УДК 517.9

В. М. Мізерний, к. т. н., доц.;

Т. А. Модебадзе, к. ф-м. н., доц.

АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ РЕЖИМІВ ТЕПЛООБМІННИХ ПРОЦЕСІВ У ДИСПЕРСНОМУ ШАРІ

Досліджується коректність математичних моделей динамічного режиму роботи конвеєрної машини неперервної дії з випалювання залізорудних котунів на основі аналізу процесу нелінійного теплообміну двофазних середовищ.

Вступ

Дана стаття є продовженням робіт [1, 2]. При нормальному функціонуванні конвеєрної машини, коли швидкість конвективного потоку газу і шару котунів, а також щільність і температура на вході постійні, процес випалювання залізорудних котунів знаходиться в стаціонарному режимі, що описаний у [2]. Однак, досить часто на практиці відбуваються порушення нормальної роботи (при пусках і зупинках — як запланованих, так і непередбачуваних; у випадках відсутності стабільності температури на вході у відповідну зону процесу і т. д.), що виводять процес зі стаціонарного режиму. У зв'язку з цим виникає потреба вивчення динаміки конвеєрної машини.

Постановка задачі та побудова математичної моделі

Розглянемо динамічний режим роботи конвеєрної машини, який у зоні випалювання опишемо за допомогою системи рівнянь [3, 4]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Theta}{\partial t} + V_y \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,y)\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2(x,y)\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right) = l_1 |T|^{\frac{2}{3}} (T-\Theta) + \alpha\left(\Theta^4 - T^4\right);\\
&\frac{\partial T}{\partial t} + W_x \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1(x,y)\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b_2(x,y)\frac{\partial T}{\partial y}\right) = l_1 |T|^{\frac{2}{3}} (\Theta - T) + \alpha\left(\Theta^4 - T^4\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

в області $\Omega = (0, h) \times (0, l)$. Тут, як відзначалося в [1], передбачається, що функції розподілу температури твердого тіла $\Theta(t, x, y)$ і газу $T(t, x, y)$, які характеризують стани шару котунів і повітря (газу), що продувається через шар, є неперервними в просторі і часі функціями; $0 \le x \le h$; $0 \le y \le l$; t — час процесу, $t \in [0, t_k] = S$; V_y, W_x, l, α — задані константи, а коефіцієнти a, $в$ — є заданими функціями, що належать просторові $L_\infty(\Omega \times S)$, та задовольняють умови $a_i(t,x,y) \ge \lambda_1 > 0$; $b_i(t,x,y) \ge \lambda_2 > 0$; $i = 1,2$.

Задано початкові умови

$$\Theta(0,x,y) = \Theta_0(x,y); \quad T(0,x,y) = T_0(x,y), \tag{2}$$

граничні умови першого роду [3, 5] на межі області

$$\begin{aligned}
&T(t,0,y) = \varphi_1(t,y); && \Theta(t,0,y) = \eta_1(t,y);\\
&T(t,0,y) = \varphi_2(t,y); && \Theta(t,0,y) = \eta_2(t,y);\\
&T(t,0,y) = \varphi_3(t,y); && \Theta(t,0,y) = \eta_3(t,y);\\
&T(t,0,y) = \varphi_4(t,y); && \Theta(t,0,y) = \eta_4(t,y),
\end{aligned} \tag{3}$$

а також обмеження на стан

$$| \, grad\Theta(t,x,y) \,| \leq k \text{ майже всюди в } Q = \Omega \times S,$$

де k — задана стала.

Необхідно довести можливість розв’язання такої початково-крайової задачі (1)—(3) і показати, в яких класах функцій існує розв’язок. Для цього зведемо задачу (1)—(3) до задачі з однорідними крайовими умовами

$$\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial t} + V_y \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(t,x,y)\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2(t,x,y)\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial x}\right) =$$

$$= l_1 \left|\overline{T}+\widehat{T}\right|^{\frac{2}{3}} \left(\left(\overline{T}+\widehat{T}\right) - \left(\overline{\Theta}+\widehat{\Theta}\right)\right) + \alpha\left(\left(\overline{T}+\widehat{T}\right)^4 - \left(\overline{\Theta}+\widehat{\Theta}\right)^4\right) -$$

