

О.Н. Романюк, д-р техн. наук, проф.,  
І.В. Абрамчук, старш. викладач,  
О.О. Дудник, магістрант,  
О.В. Мельник, аспірант.  
Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця  
ran12345@mail.ru

## Модифікація гаусівської моделі пікселя для задач антиаліазингу

*У даній роботі розглядається модифікація гаусівської моделі пікселя, яка не потребує використання заздалегідь розрахованих значень об'єму перетину. Пропонуються структурні схеми пристроїв для задач антиаліазингу з використанням гаусівської моделі пікселя.*

**Ключові слова:** моделі пікселя, гаусівська модель пікселя, антиаліазинг.

### Вступ

Підвищення інформативності комп'ютерної графіки досягають за рахунок формування зображень, які точніше відтворюють конструктивні та візуальні особливості об'єкта. При формуванні таких зображень у графічних системах необхідно відображати сцени з великою деталізацією, тому на даному етапі розвитку комп'ютерної графіки особливу увагу приділяють не тільки швидкодії формування графічних зображень, але й їх реалістичності.

Одним з факторів, що суттєво впливають на реалістичність зображення, є ефект аліазингу [1-3], який спричинений недостатньою роздільною здатністю пристроїв відображення і проявляється у вигляді чітко виражених „зубців” на краях графічних об'єктів. Оскільки існують фізичні та економічні обмеження щодо підвищення роздільної здатності сучасних дисплеїв, то у системах комп'ютерної графіки використовують спеціальні методи антиаліазингу. Існуючі методи антиаліазингу характеризуються значними обчислювальними витратами та складністю апаратної реалізації, що обмежує їх застосування. Тому задача підвищення продуктивності процедури антиаліазингу та спрощення її програмно-апаратної реалізації, є актуальною.

### Аналіз літератури та постановка задачі

Методи антиаліазингу можна умовно поділити на методи надлишкової вибірки та аналітичні [1]. Одним із найбільш поширених методів надлишкової вибірки є метод суперсемплінгу. Метод полягає в тому, що зображення сцени обчислюється з більшою роздільною здатністю ніж у екрана, а перед відображенням її зменшують шляхом усереднення [1, 2]. Метод має просту апаратну реалізацію, однак характеризується низькою швидкодією, оскільки при збільшенні дискретизації в  $n$  разів кількість обчислень на один піксел і обсяги необхідної пам'яті, збільшується в  $n^2$  разів.

В аналітичних методах піксель

розглядається не як умовна точка, а як скінченна ділянка [1,2].

Характерна особливість аналітичних методів полягає в тому, що під час дискретизації неперервного зображення враховуються технічні характеристики пристроїв відображення. У загальному вигляді для обчислення інтенсивності кольору пікселя використовується вираз [3]:

$$I_A(P_x, P_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{ideal}(x, y) \cdot F(x - P_x, y - P_y) dx dy, \quad (1)$$

де  $I_A$  - інтенсивність кольору пікселя з координатами  $(P_x, P_y)$  (у випадку кольорового зображення окремо обчислюють інтенсивність кожної з трьох складових компонент кольору);  $I_{ideal}(x, y)$  - аналітична функція, яка задає інтенсивність кольору в кожній точці простору;  $F(x, y)$  - модель пікселя, тобто функція, яка описує просторове розподілення світла, що випромінюється пікселем. Дану функцію часто називають функцією фільтра [3].

Найбільшого поширення отримала модель, у якій піксель розглядається як квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці [1, 3], причому центр квадрата збігається із центром пікселя. Квадратна модель пікселя є найбільш простою з обчислювальної точки зору й апаратної реалізації, однак не забезпечує максимального згладжування меж зображення, оскільки в більшості пристроїв відображення розподілення інтенсивності пікселя не має форми квадрата.

