

М. Г. Сур'янінов, д-р техн. наук, проф.

ВИЗНАЧЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ В ЗАДАЧІ ВИГИНУ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ

Розглянуто деякі аспекти застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів у розрахунку ортотропних пластин. Зведення двовимірної задачі до одновимірної виконано варіаційним методом Канторовича–Власова. Вектор стану у разі вигину ортотропної пластини містить чотири компоненти, а характеристичне рівняння має чотири корені, тому для повного розв'язання задачі необхідно отримати аналітичні вирази 64-х фундаментальних функцій. Вид цих функцій залежить від граничних умов на поздовжніх кромках пластини. У роботі отримані аналітичні вирази шістнадцяти фундаментальних функцій для жорсткого закріплення поздовжніх країв пластини і будь-яких умов закріплення поперечних країв.

Вступ

Шаруваті пластики, що використовуються в тексті, у більшості випадків є ортотропними матеріалами. До ортотропних відносять також пластини, підкріплені часто розташованими ребрами або гофровані. У такому разі пластини називають конструктивно ортотропними. У зв'язку з цим розробка методів розрахунку ортотропних пластин набуває великого практичного значення. Ребриста пластина є сполученням взаємодіючих під час деформації елементів — власне пластини і ребер (одномірних стрижнів). Напружено-деформований стан кожного з цих елементів, обумовлений у рамках відомих прикладних теорій, має свої особливості. У зв'язку з цим під час вивчення ребристих пластин виникає необхідність побудови спеціальної теорії, що враховує основні особливості, властиві окремим елементам, і умови їхньої спільної роботи. Для розв'язання цієї задачі може виявитися ефективним чисельно-аналітичний метод граничних елементів.

Метод досліджень

Диференціальне рівняння вигину ортотропної пластини має вигляд

$$D_1 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} = q(x, y) \quad [1], \quad (1)$$

$$\text{де } D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})}; \quad D_2 = \frac{E_y h^3}{12(1 - \mu_{xy}\mu_{yx})}; \quad D_3 = D_1 \mu_{xy} + 2D_k = D_2 \mu_{yx} + 2D_k; \quad D_k = \frac{Gh^3}{12}.$$

В результаті застосування процедури методу Канторовича–Власова рівняння (1) перетвориться до вигляду

$$W^{1V}(y) - 2r^2 W''(y) + s^4 W(y) = \frac{1}{A} q(y), \quad (2)$$

$$\text{де } r^2 = B/A; \quad s^4 = C/A; \quad A = D_2 \int_0^{l_1} X^2 dx; \quad B = D_3 \int_0^{l_1} X'' X dx; \quad C = D_1 \int_0^{l_1} X^{1V} X dx.$$

Два способи вибору функції поперечного розподілу прогинів (статичний і динамічний) детально розглянуті в [3].

Таким чином, двовимірна задача зведена до одновимірної, і тепер для її розв'язання можна використати чисельно-аналітичний метод граничних елементів (МГЕ) [3].

Пластина розглядається як узагальнений одновимірний модуль [3], тому вектор її стану буде таким, як і у випадку вигину балки

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} W(y) \\ \theta_y(y) \\ M_y(y) \\ Q_y(y) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

де W, θ_y, M_y, Q_y — прогин, кут повороту, згинаючий момент і поперечна сила відповідно.

Індекс «y» надалі опускаємо.

Розв'язок рівняння (2) залежить від коренів відповідного характеристичного рівняння

$$K_{1-4} = \pm\sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}. \tag{4}$$

Вектор стану (3) містить 4 компоненти, а характеристичне рівняння має 4 корені, тому для повного розв'язання задачі про вигин ортотропної пластини необхідно отримати аналітичні вирази 64-х фундаментальних функцій. Вигляд цих функцій визначається співвідношенням між r і s , яке залежить від граничних умов на поздовжніх (уздовж осі y) кромках пластини.

Відповідно до алгоритму МГЕ [3] спочатку треба розв'язати задачу Коші. Це рішення в матричній формі має вигляд

$W(y)$	A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$W(0)$	$q(\xi) d\xi.$	$A_{14}(y - \xi)$
$\theta(y)$	A_{21}	A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{24}$	$\theta(0)$		$A_{13}(y - \xi)$
$M(y)$	$-A_{31}$	$-A_{32}$	A_{33}	A_{34}	$M(0)$		$-A_{12}(y - \xi)$
$Q(y)$	$-A_{41}$	$-A_{42}$	A_{43}	A_{44}	$Q(0)$		$-A_{11}(y - \xi)$

Розв'язок (5) записаний для випадку, коли вісь z спрямована «вниз».

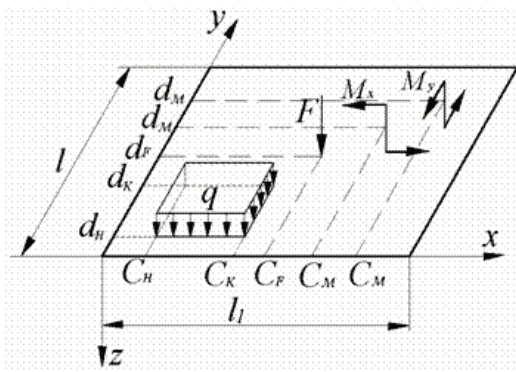
Позитивні напрями узагальнених кінематичних і статичних параметрів одновимірної моделі вигину ортотропної прямокутної пластини збігаються з позитивними напрямками відповідних параметрів вигину прямолінійного стрижня [3].

Позитивний напрям поперечного навантаження показаний на рисунку.

Таким чином, розв'язок рівняння (1) з використанням методу Канторовича–Власова полягати-
ме у визначенні функції прогину

$$W(x, y) = W(y)X(x), \tag{6}$$

де функція $X(x)$ задана, а функція $W(y)$ визначається з (5).



Позитивний напрям поперечного навантаження

Розглянемо один з варіантів співвідношення між r і s , коли $|s| > |r|$, що відповідає жорсткому затисканню поздовжніх кромek пластинки.

Корені (4) — комплексні:

$$K_{1-4} = \pm\alpha \pm i\beta,$$

$$\text{де } \alpha = \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{2}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}}.$$

Прогин запишеться у вигляді

$$W(y) = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4, \tag{7}$$

де $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ — гіперболо-тригонометричні функції [2]:

$$\Phi_1 = \text{ch}\alpha y \sin \beta y; \quad \Phi_2 = \text{ch}\alpha y \cos \beta y; \quad \Phi_3 = \text{sh}\alpha y \cos \beta y; \quad \Phi_4 = \text{sh}\alpha y \sin \beta y. \quad (8)$$

Кут повороту

$$\theta(y) = W'(y) = C_1\Phi_1' + C_2\Phi_2' + C_3\Phi_3' + C_4\Phi_4'. \quad (9)$$

Згинальний момент

$$\begin{aligned} M(y) &= -D_2 \left[W''(y) \int_0^{l_1} X^2 dx + \mu_{yx} W(y) \int_0^{l_1} X'' X dx \right] = \\ &= - \left[AW''(y) + \mu_{yx} \frac{BD_2}{D_3} W(y) \right] = - [AW''(y) + RW(y)], \end{aligned} \quad (10)$$

де $R = \mu_{yx} \frac{BD_2}{D_3}$.

Поперечна сила

$$Q(y) = - \left[D_2 W'''(y) \int_0^{l_1} X^2 dx + D_3 W'(y) \int_0^{l_1} X'' X dx \right] = - [AW'''(y) + BW'(y)]. \quad (11)$$

Функції (8) в точці $y = 0$ приймають такі значення:

$$\Phi_1(0) = \Phi_3(0) = \Phi_4(0) = 0; \quad \Phi_2(0) = 1.$$

Вирази функцій $\Phi_1 \dots \Phi_4$, їх семи похідних і інтегралів наведені в [3].

Постійні $C_1 \dots C_4$ можна визначити із співвідношення

$$\bar{\Phi}_0 \bar{C}_i = \bar{P}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (12)$$

де

$$\bar{\Phi}_0 = \begin{vmatrix} \Phi_1(0) & \Phi_2(0) & \Phi_3(0) & \Phi_4(0) \\ \Phi_1'(0) & \Phi_2'(0) & \Phi_3'(0) & \Phi_4'(0) \\ -[A\Phi_1''(0) + R\Phi_1(0)] & -[A\Phi_2''(0) + R\Phi_2(0)] & -[A\Phi_3''(0) + R\Phi_3(0)] & -[A\Phi_4''(0) + R\Phi_4(0)] \\ -[A\Phi_1'''(0) + B\Phi_1'(0)] & -[A\Phi_2'''(0) + B\Phi_2'(0)] & -[A\Phi_3'''(0) + B\Phi_3'(0)] & -[A\Phi_4'''(0) + B\Phi_4'(0)] \end{vmatrix}.$$

В результаті розв'язання рівняння (12) отримаємо:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{3\beta^2 - \alpha^2}{2\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \theta_0 - \frac{1}{2\beta A(\alpha^2 + \beta^2)} Q_0; \\ C_2 = W_0; \\ C_3 = \frac{3\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} \theta_0 + \frac{1}{2\alpha A(\alpha^2 + \beta^2)} Q_0; \\ C_4 = \frac{A(\beta^2 - 3\alpha^2)}{2\alpha\beta A} W_0 - \frac{1}{2\alpha\beta A} M_0. \end{cases} \quad (13)$$

Через фундаментальні функції компоненти вектора стану (3) виражаються у вигляді

$$\begin{cases} W(y) = A_{11}W_0 + A_{12}\theta_0 + A_{13}M_0 + A_{14}Q_0; \\ \theta(y) = A_{21}W_0 + A_{22}\theta_0 + A_{23}M_0 + A_{24}Q_0; \\ M(y) = A_{31}W_0 + A_{32}\theta_0 + A_{33}M_0 + A_{34}Q_0; \\ Q(y) = A_{41}W_0 + A_{42}\theta_0 + A_{43}M_0 + A_{44}Q_0. \end{cases} \quad (14)$$

