УДК 512.53

А. А. Барковська;
В. Д. Дереч, канд. фіз.-м. наук, доц.

МІНІМАЛЬНІ СКІНЧЕННІ НЕКОМУТАТИВНІ НІЛЬПОТЕНТНІ НАПІВГРУПИ, ДЛЯ ЯКИХ ІНВЕРСНИЙ МОНОЇД ЛОКАЛЬНИХ АВТОМОРФІЗМІВ Є ПЕРЕСТАВНИМ

В статті знайдено всі мінімальні (відносно включення) скінченні некомутативні нільпотентні напівгрупи, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним.

Вступ

Локальним автоморфізмом напівгрупи S називають ізоморфізм між двома її піднапівгрупами. Множина усіх локальних автоморфізмів напівгрупи відносно звичайної операції композиції бінарних відношень утворює інверсний моноїд локальних автоморфізмів. Цей моноїд позначатимемо через $PA(S)$. У більшості статей, що стосуються напівгрупи $PA(S)$, розглядається проблема опису таких напівгруп B, що $PA(B) \cong PA(S)$ для цієї напівгрупи S. Важливою є також проблема знаходження взаємозв'язків між властивостями напівгрупи S і властивостями інверсного моноїда $PA(S)$. Зокрема в статті [1] (крім іншого) знайдено структуру групи G, для якої інверсний моноїд $PA(G)$ є кліфордовим. У роботі [2] дано опис інверсних напівгруп, для яких моноїд усіх локальних автоморфізмів є цілком напівпростим або фундаментальним.

Відомо [3], що інверсна напівгрупа локальних автоморфізмів скінченновимірного лінійного простору є переставною (тобто будь-які дві її конгруенції комутують відносно композиції). Аналогічне твердження має місце і для інверсної напівгрупи локальних автоморфізмів скінченної напівгрупи лівих нулів (яка, зрозуміло, ізоморфна скінченній симетричній інверсній напівгрупі). Після цих спостережень цілком природно виникає задача знаходження структури таких напівгруп, інверсні моноїди локальних авто-морфізмів яких є переставними. У статті [4] ця задача розв'язана для скінченної зв'язки а також скінченної комутативної інверсної напівгрупи. В [5] анонсовано класифікацію скінченних комутативних напівгруп з переставним моноїдом локальних автоморфізмів. Аналогічна проблема, щодо скінченних некомутативних напівгруп видається значно складнішою хоча б тому, що не існує більш-менш задовільної класифікації некомутативних напівгруп. В цій статті ми робимо перші кроки для з'ясування структури скінченної некомутативної нільпотентної напівгрупи, для якої інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним. У зв'язку з цим природним чином виникає задача знаходження явного виду мінімальних напівгруп з вищеозначеного класу. Саме цю задачу ми розв'язуємо в статті.

Термінологія і основні означення

Напіврешітка E називається напіврешіткою скінченної довжини, якщо існує натуральне число n таке, що довжина будь-якого ланцюжка з E не перевищує число n.

Нехай S — довільна напівгрупа, а $\mathbb{N}_0$ — множина всіх невід'ємних цілих чисел. Функцію $rank : S \to \mathbb{N}_0$ називають ранговою на напівгрупі S, якщо для будь-яких $a, b \in S$ виконується нерівність $rank(ab) \le \min(rank(a), rank(b))$.

Число $rank(x)$ називають рангом елемента x.

Нехай S — інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину. Функція $rank(a) = h(aa^{-1})$, де $h(aa^{-1})$ – висота ідемпотента aa^{-1} в напіврешітці ідемпотентів напівгрупи S, є ранговою функцією (див. [6]). Скажемо, що інверсна напівгрупа є напівгрупою скінченного рангу, якщо напіврешітка її ідемпотентів має скінченну довжину.

Нехай S — довільна напівгрупа. Решітку її піднапівгруп зазвичай позначають через $Sub(S)$.

Напівгрупа S з нулем 0 називається нільпотентною, якщо для будь-якого елемента x існує натуральне число n таке, що $x^n = 0$.

Напівгрупу S називають інверсною, якщо вона регулярна і будь-які два її ідемпотенти комутують. Напіврешітку ідемпотентів інверсної напівгрупи S зазвичай позначають через $E(S)$.

Всі інші необхідні поняття з теорії напівгруп можна знайти в [7].

Якщо не обумовлено протилежне, то всі напівгрупи, що розглядаються в цій статті є скінченними. Тому під терміном «напівгрупа» ми розуміємо «скінченна напівгрупа».

Основна теорема

Насамперед сформулюємо кілька тверджень, які знадобляться в подальших викладках.

***Твердження* 1** (див. [3], теорема 2). Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем. Тоді S є переставною в тому і лише в тому випадку, коли виконуються такі дві умови:

1) для будь-яких $a, b \in S$, якщо $rank(a) = rank(b)$, то $SaS = SbS$;

2) для довільного ідемпотента $e \in E(S)$ $(rank(e) \geq 2)$ існують ідемпотенти f і g такі, що $f \neq g$, $f < e$, $g < e$ і $rank(f) = rank(g) = rank(e) - 1$.

Зауваження (див. [3], теорема 1). Якщо ранг довільного елемента нетривіальної інверсної напівгрупи S з нулем не перевищує 1, то напівгрупа S переставна тоді і лише тоді, коли вона є напівгрупою Брандта.

***Твердження* 2** (див. [4], теорема 2). Нехай S — скінченна напівгрупа. Ідеали напівгрупи $PA(S)$ лінійно впорядковані тоді і тільки тоді, коли в решітці $Sub(S)$ неізоморфні піднапівгрупи мають різні висоти.

Клас напівгруп, для кожної з яких інверсний моноїд локальних авто-морфізмів є переставним будемо позначати через PPA (permutable partial automorphisms). Зазначимо (див. [8], теорема 4), що важливою властивістю напівгрупи з класу PPA є лінійна впорядкованість (відносно включення) ідеалів. Для інверсного моноїда локальних автоморфізмів деякої напівгрупи зручною ознакою лінійної впорядкованості ідеалів є твердження 2, яке, до речі, еквівалентне умові 1) твердження 1.

Надалі за умовчанням ми будемо користуватися таким очевидним фактом: решітка ідемпотентів інверсного моноїда $PA(S)$ ізоморфна решітці $Sub(S)$.

Лема 1. *Нехай S — нільпотентна напівгрупа що належить класу PPA, тоді для довільного $x \in S$ має місце рівність $x^2 = 0$.*

Доведення. Нехай $a \in S$ і $a \neq 0$. Припустимо, що $a^2 \neq 0$. Тоді циклічна піднапівгрупа $\langle a \rangle$ містить щонайменше 3 елементи. Позначимо через A множину $\langle a \rangle \setminus \{a\}$. Очевидно, що A — ненульова піднапівгрупа напівгрупи $\langle a \rangle$. Згідно з твердженням 1 існує піднапівгрупа C така, що $C \subseteq \langle a \rangle$, $A \neq C$ і $h(A) = h(C)$. Оскільки C є власною піднапівгрупою напівгрупи $\langle a \rangle$, то, очевидно, $a \notin C$. Звідси легко випливає, що $C \subseteq A$. А оскільки $A \neq C$, то $C \subset A$ (строге включення). Звідси $h(C) < h(A)$. Суперечність.

Наслідок. Нільпотентна триелементна напівгрупа з класу PPA є напівгрупою з нульовим множенням.

Отже, мінімальна (відносно включення) некомутативна нільпотентна напівгрупа з класу PPA містить щонайменше 4 елементи.