Більш точною є кругова модель пікселя, однак в ній не враховується нелінійний характер зміни інтенсивності залежно від відстані

Коли до якості згладжування зображень висуваються підвищені вимоги, то використовується конусна модель пікселя. При цьому інтенсивність кольору пікселя встановлюється пропорційно до об'єму, який відтинається від конуса, розташованого в центрі пікселя (центр основи конуса збігається з центром пікселя, радіус основи конуса дорівнює 1, об'єм конуса дорівнює 1).

Формула для розрахунку об'єму  $F(x, y)$  має такий вигляд

$$F(x, y) = \begin{cases} H \left( 1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right), & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} < R; \\ 0, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} \geq R. \end{cases} \quad (2)$$

де  $H$  - висота конуса, яку вибирають таким чином, щоб об'єм конуса дорівнював одиниці [2, 3],  $R$  - радіус основи конуса,  $x, y$  - відстань від центра конуса.

На жаль, конусна модель не є фізично-коректною, а тому є наближеною, що не може забезпечити максимальний реалізм.

Для більшості пристроїв відображення більш адекватною є "гаусівська" модель піксела. Дана модель враховує, що інтенсивність світла, яке випромінює піксел, є максимальною в центрі та зменшується в напрямку до границі піксела і на відстані  $R$  дорівнює нулю [2]. Обчислення інтенсивності кольору для такої моделі зводиться до обчислення об'єму фігури, яка утворюється в результаті перетину функції фільтра та границь примітива [2].

Оскільки модель піксела, яка використовує функцію Гаусса, характеризується великими обчислювальними витратами, то її використовують тільки у тих випадках, коли до якості крайового згладжування висуваються досить жорсткі вимоги.

Метою статті є спрощення процедури антиаліазингу з використанням Гаусівської моделі піксела за рахунок знаходження простих апроксимаційних формул для розрахунку об'єму фігури, яка утворюється в результаті перетину фільтра та границь примітива.

Використаємо модель розподілу інтенсивності піксела, коли щільність інтенсивності розподілена за нормальним законом

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3)$$

де максимум інтенсивності припадає на центр піксела, який приймається за центр системи координат. Зауважимо, що вибрана функція щільності є поверхнею обертання та задовольняє умові нормування: об'єм, що знаходиться між  $p(x, y)$  і площиною  $xOy$  дорівнює одиниці. Є можливість впливати на властивості моделі, змінюючи параметр  $\sigma$ . Так, наприклад, вибираючи  $\sigma=0.2$  отримуємо, що приблизно 99% всього об'єму припадає на прямокутник  $\{(x, y): -0.5 \leq x \leq 0.5, -0.5 \leq y \leq 0.5\}$ , на якому локалізований піксел.

На рис. 1 зображено форму піксела

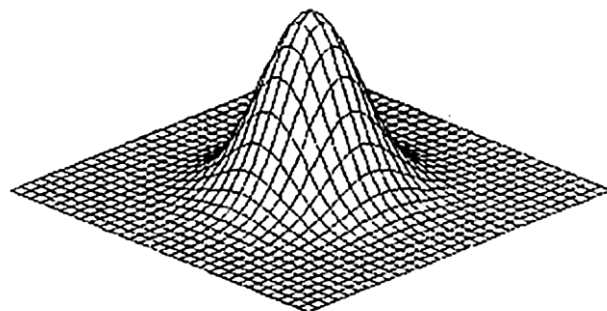


Рисунок 1 – Форма піксела

Розглянемо модифікацію одного з найбільш відомих алгоритмів антиаліазингу відрізків прямих — алгоритму Гупти-Спроула [2, 3]. Нехай маємо відрізок прямої, що розташована на відстані  $d$  від центра піксела — точки  $O(0,0)$ . Позначимо за  $V(d)$  об'єм тіла, обмеженого поверхнею (1), площиною  $xOy$  та площиною, що знаходиться на відстані  $d$  від осі  $Oz$ . Тоді інтенсивність кольору піксела  $I$  визначається за формулою:

$$I = F(d) = V(d) - V(d). \quad (4)$$

Для задач антиаліазингу необхідно обчислювати значення функції  $V(d)$ . Зображення частини поверхні (1), що має об'єм  $V(d)$  при  $\sigma=0.2$ ,  $d=0.1$  подано на рис. 1.

