

АВТОМАТИКА ТА ІНФОРМАЦІЙНО-ВІМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

УДК 621.383.9

Ю. Г. Ведміцький;

В. В. Кухарчук, д. т. н., проф.

УЗАГАЛЬНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОСТОРОВО-ОПТИЧНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ ТА МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ В ЗАДАЧАХ АНАЛІЗУ І СИНТЕЗУ

Розроблено узагальнену математичну модель просторово-оптичного перетворення кутової швидкості та моменту інерції тіл обертання. Показано, що запропонована модель може бути використана для розв'язання задач аналізу та синтезу профілів чутливих елементів перетворювачів.

Вступ

Для вимірювання кутової швидкості та моменту інерції тіл обертання на сьогодні перспективною є розробка оптико-електронних вимірювальних перетворювачів, основаних на методі просторової модуляції світлового випромінювання оптичного діапазону.

Відомо, що просторово-оптичний модулятор (рис. 1) діє за принципом відбиття світлового лазерного променя видимого діапазону від дзеркальної торцевої частини диска з деякою складною формою (наприклад, формою Архімедової спіралі), яка обертається з кутовою швидкістю досліджуваного об'єкта. Внаслідок цього процесу відбувається перетворення обертальної форми руху (об'єкта дослідження) в поступальну форму руху (енергетичного центра плями розсіювання лазерного променя).

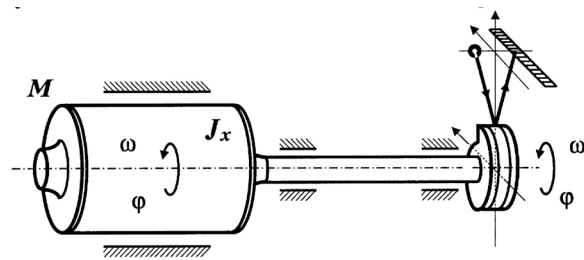


Рис. 1. Просторово-оптичний модулятор

Це створює можливість вимірювання параметрів обертального руху (кута повороту, кутової швидкості, моменту інерції) як в статичному, так і в динамічному режимах роботи із забезпеченням при цьому необхідної точності, високої швидкодії в широкому діапазоні зміни вимірюваних величин (на відміну від досить поширених оптико-електронних вимірювальних перетворювачів частотно-часового перетворення і просторового кодування, які попри низку переваг мають суттєвий недолік, пов'язаний з обмеженнями їх дієздатності в динамічному режимі роботи).

Наразі важливою задачею є створення узагальненої математичної моделі процесу просторово-оптичного перетворення, яка дозволила б водночас не тільки проводити аналіз модуляції на вже існуючих сімействах кривих, але й що вперше вийти на розв'язання задачі синтезу – створення форми профілю чутливого елемента з наперед визначеною функцією перетворення.

Побудова такої узагальненої математичної моделі та застосування її для розв'язання вище означених задач аналізу та синтезу і є метою даної роботи.

Теорема про кут падіння

Насамперед сформулюємо і доведемо теорему, яку покладемо в основу узагальненої математичної моделі процесу просторово-оптичної модуляції з довільною формою диска модулятора.

Теорема про кут падіння. *Якщо для заданої плоскої кривої існує така полярна система координат, в якій ця крива може бути описана аналітично через диференційовану функцію $\rho = \rho(\varphi)$,*

то для довільної точки цієї кривої тангенс кута між радіальним ортом системи та вектором нормалі (кут падіння) буде обернено пропорційним значенню полярного радіуса в цій точці і прямо пропорційним значенню його похідної.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi}. \quad (1)$$

Для доведення цієї теореми залучимо апарат диференціальної геометрії [1, 2].

