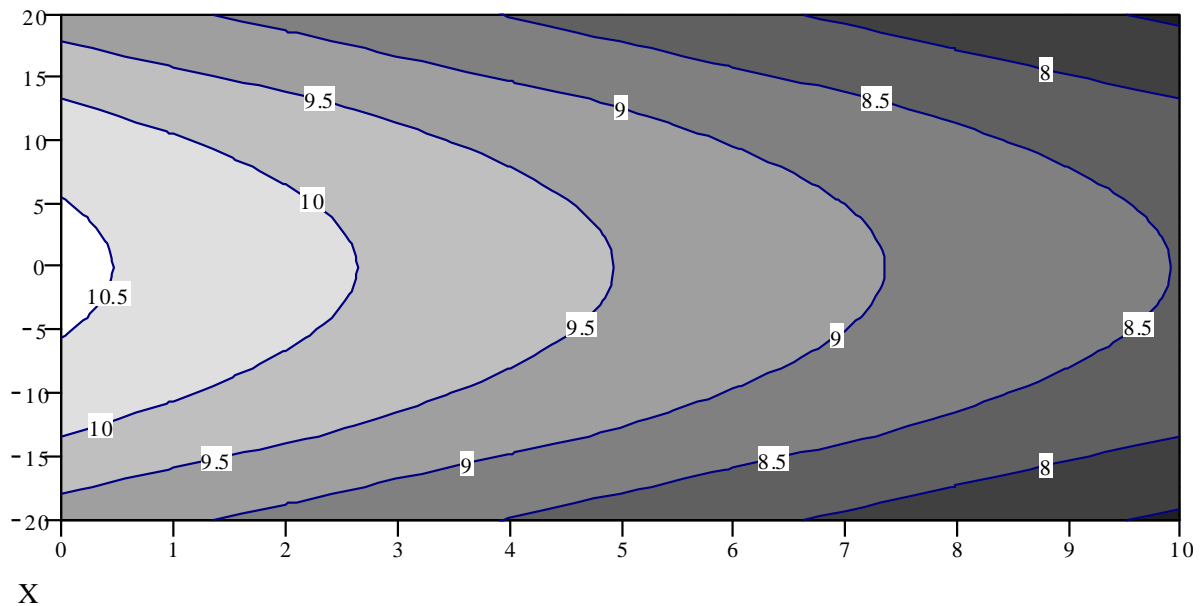


В. Б. Мокін

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ТА УПРАВЛІННЯ ЯКІСТЮ РІЧКОВИХ ВОД



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. Б. Мокін

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ТА
УПРАВЛІННЯ ЯКІСТЮ РІЧКОВИХ ВОД**

Монографія

«УНІВЕРСУМ-Вінниця»

2005

УДК 681.51+519.6+556.013

М 74

Рецензенти:

д.т.н., проф. **В. Я. Данилов** (Інститут аналізу системних досліджень,
м. Київ)

д.т.н., проф. **Р. Н. Квєтний** (Вінницький національний технічний
університет, м. Вінниця)

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти та науки України (протокол № 8 від 31 березня 2005 р.)

Мокін В.Б.

М74 Математичні моделі для контролю та управління якістю річкових вод. Монографія. — Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. — 172 с. Іл. 22. Бібліогр.: 143 назви.

ISBN 966-641-128-8

У монографії представлено як відомі, так і розроблені автором математичні моделі зміни стану річкових вод у часі й у просторі, обумовлені надходженням до річки стічних чи зворотних вод. Приведено алгоритми ідентифікації запропонованих математичних моделей. Наведено метод ідентифікації офіційно незареєстрованих скидів стічних вод.

Монографія розрахована на аспірантів та науковців, які займаються математичним моделюванням і обчислювальними методами у галузі водних ресурсів. Буде корисною, також, студентам та магістрантам, які займаються математичним моделюванням та прогнозуванням стану довкілля.

УДК 681.51+519.6+556.013

ISBN966-641-128-8

© В. Мокін, 2005

ЗМІСТ

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВСТУП | 7 |
| 1. ОГЛЯД МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗМІНИ СТАНУ РІЧКОВИХ ВОД, ПРИДАТНИХ ДО СИНТЕЗУ ЗАКОНІВ УПРАВЛІННЯ ЦИМ СТАНОМ | 9 |
| 1.1. Характеристика річки як об'єкта управління..... | 9 |
| 1.2. Огляд загальноприйнятих показників та критеріїв якості річкових вод | 11 |
| 1.3. Аналіз відомих математичних моделей процесів забруднення та очищення у річкових системах | 13 |
| 1.4. Висновки | 31 |
| 2. РОЗРОБКА ПРОСТОРОВО-ОДНОВИМІРНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ТА УПРАВЛІННЯ ЯКІСТЮ РІЧКОВИХ ВОД | 32 |
| 2.1. Розробка одновимірної математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення великої кількості стічних вод для найбільш забрудненого потоку річки..... | 32 |
| 2.1.1. Постановка задачі..... | 32 |
| 2.1.2. Розв'язання задачі для випадку трьох входів стічних вод.. | 37 |
| 2.1.3. Розв'язання задачі для випадку довільної кількості місць надходження стічних вод та водозаборів. | 41 |
| 2.1.4. Приклад моделювання для безіменної малої річки Вінницької області. | 45 |
| 2.2. Розробка одновимірної математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення великої кількості стічних вод для найменш забрудненого потоку річки | 47 |
| 2.2.1. Постановка задачі..... | 47 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.2.2. Побудова математичної моделі. | 48 |
| 2.3. Узагальнення одновимірної математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення стічних вод у розгалуженій річковій системі на найменш та найбільш забруднений річковий потік..... | 53 |
| 2.3.1. Вихідні передумови та постановка задачі. | 53 |
| 2.3.2. Узагальнення математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення річкового потоку з багатьма входами стічних вод на найменш та найбільш забруднений річковий потік. | 55 |
| 2.3.3. Узагальнення розроблених математичних моделей для розгалуженої річкової системи | 58 |
| 2.3.4. Приклад моделювання для безіменної малої річки Вінницької області. | 59 |
| 2.4. Розширення запропонованого підходу до побудови математичних моделей з використанням в якості базових інших відомих моделей процесів самоочищення річкових вод | 60 |
| 2.4.1. Використання авторської математичної моделі послідовно-одночасних річкових самоочисних процесів | 61 |
| 2.4.2. Використання математичної моделі В. І. Лаврика | 63 |
| 2.5. Розробка алгоритмів ідентифікації параметрів та структури математичних моделей процесів самоочищення та розбавлення стічних вод у розгалуженій річковій системі на найменш та найбільш забруднений річковий потік..... | 65 |
| 2.5.1. Відомі алгоритми ідентифікації параметрів та структури математичних моделей процесів самоочищення та математичних моделей розбавлення стічних вод у річкових, на основі яких виведено узагальнену математичну модель. | 66 |
| 2.5.2. Розробка алгоритму ідентифікації параметрів та структури узагальненої математичної моделі процесів самоочищення та | |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| розбавлення стічних вод у річкових..... | 72 |
| 2.5.3. Варіації алгоритму ідентифікації параметрів та структури узагальненої математичної моделі. | 81 |
| 2.6. Ідентифікація узагальненої математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення за даними регулярного державного моніторингу вод..... | 82 |
| 2.6.1. Розробка алгоритму ідентифікації. | 82 |
| 2.6.2. Приклад ідентифікації математичної моделі за відсутності скидів стічних вод чи водозаборів. | 86 |
| 2.7. Доведення адекватності розробленої математичної мо- делі..... | 91 |
| 2.7.1. Підхід до побудови математичної моделі для багатьох скидів стічних вод І. Д. Родзиллера. | 91 |
| 2.7.2. Перевірка ідентичності розробленої математичної моделі та математичної моделі І. Д. Родзиллера. | 95 |
| 2.7.3. Порівняльний аналіз адекватності розробленої математичної моделі та моделі І. Д. Родзиллера на прикладах. .. | 98 |
| 2.8. Висновки | 104 |
| 3. РОЗРОБКА ПРОСТОРОВО-ДВОВИМІРНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ТА УПРАВЛІННЯ ЯКІСТЮ РІЧКО- ВИХ ВОД | 106 |
| 3.1. Розробка двовимірної просторової математичної моделі процесів поширення стічних вод у річці від одного джерела | 106 |
| 3.1.1. Постановка задачі..... | 106 |
| 3.1.2. Розробка математичної моделі ламінарної зони..... | 109 |
| 3.1.3. Розробка математичної моделі турбулентної зони..... | 113 |
| 3.1.4. Приклад моделювання. | 119 |
| 3.2. Визначення допустимої області параметрів двовимірної просто- рової математичної моделі | 121 |

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.3. Ідентифікація параметрів та структури математичної моделі . | 124 |
| 3.4. Приклад ідентифікації параметрів та структури двовимірної просторової динамічної математичної моделі | 131 |
| 3.5. Висновки | 137 |
| 4. МЕТОД КОНТРОЛЮ ВИТРАТ ТА ЯКОСТІ СТІЧНИХ ЧИ ЗВОРОТНИХ ВОД, ЩО НАДІЙШЛИ ДО РІЧКИ | 139 |
| 4.1. Постановка задачі..... | 139 |
| 4.2. Огляд та адаптація до особливостей задачі відомих математичних моделей річкових процесів | 140 |
| 4.3. Характеристика проблеми контролю змін забруднення води в цілому | 142 |
| 4.4. Розв'язання задачі контролю змін окремо показників якості та окремо витрат стічних вод | 147 |
| 4.5. Приклад розв'язання задачі контролю | 150 |
| 4.6. Висновки | 152 |
| ВИСНОВКИ..... | 153 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ..... | 156 |

ВСТУП

У наш час, коли все актуальнішою стає проблема чистої води або хоча б води, яка б відповідала вимогам водокористування різного типу, будь-які дослідження, спрямовані на вироблення оптимальних рішень щодо поліпшення стану природних вод, є надзвичайно актуальними [15, 19, 45, 123, 118].

Історія знає чимало прикладів, коли кропітка робота вчених у галузі моделювання та прогнозування стану довкілля давала іншим по-новому поглянути на навколишнє природне середовище, переорієнтувати своє ставлення до нього, ввести певні обмеження на свою діяльність. Найбільш значущими та відомими прикладами є роботи Д. Х. Медоуза та Дж. Форрестера [51, 124] з прогнозування наслідків антропогенної діяльності людства у різних регіонах. Подібні роботи потрібні і в галузі моделювання якості річкових вод в Україні. У монографії наведено результати основних з цих робіт.

Для того, щоб виробити оптимальну стратегію управління довкіллям, щоб синтезувати комплекс оптимальних заходів, спрямованих на поліпшення якості поверхневих вод, перш за все, треба ідентифікувати адекватну модель процесів, які протікають у цих водах.

Питанням синтезу та вибору математичних моделей, оптимальних для заданих умов, їх ідентифікації, у т.ч. за реальними даними регулярного державного моніторингу вод України, адекватності та точності і присвячена дана робота. Основна вимога до моделей, які розглядались — це їх придатність до розв'язання за їх допомогою задач управління та контролю якості річкових вод України. Крім того, показано яким чином можна ідентифікувати незареєстровані джерела стічних вод.

У першому розділі викладено основні поняття та проведено формалізацію об'єкта дослідження, здійснено огляд та аналіз відомих математичних моделей, придатних для розв'язання за їх допомогою задач контролю та управління якістю вод з метою їх поліпшення

Другий розділ присвячений розробці нових просторово-одновимірних математичних моделей процесів самоочищення та розбавлення забруднень у розгалуженій річковій системі, які надійшли від багатьох скидів стічних чи зворотних вод.

В третьому розділі розроблено нову просторово-двовимірну математичну модель, що враховує особливості протікання річкових процесів в різних частинах потоку — в турбулентній бистринній та ламінарних прибережних зонах. Отримано аналітичний розв'язок рівнянь в явній формі.

У четвертому розділі поставлена та по-новому розв'язана задача контролю за величиною забруднення річкової води, яке вносять стічні води, скинуті до річки, з використанням розроблених у даній роботі математичних моделей річкових процесів. Метод є нечутливим до випадкових похибок, що виникають при вимірюваннях і дозволяє визначити місце розташування скиду, витрати стічних вод, та значення показників їх якості.

Працездатність розроблених математичних моделей та алгоритмів доведена на практичних прикладах. В окремих прикладах використана реальна інформація, взята з комп'ютерної геоінформаційної аналітичної системи моніторингу поверхневих вод Вінницької області, розробленої і впровадженої під керівництвом автора на замовлення Держуправління екології та природних ресурсів у Вінницькій області у 2002-2004 роках.

1. ОГЛЯД МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗМІНИ СТАНУ РІЧКОВИХ ВОД, ПРИДАТНИХ ДО СИНТЕЗУ ЗАКОНІВ УПРАВЛІННЯ ЦИМ СТАНОМ

1.1. Характеристика річки як об'єкта управління

Для проведення формалізації річки або її ділянки будемо розглядати її як кібернетичну систему, на входи якої надходять промислові, сільськогосподарські та комунально-побутові стічні води, а також води природного стоку з якістю u , які впливають на якість води в річці x . Вихідною характеристикою системи є якість води в місцях водокористування та водоспоживання або якість води $x_{\text{вих}}$ в кінцевому створі ділянки річки, що моделюється, котра показує, як ця ділянка вплинула на якість річкової води наступних вздовж течії ділянок. Вхідними $u(t)$, вихідними $x_{\text{вих}}(t)$ змінними та змінними стану $x(t)$ є значення основних показників якості води (ПЯВ), наприклад, концентрації забруднювальних речовин або вміст бактерій (рис. 1.1; t — це координата часу) [25, 30, 37, 64, 66, 68, 75-78, 80, 83, 84, 89, 106, 111, 114, 118, 126].

Для полегшення врахування особливостей динаміки річкового потоку проводиться декомпозиція ділянки річки — вона розбивається на N елементарних ділянок (ЕД) за двома критеріями (рис. 1.1) [84]:

– на кожній елементарній ділянці не повинно бути більше N_w входів u (джерел стічних вод чи стоків);

– всі основні гідравлічні величини (швидкість течії річки, геометричні параметри русла тощо) повинні бути приблизно однаковими в межах однієї ЕД.

В літературі елементарні ділянки часто називають ще “камера-

ми”, особливо коли хочуть підкреслити, що це не лінійні відрізки, а об’єми річкових об’єктів [47, 48].

Найпростіший варіант математичної моделі забезпечується, якщо по першому критерію розбиття вимагати $N_w \leq 1$, тобто на кожній ЕД повинно бути не більше одного входу, котрий може змінювати стан річкових вод. Будемо використовувати цей варіант за замовченням і відпрацьовувати на ньому усі підходи, моделі та алгоритми. Складніші варіанти ($N_w > 1$) необхідні, коли у першому випадку на кожній ЕД недостатньо експериментальних даних для ідентифікації математичної моделі. Цьому варіанту декомпозиції річки також буде приділено увагу в наступних розділах.

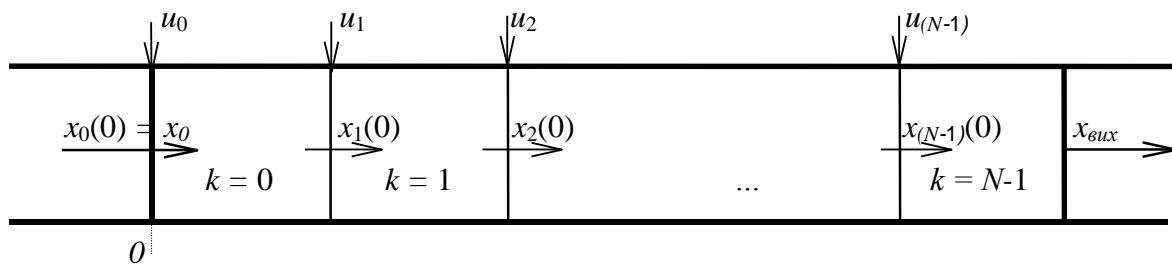


Рисунок 1.1. Схема ділянки річки з розбиттям її на елементарні ділянки

Проведена декомпозиція річки дозволяє будувати математичні моделі стану річкової води, які можуть бути придатні до управління цим станом.

Управління, яке розглядається у цій роботі, здійснюється, головним чином, через регулювання діяльності просторово-зосереджених скидів стічних вод або водозаборів. В той же час, у цій роботі не розглядається побудова моделей для синтезу оптимальних законів управління якістю вод шляхом проведення таких заходів:

- запровадження очисних заходів (встановлення аераторів та

ін.) безпосередньо у річці, оскільки це є дуже вартісною процедурою і широкого поширення в Україні не отримало;

- зміна водного режиму річки (відведення води на меліоративні заходи, перекидання стоку іншої річки тощо);

- зміна геометрії русла річки (випрямлення русла для збільшення швидкості течії та ін.).

Слід зазначити, що водозабір теж негативно змінює стан річкової води, оскільки головним самоочисним фактором річки є розбавлення стічних вод більшим обсягом чистішої річкової води, а водозабір цей обсяг зменшує. Водозабір безпосередньо може не впливати, якщо вода відбирається в місці, де усі процеси перемішування річкових вод зі скинутими вище за течією стічними водами вже закінчилися. Але, на практиці, навіть за відсутності вище за течією скидів стічних вод, у річці є багато нерегульованих входів забруднених вод, наприклад надходження вод із притокою річки, який є приймачем інших стічних вод. Отже, процеси перемішування та розбавлення різних забруднюючих речовин відбуваються практично в усіх ділянках річок.

Критерієм якості управління є відповідність нормативам стану річкової води у заданих створах (місцях водокористування різного типу).

1.2. Огляд загальноприйнятих показників та критеріїв якості річкових вод

Кількісною характеристикою стану вод загальноприйнято вважати “Показники якості води” (ПЯВ) [7, 25, 32, 39, 84, 107-110, 122, 129, 134].

Під час аналізу стану вод, головним чином, визначаються гідро-

фізичні (температура, прозорість тощо), гідрохімічні (концентрація у воді різних хімічних речовин, наприклад, азоту, фосфору, нафтопродуктів, фенолів, хлоридів, завислих речовин тощо) та бактеріологічні (вміст у воді сапрофітів, кишкових паличок, сальмонел тощо) показники [107-110]. Є й інші групи показників якості води, наприклад: радіаційні (концентрація у воді цезію, стронцію тощо), гідробіологічні та ін. [7, 107, 129, 134] Окремо можуть виділятися такі групи показників як показники сольового складу, трофо-сапробіологічні показники, показники токсичної дії, специфічні показники тощо [107, 129, 134].

До моделювання та управління беремо тільки ті показники якості води x , значення яких на будь-якій елементарній ділянці річки задовольняють ряду вимог [84]:

- 1) вони не є від'ємними;
- 2) більші значення означають більше забруднення, менші — менше;
- 3) значення не збільшуються з часом t за відсутності антропогенних впливів;
- 4) усталене значення ($t \rightarrow \infty$) x дорівнює нулю.

Ці вимоги виконуються для переважної більшості хімічних та бактеріологічних показників якості води. Для інших — у роботі [84] наведено алгоритм нормування, тобто приведення до відповідності наведеним вимогам, та ренормування — зворотна процедура, яка використовується на етапі трактування результатів моделювання.

Якість води будемо оцінювати по показниках якості води, значення яких задовольняють наведеним вище вимогам. Критерієм якості є відповідність значень нормативним вимогам ГДК (гранично допустима концентрація) чи ГДВ (гранично допустима величина), які можуть мати нижнє x_H^{GDK} та верхнє x_B^{GDK} значення [84, 107-110, 129, 134]. Для показників x , що задовольняють наведеним вище вимогам,

критерієм якості є виконання умови

$$x_B^{GDK} \geq x \geq x_H^{GDK} . \quad (1.1)$$

Прикладом такого показника є “Величина рН”.

Для переважної більшості показників якості води величина ГДК (ГДВ) має тільки один рівень x^{GDK} [84, 107-110, 129, 134]. У цьому випадку критерієм якості є виконання умови

$$x \leq x^{GDK} . \quad (1.2)$$

Для показників типу (1.1) у роботі [107] пропонується розглядати два окремих показники x^I та x^{II}

$$x^I \leq x_B^{GDK} , \quad x^{II} \geq x_H^{GDK} . \quad (1.3)$$

Як видно, перша вимога ідентична умові (1.2), другу ж можна привести до неї, застосувавши процедуру нормування, описану у роботі [84]. Однак, при цьому слід в математичній моделі вводити додаткову умову

$$x^I = x^{II}$$

та розв’язувати рівняння моделі для x^I та моделі для x^{II} як одну систему рівнянь.

Далі, якщо не зазначене інше, вважається, що показник x має тільки один рівень величини ГДК (ГДВ) x^{GDK} .

1.3. Аналіз відомих математичних моделей процесів забруднення та очищення у річкових системах

На даний час в Україні та за кордоном вже розроблено багато математичних моделей, які описують динаміку якості річкових вод [1, 2, 4, 5, 10, 12, 16, 17, 22-29, 34, 35, 40, 42, 45-48, 55, 56, 60, 62, 65, 70-74, 79, 84, 85, 87, 88, 91, 94, 95, 101, 106, 112, 115, 117, 125, 127-130, 134, 135, 139, 141-143]. Чимало і підходів до їх класифікації [10, 34, 40, 84, 91, 95, 101, 117, 128, 129, 134, 138]. Наведемо деякі з них.

I. За критерієм врахування фізико-біохімічних особливостей об'єкта можна виділити два класи.

До *першого класу* належать такі, які переслідують не стільки фізико-біохімічну ідентичність природи річкових процесів, скільки математичну відповідність експериментальним даним — це математичні моделі, побудовані за методом групового врахування аргументів (МГВА) [22-29, 88, 127], інтерполяційними співвідношеннями [13, 44, 50, 89], моделі нейронних мереж тощо [54]. До *другого класу* належать такі, які, перш за все, ставлять за мету фізико-біохімічну ідентичність природі річкових процесів, адаптуючи відповідно математичний опис [2, 4, 10, 17, 34, 42, 43, 46, 48, 55, 60, 62, 72, 74, 79, 84, 87, 95, 101, 117, 121, 128, 130, 134, 138, 141-143].

Математичні моделі першого класу дають вищу точність, але їх основним недоліком є те, що ідентифікованим параметрам та структурі важко, а іноді і неможливо дати фізичну інтерпретацію. Математичні моделі ж другого класу, хоч і менш точні, але вони, після їх ідентифікації, дозволяють більше зрозуміти та дослідити особливості протікання процесів у річках, завдяки прозорій фізичній інтерпретації параметрів та структури. Математичні моделі першого класу найкраще використовувати для довгострокового прогнозування. Також, ці математичні моделі використовують за умов відсутності детального розуміння процесів в екосистемі чи точного вимірювання їх параметрів. Однак, для синтезу адекватних математичних моделей першого класу треба досить багато експериментальних даних [24, 29, 40, 54, 129].

Математичні моделі другого класу найкраще використовувати для короткострокового прогнозування, крім того, їх, на відміну від першого, можна використовувати у розрахунках навіть за дуже малої кількості експериментальних даних, однак, їх синтез та доведення

адекватності є дуже складною та кропіткою задачею [40, 84, 129].

II. За критерієм врахування природи даних вимірювань.

Не завжди традиційні епізодичні вимірювання змінних стану річкової води дозволяють відслідкувати причинно-наслідковий вплив великої кількості факторів, які постійно впливають на цей стан. У цих випадках коректніше застосовувати стохастичні моделі [1, 16, 17, 61]. Якщо ж у вимірюваннях прослідковується функціональний зв'язок певних змінних, тоді краще використовувати детерміновані математичні моделі. Іноді, йдуть на компроміс — природу вимірювань змінних стану річкової води вважають стохастичною, але розглядають тренд цих змінних, застосовуючи до нього детерміновані моделі [84]. Цей підхід буде використаний у даній роботі.

III. За критерієм лінійності характеристики “вхід-вихід” річкової системи.

Фізико-біохімічні процеси за своєю природою нелінійні [4, 48, 130]. Однак, у багатьох випадках можна відкинути вплив деяких незначних факторів та зробити припущення про лінійність цих процесів та математичних моделей, що їх описують [48, 84, 129].

Важливо відрізнити математичні моделі, нелінійні відносно змінних стану, та математичні моделі, нелінійні по параметрах. Наприклад, функція e^{-kt} є нелінійною відносно k та t . Однак, математична модель

$$x(t) = ae^{-kt} \quad (1.4)$$

є лінійною, оскільки у ній відсутні степені незалежної змінної стану $x(t)$ чи її функцій. У той же час, математична модель (1.4) є нелінійною по параметру k та координаті t , тобто, фактично, враховує нелінійність зміни значення $x(t)$ в часі та його нелінійну залежність від параметра k . Такий підхід до врахування нелінійної природи зміни стану

річкової води є дуже поширеним, оскільки поряд із врахуванням нелінійної природи дозволяє використати переваги лінійності математичних моделей, спрощуючи розрахунки та перетворення.

IV. За типом математичних моделей: алгебраїчні (тригонометричні, поліноміальні) та диференціальні (однорідні та неоднорідні, першого, другого та вищих порядків, у повних та в частинних похідних), з розподіленими та із зосередженими параметрами, зі змінними та постійними коефіцієнтами, у вигляді функціональної моделі та у вигляді алгоритму застосування певних операцій.

В задачах моделювання змін стану річкової води з метою їх ідентифікації за експериментальними даними для цілей прогнозування та управління серед математичних моделей першого класу (див. класифікацію за першим критерієм) найбільше поширення отримали математичні моделі з постійними коефіцієнтами: алгебраїчні поліноміальні рівняння першого порядку та диференціальні рівняння першого порядку у повних похідних або другого порядку у частинних похідних [2, 4, 5, 10, 12 17, 31, 34, 35, 40, 42, 43, 46–48, 51, 55, 56, 62, 72, 74, 79, 84, 87, 95, 101, 112, 117, 121, 124, 125, 128–130, 132, 134, 135, 137, 138, 141–143].

V. За критерієм врахування просторово-часових координат, по яких моделюється зміна стану річкової води: одно-, дво- та тривимірні, динамічні та статичні математичні моделі. У статичних моделях координата t відсутня, тобто вони не можуть бути моделями процесу.

Традиційно, осі тривимірної декартової системи координат, яка пов'язується з річкою, спрямовуються таким чином: одна вісь (позначимо її Oz) спрямовується в центрі та в напрямку усередненої течії річки, друга вісь (позначимо її Oy) спрямовується перпендикулярно цій осі та паралельно поверхні річки в напрямку її правого берега, а третя

вісь — перпендикулярно двом першим в глибину річки. Відповідно, модель, що враховує тільки першу координату z — це одновимірна модель, ще й другу координату y — двовимірна, а ще й третю — тривимірна. Тривимірні моделі використовуються тільки для великих річок, наприклад Дніпро чи Дністер, або для порівняно глибоких руслових водосховищ, створених на річках [10, 34, 40, 43, 47, 48, 95, 129].

Виходячи з малої величини відношення “глибина/ширина” для більшості малих та середніх річок, вводять усереднення усіх змінних по глибині і переходять до одновимірних чи двовимірних моделей. Одновимірні моделі застосовуються, коли недостатньо даних для ідентифікації граничних умов двовимірної чи тривимірної моделей [4, 17, 46–48, 56, 72, 84, 85, 101, 117, 128–130, 138, 141–143].

Динамічні моделі застосовуються на ділянках, які зазнають суттєвого антропогенного впливу, статичні — на ділянках, де відбуваються тільки природні процеси самоочищення. Однак, для річок широко застосовується зручний підхід, який дозволяє статичні просторові моделі переводити у статус динамічних та навпаки: модель зміни стану річкової води у просторі вздовж осі Oz $x(z)$ записується для деякого об’єму річкового потоку, який пересувається з усередненою швидкістю течії річки v . Якщо пов’язати з цим об’ємом відносну систему координат, тоді час t , а відповідно і зміна стану води у цьому об’ємі $x(t)$, у відносній системі координат буде спливати одночасно з рухом цього об’єму вздовж річки, а отже, за цих умов буде мати місце співвідношення [84, 101, 125]:

$$x(z) = x(vt), \quad x(t) = x\left(\frac{z}{v}\right). \quad (1.5)$$

Такий підхід дозволяє використовувати дані, виміряні у різний час та у різних створах для ідентифікації однієї і тієї ж математичної

моделі, записаної відносно x у відповідності до співвідношення (1.5). І ця математична модель може розглядатись як просторова статична, так і як динамічна.

VI. За критерієм врахування процесів різного типу.

Більшість існуючих математичних моделей за кількістю та характером самоочисних процесів, які одночасно враховуються, можна розбити на три типи:

- 1) математичні моделі, що враховують лише процеси розбавлення забруднених вод у більш чистих;
- 2) математичні моделі, що враховують процеси самоочищення річки, але без врахування природи процесів розбавлення;
- 3) математичні моделі процесів самоочищення із врахуванням природи процесів розбавлення.

Серед математичних *моделей першого типу* найбільш поширеними є такі:

1. Математична модель В.А. Фролова — І.Д. Родзиллера для консервативних речовин, тобто речовин, які не вступають в хімічні реакції [84, 101, 125, 128]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -F(t) \cdot [x(t) - x^*], \quad x(0) = x_0, \quad (1.6)$$

де x^* — значення концентрації речовини у так званому створі повного змішування;

$F(t)$ — деяка нелінійна функція, вираз якої виведений В. А. Фроловим на основі аналізу розмірностей — характеризує зменшення концентрації x за рахунок процесів розбавлення.

З урахування співвідношення (1.5) модель (1.6) може описувати зміну концентрації консервативної речовини як у часі $x(t)$, так і у просторі $x(z)$.

2. Математична модель В. І. Лаврика для опису процесів розбавлення у кінцевому створі ділянки (“камери”) річки [46-48]:

$$x = x^* + (u - x^*) e^{-\frac{1+K\tau}{\tau}}, \quad (1.7)$$

де K — коефіцієнт інтенсивності процесів самоочищення;

τ — час повного оновлення води на ділянці (у “камері”), який дорівнює

$$\tau = \frac{W}{Q_0 + q}, \quad (1.8)$$

де W — об’єм води у “камері”, Q_0 — витрати води у річці до надходження до неї стічних вод.

3. Математичні моделі, основані на диференціальному рівнянні другого порядку в частинних похідних, в якому зміна значення x моделюється як в часі t , так і у просторі z . Прикладами таких математичних моделей є моделі В.М. Маккавєєва, А.В. Караушева, А.М. Айтсама, Х.А. Вельнера, Л.Л. Пааля, М.А. Бесценної, М.А. Руффель та інших. Наприклад, для однієї просторової координати z [34, 35, 40, 48, 94]:

$$-\frac{\partial x(t, z)}{\partial t} = -\delta \frac{\partial^2 x(t, z)}{\partial z^2} + v \frac{\partial x(t, z)}{\partial z} \quad (1.9)$$

з початковими та граничними умовами:

$$x(0, z) = x_0(z), \quad x(t, 0) = a(t), \quad x(t, L) = b(t), \quad (1.10)$$

де δ — коефіцієнт турбулентної дифузії;

L — довжина ділянки річки, яка моделюється — визначається вздовж осі координат z ;

$x_0(z)$ — залежність значень x від координати z в межах ділянки моделювання в початковий момент часу;

$a(t)$ і $b(t)$ — залежність значень x від часу t на вході ($z = 0$) і на

виході ($z = L$) ділянки моделювання, відповідно.

Математична модель Фролова — Родзиллера зручніша тим, що за більш як 50-річний термін її існування та практичного використання для неї складена величезна кількість довідників з усередненими по річках гідрологічними параметрами, котрі дозволяють проводити розрахунки зміни стану води річок України без додаткових вимірювань [101, 125, 128]. Але, в цьому і недолік — не враховуються важливі особливості різних ділянок річки, їх зміни останнім часом. Навіть, на практиці були випадки, коли розрахунки за довідниками проводились не для тих річок, що треба, а для інших, які, однак, мають таку ж саму чи дуже схожу назву і протікають в тому ж регіоні, що є досить поширеним в Україні.

Головним недоліком усіх математичних моделей першого типу є те, що вони можуть застосовуватися для опису динаміки концентрацій лише консервативних хімічних речовин, враховуючи тільки один фізичний основний фактор — фактор розбавлення (розповсюдження та перемішування). Крім цього, основним недоліком математичних моделей (1.6), (1.7) є невідповідність динаміки реальних процесів розбавлення експоненціальному закону, а математичних моделей (1.9), (1.10) — необхідність збирання чималого обсягу вхідної інформації, зокрема значень функцій $a(t)$, $b(t)$ та $x_0(z)$.

Серед *математичних моделей другого типу* — моделей самоочищення річки, в яких не враховується природа процесів розбавлення — найбільш поширеними є математичні моделі у вигляді диференціального рівняння першого порядку. Загалом, можна виділити такі види математичних моделей:

1. Прості лінійні математичні моделі, основані на звичайному диференціальному рівнянні першого порядку [34, 40, 48, 84, 101, 117,

128, 129, 138]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Kx(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1.11)$$

де K — коефіцієнт зменшення забруднювальної речовини за одиницю часу (часто його називають константою розпаду чи розкладення [117]);

x_0 — значення x в початковий момент часу $t = 0$.

2. Нелінійні математичні моделі Моно та Міхаеліса–Ментен [48, 130, 138, 142]:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Psi_{\max} x}{v_1 + x}, \quad x(0) = x_0 \quad (1.12)$$

або

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Psi_{\max} \cdot x \cdot x_K}{v_2 \cdot x + v_3 \cdot x_K + x \cdot x_K}, \quad x(0) = x_0, \quad (1.13)$$

де x — концентрація у воді деякої хімічної речовини чи вміст бактерій або мікроорганізмів;

x_K — концентрація розчиненого у воді річки кисню;

Ψ_{\max} — максимальна швидкість розкладання забруднювальної речовини;

v_1, v_2 — так звані константи напівнасичення для забруднювальних речовин;

v_3 — константа напівнасичення для розчиненого у річці кисню.

Математичні моделі (1.12), (1.13) враховують нелінійність динаміки річкових процесів за гранично низьких чи високих значень величин x . Математична модель (1.13) одночасно враховує ще й вплив концентрації розчиненого у воді кисню.

З урахуванням співвідношення (1.5) математичні моделі другого типу теоретично можна трактувати і як такі, що описують зміну зна-

чень $x(z)$, але неврахування процесів розбавлення, особливо у математичних моделях (1.12) та (1.13) призвело б до їх неадекватності процесам. Що ж стосується математичної моделі (1.13), то в першому наближенні у коефіцієнті K можна враховувати і зміну значень x під дією процесів розбавлення, виходячи з певної математичної подібності моделі (1.13) з моделлю Фролова – Родзиллера (1.6).

3. Балансові моделі [48, 138, 143]. Прикладом балансових моделей є математичні моделі зміни концентрації розчиненого у воді кисню, зокрема математична модель Стрітера — Фелпса [48, 143]:

$$\frac{dx}{dt} = a_1(x_{\text{нас}} - x) - a_2x_{\text{ВСК}}, \quad (1.14)$$

де x — концентрація розчиненого у річковій воді кисню;

$x_{\text{нас}}$ — концентрація насичення для кисню у річковій воді;

$x_{\text{ВСК}}$ — значення біохімічного споживання кисню (характеризує концентрацію легкоокислювальних органічних речовин [20, 117]);

a_1 — стала швидкості реаерації для розчиненого у річковій воді кисню;

a_2 — константа розпаду першого порядку для легкоокислювальних органічних речовин.

Як видно з (1.14), в активі балансу математичної моделі Стрітера — Фелпса знаходяться процеси надходження кисню з атмосфери з реаерацією, а в пасиві — процеси використання розчиненого у воді кисню в біохімічних реакціях розкладу та розпаду легкоокислювальних органічних речовин.

Інші балансові моделі подібні до (1.14).

4. Стехіометричні моделі — будуються по конкретних хімічних реакціях за законом дії мас Гульдберга — Вааге [11, 117].

5. Моделі у вигляді систем диференціальних рівнянь, які опису-

ють поглинання та перетворення хімічних речовин різними мікроорганізмами з одночасною зміною біомаси останніх, наприклад моделі трофічного ланцюга та інші [47, 48, 121, 133, 138].

6. Математична модель В. І. Лаврика для біологічного очищення стічних вод у реакторі [46-48]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = - \left[\gamma_{\max} + (\gamma_{\min} - \gamma_{\max}) e^{-\frac{t}{\mu}} \right] x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1.15)$$

де μ — константа верифікації моделі відповідно до прийнятих одиниць вимірювання часу;

γ_{\min} , γ_{\max} — відповідно мінімальне та максимальне значення коефіцієнта швидкості біологічного очищення стічних вод.

У роботі [48] наведено декілька інших варіантів рівняння (1.15), які відрізняються правими частинами. Один з них, наприклад оснований на використанні математичної моделі Моно (1.12).

Розв'язок рівняння (1.15) має вигляд [48]:

$$x(t) = x_0 e^{\left(\mu(\gamma_{\min} - \gamma_{\max}) \left(e^{-\frac{t}{\mu}} - 1 \right) - \gamma_{\max} t \right)}. \quad (1.16)$$

У випадку ж $\gamma_{\min} = 0$ та $\mu = m$ рівняння набуває вигляду [46, 48]:

$$x(t) = x_0 e^{\left(\gamma_{\max} \left(m \left(1 - e^{-\frac{t}{m}} \right) - t \right) \right)}. \quad (1.17)$$

Математичними моделями третього типу, тобто тими, які враховують процеси самоочищення, з урахуванням природи процесів розбавлення, є математичні моделі першого типу, доповнені математичними моделями другого типу. Серед них можна виділити:

1. Математичні моделі, основані на узагальненому рівнянні не-

розривності для елемента хімічного процесу [2, 34, 35, 40, 42, 48, 84, 94, 129]:

$$\operatorname{div} [x \cdot v] - \operatorname{div} [\delta \cdot \operatorname{grad} x] + v_5 \cdot v_6 \cdot x + \Phi(t, z) = -\frac{\partial x}{\partial t} \quad (1.24)$$

з початковими та граничними умовами:

$$x(0, z) = x_0(z), x(t, 0) = a(t), x(t, L) = b(t), \quad (1.19)$$

де v_5 — коефіцієнт масопередачі;

v_6 — площа поверхні передачі компонента між фазами на одиницю об'єму — питома площа поверхні передачі;

$\Phi(t, z)$ — джерела або стоки компонента.

2. Вдосконалені балансові моделі, наприклад — рівняння часткового перемішування, моделі Дриснека, Доббінса, Кемпа та їх модифікації [138].

3. Математична модель процесів послідовно-рівнобіжної трансформації речовин Єрьоменка Є.В. [16, 17].