$$-\left(\frac{\partial\widehat{\Theta}}{\partial t} + V_y \frac{\partial\widehat{\Theta}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1 \frac{\partial\widehat{\Theta}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2 \frac{\partial\widehat{\Theta}}{\partial x}\right)\right); \tag{4}$$

$$\frac{\partial\overline{T}}{\partial t} + W_x \frac{\partial\overline{T}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1(t,x,y)\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b_2(t,x,y)\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}\right) =$$

$$= l_1 \left|\overline{T}+\widehat{T}\right|^{\frac{2}{3}} \left(\left(\overline{\Theta}+\widehat{\Theta}\right) - \left(\overline{T}+\widehat{T}\right)\right) + \alpha\left(\left(\overline{\Theta}+\widehat{\Theta}\right)^4 - \left(\overline{T}+\widehat{T}\right)^4\right) -$$

$$-\left(\frac{\partial\widehat{T}}{\partial t} + W_x \frac{\partial\widehat{T}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1 \frac{\partial\widehat{T}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b_2 \frac{\partial\widehat{T}}{\partial y}\right)\right); \tag{5}$$

$$\overline{\Theta}(0,x,y) = \Theta_0(x,y); \quad \overline{T}(0,x,y) = T_0(x,y);$$

$$\overline{T}\Big|_{\partial\Omega\times S} = 0; \quad \overline{\Theta}\Big|_{\partial\Omega\times S} = 0, \tag{6}$$

де $\widehat{T}(t,x,y)$ і $\widehat{\Theta}(t,x,y)$ — регулярні функції, що задовольняють умови

$$\widehat{T}(0,x,y) = 0; \;\; \widehat{\Theta}(0,x,y) = 0;$$

$$\widehat{T}\Big|_{\partial\Omega\times S} = T\Big|_{\partial\Omega\times S}; \;\; \widehat{\Theta}\Big|_{\partial\Omega\times S} = \Theta\Big|_{\partial\Omega\times S}, \tag{7}$$

а функції $\overline{T}$ і $\overline{\Theta}$ такі, що $\overline{\Theta} = \Theta - \widehat{\Theta}$; $\overline{T} = T - \widehat{T}$.

Обмеження на стан буде мати такий вигляд:

$$\left| grad\left(\overline{\Theta}(t,x,y) + \widehat{\Theta}(t,x,y)\right)\right| \leq k, \quad \forall (x;y) \in \Omega, \quad t \in S. \tag{8}$$

Назвемо узагальненим розв’язком задачі (1)—(3) функцію $\overline{Y} = \left(\overline{\Theta}(t,x,y); \overline{T}(t,x,y)\right)$, що належить простору

$$X = \left[L_2\left(S; \overset{\circ \Gamma_2}{W_2^1}(\Omega) \cap L_p(\Omega)\right)\right]^2, \quad p \geq 5, \tag{9}$$

і задовольняє $\forall \mu = (\mu_1;\mu_2) \in X$ тотожності

$$\left\langle \frac{\partial \overline{y}}{\partial t}, \mu \right\rangle + \left\langle A(\overline{y}), \mu \right\rangle = \left\langle \overline{F}(\overline{y}), \mu \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \widehat{y}}{\partial t}, \mu \right\rangle - \left\langle A\left(\widehat{y}\right), \mu \right\rangle, \tag{10}$$

де оператори A і $\overline{F}$ визначаються формами

$$\left\langle A(\overline{y}),\mu\right\rangle = \int\limits_{Q}\left(V_y \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\mu_1 + W_x \frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\mu_2 \right) dxdydt +$$

$$+\int\limits_{Q}\left(a_1 \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial x}\frac{\partial\mu_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\frac{\partial\mu_1}{\partial y} + b_1 \frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\frac{\partial\mu_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial\overline{T}}{\partial y}\frac{\partial\mu_2}{\partial y} \right) dxdydt; \quad (11)$$

$$\left\langle \overline{F}(\overline{y}),\mu\right\rangle = -l_1\int\limits_{Q}\left(\left|\overline{T}+\hat{T}\right|^{\frac{2}{3}} \left(\left(\overline{T}+\hat{T}\right) - \left(\overline{\Theta}+\hat{\Theta}\right)\right)(\mu_2-\mu_1) \right) dxdydt -$$

$$-\alpha\int\limits_{Q}\left(\left[\left(\overline{T}+T\right)^4 - \left(\overline{\Theta}+\hat{\Theta}\right)^4 \right](\mu_2-\mu_1) \right) dxdydt; \quad (12)$$

$$\overline{F}(\overline{y}) = \begin{Bmatrix} \overline{f}_1\left(\overline{\Theta},\overline{T}\right) \\ -\overline{f}_1\left(\overline{\Theta},\overline{T}\right) \end{Bmatrix};$$

$$\overline{f}_1\left(\overline{\Theta},\overline{T}\right) = l_1\left|\overline{T}+\hat{T}\right|^{\frac{2}{3}} \left(\left(\overline{T}+\hat{T}\right) - \left(\overline{\Theta}+\hat{\Theta}\right) + \alpha\left(\overline{T}+\hat{T}\right)^4 - \left(\overline{\Theta}+\hat{\Theta}\right)^4 \right). \quad (13)$$

З існування інтегралів у (11), (12) випливає, що співвідношення (10) має сенс $\forall\overline{\Theta},\ \overline{T},\ \mu_1,\ \mu_2 \in L_2\left(S;\ \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \right) \cap L_p\left(S;\ L_p(\Omega)\right),\quad p \geq 5$. І оскільки (10) справедливо для будь-яких $\mu \in X$, то воно буде еквівалентним операторному рівнянню

$$\frac{\partial\overline{y}}{\partial t} + A(\overline{y}) = \overline{F}(\overline{y}) + f, \quad (14)$$

де $f = -\dfrac{\partial\hat{y}}{\partial t} - A\left(\hat{y}\right)$.

Необхідно вивчити властивості операторів A і $\overline{F}$.

Оператор $A: X_1 \to X_1^*$, обумовлений формою (11), є лінійним обмеженим монотонним коерцитивним оператором, що діє з $X_1 = \left[L_p\left(S; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \right) \right]^2$ у $X_1^* = \left[L_p\left(S; W_1^{-2}(\Omega)\right)\right]^2,\quad p \geq 2$, $1/p + 1/q = 1$.

Дійсно, лінійність оператора A випливає з (11). З огляду на те, що $a_i \geq \lambda_1 > 0$; $b_i \geq \lambda_2 > 0$; $i = 1,\ 2$, неважко показати обмеженість, монотонність і коерцитивність оператора *A*, аналогічно [2]. Оператор $\overline{F}$, визначений формою (12), діє з простору $X_2 = \left[L_p(Q)\right]^2,\quad p \geq 5$ в $X_1^* = \left[L_q(Q)\right]^2$.

Неважко довести, що

$$\left| f_1\left(\overline{\Theta},\overline{T}\right)\right| \leq \begin{cases} \overline{m}_1\left(\left|\overline{T}+\hat{T}\right|^4 + \left|\overline{\Theta}+\hat{\Theta}\right|^4 \right), & \left|\overline{T}+\hat{T}\right| \geq 1; \\ \overline{m}_2\left(\left|\overline{T}+\hat{T}\right|^{\frac{8}{5}} + \left|\overline{\Theta}+\hat{\Theta}\right|^4 \right), & \left|\overline{T}+\hat{T}\right| \geq 1, \end{cases} \quad (15)$$

де $\overline{m}_1$ і $\overline{m}_2$ — константи.

Користуючись міркуваннями, аналогічними викладеним у [2], також можна показати, що $\overline{F}$ переводить обмежені безлічі простору $X_2 = \left[L_p(Q)\right]^2$ в обмежені безлічі простору

$X_2^* = \left[L_q(Q) \right]^2$ і, як оператор з X_2 в X_2^*, є демінеперервним.

Перепишемо (14) у вигляді

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + \mathbf{A}(\bar{y}) = f, \quad f \in X^*, \tag{16}$$

де $\mathbf{A}(\bar{y}) = A(\bar{y}) - \bar{F}(\bar{y})$.

Відмітимо, що оператор $\mathbf{A} : X \to X^*$, де $X = \left[L_2\left(S; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \right) \cap L_p\left(S; L_p(\Omega) \right) \right]^2$, $p \geq 5$, $X^* = \left[L_2\left(S; W_2^{-1}(\Omega) \right) \cap L_q\left(S; L_q(\Omega) \right) \right]^2$, $1/p + 1/q = 1$, породжений початково-крайовою задачею (4)—(6), є:

а) обмеженим;

б) коерцитивним, тобто $\lim\limits_{\|\bar{y}\|_X \to \infty} \dfrac{\left\langle \mathbf{A}(\bar{y}), \bar{y} \right\rangle}{\|\bar{y}\|_X} = +\infty$;

в) оператором з напівобмеженою варіацією;

г) має властивість (М).

Доведення пунктів а), б) і г) проводиться аналогічно [1, 2]. Покажемо лише, що $\mathbf{A}$ — оператор з напівобмеженою варіацією. З визначення оператора $\mathbf{A}$ випливає

$$\left\langle \mathbf{A}(\bar{y}_1) - \mathbf{A}(\bar{y}_2), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle_X =$$
$$= \left\langle A(\bar{y}_1) - A(\bar{y}_2), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle_{X_1} - \left\langle \bar{F}(\bar{y}_1) - \bar{F}(\bar{y}_2), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle_{X_2}. \tag{17}$$

З огляду на властивості оператора А, отримаємо

$$\begin{aligned} &\left\langle A(\bar{y}_1) - A(\bar{y}_2), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle = \left\langle A(\bar{y}_1 - \bar{y}_2), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle \geq \\ &\geq \frac{V_y}{2} \int\limits_0^{t_k} \int\limits_0^{h} \left(\bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_2 \right)^2 \Big|_{y=l} dxdt + \frac{W_x}{2} \int\limits_0^{t_k} \int\limits_0^{l} \left(\bar{T}_1 - \bar{T}_2 \right)^2 \Big|_{x=h} dxdt + \\ &+ m_1 \int\limits_Q \left[\left(\frac{\partial\left(\bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_2 \right)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\left(\bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_2 \right)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\left(\bar{T}_1 - \bar{T}_2 \right)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\left(\bar{T}_1 - \bar{T}_2 \right)}{\partial y} \right)^2 \right] dxdydt + \\ &+ m_2 \left(\int\limits_0^{t_k} \int\limits_0^{h} \left(\bar{\Theta}_1 - \bar{\Theta}_2 \right)^2 \Big|_{y=l} dxdt + \int\limits_0^{t_k} \int\limits_0^{l} \left(\bar{T}_1 - \bar{T}_2 \right)^2 \Big|_{x=h} dydt \right) \geq 0, \end{aligned} \tag{18}$$

де $m_1 = \min\left\{ \inf\limits_{\Omega} a_i(t, x, y);\ \inf\limits_{\Omega} b_i(t, x, y),\ i = 1, 2 \right\}$, $m_2 = \min\left\{ \alpha_1, \alpha_2 \right\}$. Для другого доданку (17) справедлива оцінка

$$-\left\langle \bar{F}(\bar{y}_1) - \bar{F}(\bar{y}_2), \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \right\rangle \geq -C\left(R; \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|'_{\left[L_p(Q) \right]^2} \right), \tag{19}$$

де $C\left(R; \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|'_{\left[L_p(Q) \right]^2} \right)$ визначається аналогічно [2]. Покажемо, що норма $\|\cdot\|_{\left[L_p(\Omega) \right]^2}$ компактна відносно $\|\cdot\|_W$, де $X = \left(L_2\left(S; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \right) \cap L_p\left(S; L_p(\Omega) \right) \right)^2$, $p \geq 5$. Розглянемо $W = \left\{ \bar{y} \in X \,\middle|\, \bar{y}' \in X^* \right\}$. Тоді, враховуючи справедливість леми про компактність *W*, компактно вкладене в $L_p(Q)$, $Q = \Omega \times S$, $p \geq 5$ і, отже, $\|\cdot\|_{\left[L_p(\Omega) \right]^2}$ компактна відносно $\|\cdot\|_W$.

З властивостей а) – г) випливає справедливість такого твердження:

якщо $t_k < \infty$, коефіцієнти початково-крайової задачі (4)—(6) задовольняють умови $a_i(t,x,y) \ge \lambda_1 > 0$; $b_i(t,x,y) \ge \lambda_2 > 0$; $a_i, b_i \in L_\infty(\Omega \times S)$, початкові умови належать $L_2(\Omega)$, то операторне рівняння (16) має розв'язок $\forall f \in X^*$, а задача (4)—(6) має розв'язок

$$\bar{y} \in X = \left[L_2\left(S; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \right) \cap L_p\left(S; L_p(\Omega) \right) \right]^2, \ p \ge 5. \tag{20}$$

Далі розглянемо початково-крайову задачу виду

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Theta}{\partial t} + V_y \frac{\partial\Theta}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(t,x,y)\frac{\partial\Theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2(t,x,y)\frac{\partial\Theta}{\partial y} \right) = l_1 \mid T |^{\frac{2}{3}} \left(T - \Theta \right) + \alpha\left(T^4 - \Theta^4 \right); \\ &\frac{\partial T}{\partial t} + W_x \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1(t,x,y)\frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b_2(t,x,y)\frac{\partial T}{\partial y} \right) = l_1 \mid T |^{\frac{2}{3}} \left(\Theta - T \right) + \alpha\left(\Theta^4 - T^4 \right) \end{aligned} \tag{21}$$

з початковими умовами

$$\Theta(0,\ x,\ y) = \Theta_0(x,\ y);\ T(0,\ x,\ y) = T_0(x,\ y) \tag{22}$$

і крайовими умовами на межі області

$$\begin{gathered} T\big|_{\Gamma_1 \times S} = \varphi_1(t,\ y); \\ \left(K_1 \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_1\left(T - T_{\text{ср}} \right) \right)\Big|_{\gamma_1 \times S} = 0; \\ \Theta\Big|_{\Gamma_2 \times S} = \eta_3(t, x); \\ \left(K_2 \frac{\partial \Theta}{\partial n} + \alpha_2\left(\Theta - T_{cp} \right) \right)\Big|_{\gamma_2 \times S} = 0; \end{gathered} \tag{23}$$

де $\gamma_1 = \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$; $\gamma_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, а Γ_i такі, що $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \partial\Omega$; $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ для $i \ne j$; $i,\ j = 1, 2, 3, 4$.

Перетворимо задачу (21)—(23) до вигляду (4) з початковими умовами (5) і крайовими умовами

$$\begin{aligned} &\bar{T}\Big|_{\Gamma_1 \times S} = 0; \quad \left(K_1 \frac{\partial\left(\bar{T} + \hat{T} \right)}{\partial n} + \alpha_1\left(\bar{T} + \hat{T} - T_{\text{ср}} \right) \right)\Big|_{\gamma_1 \times S} = 0; \\ &\bar{\Theta}\Big|_{\Gamma_2 \times S} = 0; \quad \left(K_2 \frac{\partial\left(\bar{\Theta} + \hat{\Theta} \right)}{\partial n} + \alpha_2\left(\bar{\Theta} + \hat{\Theta} - T_{\text{ср}} \right) \right)\Big|_{\gamma_2 \times S} = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

де $\hat{T}(t,x,y)$ і $\hat{\Theta}(t,x,y)$ — достатньо регулярні функції, що задовольняють умови

$$\begin{gathered} \hat{T}\Big|_{\Gamma_1 \times S} = T\Big|_{\Gamma_1 \times S}; \quad \hat{\Theta}\Big|_{\Gamma_2 \times S} = \Theta\Big|_{\Gamma_2 \times S}; \\ \hat{T}(0,x,y) = 0; \quad \hat{\Theta}(0,x,y) = 0, \end{gathered} \tag{25}$$

а функції $\bar{T}$ і $\bar{\Theta}$ такі, що $\bar{T} = T - \hat{T}$; $\bar{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$.

Назвемо узагальненим розв'язком задачі (4), (5), (24) функцію

$$\bar{Y} = \left(\bar{\Theta}(t,x,y);\ \bar{T}(t,x,y) \right) \text{ на } X = L_2\left(S; \overset{\circ\Gamma_2}{W}{}_2^1(\Omega) \right) \cap L_p(Q) \times L_2\left(S; \overset{\circ\Gamma_1}{W}{}_2^1(\Omega) \right) \cap L_p(Q), \quad p \ge 5,$$

що задовольняє $\forall \mu \in X,\ \mu = (\mu_1; \mu_2)$, тотожності

$$\left\langle \frac{\partial \overline{y}}{\partial t}, \mu \right\rangle + \left\langle A(\overline{y}), \mu \right\rangle = \left\langle \overline{F}(\overline{y}), \mu \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \hat{y}}{\partial t}, \mu \right\rangle + \int_0^{t_k}\int_0^{l} \left(a_2 \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial n} - \alpha_2 T_{\text{ср}} \right) \mu_1(x, y)\Big|_{y=l}\, dxdt + \\ + \int_0^{t_k}\int_0^{l} \left(b_1 \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} - \alpha_1 T_{\text{ср}} \right) \mu_2(x, y)\Big|_{x=h}\, dydt, \tag{26}$$

де оператори A і $\overline{F}$ визначаються формами

$$\left\langle A(\overline{y}), \mu \right\rangle = \int_Q \left(V_y \frac{\overline{\Theta}}{\partial y} \mu_1 W_x \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \mu_2 \right) dxdydt + \int_Q \left(a_1 \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial y} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} + \right. \\ \left. + b_1 \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \frac{\partial \mu_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} \frac{\partial \mu_2}{\partial y} \right) dxdydt + \int_0^{t_k}\int_0^{l} \alpha_2 \overline{\Theta}(t, x, y) \mu_1(t, x, y)\Big|_{y=l}\, dxdt + \\ + \int_0^{t_k}\int_0^{l} \alpha_1 \overline{T}(t, x, y) \mu_2(t, x, y)\Big|_{x=h}\, dxdt; \tag{27}$$

$$\left\langle \overline{F}(\overline{y}), \mu \right\rangle = -l_1 \int_Q \left| \overline{T} + \hat{T} \right|^{\frac{2}{3}} \left(\left(\overline{T} + \hat{T} \right) - \left(\overline{\Theta} + \hat{\Theta} \right) \right) (\mu_2 - \mu_1)\, dxdydt - \\ - \alpha \int_Q \left(\left(\overline{T} + \hat{T} \right)^4 - \left(\overline{\Theta} - \hat{\Theta} \right)^4 \right) (\mu_2 - \mu_1)\, dxdydt; \tag{28}$$

З існування інтегралів (27) і (28) випливає, що співвідношення (26) має сенс $\forall\ \overline{\Theta}, \overline{T}, \mu_1, \mu_2$, що належать просторові

$$X = L_2\left(S; \overset{\circ \Gamma_2}{W_2^1}(\Omega) \right) \cap L_p\left(S; L_p(\Omega) \right) \times L_2\left(S; \overset{\circ \Gamma_1}{W_2^1}(\Omega) \right) \cap L_p\left(S; L_p(\Omega) \right), \quad p \geq 5. \tag{29}$$

І оскільки (26) справедливо для будь-яких $\mu \in X$, то воно еквівалентно операторному рівнянню

$$\frac{\partial \overline{y}}{\partial t} + A(\overline{y}) = \overline{F}(\overline{y}) + f, \tag{30}$$

$$\left\langle f, \mu \right\rangle = -\left\langle \hat{y}', \mu \right\rangle - \left\langle A\left(\hat{y}\right), \mu \right\rangle + \int_0^{t_k}\int_0^{l} \left(a_2 \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial n} - \alpha_2 T_{\text{ср}} \right) \mu_1(x, y)\Big|_{y=l}\, dxdt + \\ + \int_0^{t_k}\int_0^{l} \left(b_1 \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} - \alpha_1 T_{\text{ср}} \right) \mu_2(x, y)\Big|_{x=h}\, dydt.$$

Оператор A – лінійний, що відображає простір

$$X_1 = L_2\left(S; \overset{\circ \Gamma_2}{W_2^1}(\Omega) \right) \times L_2\left(S; \overset{\circ \Gamma_1}{W_2^1}(\Omega) \right) \text{ в } X_1^*. \tag{31}$$

Аналогічно попередньому випадку, неважко показати його обмеженість, коерцитивність і те, що оператор $\overline{F}$, визначений формою (28), що діє з $X_2 = \left[L_p(Q) \right]^2$, $p \geq 5$, у $X_2^* = \left[L_p(Q) \right]^2$, $1/p + 1/q = 1$ є обмеженим і демінеперервним.

Перепишемо (30) у вигляді

$$\frac{\partial \overline{y}}{\partial t} + \mathbf{A}\left(\overline{y}\right) = f, \quad f \in X^*, \tag{32}$$

де $\mathbf{A}\left(\overline{y}\right) = A\left(\overline{y}\right) - \overline{F}\left(\overline{y}\right)$.

Зазначимо, що оператор $\mathbf{A}\colon X \to X^*$, де

$$\overline{y} \in X = L_2\left(S; \overset{\circ \Gamma_2}{W_2^1}(\Omega)\right) \cap L_p(Q) \times L_2\left(S; \overset{\circ \Gamma_1}{W_2^1}(\Omega)\right) \cap L_p(Q), \;\; p \geq 5, \tag{33}$$

породжений початково-крайовою задачею (4), (5), (24), є обмеженням, коерцитивним оператором з напівобмеженою варіацією, а також має властивість (*M*).

При цьому має місце таке твердження: якщо $t_k < \infty$, коефіцієнти початково-крайової задачі (21)—(23) задовольняють умови

$$\begin{aligned} &a_i(t, x, y) \geq \lambda_1 > 0; \quad b_i(t, x, y) \geq \lambda_2 > 0; \\ &a_i, b_i \in L_\infty(\Omega \times S), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{34}$$

початкові умови належать просторові $L_2(\Omega)$, то операторне рівняння (32) має розв'язок $\forall\, f \in X^*$, а задача (21)—(23) для $\overline{T}$ і $\overline{\Theta}$ таких, що справедливо (24), має розв'язок

$$\overline{y} \in X = L_2\left(S; \overset{\circ \Gamma_2}{W_2^1}(\Omega)\right) \cap L_p\left(S; L_p(\Omega)\right) \times L_2\left(S; \overset{\circ \Gamma_1}{W_2^1}(\Omega)\right) \cap L_p\left(S; L_p(\Omega)\right), \;\; p \geq 5. \tag{35}$$

Висновки

На жаль, перевірити адекватність запропонованої математичної моделі відповідному об'єктові у всіх точках дослідження дуже складно з технічних причин. Але саме ця обставина і додає їй значення в питаннях ідентифікації теплового стану дисперсного шару, тому що з'являється можливість оцінювання температури в будь-якій точці.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мізерний В. М., Модебадзе Т. А. Моделювання процесу нелінійного теплообміну двофазних середовищ // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2006. — № 3. — С. 61—75.
2. Мізерний В. М., Модебадзе Т. А. Аналіз стаціонарних режимів теплообмінних процесів у дисперсному шарі // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2006. — № 4. — С. 82—102.
3. Лионс Ж. Л. Редукция к задаче меньшей размерности в проблеме оптимального контроля // Дифференциальные уравнения с частными производными. – Новосибирск: Наука, 1980. — С. 176—181.
4. Лионс Ж. Л. Об оптимальном управлении распределенными системами // УМН. — 1973. — Т. 28. — № 4 — С. 15—46.
5. Лионс Ж. Л. Об оптимальном управлении неустойчивыми распределенными системами // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. — Новосибирск, 1983. — С. 7—19.

Рекомендована кафедрою інтеграції навчання з виробництвом

Надійшла до редакції 22.09.06
Рекомендована до друку 24.10.06

Мізерний Віктор Миколайович — завідувач кафедри інтеграції навчання з виробництвом.
Вінницький національний технічний університет;
Модебадзе Тимур Андрійович — доцент кафедри прикладної математики.
Кутаїський технічний університет