

УДК 519.6:504.3.054

Т. І. Русакова;

М. М. Біляєв, д-р техн. наук, проф.

CFD-МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЗАБРУДНЕННЯ ПОВІТРЯНОГО СЕРЕДОВИЩА В МІКРОРАЙОНІ

Розроблено CFD-модель для аналізу забруднення повітряного середовища в мікрорайоні міста. Цю модель можна використовувати як для аналізу забруднення повітря від транспорту, так і для аналізу забруднення повітряного середовища у разі аварійних викидів на дорогах. Модель є оперативною в реалізації на ПК, що дозволяє застосовувати її для проведення серійних розрахунків. Використовується модель вихрових відривних течій ідеальної рідини та модель переносу забруднюючих речовин, де застосовується рівняння конвективно-дифузійного переносу домішок. Отримані результати числових розрахунків підтверджують можливість використання запропонованої моделі для розв'язання актуальних задач урбоекології.

Вступ

Оцінювання якості повітряного середовища на вулицях міст, території промислових об'єктів є важливою задачею в області екологічної безпеки. Однак очевидна складність розв'язання цієї задачі. На формування якості повітряного середовища впливає комплекс факторів: метеоумови, характер розташування будівель в районі, інтенсивність викиду забруднювальних речовин від транспорту. Природно, що побудова моделей, що дозволяють врахувати всі фактори, які впливають на формування зон забруднення на вулицях неможливо. Більше того, практична реалізація таких моделей потребує застосування надпотужних комп'ютерів. Тому актуальним є створення прикладних моделей, що дозволяють прогнозувати якість повітряного середовища на вулицях з урахуванням основних факторів переносу забруднюючих речовин.

Аналіз публікацій

Для прогнозу якості повітряного середовища на вулицях, в містах використовується два класи моделей. Це моделі Гауса та їх різні модифікації [1—3] і CFD моделі [4, 5]. Моделі Гауса враховують такі важливі фактори: метеоумови, інтенсивність викиду, але не дозволяють врахувати вплив будівель на процес поширення забруднювальних речовин на вулицях. Відомі CFD-моделі дають можливість враховувати вплив будівель на характер формування зон забруднення на вулицях, але вимагають для практичної реалізації дуже потужних комп'ютерів і більше двох діб часу розрахунку для прогнозу рівня забруднення повітряного середовища тільки для невеликого мікрорайону міста. Це пов'язано з тим, що ці моделі засновані на рівняннях Нав'є–Стокса, а значить для їх реалізації необхідна дрібна сітка і додаткові рівняння, щоб описати процес турбулентності. Реалізація цих CFD-моделей для випадку, коли необхідний серійний розрахунок різних сценаріїв забруднення повітряного середовища на вулицях в Україні неможлива.

Метою роботи є розробка CFD (computational fluid dynamics) моделі прогнозу забруднення атмосфери на вулицях, що не вимагає великих витрат комп'ютерного часу і застосування потужних ПК в процесі проведення серійних розрахунків.

Математична модель

Відомо, що під час розв'язання задач про розсіювання забруднювальних речовин на вулицях необхідно розрахувати поле швидкості вітрового потоку з урахуванням його деформації під час обтікання будівель. Для розв'язання такої задачі використовується гідродинамічна модель відривних течій ідеальної рідини [6]. У цьому випадку базовими рівняннями є [6]: рівняння переносу завихреності

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial u \omega}{\partial x} + \frac{\partial v \omega}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

і рівняння Пуассона для розрахунку функції струму

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega. \quad (2)$$

Відрив потоку відбувається в кутових точках будівель, в результаті чого утворюються вихори, тому виникає задача розрахунку їх інтенсивності. Для вирішення цієї задачі використовується підхід, розглянутий у роботах [7—9]. Для рівнянь гідродинаміки (1)—(2) виконується постановка таких граничних умов.

Для рівняння Пуассона (2) на поверхні перешкод ставиться гранична умова «непротікання» $\psi = 0$.

На границі входу повітряного потоку в розрахункову область задається швидкість повітряного потоку u та відповідні значення функції току ψ та завихреності ω : $\psi|_{\text{вход}} = \psi(y)$, $\omega|_{\text{вход}} = \omega(y)$.

На верхній границі розрахункової області також ставиться умова «непротікання» $\psi = \text{const}$.

На границі виходу повітряного потоку із розрахункової області ставляться «м'які» граничні умови, необхідні для замикання різницьових рівнянь [6].

Розв'язок стаціонарної гідродинамічної задачі знаходиться методом встановлення розв'язку за часом t . Для цього в початковий момент $t = 0$ для завихреності ставиться умова типу: $\omega|_{t=0} = 0$ або $\omega|_{t=0} = \omega_0(x, y)$.

Для розрахунку зон забруднення на вулицях за різних метеоумов та параметрів викиду забруднювальних речовин використовується рівняння масопереносу [10, 11]

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} + \sigma C = \text{div}(\mu \text{grad} C) + \sum_{i=1}^N Q_i(t) \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), \quad (3)$$

де C — концентрація забруднювальної речовини; u, v — компоненти вектора швидкості вітру; $\mu = (\mu_x, \mu_y)$ — коефіцієнт турбулентної дифузії; Q — інтенсивність викиду забруднювача; $\delta(x - x_i) \delta(y - y_i)$ — дельта-функція Дірака; x_i, y_i — координати джерела викиду; σ — коефіцієнт, що враховує хімічний розпад забруднювача; t — час.

Постановка крайових умов для цього рівняння розглянута в роботах [6, 7]. Для формування виду розрахункової області, положення будівель, їх форми використовується метод маркування розрахункової області [8, 9]. Розрахунок виконується на прямокутній різницевої сітці. Використовуючи цей метод, можна формувати будь-яку форму будівель на вулицях і вибирати їх взаємне розташування.

Метод розв'язку

Для інтегрування рівняння переносу завихреності застосовується поперемінно-трикутна різницева схема [10, 11].

Різницеві рівняння для розрахунку завихреності на кожному кроці розщеплення мають такий вигляд:

— на першому кроці розщеплення

$$\frac{\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \omega_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j}^+ \omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^+ \omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^+ \omega_{i,j} - v_{i,j}^+ \omega_{i,j-1}}{\Delta y} = 0;$$

— на другому кроці розщеплення

$$\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j}^- \omega_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^- \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^- \omega_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^- \omega_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} = 0,$$

де $u^+ = \frac{u + |u|}{2}$, $u^- = \frac{u - |u|}{2}$, $v^+ = \frac{v + |v|}{2}$, $v^- = \frac{v - |v|}{2}$.

Значення завихреності на кожному розрахунковому кроці розраховується за формулою «бігучого» розрахунку. Значення функції струму розраховується за допомогою різницевої схеми сумарної апроксимації [10, 11]. Різницеві рівняння записуються так:

$$\begin{aligned}
& \text{— на першому кроці} \quad \frac{\Psi_{ij}^{\frac{n+1}{4}} - \Psi_{ij}^n}{\Delta t} = \frac{\bar{\omega}_{ij}}{2}; \\
& \text{— на другому кроці} \quad \frac{\Psi_{i,j}^{\frac{n+1}{2}} - \Psi_{i,j}^n}{\Delta t} = -\frac{\Psi_{i,j}^{\frac{n+1}{2}} - \Psi_{i-1,j}^{\frac{n+1}{2}}}{\Delta x^2} - \frac{\Psi_{i,j}^{\frac{n+1}{2}} - \Psi_{i,j-1}^{\frac{n+1}{2}}}{\Delta y^2}; \\
& \text{— на третьому кроці} \quad \frac{\Psi_{i,j}^{\frac{n+3}{4}} - \Psi_{i,j}^{\frac{n+1}{2}}}{\Delta t} = \frac{\Psi_{i+1,j}^{\frac{n+3}{4}} - \Psi_{i,j}^{\frac{n+3}{4}}}{\Delta x^2} + \frac{\Psi_{i,j+1}^{\frac{n+3}{4}} - \Psi_{i,j}^{\frac{n+3}{4}}}{\Delta y^2}; \\
& \text{— на четвертому кроці} \quad \frac{\Psi_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^{\frac{n+3}{4}}}{\Delta t} = \frac{\bar{\omega}_{i,j}}{2}, \quad \bar{\omega}_{i,j} = \frac{1}{4}(\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j+1} + \omega_{i-1,j-1} + \omega_{i,j-1}).
\end{aligned}$$

Чисельне інтегрування рівняння переносу домішок проводиться за допомогою неявної різницевої схеми розщеплення [6, 7]. Похідна за часом апроксимується розділеною різницею «назад»

$$\frac{\partial C}{\partial t} \approx \frac{C_{ij}^{n+1} - C_{ij}^n}{\Delta t}.$$

В конвективних похідних доданки однонапрявленого переносу записуються таким чином:

$$\frac{\partial v C}{\partial y} = \frac{\partial v^+ C}{\partial y} + \frac{\partial v^- C}{\partial y}; \quad \frac{\partial u C}{\partial x} = \frac{\partial u^+ C}{\partial x} + \frac{\partial u^- C}{\partial x}.$$

З урахуванням попереднього виразу конвективні похідні апроксимуються розділеними різницями «проти потоку» на верхньому часовому шарі:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^+ C}{\partial x} &\approx \frac{u_{i+1,j}^+ C_{ij}^{n+1} - u_{ij}^+ C_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} = L_x^+ C^{n+1}; & \frac{\partial u^- C}{\partial x} &\approx \frac{u_{i+1,j}^- C_{i+1,j}^{n+1} - u_{ij}^- C_{ij}^{n+1}}{\Delta x} = L_x^- C^{n+1}; \\
\frac{\partial v^+ C}{\partial y} &\approx \frac{v_{i,j+1}^+ C_{ij}^{n+1} - v_{ij}^+ C_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} = L_y^+ C^{n+1}; & \frac{\partial v^- C}{\partial y} &\approx \frac{v_{i,j+1}^- C_{i,j+1}^{n+1} - v_{ij}^- C_{ij}^{n+1}}{\Delta y} = L_y^- C^{n+1}.
\end{aligned}$$

Компоненти швидкості u визначаються на вертикальних гранях різницевих комірок, а компоненти швидкості v — на горизонтальних гранях. Індекси цих граней відповідають індексам комірок, розташованих правіше або вище відповідної грані.

Другі похідні апроксимуються таким чином:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) &\approx \mu_x \frac{C_{i+1,j}^{n+1} - C_{ij}^{n+1}}{\Delta x^2} - \mu_x \frac{C_{ij}^{n+1} - C_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} = M_{xx}^- C^{n+1} + M_{xx}^+ C^{n+1}; \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) &\approx \mu_y \frac{C_{i,j+1}^{n+1} - C_{ij}^{n+1}}{\Delta y^2} - \mu_y \frac{C_{ij}^{n+1} - C_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = M_{yy}^- C^{n+1} + M_{yy}^+ C^{n+1}.
\end{aligned}$$

L_x^+ , L_x^- , L_y^+ , L_y^- , M_{xx}^+ , M_{xx}^- , M_{yy}^+ , M_{yy}^- — умовні позначення різницевих операторів. З урахуванням наведених вище позначень різницевої аналог рівняння (3) записується так:

$$\begin{aligned}
\frac{C_{ij}^{n+1} - C_{ij}^n}{\Delta t} + L_x^+ C^{n+1} + L_x^- C^{n+1} + L_y^+ C^{n+1} + L_y^- C^{n+1} + \sigma C_{ij}^{n+1} = \\
= \left(M_{xx}^+ C^{n+1} + L_{xx}^- C^{n+1} + L_{yy}^+ C^{n+1} + L_{yy}^- C^{n+1} \right) + q_{ij} \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Позначаємо δ_{ij} — число «1» або «0», в залежності від того, розміщується або ні в різничевої комірці « ij » джерело забруднення. Значення q_{ij} дорівнює інтенсивності q_k відповідного k -го джерела, розміщеного в різничевої комірці « ij », поділений на площу цієї комірки: $q_{ij} = q_k / (\Delta x \cdot \Delta y)$.

Розщеплюємо різничеве рівняння на чотири різничевих рівняння так, щоб на кожному кроці враховувався лише один напрямок переносу збурень, що визначається знаком при конвективній похідній. В цьому випадку різничеве рівняння має такий вигляд:

— на першому кроці розщеплення $k = \frac{1}{4}$

$$\frac{C_{ij}^{n+k} - C_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(L_x^+ C^k + L_y^+ C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{ij}^k = \frac{1}{4}(M_{xx}^+ C^k + M_{xx}^- C^n + M_{yy}^+ C^k + M_{yy}^- C^n) + \sum_{l=1}^N \frac{\bar{q}_l}{4} \delta_l;$$

— на другому кроці розщеплення $k = n + \frac{1}{2}, c = n + \frac{1}{4}$

$$\frac{C_{ij}^k - C_{ij}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2}(L_x^- C^k + L_y^- C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{ij}^k = \frac{1}{4}(M_{xx}^- C^k + M_{xx}^+ C^c + M_{yy}^- C^k + M_{yy}^+ C^c) + \sum_{l=1}^N \frac{\bar{q}_l}{4} \delta_l;$$

— на третьому кроці розщеплення $k = n + \frac{3}{4}, c = n + \frac{1}{2}$

$$\frac{C_{ij}^k - C_{ij}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2}(L_x^+ C^k + L_y^- C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{ij}^k = \frac{1}{4}(M_{xx}^- C^c + M_{xx}^+ C^k + M_{yy}^- C^k + M_{yy}^+ C^c) + \sum_{l=1}^N \frac{\bar{q}_l}{4} \delta_l;$$

— на четвертому кроці розщеплення $k = n + 1, c = n + \frac{3}{4}$

$$\frac{C_{ij}^k - C_{ij}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2}(L_x^- C^k + L_y^+ C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{ij}^k = \frac{1}{4}(M_{xx}^- C^k + M_{xx}^+ C^c + M_{yy}^- C^c + M_{yy}^+ C^k) + \sum_{l=1}^N \frac{\bar{q}_l}{4} \delta_l.$$

В наведених різницевих рівняннях використовується значення інтенсивності $\bar{q}_l = \frac{q_l}{\Delta x \Delta y}$. Значення

функції δ_l тотожно дорівнює нулю у всіх комірках, крім тих, де розміщується джерело викиду.

На основі розглянутих різницевих схем побудована числова модель переносу забруднювальних речовин на вулицях. Ця модель дозволяє враховувати такі фактори: наявність будівель та їх взаємне розташування в мікрорайоні міста, швидкість і напрямок вітру, атмосферна дифузію, розташування та інтенсивність викиду забруднювальних речовини.

Необхідно відмітити, що побудована числова модель може бути використана для вирішення як традиційних завдань у сфері екологічної безпеки — викид від автотранспорту, так і для задач аварійного забруднення атмосфери на вулицях.

Практична реалізація моделі

Розроблена числова модель була застосована для прогнозу рівня забруднення повітряного середовища в мікрорайоні для двох сценаріїв організації руху автотранспорту в мікрорайоні. Розрахунок виконувався за таких даних: довжина розрахункової області 250 м; ширина розрахункової області 210 м; швидкість повітря 3 м/с, коефіцієнт дифузії $\mu_x = \mu_y = 1,5 \text{ м}^2/\text{с}$.

В першому сценарії розглядається розміщення однієї автотраси в мікрорайоні (рис. 1), інтенсивність викиду CO на цій магістралі 0,007 г/(с·м).

В другому сценарії розглядається розміщення двох автомагістралей в мікрорайоні (рис. 2).

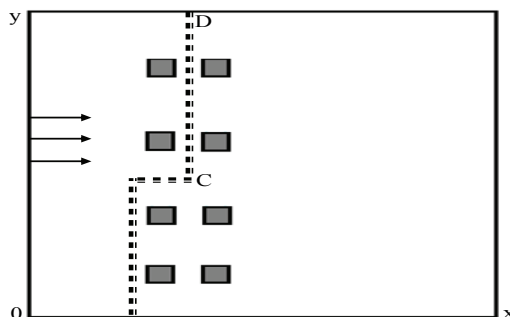


Рис. 1. Схема розрахункової області
(перший сценарій): ■ ■ ■ ■ ■ — положення
автомагістралі; CD — ділянка вулиці

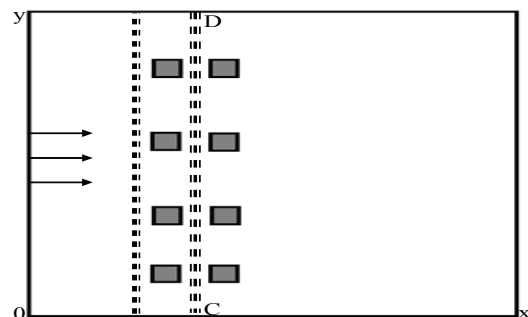


Рис. 2. Схема розрахункової області
(другий сценарій): ■ ■ ■ ■ ■, ■ ■ ■ ■ ■ —
положення автомагістралей; CD — ділянка вулиці

Перша автомагістраль (див. рис. 1) має більшу інтенсивність викиду забруднювальних речовин 0,012 г/(с·м) та проходить на границі мікрорайону. Це означає, що проектувальники захищають мікрорайон від викидів цієї магістралі. Друга автомагістраль (див. рис. 2) проложена безпосередньо між будівлями мікрорайону і викид складає 0,007 г/(с·м).

Ставиться задача локального прогнозування забруднення повітряного середовища для кожного сценарію розміщення автомагістралі.

Потрібно відмітити, що на показаних нижче рисунках значення концентрації представлено в безрозмірному вигляді: кожне число — це величина концентрації в відсотках від величини максимальної концентрації на певний момент часу. Числові значення представлені в форматі «цілих чисел», тобто дробова частина не видається на друк. Такий вивід результатів ефективний під час проведення серійних розрахунків, коли із різних варіантів обирається оптимальний для цієї ситуації, тобто потрібно оперативно проаналізувати інформацію відносно величини концентрації в будь-якій частині розрахункової області. Але за вимогою користувача можна виводити результат у форматі «дійсних чисел». Ці дані дозволяють оцінити вигляд утвореної зони забруднення, її розміри та інтенсивність.

На рис. 3 показана зона забруднення повітряного середовища в мікрорайоні для першого сценарію. А на рис. 4 показана зона забруднення повітряного середовища в мікрорайоні для другого сценарію.

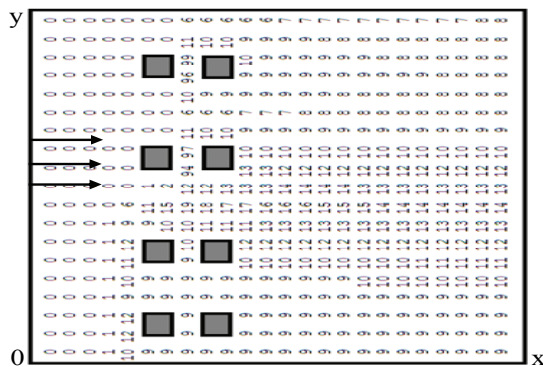


Рис. 3. Зона забруднення атмосфери (перший сценарій): $C_{\max} = 2,54 \text{ мг/м}^3$; $U = 3 \text{ м/с}$; $\mu_x = \mu_y = 1,5 \text{ м}^2/\text{с}$; $t = 150 \text{ с}$

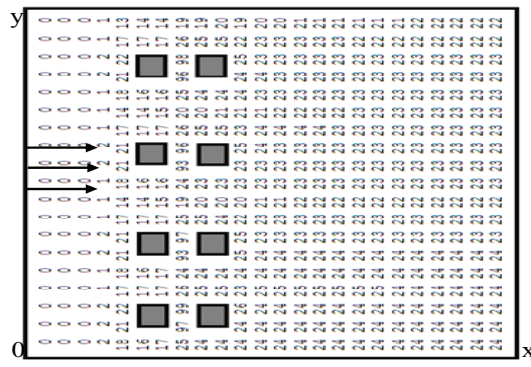


Рис. 4. Зона забруднення атмосфери (другий сценарій): $C_{\max} = 3,05 \text{ мг/м}^3$; $U = 3 \text{ м/с}$; $\mu_x = \mu_y = 1,5 \text{ м}^2/\text{с}$; $t = 150 \text{ с}$

Для детального аналізу загазованості повітряного середовища побудовані графіки для ділянки вулиці CD, розміщеної між будівлями рис. 5—6.

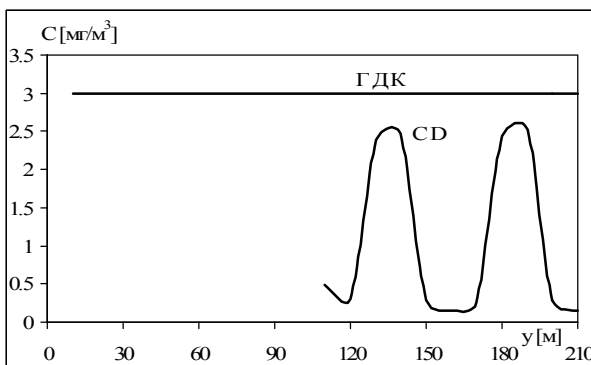


Рис. 5. Зміна концентрації CO вздовж ділянки вулиці CD (перший сценарій): $t = 150 \text{ с}$; $C_{\max} = 2,54 \text{ мг/м}^3$; $U = 3 \text{ м/с}$; $\mu_x = \mu_y = 1,5 \text{ м}^2/\text{с}$

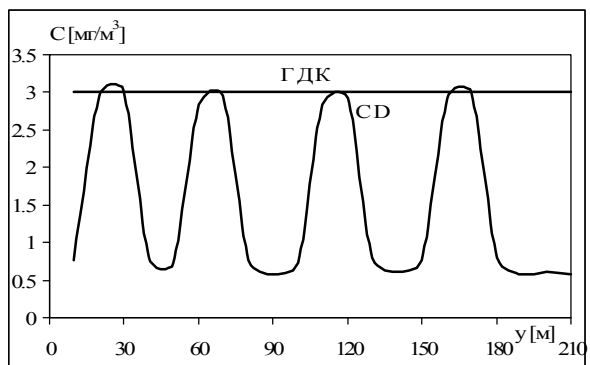


Рис. 6. Зміна концентрації CO вздовж ділянки вулиці CD (другий сценарій): $t = 150 \text{ с}$; $C_{\max} = 3,05 \text{ мг/м}^3$; $U = 3 \text{ м/с}$; $\mu_x = \mu_y = 1,5 \text{ м}^2/\text{с}$

Для першого сценарію організації руху транспорту в мікрорайоні (див. рис. 1) спостерігаються два локальних максимуми концентрації CO (рис. 5), оскільки вздовж цієї ділянки дороги розміщується по дві будівлі з кожної сторони. При цьому значення концентрації нижче ПДК приблизно на 10 %.

Для другого сценарію (див. рис. 2) на заданій ділянці спостерігається чотири локальних максимуми концентрації CO (рис. 6), оскільки вздовж неї знаходиться по чотири будівлі з кожної сторони. При цьому максимальне значення концентрації локально перевищує ГДК або йому рівне. Таким чином, для другого сценарію для випадку погіршення метеообстановки (зменшення швидкості повітря, штиль) можна чекати більш значного перевищення ГДК по CO.

Висновки

1. Розроблена ефективна CFD (computational fluid dynamics) модель для прогнозу рівня забруднення атмосфери на вулицях мікрорайону, що знаходяться вздовж автомагістралей.

2. Характерною рисою моделі є оперативність її реалізації на ПК (розрахунок згідно із запропонованою моделлю складає 7 с), що дозволяє застосовувати її для проведення серійних розрахунків.

3. Побудована модель може бути ефективно застосована в проектних роботах, направлених на реконструкцію вже існуючих мікрорайонів міста або під час проектування нових мікрорайонів, оскільки дозволяє враховувати наявність будівель та їх взаємне розташування в мікрорайоні міста, швидкість і напрямок вітру, атмосферну дифузію, місце розташування та інтенсивність викиду забруднювальної речовини.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бруязкий Е. В. Теория атмосферной диффузии радиоактивных выбросов / Е. В. Бруязкий. — К. : Институт гидро-механики НАН Украины, 2000. — 443 с.
2. Шаталов А. А. Методика расчета распространения аварийных выбросов, основанная на модели рассеивания тяжелого газа / А. А. Шаталов, М. В. Лисанов // Безопасность труда в промышленности. — 2004. — № 9. — С. 46—52.
3. Hanna S. Air Quality Modeling Over Short Distances // College on Atmospheric Boundary Layer and Air Pollution Modeling: 16 May-3 June 1994. № SMR/760-2 — P. 712—743.
4. Tedeschi G. Study of vertical transport of marine aerosol using an unsteady 2D model // Conference Abstracts of 31st NATO / SPS International Technical Meeting on Air Pollution Modeling and it's Application, 27 September — 01 October, Torino, Italy, 2010. № 4, 9.
5. Murakami S. Comparison of «k-ε» model, ASM and LES with wind tunnel test for flow field around cubic model / S. Murakami, A. Mochida, H. Yoshihiko // 8th Intern. Conf. on Wind Engineering, Western Ontario, July 8—11, 1991. — № 12—3.
6. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде / [М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев] — К. : Наукова думка, 1997. — 368 с.
7. Моделирование аварийных ситуаций на промышленных объектах и безопасность жизнедеятельности / [Л. И. Антошкина, Н. Н. Беляев, Л. Ф. Долина, Е. Д. Коренюк]. — Д. : Нова ідеологія, 2011. — 123 с.
8. Biliaiev M. M. Numerical simulation of indoor air pollution and atmosphere pollution for regions having complex topography / M. M. Biliaiev, M. M. Kharytonov // Conference Abstracts of 31st NATO / SPS International Technical Meeting on Air Pollution Modelling and it's Application, 27 September — 01 October, Torino, Italy, 2010. № 1, 7.
9. Belyaev M. Air Pollution Modelling of Technogenic Catastrophes caused by Terrorist Attacks on Rail Transport of Chemical Substances / M. Belyaev // Simulation and Assessment of Chemical Processes in a Multiphase Environment. NATO Science for Peace and : Security Series. — С. : Environmental Security, Springer, 2007. P. 327—336.
10. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. — М. : Наука, 1982. — 316 с.
11. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М. : Наука, 1983. — 616 с.

Рекомендована кафедрою моделювання та моніторингу складних систем

Стаття надійшла до редакції 28.10.2013
Рекомендована до друку 18.09.2013

Русакова Тетяна Іванівна — асистент кафедри аерогідромеханіки та енергомасопереносу.

Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара;

Біляєв Миколай Миколайович — завідувач кафедри гідравліки та водопостачання.

Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна, Дніпропетровськ