

# АВТОМАТИКА ТА ІНФОРМАЦІЙНО- ВИМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

---

УДК 62-505

В. Ф. Кудин, д. т. н., проф.;

А. В. Торопов, асп.

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ СУБОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*Рассмотрена задача аналитического конструирования субоптимального регулятора контура стабилизации усилия резания с учетом упругости суппорта. Спроектирован нелинейный субоптимальный регулятор на основе метода Беллмана—Ляпунова с использованием концепции инвариантного вложения.*

Теория аналитического конструирования (АК) регуляторов для сложных нелинейных многомерных систем в настоящее время развивается как самостоятельное научное направление. Однако, общеизвестно, что вычислительная сложность методов АК нелинейных субоптимальных регуляторов резко возрастает при увеличении порядка управляемого объекта и не позволяет сделать их рабочим аппаратом при построении систем управления. К настоящему времени разработан широкий спектр методов декомпозиции и агрегирования для решения задач оптимального управления сложными нелинейными динамическими системами. В данной работе представлена процедура АК субоптимальных регуляторов для нелинейных динамических систем без использования приемов декомпозиции. Решение задачи АК строится на основе метода Беллмана—Ляпунова с использованием концепции «метода погружения» (инвариантного вложения).

К настоящему времени опубликовано достаточное количество работ, в которых используется концепция инвариантного погружения для решения нелинейных задач оптимизации [1—5]. Основная идея такого подхода состоит во включении частной задачи оптимизации в более общую задачу [2]. Если можно решить общую задачу, то частная задача решается автоматически, причем удивительно, но часто оказывается легче решать именно более общую задачу. Ю. Ту в работе [6] дал более простую формулировку идеи инвариантного погружения, определяя ее как решение семейства более простых задач вместо исходной сложной задачи. Авторам известна единственная работа [5], в которой техника инвариантного погружения используется для решения нелинейной задачи синтеза оптимального регулятора. Однако предложенное решение не отличается вычислительной простотой. В представленной работе дано решение задачи синтеза нелинейного регулятора, причем достаточно простая идея использования метода инвариантного погружения позволяет исходную задачу погрузить в семейство более простых линейных задач. Представленная работа является дальнейшим развитием и обобщением методики, изложенной в [7].

Покажем на примере прикладной задачи возможность решения задачи АК регуляторов для таких систем. Рассмотрим систему стабилизации усилия резания, которая получила широкое распространение в металлообрабатывающих станках [8]. Применение таких систем позволяет повысить качество обрабатываемой поверхности и увеличить производительность оборудования. Отличительной их особенностью является сложность построения регуляторов, поскольку при использовании стандартных корректирующих устройств при достаточно больших коэффициентах усиления разомкнутой системы в контуре стабилизации усилия резания (КСУР) возникает режим автоколебаний, что является недопустимым для металлообрабатывающих станков. Существует ряд публикаций, посвященных проблеме построения регуляторов для КСУР [9, 10]. Однако в них

рассматривается упрощенная модель исследуемого объекта и не учитывается влияние ряда нелинейностей, существенно ухудшающих динамические характеристики системы.

КСУР включает в себя электропривод подачи с синхронным двигателем, механическую передачу, процесс резания, а также упругую систему суппорта. Модель процесса резания, полученная в [11], включает в себя «зону нечувствительности», обусловленную наличием зазора в направляющих; апериодическое звено первого порядка, учитывающее инерционность процесса резания, и колебательное звено, описывающее УСС. Контур регулирования составляющей тока статора по оси  $q$  с релейным регулятором представлен звеном типа «насыщение» согласно [12]. Механическая передача представляет собой двухмассовую систему с сосредоточенными моментами инерции  $J_1$  и  $J_2$ , жесткостью  $C_{12}$  и вязким трением  $\beta_{12}$ . Система регулирования скорости вращения вала двигателя и механическая передача входят в контур управления линейным перемещением режущего инструмента с П – регулятором положения.

Система дифференциальных уравнений, описывающая динамику КСУР, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{F}_y &= -T_{рез}^{-1}F_y + K_{рез}T_{рез}^{-1}K_n\omega_2 + K_{пр}T_{рез}^{-1}f_3(t_{рез} - y), \dot{y} = y'; \\ \dot{y}' &= -T_{yc}^{-2}y - 2\xi T_{yc}^{-1}y' + K_{yc}T_{yc}^{-2}F_y; \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_2; \\ \dot{\omega}_2 &= J_2^{-1}(c_{12} \cdot f_2(\Delta\varphi) + \beta_{12} \cdot f_2'(\Delta\varphi) - M_{c2}); \\ \dot{\varphi}_1 &= \omega_1; \\ \dot{\omega}_1 &= J_1^{-1}\left(\frac{3}{2}\lambda_m \cdot f_1\left(K_{pc}\left(K_{pp}\left(u_{pyp} - K_l l_2\right) - K_\omega \cdot \omega_1\right)\right) - c_{12}f_2(\Delta\varphi) - \beta_{12}f_2'(\Delta\varphi) - M_{c1}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $M_{c2} = K_1\omega_2K_n^{-1} + K_2(t_{рез} - f_3(y))K_n^{-1}$  — момент нагрузки на выходе механической передачи, определяемый составляющей усилия резания  $F_x$ ;  $K_{рез}$ ,  $K_{пр}$  — коэффициенты усиления процесса резания по подаче и припуску, соответственно;  $K_n$  — коэффициент усиления передаточного устройства;  $T_{рез}$  — постоянная времени процесса резания;  $K_{yc}$  — коэффициент передачи УСС;  $T_{yc}$  — постоянная времени УСС;  $\xi$  — коэффициент демпфирования УСС;  $F_y$  — нормальная составляющая усилия резания;  $y$  — упругая деформация УСС;  $t_{рез}$  — заданная глубина резания;  $\varphi_2$ ,  $\omega_2$  — угол поворота и скорость выходного вала ходового винта;  $\varphi_1$ ,  $\omega_1$  — угол поворота и скорость вала двигателя;  $M_{c1}$ ,  $M_{c2}$  — моменты нагрузки вала двигателя и ходового винта;  $i_{1q}$  — составляющая тока статора по оси  $q$ ;  $u_{pyp}$  — выходное напряжение регулятора усилия резания;  $K_l$ ,  $K_\omega$  — коэффициенты обратных связей по перемещению исполнительного механизма и скорости вращения вала двигателя;  $\lambda_m$  — потокосцепление постоянных магнитов;  $K_{pp}$  — коэффициент усиления регулятора положения;  $K_{pc}$  — коэффициент усиления регулятора скорости;  $f_1(u_{pc})$  — нелинейность типа «насыщение»;  $f_2(\Delta\varphi)$ ,  $f_3(t_{рез} - y)$  — нелинейности типа «зона нечувствительности».

Наличие нелинейностей в математической модели управляемого объекта делает процедуру синтеза нелинейного оптимального управления крайне сложной в вычислительном отношении, особенно для систем высокого порядка. Традиционный путь решения задачи синтеза приводит к необходимости нахождения решения уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана, которое ищется, обычно, в виде многомерного степенного ряда. Однако этот путь является практически тупиковым, поскольку приводит к необходимости решения 210 алгебраических уравнений для определения параметров четвертичной формы.

Для вышеуказанных нелинейностей осуществляется процедура «линеаризации» методом «секущих» [13] в «малом» и «большом». Получим  $f_1(u_{pc1}) = K(u_{pc1})u_{pc1}$ ,  $f_2(\Delta\varphi) = K(\Delta\varphi)\Delta\varphi$ ,  $f_3(y) = K(y)y$ , где  $K(u_{pc1})$ ,  $K(\Delta\varphi)$ ,  $K(y)$  — коэффициенты мгновенной линеаризации.

Линеаризованная система дифференциальных уравнений в матричной форме запишется:

$$\dot{X} = AX + BU, \tag{2}$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & 0 & 0 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & -a_5 & -a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_7 & 0 & -a_8 & -a_9 & a_{10} & a_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{12} & a_{13} & -a_{14} & -a_{15} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}; \quad U = [u];$$

$$x_1 = F_y; \quad x_2 = y; \quad x_3 = y'; \quad x_4 = \varphi_2; \quad x_5 = \omega_2; \quad x_6 = \varphi_1; \quad x_7 = \omega_1;$$

$$a_1 = T_{рез}^{-1}; \quad a_2 = K_{пр} T_{рез}^{-1} K(y); \quad a_3 = K_{рез} T_{рез}^{-1} K_n; \quad a_4 = K_{yc} T_1^{-2}; \quad a_5 = T_1^{-2}, \quad a_6 = 2\xi T_1^{-2};$$

$$a_7 = -K_2 K(y) K_n^{-1}; \quad a_8 = a_{10} = a_{14} = c_{12} K(\Delta\varphi) J_2^{-1}; \quad a_9 = \beta_{12} K(\Delta\varphi) J_2^{-1};$$

$$a_{11} = \beta_{12} K(\Delta\varphi) J_2^{-1} - K_1 K_n^{-1}; \quad a_{12} = \frac{3}{2} \lambda_m K(u_{pc1}) K_{pc} K_l K_n J_1^{-1} - c_{12} K(\Delta\varphi) J_1^{-1};$$

$$a_{13} = \beta_{12} K(\Delta\varphi) J_1^{-1}; \quad a_{15} = \frac{3}{2} \lambda_m K(u_{pc1}) K_{pc} K_\omega \omega_1 J_1^{-1} + \beta_{12} K(\Delta\varphi) J_1^{-1};$$

$$b = \frac{3}{2} \lambda_m K(u_{pc1}) K_{pc} K_{рп} J_1^{-1}.$$

При этом коэффициенты матриц  $A$  и  $B$  являются функциями параметров линеаризации, то есть будут изменяться для различных областей фазового пространства.

В качестве минимизируемого функционала принимаем квадратичный критерий оптимальности, отвечающий требованиям динамической точности и минимума энергетических затрат на управление:

$$\min_u J = \int_0^\infty \left[ \sum_{i=1}^7 q_i x_i^2 + cu^2 \right] dt. \tag{3}$$

В соответствии с методикой, изложенной в [14], процедура синтеза с использованием метода «погружения» реализуется в виде следующей последовательности этапов:

1. Осуществляется решение задачи АК «в малом» для модели (2) и функционала (3). При этом решается матричное уравнение Риккати вида  $A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0$  и находится матрица коэффициентов обратных связей  $K_1 = R^{-1}B^T S$  для случая  $K(u_{pc1}) = K_{u1}$ ;  $K(\Delta\varphi) = K_{\Delta\varphi1}$ ;

$$K(y) = K_{y1}. \text{ Уравнение оптимального регулятора и возмущения будет иметь вид } u_1 = -\sum_{i=1}^7 k_i x_i.$$

2. Осуществляется решение задачи АК «в большом». Аналогично решается уравнение Риккати и находится матрица обратных связей  $K_2 = R^{-1}B^T S$  для случая  $K(u_{pc1}) = K_{u2}$ ;  $K(\Delta\varphi) = K_{\Delta\varphi2}$ ;

$$K(y) = K_{y2}. \text{ Уравнение оптимального регулятора и возмущения будет иметь вид } u_2 = -\sum_{i=1}^7 k'_i x_i.$$

3. Определяются новые допустимые управления и осуществляется сшивание «мгновенных значений» управляющих воздействий  $u_1$  и  $u_2$ , справедливых для различных областей фазового пространства. Представим уравнение регулятора «в большом» в виде  $u_2 = u_1 + \Delta u$ , где

$$\Delta u = -\sum_{i=1}^7 (k'_i - k_i) x_i = -\sum_{i=1}^7 \Delta k_i x_i. \text{ Поскольку коэффициенты регулятора } k_1, \dots, k_6 \text{ являются функциями переменных состояния, то управляющими воздействиями полагаем вариации параметров } \Delta k_1, \dots, \Delta k_6 \text{ [14]. Тогда управление «в большом» принимает вид}$$

$$u_2 = -\left( \sum_{i=1}^7 k_i x_i + \sum_{i=1}^7 \Delta k_i x_i \right). \tag{4}$$

В качестве минимизируемого функционала выбираем критерий обобщенной работы А. А. Красовского

$$\min_{\Delta k_1, \dots, \Delta k_6} J = \int_0^{\infty} \left[ \sum_{i=1}^7 q_i x_i^2 + \sum_{i=1}^7 c_i \Delta k_i^2 + \sum_{i=1}^7 \frac{x_i^2}{4c_i} \left( b \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 \right] dt, \quad (5)$$

где  $c_i = \Delta k_{i \max}^{-2}$  — весовые коэффициенты.

Осуществляем замыкание исходной системы, подставляя выражение для  $u_2$  в систему (2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 + a_3 x_5; \quad \dot{x}_2 = x_3; \quad \dot{x}_3 = a_4 x_1 - a_5 x_2 - a_6 x_3; \quad \dot{x}_4 = x_5; \\ \dot{x}_5 &= a_7 x_2 - a_8 x_4 - a_9 x_5 + a_{10} x_6 + a_{11} x_7; \quad \dot{x}_6 = x_7; \\ \dot{x}_7 &= -a_{12} x_4 + a_{13} x_5 - a_{14} x_6 - a_{15} x_7 - b \left( \sum_{i=1}^7 k_i x_i + \sum_{i=1}^7 \Delta k_i x_i \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Для системы уравнений (6) и минимизируемого функционала (5) функциональное уравнение Беллмана имеет вид

$$\begin{aligned} \min_{\Delta k_1, \dots, \Delta k_6} \left[ \sum_{i=1}^7 q_i x_i^2 + \sum_{i=1}^7 c_i \Delta k_i^2 + \sum_{i=1}^7 \frac{x_i^2}{4c_i} \left( b \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial V}{\partial x_1} (-a_1 x_1 - a_2 x_2 + a_3 x_5) + \right. \\ \left. + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial V}{\partial x_3} (a_4 x_1 - a_5 x_2 - a_6 x_3) + \frac{\partial V}{\partial x_4} x_5 + \frac{\partial V}{\partial x_5} (a_7 x_2 - a_8 x_4 - a_9 x_5 + a_{10} x_6 + a_{11} x_7) + \right. \\ \left. + \frac{\partial V}{\partial x_6} x_7 + \frac{\partial V}{\partial x_7} \left( -a_{12} x_4 + a_{13} x_5 - a_{14} x_6 - a_{15} x_7 - b \left( \sum_{i=1}^7 k_i x_i + \sum_{i=1}^7 \Delta k_i x_i \right) \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Реализуя процедуру минимизации по  $\Delta k_j$ , получаем:

$$\Delta k_j = \frac{b}{2c_j} \frac{\partial V}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, 7}. \quad (8)$$

В итоге, модифицированное уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^7 q_i x_i^2 + \frac{\partial V}{\partial x_1} (-a_1 x_1 - a_2 x_2 + a_3 x_5) + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_3 + \frac{\partial V}{\partial x_3} (a_4 x_1 - a_5 x_2 - a_6 x_3) + \\ + \frac{\partial V}{\partial x_4} x_5 + \frac{\partial V}{\partial x_5} (a_7 x_2 - a_8 x_4 - a_9 x_5 + a_{10} x_6 + a_{11} x_7) + \frac{\partial V}{\partial x_6} x_7 + \\ + \frac{\partial V}{\partial x_7} \left( -a_{12} x_4 + a_{13} x_5 - a_{14} x_6 - a_{15} x_7 - b \sum_{i=1}^7 k_i x_i \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение этого уравнения ищется в виде квадратичной формы:

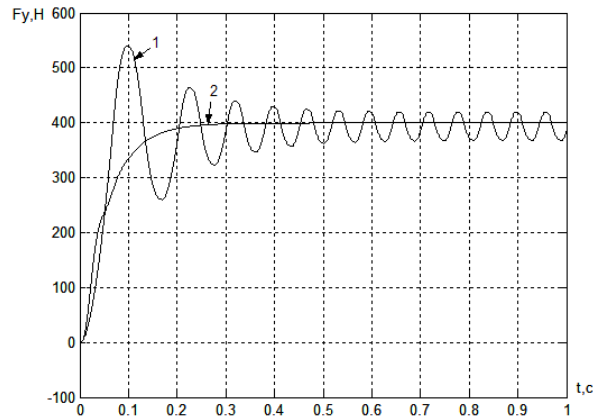
$$V(x_1, \dots, x_6) = \sum_{ij=1}^7 k_{ij} x_i x_j. \quad (10)$$

Коэффициенты соотношения (10) определяются из системы линейных алгебраических уравнений.

Закон субоптимального управления в общем виде определяется следующим соотношением

$$u_2 = - \left( \sum_{i=1}^7 k_i x_i + \sum_{i=1}^7 \frac{b}{2c_i} \frac{\partial V}{\partial x_i} x_i^2 \right) = - \left( \sum_{i=1}^7 k_i x_i + \sum_{i=1}^7 \frac{b}{c_i} x_i^2 \left( \sum_{j=1}^7 k_{ij} x_j \right) \right). \quad (11)$$

С целью исследования динамики замкнутой системы было проведено цифровое моделирование. Переходные процессы нормальной составляющей усилия резания представлены на рисунке.



Переходные процессы при использовании П-регулятора (кривая 1) и синтезованного нелинейного субоптимального регулятора (кривая 2)

Анализ графиков показывает, что качество переходного процесса в системе с синтезированным нелинейным регулятором существенно выше, чем с традиционным П-регулятором. Использование предложенного регулятора обеспечивает отсутствие режима автоколебаний и позволяет значительно сократить время переходного процесса.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кашмар К. М., Петерсон Э. Л. Общая теория погружения // Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета, под ред. Лейтмана Д. — М.: Наука, 1965 г.
2. Сейдж Э. П., Мелса Д. Л. Идентификация систем управления. — М.: Наука, 1974, — 248 с.
3. Сейдж Э. П., Ч. С. Уайт III. Оптимальное управление системами. — М.: Радио и Связь, 1982. — 392 с.
4. Булатов В. Н. Методы погружения в задачах оптимизации. — Новосибирск: Наука, 1977.
5. Georganas N., Chattejee A. An efficient storage scheme for optimal feedback synthesis using invariant imbedding. // Int J of Control. — 1974. — Vol. 20. — N 5. — P. 769—774.
6. Ю. Ту. Современная теория управления. — М.: Машиностроение. 1971. — 472с.
7. Беллман Р. Методы вычислений: Избранные главы // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 8. — С. 3—39. — № 9. — С. 3—51. — № 10. — С. 3—43.
8. Шапарев Н. К. Расчет автоматизированных систем управления металлообработкой. — К.: Лыбидь, 1992. — 272 с.
9. Design and analysis of output feedback force control in parallel turning / R. Sudhakara, R. Landers // Proc I MECH E Part I. Journal of Systems & Control Engineering. — 2004. — N 16. — P. 487—501.
10. Self-organizing fuzzy control of constant cutting force in turning [Электронный ресурс] / Ruyey—Jing Lian, Bai—Fu Lin, Jyun—Nan Huang: Электрон. журн. London, Springer, 2005. — Режим доступа: www. springer. com платный. — Загл. с экрана.
11. Петраков Ю. В. Теорія автоматичного управління в металообробці. — К.: ІЗМН, 1999. — 212 с.
12. Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука. 1988. — 256 с.
13. Пальтов И. П. Качество процессов и синтез корректирующих устройств в нелинейных автоматических системах. — М.: Наука, 1975.
14. Kudin V. F., Kolacny J. Synthesis of suboptimal nonlinear regulator by immersion method // J. Electrical engineering. — Bratislava, Slovakia. — 1998. — Vol. 49. — N. 1—2. — P 11—15.

**Кудин Валерий Федорович** — профессор, **Торопов Антон Валериевич** — аспирант.

Кафедра автоматизации электромеханических систем и электропривода, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»