Як видно з рисунка 2 кут β між кривою B , що побудована за умови сталості полярного радіуса і являє собою коло, та заданою кривою A , в точці їх перетину M є кутом між дотичними, а значить і їх нормальми, або інакше — означеними в теоремі векторами \vec{n} і \vec{i}_ρ ; тобто

$$\alpha = \beta. \quad (2)$$

З іншого боку, оскільки за зміни полярної координати φ на деякий малий кут $d\varphi$ точка M перейде в точку M' і полярний радіус $\rho(\varphi)$ зміниться на $d\rho$, то за умови граничного переходу до безмежно малого приросту полярного кута φ тангенс кута β буде дорівнювати

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d\rho}{dl}. \quad (3)$$

Враховавши, що $dl = \rho d\varphi$, а також (2) та (3), остаточно отримаємо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi}, \text{ що і потрібно було довести.}$$

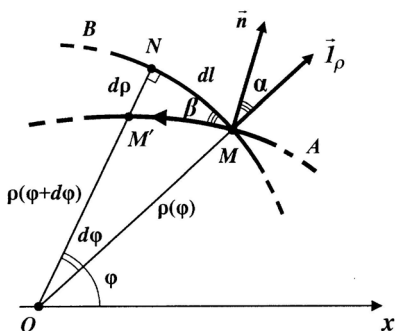


Рис. 2. До питання про доведення теореми

Узагальнена математична модель

Для побудови математичної моделі задамо три координатні системи.

Але, перш за все, внесемо деякі зміни в систему модулятора, увівши два обмеження, перше з яких суттєво не вплине на результати математичного моделювання і сама модель легко може бути трансформована в разі усунення цього обмеження, а друге — взагалі не внесе спотворення в математичну модель, оскільки є еквівалентним.

Суть цих обмежень полягає в тому, що, по-перше, промінь від джерела випромінювання має падати на торцеву поверхню строго перпендикулярно до головної осі, а не під кутом дещо меншим від $\pi/2$, як це має місце, а саме джерело будемо вважати точковим. Це дозволить перейти від тривимірних до двовимірних координатних систем.

По-друге, нерухому систему координат, в якій обертається диск модулятора з кутовою швидкістю, замінимо на систему з нерухомим диском, що знаходиться в системі координат, яка обертається з тією ж кутовою швидкістю, але в протилежному напрямку. Це дасть можливість суттєво спростити математичні вирази, оскільки разом з координатною системою навколо нерухомого диска будуть обертатися і випромінювач світла, і координатна вісь перетворювача положення.

Кінцеву швидкість світла в просторі враховувати не будемо.

Щодо координатних систем, то перша координатна система є полярною. За допомогою цієї системи подамо форму нерухомого диска модулятора

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \varphi \in [0; 2\pi],$$

де ρ — відстань від центра диска до його торця, φ — повний кут повороту.

Друга координатна система — це декартова система координат $x'Oy'$ (рис. 3), початок якої має збігатися з центром диска.

Ця система координат, обертається вищезазначеним чином з кутовою швидкістю, яка в загальному випадку є функцією часу $\omega(t)$. На осі Oy' даної координатної системи на відстані L від початку координат знаходиться точкове джерело випромінювання (точка O). Вздовж цієї осі

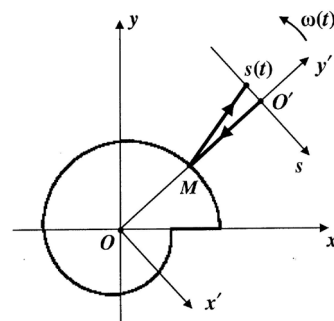


Рис. 3. Координатні системи, в яких побудована узагальнена математична модель

рухається точка M , повторюючи контур диска модулятора.

Опишемо це параметрично в полярних координатах

$$\begin{cases} \rho = \rho(t); \\ \varphi = \varphi(t) = \int_0^t w(t) dt + \text{const.} \end{cases} \quad (4)$$

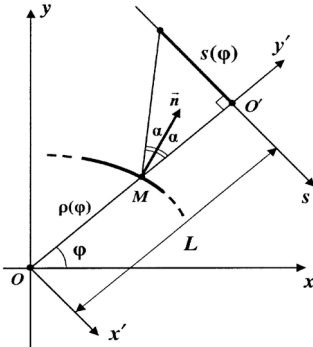


Рис. 4. До визначення відстані лінійного переміщення

Третя координатна система — це перпендикулярна до осі Oy' вісь Os лінійного переміщення віддзеркаленого світлового променя. Початок цієї системи знаходиться в точці джерела випромінювання, а сама вісь обертається навколо тіла з кутовою швидкістю $\omega(t)$, перебуваючи, таким чином, нерухомо відносно координатної системи $x'Oy'$.

Отже, кут α — це кут падіння світлового проміння на торцеву поверхню диска модулятора. Оскільки відповідно до закону віддзеркалення кут відбиття дорівнює куту падіння, то відстань лінійного переміщення світлового променя вздовж координатної осі Os перетворювача положення легко визначити з прямокутного трикутника (рис. 4), врахувавши, що

$$|OM| = L - \rho(\varphi).$$

Тоді

$$s(\varphi) = [L - \rho(\varphi)] \operatorname{tg}(2\alpha). \quad (5)$$

Скориставшись вищедоведеною теоремою про кут падіння, а також врахувавши періодичність процесу перетворення, після математичних спрощень отримаємо функцію перетворення кутового повороту у відстань прямолінійного переміщення

$$s(\varphi) = s(\varphi \pm 2\pi k) = 2(L - \rho) \frac{\rho \dot{\rho}}{\rho^2 - \dot{\rho}^2}, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

де $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi}$.

Отже, враховуючи рівняння (4) та (6), узагальненою математичною моделлю просторово-оптичного модулятора перетворювача кутової швидкості буде система рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(t) = \int_0^t \omega(t) dt - 2\pi k + \text{const}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \\ s[\varphi(t)] = 2 \{L - \rho[\varphi(t)]\} \frac{\rho[\varphi(t)] \dot{\rho}[\varphi(t)]}{\rho[\varphi(t)]^2 - \dot{\rho}[\varphi(t)]^2}, \quad \varphi \in [0; 2\pi]; \\ v_s(t) = \frac{ds[\varphi(t)]}{dt}. \end{cases} \quad (7)$$

Долучивши до системи рівнянь (7) диференціальне рівняння руху системи самого інерційного перетворювача, а саме —

$$J_x \frac{d\omega(t)}{dt} + \beta\omega(t) = M_p(t);$$

$$J_x \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + \beta \frac{d\omega(t)}{dt} + \alpha\omega(t) = \frac{dM_p(t)}{dt}$$

або
$$J_x \frac{d^3\omega(t)}{dt^3} + \beta \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + c \left(1 + \frac{J_x}{J_{3p}}\right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{\beta c}{J_{3p}} \omega(t) = \frac{c}{J_{3p}} M_p(t) + \frac{d^2 M_p(t)}{dt^2}$$

для існуючих перетворювачів 1-го, 2-го порядків [3] та можливого перетворювача 3-го порядку

відповідно, отримуємо математичну модель просторово-оптичного модулятора перетворювача для моменту інерції.

Задача аналізу

Застосуємо отриману узагальнену математичну модель для аналізу процесу просторово-оптичної модуляції на відомих видах кривих [4, 5].

Результати роботи занесемо до таблиць 1, 2.

Таблиця 1

Аналіз процесу просторово-оптичної модуляції на відомих видах кривих

№	Назва, рівняння спіралі $\rho(\varphi)$	Графік спіралі $\rho(\varphi)$	Функція перетворення $s(\varphi)$
1	<p>Архімедова спіраль</p> $\rho(\varphi) = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{2\pi} \varphi + R_{\min}$ <p>де $R_{\min} = 0,05$ м, $R_{\max} = 0,1$ м, $L = 0,2$ м.</p>		
2	<p>Спіраль Галілея</p> $\rho(\varphi) = \frac{R_{\min} \left(\sqrt{\frac{R_{\max}}{R_{\min}}} - 1 \right)^2}{4\pi^2} \left[\varphi + \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{R_{\max}}{R_{\min}}} - 1} \right]^2$		
3	<p>Спіраль Фермі</p> $\rho(\varphi) = \sqrt{\frac{R_{\max}^2 - R_{\min}^2}{2\pi} \varphi + R_{\min}^2}$		
4	<p>Логарифмічна спіраль</p> $\rho(\varphi) = R_{\min} e^{\ln\left(\frac{R_{\max}}{R_{\min}}\right) \frac{\varphi}{2\pi}}$		

Так, в таблиці 1 наведено розрахунок графічних залежностей перетворення кута повороту φ в

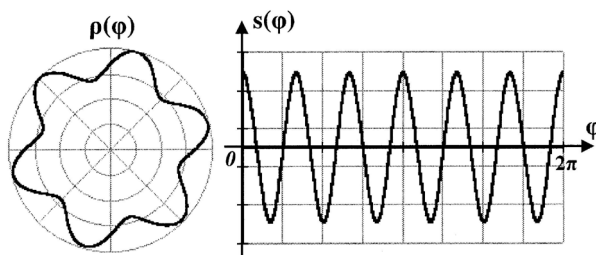


Рис. 5. Профіль чутливого елемента з наближеною до гармонічної функцією перетворення

лінійну відстань s шляхом модуляції на деяких відомих чутливих елементах з спіралеподібною формою профілю, оскільки останні, маючи переваги [6], використовуються під час розробки перетворювачів кутової швидкості та моменту інерції.

Як видно з рисунків таблиці 1 за критерієм лінійності перетворення найперспективнішим є чутливий елемент з профілем спіралі Галілея. Проте його недоліком є порівняно невисока

чутливість. За цим критерієм одноосібно стоїть чутливий елемент з профілем спіралі Фермі. Поєднує ж в собі переваги двох попередніх кривих Архімедова спіраль, дещо поступаючись кожній окремо.

Аналіз інших кривих показує, що серед неперервних ліній найпомітнішим є сімейство ліній виду

$$\rho(\varphi) = a \sin(k\varphi) + b, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

де a, b — деякі сталі, оскільки за умови

$$a \ll b \quad (9)$$

функція перетворення $s(\varphi)$ для них наближається до гармонічної функції (рис. 5), що є суттєвою перевагою, тому що в цьому випадку, по-перше, в стаціонарному режимі роботи спектральне наповнення вищими гармоніками вихідного сигналу буде мінімальним (рис. 6а), а, по-друге, в динамічному режимі — просторово-оптична модуляція являтиме собою частотну модуляцію (рис. 6б).

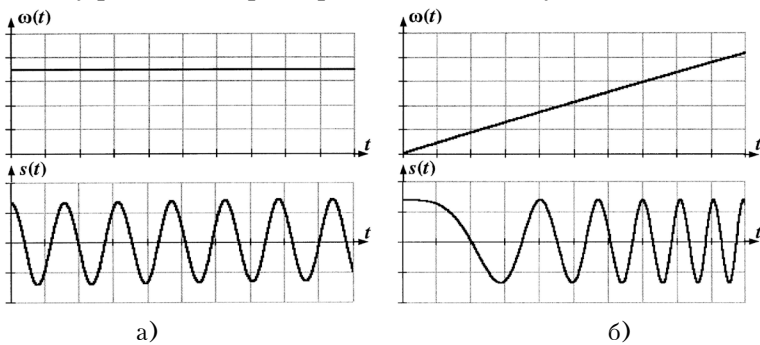


Рис. 6. До питання про переваги гармонічної функції перетворення

В обох випадках на сьогодні існує потужна теоретична, методична і технічна база обробки таких сигналів.

В таблиці 2 наведені результати дослідження означених кривих для деяких різних значень k за різного ступеня виконання умови (9).

Таблиця 2

Аналіз процесу просторово-оптичної модуляції на відомих видах кривих

№	Назва, рівняння кривої $\rho(\varphi)$	Графік кривої $\rho(\varphi)$	Функція перетворення $s(\varphi)$
1	<p>Равлик Паскаля</p> <p>$k = 1;$</p> $\rho(\varphi) = \frac{1}{2}(R_{\max} - R_{\min})\sin(\varphi) + \frac{1}{2}(R_{\max} + R_{\min}),$ <p>де $R_{\min} = 0,02$ м, $R_{\max} = 0,1$ м, $L = 0,14$ м</p>		
2	<p>$k = 1;$</p> $\rho(\varphi) = \frac{1}{2}(R_{\max} - R_{\min})\sin(\varphi) + \frac{1}{2}(R_{\max} + R_{\min}),$ <p>де $R_{\min} = 0,07$ м, $R_{\max} = 0,1$ м, $L = 0,3$ м</p>		
3	<p>$k = 2;$</p> $\rho(\varphi) = \frac{1}{2}(R_{\max} - R_{\min})\sin(2\varphi) + \frac{1}{2}(R_{\max} + R_{\min}),$ <p>де $R_{\min} = 0,04$ м, $R_{\max} = 0,1$ м, $L = 0,11$ м</p>		

№	Назва, рівняння кривої $\rho(\varphi)$	Графік кривої $\rho(\varphi)$	Функція перетворення $s(\varphi)$
4	$k = 2;$ $\rho(\varphi) = \frac{1}{2}(R_{\max} - R_{\min})\sin(2\varphi) + \frac{1}{2}(R_{\max} + R_{\min}),$ де $R_{\min} = 0,08$ м, $R_{\max} = 0,1$ м, $L = 0,25$ м		
5	$k = 3;$ $\rho(\varphi) = \frac{1}{2}(R_{\max} - R_{\min})\sin(3\varphi) + \frac{1}{2}(R_{\max} + R_{\min}),$ де $R_{\min} = 0,06$ м, $R_{\max} = 0,1$ м, $L = 0,11$ м		
6	$k = 3;$ $\rho(\varphi) = \frac{1}{2}(R_{\max} - R_{\min})\sin(3\varphi) + \frac{1}{2}(R_{\max} + R_{\min}),$ де $R_{\min} = 0,085$ м, $R_{\max} = 0,1$ м, $L = 0,25$ м		

Сказане можна віднести і до сімейства кривих

$$\rho(\varphi) = \frac{a}{b \cdot \sin(k\varphi) + c}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

де a, b, c — деякі сталі.

Розроблена узагальнена математична модель дозволяє аналізувати не тільки сімейства гладких ліній, але й кусково-гладкі криві, зрозуміло, з відомими обмеженнями.

Задача синтезу

Розв'язок зворотної задачі — визначення кривої $\rho(\varphi)$, просторово-оптична модуляція на якій буде являти собою функцію перетворення $s(\varphi)$ з наперед визначеними властивостями, проведемо для гармонічного та лінійного перетворень, враховуючи їх важливість.

Для цього подамо рівняння (6) в неявній формі

$$2\rho\dot{\rho}(L - \rho) - s(\rho^2 - \dot{\rho}^2) = 0, \quad (11)$$

де $\rho = \rho(\varphi)$ — невідома шукана функція, що задовольняє деяку початкову умову $\rho_0 = \rho(0)$ (задача Коші), $s = s(\varphi)$ — наперед задана функція перетворення. Так, для гармонічного перетворення

$$s(\varphi) = S_m \sin(k\varphi), \quad k = 1, 2, \dots, \quad \varphi \in [0; 2\pi], \quad (12)$$

а лінійного

$$s(\varphi) = a\varphi + \text{const}, \quad \varphi \in [0; 2\pi]. \quad (13)$$

Рівняння (11) є звичайне нелінійне диференціальне рівняння першого порядку $F\left(\varphi, \rho, \frac{d\rho}{d\varphi}\right) = 0$. Перепишемо його дещо інакше

$$s\dot{\rho}^2 + 2\rho(L - \rho)\dot{\rho} - s\rho^2 = 0 \tag{14}$$

і подамо відносно похідної в формі Коші, розв'язавши для цього квадратне рівняння (14)

$$\dot{\rho} = -\frac{\rho}{s} \left[(L - \rho) \pm \sqrt{(L - \rho)^2 - s^2} \right]. \tag{15}$$