Зіставляючи (7), (9)—(11) з (14) і враховуючи константи (13), отримаємо 16 фундаментальних функцій з жорстким затисканням поздовжніх кромek ортотропної пластини:

$$A_{11} = \Phi_2 + \frac{A(\beta^2 - 3\alpha^2) - R}{2\alpha\beta A} \Phi_4;$$

$$A_{12} = \frac{1}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \left[\alpha(3\beta^2 - \alpha^2)\Phi_1 + \beta(3\alpha^2 - \beta^2)\Phi_3 \right];$$

$$A_{13} = -\frac{\Phi_4}{2\alpha\beta A};$$

$$A_{14} = \frac{1}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)} (\beta\Phi_3 - \alpha\Phi_1).$$

$$A_{21} = -\frac{A(3\alpha^2 + \beta^2) + R}{2\beta A} \Phi_1 + \frac{A(\beta^2 - \alpha^2) - R}{2\alpha A} \Phi_3;$$

$$A_{22} = \Phi_2 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \Phi_4;$$

$$A_{23} = -\frac{\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_3}{2\alpha\beta A};$$

$$A_{24} = -\frac{\Phi_4}{2\alpha\beta A}.$$

$$A_{31} = 2\alpha^2 A \Phi_2 + \frac{A^2(3\alpha^4 + \beta^4) + 2AR(2\alpha^2 - \beta^2) + R^2}{2\alpha\beta A} \Phi_4;$$

$$A_{32} = \frac{A(\alpha^4 - 4\alpha^2\beta^2 + 3\beta^4) + R(\alpha^2 - 3\beta^2) + 2\beta^2(\beta^2 - 3\alpha^2)}{2\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \Phi_1 +$$

$$+ \frac{A(3\alpha^4 - 4\alpha^2\beta^2 + \beta^4) - R(3\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha^2(\alpha^2 - 3\beta^2)}{2\beta(\alpha^2 + \beta^2)} \Phi_3;$$

$$A_{33} = \Phi_2 + \frac{A(\alpha^2 - \beta^2) + R}{2\alpha\beta A} \Phi_4;$$

$$A_{34} = \frac{A(2\beta^2 - \alpha\beta^2 + \alpha^3) + \alpha R}{2\beta A(\alpha^2 + \beta^2)} \Phi_1 + \frac{A(2\alpha^2 - \alpha^2\beta + \beta^3) - \beta R}{2\alpha A(\alpha^2 + \beta^2)} \Phi_3.$$

$$A_{41} = \left\{ \beta \left[A(3\alpha^2 - \beta^2) + B \right] + \frac{\left[A(3\alpha^2 - \beta^2) + R \right] \left[A(\alpha^2 - 3\beta^2) + B \right]}{2\beta A} \right\} \Phi_1 +$$

$$+ \left\{ \alpha \left[A(3\beta^2 - \alpha^2) - B \right] + \frac{\left[A(3\alpha^2 - \beta^2) + R \right] \left[A(\beta^2 - 3\alpha^2) + B \right]}{2\alpha A} \right\} \Phi_3;$$

$$A_{42} = \left\{ \left[A(\alpha^2 - 3\beta^2) + B \right] \frac{\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)}{2\beta(\alpha^2 + \beta^2)} + \left[A(3\alpha^2 - \beta^2) + B \right] \frac{\beta(3\alpha^2 - \beta^2)}{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} \right\} \Phi_4 - B\Phi_2;$$

$$A_{43} = \frac{1}{\beta A} \left[A(\alpha^2 - 3\beta^2) + B \right] \Phi_1 + \frac{1}{\alpha A} \left[A(3\alpha^2 - \beta^2) + B \right] \Phi_3;$$

$$A_{44} = \Phi_2 + \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} + \frac{B}{2\alpha\beta A} \right) \Phi_4.$$

Висновки

Використовуючи отримані результати, можна визначити аналітичні вирази фундаментальних функцій, функції Гріна і вектора навантажень для кожного з чотирьох коренів характеристичного рівняння, які потім дозволяють розв'язувати крайові задачі вигину ортотропних пластин за різних граничних умов. Алгоритм розв'язання легко програмується в середовищі MATLAB, і дозволяє отримати параметри напружено-деформованого стану у будь-якій точці ортотропної пластини.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Александров А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. — М. : Высшая школа, 1990. — 398 с.
2. Бермант А. Ф. Курс математического анализа / А. Ф. Бермант. — М. : Гостехиздат, 1953. — 358 с.
3. Численно-аналитический метод граничных элементов / [А. Ф. Дашенко, Л. В. Коломиец, В. Ф. Оробей, Н. Г. Сурьянинов] : в 2-х т. — Одесса, ВМВ, 2010.

Рекомендована кафедрою опору матеріалів та прикладної механіки

Стаття надійшла до редакції 10.05.11

Рекомендована до друку 10.06.11

Сур'янінов Микола Георгійович — професор кафедри динаміки, міцності машин та опору матеріалів.
Одеський національний політехнічний університет, Одеса