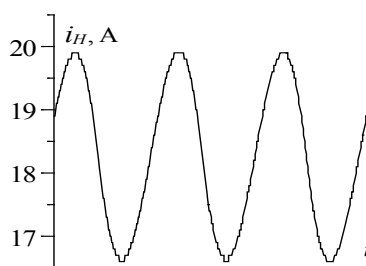


Рис. 5. Усталені значення струму навантаження

де $a_1 = 0,25$ Гн⁻¹; $a_2 = 3$ Гн⁻¹; $a_0 = 1,8$ А; $\psi_1 = 0,2$ Вб; $\psi_2 = 0,9$ Вб; $\varphi(\psi_1) = 0,05$ А; $\varphi(\psi_2) = 0,9$ А; $S_3(\psi)$ — кубічний сплайн. Зауважимо, що $\alpha''(\psi_1) = a_1$, $\alpha''(\psi_2) = a_2$.

Періодичний режим був отриманий за 5 ітерацій. На кожній ітерації рівняння динаміки інтегрувалися на інтервалі 10 періодів. Діюче

значення струму навантаження складає 18,3 А, а амплітудне 19,9 А. В цьому випадку пульсації струму навантаження зведені до його діючого значення не перевищують 18 %.

Висновок

Запропоновано алгоритм аналізу режимів роботи трифазного однопівперіодного випрямляча, орієнтований на неявні методи чисельного інтегрування. Характерною рисою запропонованого алгоритму є моделювання напівпровідникових вентилів за схемою ідеального ключа. В рівняннях динаміки робота вентилів відображена додатковими логічними змінними, що набувають значень 0, 1. Це значно спрощує алгоритм аналізу та зменшує обсяг обчислювальних операцій. Так, в нашому прикладі, на кожному кроці інтегрування ми розв'язуємо лише три нелінійних рівняння (11), решта рівнянь є лінійними. Моделюючи вентилялі з RLC -ланками зі змінними параметрами отримуємо додаткові нелінійні диференціальні рівняння, які необхідно розв'язати. Таким чином, запропонований алгоритм є оптимальним з точки зору обсягу обчислень і універсальним, бо використовує неявні методи чисельного інтегрування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондаренко В. М. Методы и алгоритмы анализа статических и динамических режимов нелинейных цепей. — Киев, 1974. — 105 с. (Препринт / АН УССР Ин-т электродинамики, № 66).
2. Глухивский Л. И. Расчет периодических процессов электротехнических устройств. Львов: Вища школа, 1984. — 164 с.
3. Мерабишвили П. Ф., Случанко Е. И. Исследование переходных и установившихся процессов в трехфазных мостовых выпрямителях с помощью коммутационных функций // Электричество. — 1973. — № 4. — С. 21—26.
4. Самотий В.В. Математичне моделювання стаціонарних процесів електромагнетних пристроїв систем керування. — Львів: Фенікс, 1997. — 170 с.
5. Чабан В. И. Основы теории переходных процессов электромашинных систем. — Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1980. — 200 с.
6. Чабан В. И., Самотый В. В. Ускоренный поиск вынужденных периодических режимов устройств преобразовательной техники // Тр. 4-й Всесоюз. науч.-техн. конф. «Проблемы преобразовательной техники». — Киев: Ин-т электродинамики АН УССР, 1987. — Ч. 1. — С. 258—260.
7. Aprille T. I., Triek T. N. A computer algorithm to determine the steady-state response of non-linear oscillator. // IEEE Trans. Circuit Theory. 1972. — Vol. ct-19. — P. 354—360.
8. Skelboe S. Computing of the periodic steady-state response of non-linear networks by extrapolation methods // IEEE Trans. Circuits Syst. — V. CAS-27. — 1980. — P. 161—175.

Матеріали статті рекомендовані до опублікування оргкомітетом конференції «Сучасні проблеми радіоелектроніки, телекомунікацій та приладобудування» (2—5. 07.05)

Надійшла до редакції 11.07.05
Рекомендована до друку 21.07.05

Самотий Володимир Васильович — професор Вищої Школи Бізнесу в Домброві Гурнічій, Польща;
Дзелендзяк Уляна Юрїївна — старший викладач кафедри автоматичної та телемеханіки.

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів