

УДК 624.074.5

О. І. Сіянов, канд. техн. наук, доц.

ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ СІТЧАСТИХ ОБОЛОНОК ПОКРИТТЯ

Виконано математичне моделювання циліндричних сітчастих оболонок покриття і визначено величину критичного навантаження в залежності від матеріалу, геометричних характеристик та кількості півхвиль форми втрати стійкості. Запропоновано комп'ютерну програму розрахунку і розглянуто конкретний числовий приклад розрахунку конструкції. Проаналізовано отримані результати та виявлено певні закономірності.

Вступ

В практиці проектування сітчастих оболонок покриття широко використовуються наближені методи розрахунку, побудовані на ітераційних процедурах і результатах експериментальних випробувань суцільних конструкцій [1—3]. Розроблені на їх основі алгоритми використовують потужні математичні апарати, розвинуті аналітичні залежності, дискретне та континуальне подання поверхні [1—5]. Отримані рішення поширюються на сітчасті оболонки довільної геометрії і мають єдиний підхід до визначення величини критичного навантаження [1, 3, 4]. Втім стійкість оболонок покриття прямо залежить від форми конструкцій та визначається уразливістю від дії прикладених експлуатаційних навантажень [6, 7]. За результатами тестування наявних методик розрахунку зафіксовані невраховані фактори та значні резерви несучої здатності [8]. Особливо це стосується циліндричних сітчастих оболонок покриття, які відзначаються різними схемами зміни геометрії, максимальними прогинами серединної поверхні та найменшими силовими параметрами стійкості [9]. Звичайно в такому випадку конструкція не зруйнується, однак вона буде працювати із великим запасом витрат матеріалу. Тому в статті в рамках використання суцільного аналогу кругової багатоелементної системи створено математичну модель визначення величини критичного навантаження циліндричних сітчастих оболонок покриття, запропоновано комп'ютерну програму розрахунку та розглянуто конкретний числовий приклад розрахунку конструкції.

Основні позначення

Проаналізувавши відомі способи задання сітчастої поверхні з нульовою гауссовою кривизною [10—14], вирішено використати теорію тонких суцільних циліндричних оболонок [15]. Згідно з вибраною теорією вихідні параметри поділяються на геометричні та фізичні. Форма поверхні описується радіусом кривизни R і товщиною h . Положення кожної точки визначають координати x і y , відповідно уздовж твірної циліндра та за напрямком дуги кола. Переміщення беруться у вигляді прогинів w . Відхилення точок серединної поверхні уздовж зовнішньої нормалі вважаються позитивними за умови спрямування до центра кривизни. Матеріал враховується модулем пружності E . Згинальна циліндрична жорсткість та докритичне напруження, відповідно, задаються фізичними параметрами D і p_y . Навантаження q рівномірно розподіляється по серединній поверхні та діє радіально уздовж зовнішньої нормалі.

Перехід від суцільного аналогу до циліндричної сітчастої оболонки покриття

Рівняння стійкості суцільної циліндричної оболонки згідно з монографією А. С. Вольміра [16] має вигляд

$$\frac{D}{h} \nabla^8 w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + p_y \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1)$$

Врахуємо дію рівномірно розподіленого навантаження q та запишемо напруження:

$$p_y = qR/h, \quad (2)$$

яке виникає в поперечному перерізі конструкції.

Здійснивши перетворення (1) з урахуванням виразу силового параметра (2), матимемо:

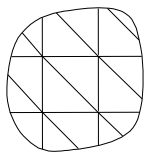


Рис. 1. Фрагмент оболонки покриття

$$D \nabla^8 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + qR \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (3)$$

Отримане рівняння (3) містить згинальну D та осьову Eh жорсткості.

Припустим, що суцільна оболонка покриття — це сітчаста поверхня (рис. 1) з квадратними чарунками заданого розміру a .

Необхідну жорсткість в обох напрямках забезпечимо діагональними елементами в середині, у зв'язку з чим введемо коефіцієнт заповнення сітки s .

Жорсткості суцільної конструкції розпишемо у вигляді еквівалентних співвідношень

$$D \sim \frac{EJs}{a}; \quad Eh \sim \frac{EAs}{a}, \quad (4)$$

де J, A — момент інерції та площа поперечного перерізу елементів сітчастої конструкції відповідно, які у поєднанні з модулем пружності E утворюють згинальну EJ та мембранну EA жорсткості елементів.