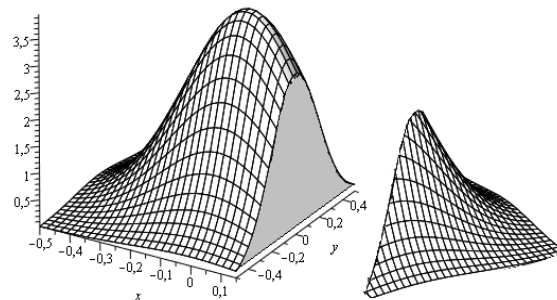


Рисунок 2 – Частина поверхні (1), що має об'єм  $V(d)$ .

Враховуючи, що поверхня (1) є поверхнею обертання, зорієнтуємо систему координат так, щоб пряма мала рівняння  $x = d$  (була паралельна осі  $Oy$  і знаходилася від неї на відстані  $d$ ), тоді

$$V(d) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx, \quad (5)$$

враховуючи вигляд функції  $p(x, y)$ ,  
відокремимо змінні:

$$V(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = N(d, 0, \sigma), \quad (6)$$

де позначено  $N(d, 0, \sigma)$  — нормальний закон розподілу з математичним сподіванням  $a=0$  і середнім квадратичним відхиленням  $\sigma$ .

Зауважимо, що обчислення  $V(d)$  за формулою (6) є доволі громіздким, а отже неефективним.

Апроксимуємо функцію  $N(d, 0, \sigma)$  многочленом  $P_n(d)$  невисокого порядку  $n=2$ , або  $n=3$ , для реалізації якого використовують тільки операції додавання та множення. Враховуючи симетрію функції  $N(d, 0, \sigma)$ , відносно точки  $(0, 0.5)$  і вибране значення  $\sigma$ , виконаємо апроксимацію за методом найменших квадратів з адаптивними вузлами на проміжку  $d \in [0; c \cdot \sigma]$ , де  $c$  — деяка константа.

Так, наприклад, якщо  $\sigma=0.2$ , то на проміжку  $d \in [0; 0.5]$ , отримаємо при  $n=2$

$$V(d) \approx P_2(d) = 0.5 + 2.151d - 2.358d^2, \quad (7)$$

а при  $n=3$

$$V(d) \approx P_3(d) = 0.496 +$$

$$+ 2.288d - 3.074d^2 + 0.956d^3 \quad (8)$$

Графіки функцій  $P_2(d)$ ,  $P_3(d)$ ,  $N(d, 0, 0.2)$  зображено на рис.3.

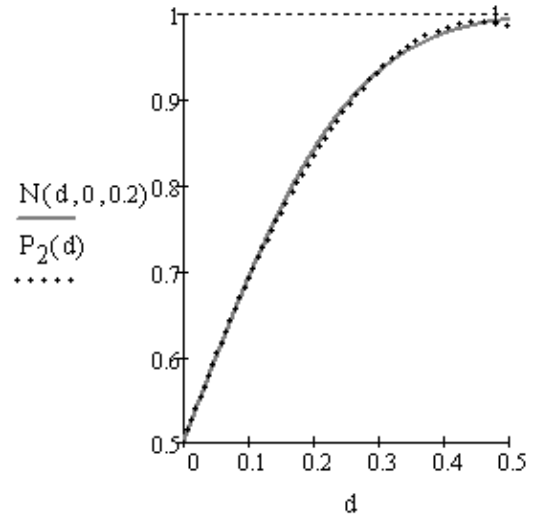
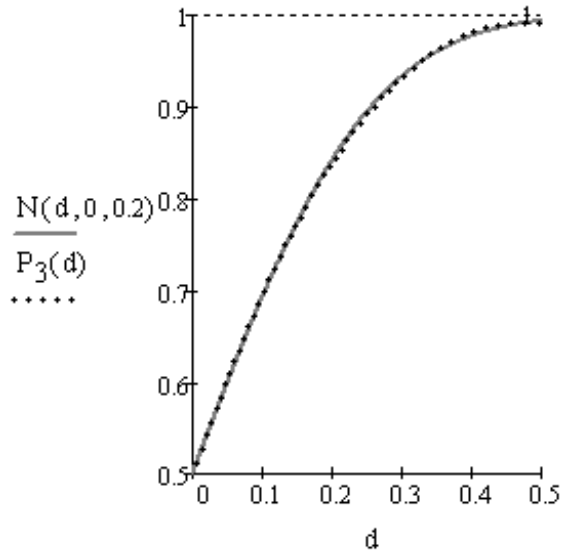


Рисунок 3 – Графіки функції  $V(d) = N(d, 0, 0.2)$ , та апроксимуючих функцій  $P_2(d)$ ,  $P_3(d)$ .

Позначимо за  
 $\Delta 2(d) = |N(d, 0, 0.2) - P_2(d)|$ ,  
 $\Delta 3(d) = |N(d, 0, 0.2) - P_3(d)|$  — абсолютні похибки апроксимації на відрізку  $d \in [0; 0.5]$ . Як видно з рис. 4, вони не перевищують  $7 \cdot 10^{-3}$  і  $5 \cdot 10^{-3}$ , відповідно.

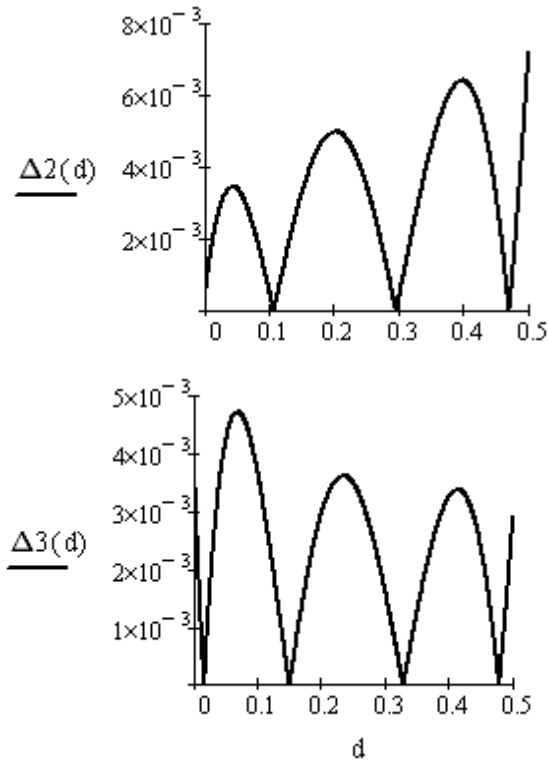


Рисунок 4 – Графіки абсолютних похибок  $\Delta 2(d)$  і  $\Delta 3(d)$ .

Запишемо вираз для розрахунку  $P_2(d)$  у такому вигляді:

$$P_2(d) = 0.5 + (2.151 - 2.358d)d \quad (9)$$

На рис 5. зображено структурну схему блока для розрахунку  $P_2(d)$ .

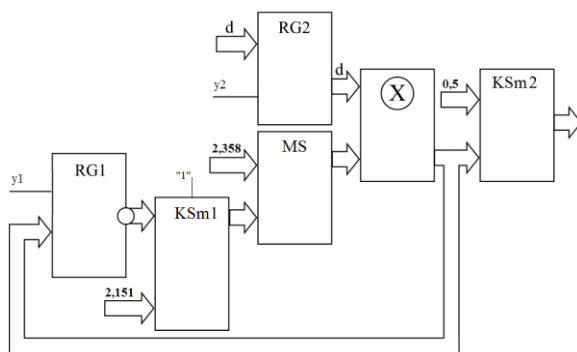


Рисунок 5 – Структурна схема блока для розрахунку  $V(d)$  поліномом  $P_2(d)$

Значення відстані  $d$  заноситься в регістр  $RG2$ . Через мультиплексор  $MS$  на вхід блока множення передамо значення 2,358. Добуток  $2.358d$  з виходу блока множення занесемо в  $RG1$ . На виході комбінаційного суматора  $KSm1$  отримуємо значення  $(2.151 - 2.358d)$ , яке

передається через мультиплексор  $MS$  на вхід блока множення. Суматор  $KSm2$  використовують для додавання до добутку, отриманого на виході блока множення, значення 0,5.

Розглянемо наближення функції  $V(d) = N(d, 0, \sigma)$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $d \in [0, 0.5]$  за допомогою кусково-лінійної апроксимації. При цьому поставимо умову використання невеликої кількості проміжків розбиття відрізка  $[0, 0.5]$  при забезпеченні достатньо високої точності апроксимації.

Для виконання зазначених вимог проведемо чисельне моделювання, змінюючи кількість сегментів розбиття, їх довжину та використовуючи на кожному такому сегменті лінійну функцію, що є елементом найкращого чебишевського наближення (в сенсі мінімізації абсолютної величини відхилення). Чисельно обчислюючи коефіцієнти апроксимуючих функцій з точністю до  $10^{-3}$ , отримали наступний результат:

$$V(d) \approx P_1(d) = \begin{cases} 0.506 + 1.79d, & 0 \leq d < 0.165; \\ 0.636 + 1.008d, & 0.165 \leq d < 0.305; \\ 0.853 + 0.295d, & 0.305 \leq d < 0.5. \end{cases} \quad (10)$$

Як видно з рис. 6, графік абсолютної похибки  $\Delta 1(d) = |N(d, 0, \sigma) - P_1(d)|$  не перевищує 0.01, що відповідає 1% від максимального рівня інтенсивності. При використанні 256 рівнів інтенсивності похибка не перевищуватиме 2,6 рівня. Таку похибку людське око при нормальних умовах розрізнити не в змозі.

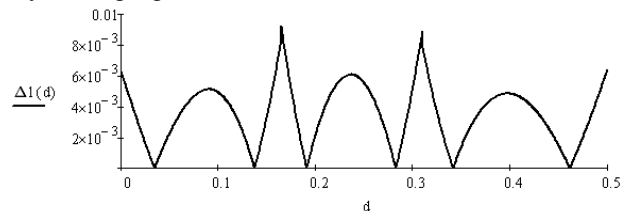


Рисунок 6 – Графік абсолютної похибки  $\Delta 1(d)$ .

Подамо коефіцієнти лінійних функцій як бінарні, зберігаючи розряди до  $2^{-8}$ :

$$V(d) \approx P_b(d) = \begin{cases} 0.1000001_b + 1.11001_b \cdot d, & 0 \leq d < 0.165; \\ 0.101001_b + 1_b \cdot d, & 0.165 \leq d < 0.305; \\ 0.11011011_b + 0.01001_b \cdot d, & 0.305 \leq d < 0.5. \end{cases}$$

Графік абсолютної похибки  $\Delta 1_2(d) = |N(d, 0, \sigma) - P_b(d)|$  (див. рис.7) не перевищує 0.01, що відповідає 1% максимальної інтенсивності. Таким чином подання  $V(d)$  у формі (4) не погіршує наближення  $P_1(d)$ , проте має перевагу у швидкості обчислення.

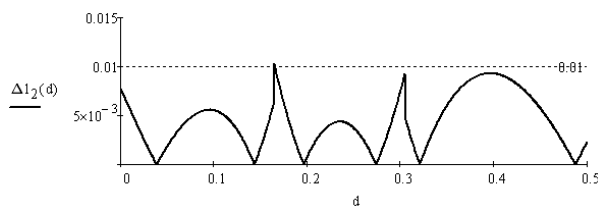


Рисунок 7 - Графік абсолютної похибки  $\Delta l_2(d)$ .

На рис. 8 зображено структурну схему блока для розрахунку  $V(d)$  поліномом  $P_1(d)$

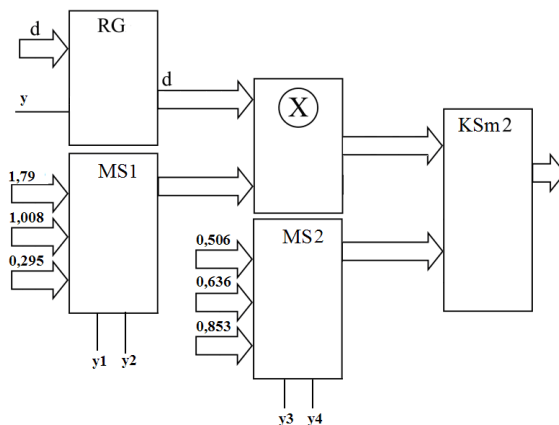


Рисунок 8 – Структурна схема блока для розрахунку поліному  $P_1(d)$

## Висновки

Запропонована модифікація Гаусівської моделі пікселя, яка не потребує використання заздалегідь розрахованих значень об'єму перетину.

Отримано апроксимаційні вирази для розрахунку об'ємів перетину, які використовують тільки операції множення та додавання, що дає можливість їх реалізувати апаратно.

Запропоновані структурні схеми пристроїв для задач антиаліазингу з використанням Гаусівської моделі пікселя.

Отримані моделі та структури можуть бути використані в високопродуктивних системах комп'ютерної графіки для формування фотореалістичних зображень.

## Список використаної літератури

1. Романюк О.Н. Класифікація методів антиаліазингу / О.Н. Романюк, О.В.Мельник, С.І. Вяткін // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2014. – №3 (50). – С. 154-160.
2. Романюк О.Н. Використання конусної моделі пікселя для антиаліазингу відрізків прямих / О.Н. Романюк, М.С. Курінний // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2004. – № 4. – С. 76-81.
3. Романюк О.Н. Методи та засоби антиаліазингу контурів об'єктів у системах комп'ютерної графіки: монографія / О.Н. Романюк, М.С. Курінний. – Вінниця: УНІВЕСУМ-Вінниця, 2006. – 163 с.

Надійшла до редакції 10.03.2015

**А.Н. РОМАНИУК, И.В. АБРАМЧУК, О.О. ДУДНИК, О.В. МЕЛЬНИК**

Винницкий национальный технический университет, г. Винница

### МОДИФИКАЦИЯ ГАУСОВСКОЙ МОДЕЛИ ПИКСЕЛА ДЛЯ ЗАДАЧ АНТИАЛИАЗИНГА

В данной работе рассматривается модификация гауссовской модели пикселя, которая не требует использования заранее рассчитанных значений объема сечения. Предлагаются структурные схемы устройств для задач антиалиазинга с использованием гауссовской модели пикселя.

**Ключевые слова:** модели пикселя, гауссовская модель пикселя, антиалиазинг.

**A.N. ROMANIUK, I.V. ABRAMCHUK, O.O. DUDNYK, O.V. MELNIK**

Vinnitsia National Technical University, Vinnitsia, Ukraine

### MODIFICATION OF THE GAUSSIAN PIXEL MODEL FOR THE PROBLEMS OF ANTIALIASING

In this paper we consider a modification of pixel Gaussian model, which does not require the use of pre-calculated values of the volume section. The structural diagrams of devices for tasks of anti-aliasing using the Gaussian model pixel are provided.

**Keywords:** pixel models, pixel Gaussian model, antialiasing.