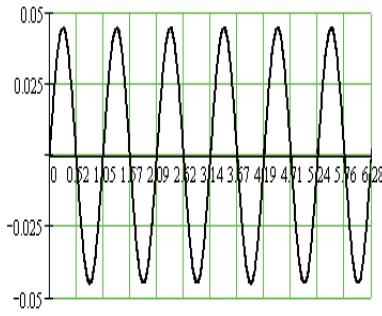

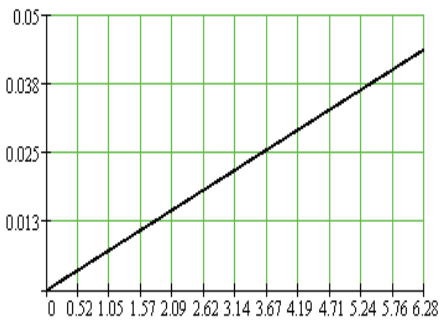
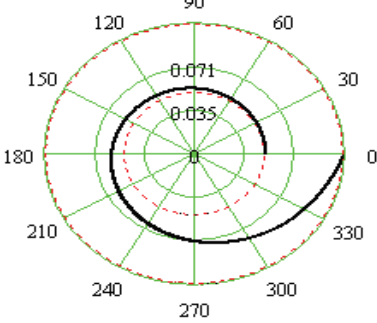
Як випливає з (15), розв'язок даної задачі за деякої початкової умови $\rho_0 = \rho(0)$ на множині дійсних чисел, по-перше, є можливим, по-друге, він не єдиний, і, по-третє, лише за виконання умови

$$(L - \rho)^2 \geq s^2.$$

Розв'яжемо рівняння (15) з урахуванням (12) та (13) методом Рунге-Кутта [7]. Результати дослідження занесемо до таблиці 3.

Таблиця 3

Синтез кривих – профілів чутливих елементів з наперед заданими функціями перетворення

№	Задана функція перетворення $s(\varphi)$	Графік заданої функції перетворення $s(\varphi)$	Назва та графік синтезованої кривої $\rho(\varphi)$
1	$s(\varphi) = S_m \sin(k\varphi)$, де $S_m = 0,045$ м, $k = 6$		Гармонічна крива 
2	$s(\varphi) = a\varphi + b$, де $a = 0,007$ м, $b = 0$		Лінійна спіраль 

Висновки

Сформульовано та доведено теорему про властивості кута між радіальним ортом полярної системи координат та вектором нормалі в будь-якій точці довільної диференційованої кривої.

На основі даної теореми побудовано узагальнену математичну модель просторово-оптичного

перетворення кутової швидкості та моменту інерції тіл обертання.

За допомогою узагальненої математичної моделі проведено аналіз процесу просторово-оптичної модуляції на деяких існуючих сімействах кривих. Знайдені найперспективніші види кривих за критеріями гармонічного та лінійного перетворень кутового повороту у відстань прямолінійного зміщення.

Сформульовані загальні підходи розв'язування задачі синтезу — визначення кривої, просторово-оптична модуляція на якій є функцією перетворення з наперед визначеними властивостями. На їх основі вперше синтезовані нові види кривих (гармонічна крива та лінійна спіраль), за допомогою яких можливо здійснювати відповідні гармонічне та лінійне перетворення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: ОНТИ НКТП, 1936. — 304 с.
2. Тайманов И. А. Лекции по дифференциальной геометрии. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. — 176 с.
3. Ведміцький Ю. Г., Кухарчук В. В. Рівняння Лагранжа як основа теорії перетворювачів моменту інерції // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету: Наукові праці КДПУ. — Кременчук: КДПУ, 2005. — Вип. 3/2005 (32). — С. 89—91.
4. Савелов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения / НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. — 294 с.
5. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 238 с.
6. Кухарчук В. В., Білінська М. Й. Мікропроцесорна система контролю параметрів обертального руху на основі оптико-електронного вимірювального перетворювача // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету: Наукові праці КДПУ. — Кременчук: КДПУ, 2004. — Вип. 2/2004 (25). — С. 42—44.
7. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986. — 288 с.

Рекомендована кафедрою теоретичної електротехніки та промислової електроніки

Надійшла до редакції 13.03.07
Рекомендована до друку 28.03.07

Ведміцький Юрій Григорович — асистент, **Кухарчук Василь Васильович** — завідувач кафедри.

Кафедра теоретичної електротехніки та електричних вимірювань, Вінницький національний технічний університет