Введенням отриманих співвідношень (4) в перетворене рівняння стійкості (3), знайдемо:

$$\frac{EJs}{a} \nabla^8 w + \frac{EAs}{aR^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + qR \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (5)$$

Контурні умови з урахуванням шарнірного кріплення оболонки подамо у вигляді

$$\begin{cases} w|_{x=0} = w|_{x=L} = 0; & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0; \\ w|_{y=0} = w|_{y=\alpha R} = 0; & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=\alpha R} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

де L — довжина конструкції уздовж твірної; αR — довжина дуги.

Форму, за якою можлива втрата стійкості сітчастої оболонки покриття, згідно із запропонованими умовами (6) задамо прогином

$$w = f \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{\alpha R}, \quad (7)$$

в якій m, n — кількість півхвиль вигнутої поверхні уздовж твірної та за напрямком дуги кола відповідно.

Розпишемо бігармонічний оператор ∇^4 з прогином w через похідні

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}. \quad (8)$$

До виразу (8) застосуємо бігармонічний оператор ∇^4 :

$$\begin{aligned} \nabla^4 (\nabla^4 w) &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \\ &+ \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + 4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial y^2} + 6 \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial y^4} + 4 \frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8 w}{\partial y^8} \end{aligned} \quad (9)$$

та підставимо форму втрати стійкості (7), отримуємо:

$$\nabla^4(\nabla^4 w) = \left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^8 + 4\left(\frac{m\pi}{L}\right)^6 \left(\frac{n\pi}{\alpha R}\right)^2 + 6\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 \left(\frac{n\pi}{\alpha R}\right)^4 + 4\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{\alpha R}\right)^6 + \left(\frac{n\pi}{\alpha R}\right)^8 \right] f \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{\alpha R}. \quad (10)$$

У два інші члени рівняння (5) також підставимо форму втрати стійкості (7). Після перетворень матимемо:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 \right] f \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{\alpha R}. \quad (11)$$

Застосовуючи до співвідношення $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ бігармонічний оператор ∇^4 , визначимо

$$\nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 w}{\partial y^6}. \quad (12)$$

У результаті знайдемо:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= \left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 \left(\frac{n\pi}{\alpha R}\right)^4 + 2\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{\alpha R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\alpha R}\right)^4 \right] f \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{\alpha R} = \\ &= \left(\frac{n\pi}{\alpha R}\right)^2 \left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\alpha R}\right)^2 \right]^2 f \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{\alpha R}. \end{aligned} \quad (13)$$

Підставляючи (10), (11), (13) у рівняння (5), запишемо:

$$\frac{EJs}{a} \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2 R^2} \right)^4 + \frac{EAs}{aR^2} \frac{m^4 \pi^4}{L^4} - qR \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2 R^2} \right)^2 \frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2 R^2} = 0, \quad (14)$$

звідки

$$\begin{aligned} q &= \frac{EJs}{aR} \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2 R^2} \right)^2 \frac{\alpha^2 R^2}{n^2 \pi^2} + \frac{EAs}{aR^3} \frac{m^4 \pi^4}{L^4} \frac{\alpha^2 R^2}{n^2 \pi^2} \frac{1}{\left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2 R^2} \right)^2} = \\ &= \frac{EJs}{aR} \left(\frac{m^2 \pi \alpha R}{nL^2} + \frac{n\pi}{\alpha R} \right)^2 + \frac{EAs}{aR^3} \frac{\alpha^2 R^2}{n^2 \pi^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{n^2 L^2}{m^2 \alpha^2 R^2} \right)^2} \end{aligned} \quad (15)$$

або після перетворень (15) отримаємо:

$$q = \frac{EAs}{aR} \left[\frac{J}{A} \left(\frac{m^2 \pi \alpha R}{nL^2} + \frac{n\pi}{\alpha R} \right)^2 + \frac{(\alpha R)^2}{R^2 n^2 \pi^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{n^2 L^2}{m^2 (\alpha R)^2} \right)^2} \right]. \quad (16)$$

В цьому випадку відмітимо, що вказані оболонки змінюватимуть форму уздовж твірної завжди за однією півхвилею, тому кількісний параметр m можна не враховувати.

Остаточню вираз (16) подамо у спрощеному вигляді:

$$q = \frac{EAs}{aR} \left[\frac{J}{A} \left(\frac{\pi\alpha R}{nL^2} + \frac{n\pi}{\alpha R} \right)^2 + \frac{(\alpha R)^2}{R^2 n^2 \pi^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{n^2 L^2}{(\alpha R)^2} \right)^2} \right] \quad (17)$$

як результат математичного моделювання для визначення величини критичного навантаження циліндричних сітчастих оболонок покриття.

На додаток зазначимо, що стійкість розглянутої конструкції забезпечиться тільки тоді, коли максимальне навантаження не досягатиме критичного (17).

Комп'ютерна програма розрахунку

Зрозуміло, що показник критичного навантаження q істотно залежатиме від довжини L покриття, зі збільшенням якої кількісний параметр n може зменшуватись. Тоді слід очікувати отримання мінімального значення величини критичного навантаження q , якому відповідатиме змінний параметр n за умови максимального наближення складових характеристик згинальної EJ та мембранної EA жорсткостей. Спростити процес пошуку мінімуму функції $q(n)$ вирішено за допомогою спеціально розробленої комп'ютерної програми, яка складена для визначення величини критичного навантаження q циліндричних сітчастих оболонок покриття в залежності від матеріалу, геометричних характеристик та кількості півхвиль n форми втрати стійкості.

Розроблену програму перевірено на конкретних тестових прикладах з широким діапазоном вхідних параметрів. За отриманими результатами виявлено та проаналізовано характерні закономірності.

Числовий приклад використання математичної моделі

Здамося конкретними геометричними параметрами циліндричної сітчастої оболонки покриття: $L = 30$ м, $\alpha R = 30$ м — габаритні розміри конструкції уздовж твірної та за напрямком дуги кола відповідно; $R = 20$ м — радіус кривизни покриття; $a = 3,011$ м — розмір квадратної чарунки; $s = 1,5$ — коефіцієнт заповнення сітки; $J = 200 \cdot 10^{-8}$ м⁴, $A = 18 \cdot 10^{-4}$ м² — момент інерції та площа поперечного перерізу елементів сітчастої конструкції відповідно. Елементам надано трубчастий профіль. В якості матеріалу вибрано сталь з модулем пружності $E = 2,06 \cdot 10^8$ кН/м².

Розрахунки виконано з кількома значеннями параметра n , який визначав кількість півхвиль за напрямком дуги кола.

Величини критичного навантаження q і складові характеристики згинальної EJ та мембранної EA жорсткостей покриття визначено з урахуванням можливих форм втрати стійкості.

Отримані результати мають певні закономірності, які можна побачити із побудованих гістограм (рис. 2—4). Так, використання математичної моделі (17) показало (рис. 2), що найменше значення величини критичного навантаження q матимемо з урахуванням задання чотирьох півхвиль n за напрямком дуги кола. Шляхом порівняння графіків, наведених на рис. 3, 4 встановлено протилежну закономірність зміни показників згинальної EJ та мембранної EA жорсткостей покриття зі збі-

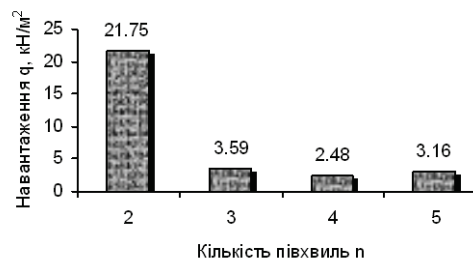


Рис. 2. Величина критичного навантаження q в залежності від кількості півхвиль n форми втрати стійкості покриття

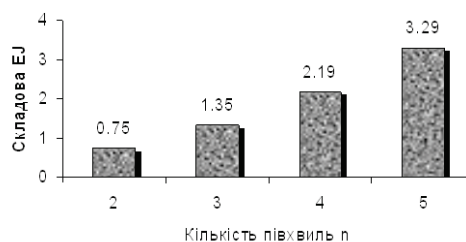


Рис. 3. Складова характеристика жорсткості EJ в залежності від кількості півхвиль n форми втрати стійкості покриття*

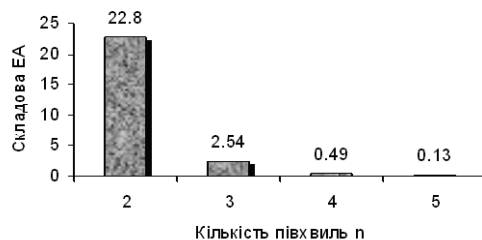


Рис. 4. Складова характеристика жорсткості EA в залежності від кількості півхвиль n форми втрати стійкості покриття*

льшенням можливої кількості півхвиль n форми втрати стійкості.