За допомогою таблички множення (див. таблицю 1) визначимо групоїд K. Легко перевірити, що K — некомутативна нільпотент-

Таблиця 1

	0	x	y	a
0	0	0	0	0
x	0	0	0	0
y	0	a	0	0
a	0	0	0	0

на напівгрупа. Перелічимо її піднапівгрупи:

$$0=\{0\},\ \alpha=\{0,x\};\ \ \beta=\{0,\ y\};\ \ \varepsilon=\{0,\ a\};\ \ \eta=\{0,\ x,\ a\};\ \tau=\{0,\ y,\ a\};\ \ \Delta=\{0,\ x,\ y,\ a\}.$$

Відмітимо, що всі власні піднапівгрупи напівгрупи K є напівгрупами з нульовим множенням і піднапівгрупи однакової висоти ізоморфні. Отже, згідно з твердженням 2 ідеали інверсного моноїда $PA(K)$ лінійно впорядковані відносно включення, а отже, виконується умова 1 твердження 1. Крім того легко перевірити, що ідемпотенти напівгрупи $PA(K)$ задовольняють умову 2 твердження 1. Таким чином, згідно з твердженням 1 інверсний моноїд $PA(K)$ є переставним.

Природним чином виникає питання: чи існують інші (з точністю до ізоморфізму) чотириелементні некомутативні нільпотентні напівгрупи з класу PPA? Відповідь на це питання дає лема 2.

Лема 2. *Нехай S — некомутативна нільпотентна напівгрупа що містить* 4 *елементи. Якщо напівгрупа S належить класу PPA, то вона ізоморфна напівгрупі, що задається таблицею* 1.

Доведення. Оскільки напівгрупа S не є комутативною, то існують елементи x і y такі, що $xy \neq yx$. Позначимо xy через a, yx через b.

1. Припустимо, що $a = x$, тобто $xy = x$. Тоді $xy^2 = xy = x = 0$. Суперечність.

2. Припустимо, що $xy = y$. Тоді $x^2y = xy = y = 0$. Суперечність.

Оскільки $xy \neq yx$, то або $a \neq 0$, або $b \neq 0$. Нехай $a \neq 0$. Покажемо, що $b = 0$. Розглянемо множину $\{0,\ x,\ y,\ a\}$. Легко перевірити, що елементи $x,\ y,\ a$ попарно різні . Оскільки елементи $0,\ x,\ y,\ a$ вичерпують всю напівгрупу S, то $yx = 0$. Таким чином, таблиця множення напівгрупи S не відрізняється від таблиці множення напівгрупи K.

Лему доведено.

Далі, нехай S — нільпотентна напівгрупа. Визначимо на ній бінарне відношення $\leq$ таким чином: $x \leq y \Leftrightarrow S^1xS^1 \subseteq S^1yS^1$. Легко перевірити, що відношення $\leq$ є порядком (не обов'язково стабільним). Цей порядок надалі будемо називати канонічним. Позначимо через M множину всіх максимальних (відносно канонічного порядку) елементів напівгрупи S. Множина M є найменшою породжуючою множиною напівгрупи S. Це твердження можна віднести до математичного фольклору.

Лема 3. *Нехай нільпотентна напівгрупа що належить класу PPA. Тоді будь-яка її піднапівгрупа теж належить класу PPA.*

Доведення. Безпосереднє застосування тверджень 1 і 2.

Лема 4. *Нехай S — некомутативна нільпотентна напівгрупа, яка містить щонайменше три максимальних (відносно вищеозначеного порядку) елементи. Якщо напівгрупа S належить класу PPA, то вона не є мінімальною*.

Доведення. Нехай $|S| = n.$ Припустимо, що напівгрупа S є мінімальною. Розглянемо будь-яку піднапівгрупу A що складається з $(n-1)$-го елемента (така піднапівгрупа існує). Згідно з лемою 3 піднапівгрупа A належить класу PPA. Якщо припустити, що піднапівгрупа A некомутативна, то напівгрупа S не є мінімальною. Суперечність.

Таблиця 2

*	0	*x*	*y*	*a*	*b*	*c*	*g*
0	0	0	0	0	0	0	0
x	0	0	*a*	0	c	0	0
y	0	*b*	0	*g*	0	0	0
a	0	*c*	0	0	0	0	0
b	0	0	*g*	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0

Припустимо тепер, що піднапівгрупа A комутативна. Тоді (див. твердження 2) будь-яка інша піднапівгрупа B порядку $n-1$ ізоморфна піднапівгрупі A а, отже, теж є комутативною. Далі, нехай $\{m_1,\ m_2,\ldots,m_k\}\,(k \geq 3)$ множина усіх максимальних (відносно канонічного порядку) елементів напівгрупи $S.$ Нехай $\{m_i,\ m_j\} \subset \{m_1,\ m_2,\ldots,\ m_k\}$. Якщо $m_g\ (g \neq i,\ g \neq j)$ є максимальний елемент, то множина $S \setminus \{m_g\}$ є піднапівгрупою порядку $n-1$ Отже, вона комутативна. А позаяк $m_i, m_j \in S \setminus \{m_g\}$, то $m_im_j = m_jm_i$. Далі, нехай x і y не є максимальними елементами. Тоді $x,\ y \in S \setminus \{m_g\}$ а оскільки піднапівгрупа $S \setminus \{m_g\}$ є комутативною, то $xy = yx.$ Тепер нехай m_h — довільний максимальний елемент, а елемент z — не є максимальним. Беремо максимальний елемент m_t відмінний від m_h, тоді $m_h \in S \setminus \{m_t\}$ і $z \in S \setminus \{m_t\}$. Оскільки піднапівгрупа $S \setminus \{m_t\}$ є комутативною, то $zm_h = m_h z$. Таким чином, напівгрупа S — комутативна. Отримуємо суперечність.

Лему доведено.

Отже, надалі будемо розглядати лише такі нільпотентні напівгрупи з класу PPA, які містять точно два максимальні елементи.

Спочатку розглянемо найбільшу (за кількістю елементів) нільпотентну напівгрупу яка містить точно два максимальні елементи і задовольняє тотожність $z^2 = 0$. Це буде напівгрупа яка складається з 7 елементів. А саме: $T = \{0,\ x,\ y,\ xy,\ yx,\ xyx,\ yxy\}$. Для зручності введемо позначення: $xy = a,\ yx = b,\ xyx = c,\ yxy = g$. Множення елементів напівгрупи T оформимо у вигляді таблиці 2. Легко перевірити, що напівгрупа T містить некомутативну піднапівгрупу $A = \{0,\ x,\ a,\ b,\ c,\ g\}$. Припустимо, що напівгрупа T належить класу PPA. Тоді (див. лему 3) піднапівгрупа A теж належить класу PPA. А позаяк напівгрупа A не є комутативною, то напівгрупа T не є мінімальною. Зазначимо також, що інших нільпотентних напівгруп, що містять 7 елементів і задовольняють тотожність $z^2 = 0$ немає.

Таким чином, нам залишається шукати мінімальні напівгрупи серед нільпотентних напівгруп, що містять п'ять або шість елементів, мають точно 2 максимальні елементи і задовольняють тотожність $z^2 = 0$.

Почнемо з п'ятиелементної напівгрупи V, яка визначена за допомогою таблиці 3. Легко перевірити, що операція * є асоціативною. Перелічимо всі піднапівгрупи напівгрупи V: $\{0\}$, $\{0, x\}$, $\{0, y\}$, $\{0, a\}$, $\{0, b\}$, $\{0, x, a\}$, $\{0, x, b\}$, $\{0, y, a\}$, $\{0, y, b\}$, $\{0, a, b\}$, $\{0, x, a, b\}$, $\{0, y, a, b\}$, $\{0,\ x,\ y,\ a,\ b\}$.

Таблиця 3

*	0	x	y	a	b
0	0	0	0	0	0
x	0	0	a	0	0
y	0	b	0	0	0
a	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0

Легко перевірити, що всі власні піднапівгрупи напівгрупи V є напівгрупами з нульовим множенням. Цей факт дає нам змогу пересвідчитися, що для напівгрупи V виконуються обидві умови твердження 1. Отже, напівгрупа V належить класу PPA. Оскільки вона некомутативна а всі її власні піднапівгрупи комутативні, то напівгрупа V є мінімальною.

Лема 5. *Існує лише одна* (*з точністю до ізоморфізму*) *мінімальна п'ятиелементна напівгрупа.*

Доведення. Позначимо через S некомутативну п'ятиелементну напівгрупу з класу PPA. Нехай x і y — максимальні елементи. Позаяк S — некомутативна, то $xy \neq yx$. Позначимо xy через a і yx через b. Якщо припустити, що $a = 0$ або $b = 0$, то тоді, очевидно, напівгрупа S міститиме менше 5 елементів, що суперечить умові. Отже, $a \neq 0$ і $b \neq 0$. Знайдемо всі можливі добутки елементів напівгрупи S.

1. Оскільки $xy = a$, то $0 = x^2y = xa$. Аналогічно отримуємо: $ay = 0$.

2. Покажемо, що $xb = 0$.

а) припустимо, що $xb = x$, тоді $xb^2 = xb = x = 0$. Суперечність;

б) припустимо, що $xb = b$, тоді $x^2b = xb = b = 0$. Суперечність;

в) припустимо, що $xb = y$, тоді $0 = x^2b = xy = a$. Суперечність;

с) припустимо, що $xb = a$, тоді $a = x(yx) = (xy)x = ax$. Суперечність.

Отже, $xb = 0$.

3. Оскільки $yx = b$, то $0 = y^2x = yb$. Аналогічно отримуємо: $bx = 0$.

4. Покажемо, що $ax = 0$.

а) припустимо, що $ax = a$, тоді $ax^2 = ax = a = 0$. Суперечність;

б) припустимо, що $ax = a$, тоді $a^2x = ax = x = 0$. Суперечність;

в) припустимо, що $ax = y$, тоді $ax^2 = yx = b = 0$. Суперечність;

с) припустимо, що $ax = b$, тоді $b = (xy)x = x(yx) = xb$. Суперечність.

Отже, $ax = 0$.

5. Оскільки $ay = 0$, то $ab = ayx = 0x = 0$. Аналогічно $ba = 0$.

6. Покажемо, що $by = 0$.

а) припустимо, що $by = b$, тоді $by^2 = by = b = 0$. Суперечність;

б) припустимо, що $by = y$, тоді $b^2y = by = y = 0$. Суперечність;

в) припустимо, що $by = x$, тоді $by^2 = xy = a = 0$. Суперечність;

с) припустимо, що $by = a$, тоді $a = (yx)y = y(xy) = ya$. Суперечність.

Отже, $by = 0$.

7. Оскільки $by = 0$, то $0 = (yx)y = y(xy) = ya$.

Якщо всі отримані добутки оформити у вигляді таблиці, то ми отримаємо таблицю 3.
Лему доведено.

Тепер залишається з'ясувати чи існують шестиелементні мінімальні нільпотентні напівгрупи з класу PPA. Покажемо, що таких напівгруп немає. Нехай $S = \{0, x, y, a, b, c\}$ — некомутативна нільпотентна напівгрупа з класу PPA причому $\{x, y\}$ — множина максимальних елементів. Розглянемо всі можливі випадки.

1-*й випадок*. $xb = by = 0$.

Оскільки напівгрупа некомутативна, то $xy \neq yx$. Позначимо xy через a і yx через b. Пробивши просту але рутинну роботу ми можемо однозначно відновити операцію множення. В результаті ми одержуємо табл. 4. Легко перевірити, що піднапівгрупа $\{0, x, y, a, b\}$ некомутативна. Отже, напівгрупа S не є мінімальною.

2-*й випадок*. $xb = 0$ і $by = c$.

За цими даними ми теж можемо однозначно відновити операцію множення. В результаті одержуємо табл. 5.

Очевидно, що піднапівгрупа $\{0, y, a, b, c\}$ некомутативна. Отже, напівгрупа, що визначена табл. 5 не є мінімальною.

3-*й випадок*. $xb = c$ і $by = 0$.

В цьому випадку ми отримуємо табл. 6. Легко перевірити, що піднапівгрупа $\{0, x, y, a, b\}$ — некомутативна. Отже, напівгрупа, що визначена табл. 6 не є мінімальною.

Таблиця 4

*	0	x	y	a	b	c
0	0	0	0	0	0	0
x	0	0	a	0	0	0
y	0	b	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0

Таблиця 5

*	0	x	y	a	b	c
0	0	0	0	0	0	0
x	0	0	a	0	0	0
y	0	b	0	c	0	0
a	0	0	0	0	0	0
b	0	0	c	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0

Таблиця 6

*	0	x	y	a	b	c
0	0	0	0	0	0	0
x	0	0	a	0	c	0
y	0	b	0	0	0	0
a	0	c	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0

4-*й випадок.* $xb = c$ **і** $by = c$.

В цьому випадку ми однозначно отримуємо табл. 7. Оскільки піднапівгрупа $\{0,\ x,\ y,\ a,\ b\}$ — некомутативна, то напівгрупа, що визначена табл. 7, не є мінімальною.

Підіб'ємо підсумок.

Теорема. *Існують точно дві* (*вони задані таблицями* 1 *і* 3) *мінімальні некомутативні нільпотентні напівгрупи з класу* PPA.

Таблиця 7

*	0	*x*	*y*	*a*	*b*	*c*
0	0	0	0	0	0	0
x	0	0	*a*	0	*c*	0
y	0	*b*	0	*c*	0	0
a	0	*c*	0	0	0	0
b	0	0	*c*	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0

Висновки

Кожна скінченна некомутативна нільпотентна напівгрупа з класу PPA містить мінімальну некомутативну піднапівгрупу. Структуру таких мінімальних напівгруп знайдено в статті. Це може слугувати основою для з'ясування структури некомутативних нільпотентних напівгруп з класу PPA.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Либих А. Инверсные полугруппы локальных автоморфизмов абелевых групп / А. Либих // Исследования по алгебре. — 1973. — № 3. — С. 25—33.

2. Goberstein S. Inverse semigroups with certain types of partial automorphism monoids / S. Goberstein // Glasgow Mathematical Journal. — 1990. — No. 32. — P. 189—195.

3. Дереч В. Характеристика напіврешітки ідемпотентів переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу з нулем / В. Дереч // Укр. мат. журн. — 2007. — № 10. — С. 1353—1362.

4. Дереч В. Структура скінченної комутативної інверсної напівгрупи і скінченної зв'язки, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є переставним / В. Дереч // Укр. мат. журн. — 2011. — № 8.

5. Derech V. Full list of a finite commutative semigroups for which inverse monoid of local automorphisms is permutable / V. Derech // 8th International Algebraic Conference in Ukraine, July 5—12, — Luhansk.

6. Дереч В. Конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу / В. Дереч // Укр. мат. журн. — 2005. — № 4. — С. 469—473.

7. Ganyushkin O., Mazorchuk V. Classical finite transformation semigroups. An introduction / O. Ganyushkin, V. Mazorchuk // Springer-Verlag, 2009. — 314 p.

8. Hamilton H. Permutability of congruences on commutative semigroups / H. Hamilton // Semigroup Forum. — 1975. — № 10. — P. 55—66.

Рекомендована кафедрою вищої математики

Стаття надійшла до редакції 14.06.11
Рекомендована до друку 16.06.11

Барковська Алла Андріївна — старший викладач, ***Дереч Володимир Дмитрович*** — доцент.

Кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця

Рекомендована кафедрою

Стаття надійшла до редакції
Рекомендована до друку