Висновки

1. Використання суцільної конструкції і залучення відповідної теорії стійкості дозволило виконати математичне моделювання циліндричних сітчастих оболонок покриття і визначити величину критичного навантаження q в залежності від матеріалу, геометричних характеристик та кількості півхвиль n форми втрати стійкості.

2. Створено комп'ютерну програму визначення величини критичного навантаження циліндричних сітчастих оболонок покриття з урахуванням геометричних та фізичних параметрів. За результатами розрахунків виявлено і проаналізовано закономірності зміни кількості півхвиль n форми втрати стійкості та отримання мінімальної величини критичного навантаження q за умови максимального наближення складових характеристик згинальної EJ і мембранної EA жорсткостей.

3. У конкретному числовому прикладі визначено величини критичного навантаження q і складові характеристики жорсткостей EJ та EA покриття з урахуванням можливих форм втрати стійкості. Встановлено і проаналізовано закономірності зміни вказаних показників для заданого кількісного параметра n .

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лебедев В. А. Сетчатые оболочки в гражданском строительстве на севере / В. А. Лебедев, Л. Н. Лубо. — Л. : Стройиздат, Ленингр. отд-ние, 1982. — 136 с.
2. Петров В. В. Метод последовательных приближений в теории оболочек / В. В. Петров. — Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1975. — 119 с.
3. Райт Д. Т. Большие сетчатые оболочки / Д. Т. Райт. — Л. : Стройиздат, 1966. — 11 с.
4. Лубо Л. Н. Руководство по проектированию и расчету покрытий нового типа — сетчатых оболочек / Л. Н. Лубо. — Л. : ЛенЗНИИЭП. 1971. — 63 с.
5. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер ; пер. с англ. В. И. Контонта. — М. : Физматгиз, 1963. — 635 с.
6. Рюле Г. Пространственные покрытия / Г. Рюле // Конструкции и методы возведения ; пер. с нем. — Том 2. — М. : Стройиздат, 1974. — 247 с.
7. Погорелов А. В. Геометрическая теория устойчивости оболочек / А. В. Погорелов. — М. : Наука, 1966. — 296 с.
8. Гоцуляк Е. А. Устойчивость и нелинейное деформирование цилиндрических сетчатых оболочек покрытия / Е. А. Гоцуляк, А. И. Сиянов // Прикл. механика. — 2004. — 40, № 4. — С. 78—83.
9. Сиянов О. І. Металеві одношарові циліндричні стержневі покриття: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.23.01 «Будівельні конструкції, будівлі та споруди» / Сиянов Олександр Ілліч; ВАТ «УкрНДПроекстальконструкція ім. В. М. Шимановського». — Київ, 2002. — 19 с.
10. Инженерные конструкции: учеб. для вузов по спец. «Архитектура» / [В. Н. Голосов, В. В. Ермолов, Н. В. Лебедева и др.] ; под ред. В. В. Ермолова. — М. : Высш. шк., 1991. — 408 с.
11. Трушев А. Г. Пространственные металлические конструкции : учеб. пос. для вузов / А. Г. Трушев. — М. : Стройиздат, 1983. — 215 с.
12. Свердлов В. Д. Исследование пространственных цилиндрических стержневых систем покрытий : дис. на соискании уч. степени канд. техн. наук 05.23.01 / Владимир Деонисович Свердлов. — Киев, 1977. — 174 с. — Библиогр.: С. 153—161.
13. Патцельт О. Стальные решетчатые пространственные конструкции / О. Патцельт ; пер. с нем. — М. : ЦИНИС Госстроя СССР, 1970. — 95 с.
14. Таиров В. Д. Сетчатые пространственные конструкции / В. Д. Таиров. — К. : Будівельник, 1966. — 73 с.
15. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике / В. З. Власов. — М.; Л. : Гостехиздат, 1949. — 784 с.
16. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. — М. : Наука, 1967. — 984 с.

Рекомендована кафедрою промислового та цивільного будівництва

Стаття надійшла до редакції 23.09.10
Рекомендована до друку 14.10.10

Сіянов Олександр Ілліч — доцент кафедри промислового та цивільного будівництва.

Вінницький національний технічний університет, Вінниця