4. Математична модель В. І. Лаврика, в якій для опису процесів розбавлення використовується математична модель (1.7), котра застосовується до результатів обчислення за математичною моделлю (1.16) або (1.17) [46].

5. Математична модель автора роботи, що основана на розбитті усіх річкових процесів самоочищення, у т.ч. розбавлення, на групи за тривалістю дії на заданий показник якості води і формуванні математичного опису їх взаємодії [84, 115]. Математична модель побудована за трьома вхідними передумовами.

На кожен хімічну речовину діє свій набір процесів. Під “набором процесів” мається на увазі низка процесів, в якій кожен наступний перетворює продукти попереднього і лише останній приводить саме до зменшення концентрації хімічної речовини. Взагалі можливі,

наприклад, такі набори процесів: “хімічна трансформація — перетворення гідробіонтами — осадження”, або “хімічна трансформація — поглинення гідробіонтами”, або “біохімічна трансформація — осадження” тощо. Ці процеси протікають з різними швидкостями і через це їх взаємодію треба розглядати як послідовно-одночасне протікання. Послідовно — тому, що наступний починається лише тоді, коли вже почався попередній і з’явилися якісь результати його дії, а одночасно — тому, що наступний починається тоді, коли попередній ще не закінчився. Існування таких наборів послідовно-одночасних процесів для кожної хімічної речовини, яка надходить до водойми, і є першою вхідною передумовою методики побудови математичної моделі річки.

Другою вхідною передумовою є упорядкування основних процесів самоочищення, без врахування процесу розбавлення, за їх причинно-наслідковим взаємовпливом і поділ їх на ряд груп. До першої групи відносимо ті процеси, які починають діяти на хімічні речовини відразу після їх надходження до річки. До другої — ті процеси, що діють на результати дії першої (“попередньої”) групи і так далі. Процеси кожної групи, крім останньої, або спричиняють перетворення хімічних речовин з одних форм в інші (хімічна трансформація), або розкладають складні речовини на більш прості (хімічне та біохімічне розкладення), або інше. Процеси ж групи, яка вважається останньою, приводять до повного вилучення з річкової води речовин, котрі моделюються, — це процеси осадження, поглинання гідробіонтами, випаровування тощо.

Аналіз всіх процесів, які протікають в річках [7, 9, 11, 20, 33, 36, 41, 49, 84, 90, 97, 111, 113, 116, 117, 119, 129, 131, 132, 138], дозволив встановити, що в більшості випадків можна обмежитись трьома групами, а іноді й двома.

Третьою вхідною передумовою є перенесення встановлених для хімічних показників закономірностей на бактеріологічні показники. Підставою для такої аналогії є те, що характер процесів, які впливають на хімічні речовини, є, в першому наближенні, подібним до характеру процесів, які впливають на вміст бактерій та мікроорганізмів [7, 15, 36, 52, 108, 117, 131, 137].

Фактично, послідовно-одночасні (послідовно-паралельні) процеси, специфіка яких моделюється, за термінологією ідентичні процесам послідовно-рівнобіжної трансформації речовин Є.В. Єрмоєнка [16]

Доведено, що математичний опис дії одного–трьох послідовно-одночасних процесів чи їх груп слід здійснювати у вигляді [84, 115]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = G_l(t) x(t), \quad l = 1 \vee 2 \vee 3, \quad (1.20)$$

$$x(0) = x_0, \quad (1.21)$$

$$G_1(t) = -k_1, \quad (1.22)$$

$$G_2(t) = -k_2 \left(1 - e^{-k_1 t} \right), \quad (1.23)$$

$$G_3(t) = -k_3 \left[1 - e^{-k_2 \left(1 - e^{-k_1 t} \right) t} \right], \quad (1.24)$$

де $G_l(t)$ — функція, яка враховує вплив l -ї ($l = 1, 2$ чи 3) кількості груп послідовно-одночасних процесів на зміну значення показника x ;

T — інтервал часу;

k_1 — коефіцієнт пропорційності між швидкістю протікання процесів першої групи, за умови їх ізольованого протікання, та значенням показника, на який вони діють;

k_2 — коефіцієнт пропорційності між швидкістю протікання процесів другої групи, за умови їх ізольованого протікання, та значенням показника, на який вони діють; помноженням k_2 на коефіці-

ент $(1 - e^{-k_1 t})$ враховується вплив процесів першої групи на процеси другої;

k_3 — коефіцієнт пропорційності між швидкістю протікання процесів третьої групи, за умови їх ізольованого протікання, та значенням показника, на який вони діють; помноженням k_3 на додатковий коефіцієнт враховуються впливи процесів першої та другої груп на процеси третьої.

Математичний опис (1.20)–(1.27) побудований, виходячи з таких положень [84, 115]:

1) в початковий момент часу $t = 0$, коли процеси першої групи лише починаються, процеси другої групи ще зовсім не почалися, оскільки вони діють на результати дії процесів першої групи, яких немає; коефіцієнт $(1 - e^{-k_1 t})$ в функції (1.24) при $t = 0$ якраз дорівнює нулю, тому $dx_2(t)/dt = 0$, отже $x_2(t)$ дорівнює константі, яка за наших умов є нулем;

2) коли час прямує в нескінченність $t \rightarrow \infty$, процеси першої групи вже практично скінчилися і процеси другої групи, теж наближаються до завершення, діють на ту концентрацію речовини чи вміст мікроорганізмів, які залишились після дії процесів першої групи; коефіцієнт пропорційності між величиною x_2 та її похідною $dx_2(t)/dt$, відома річ, вже не залежить від коефіцієнта k_1 , а дорівнює лише коефіцієнту k_2 . Коефіцієнт $(1 - e^{-k_1 t})$ у функції (1.24) при $t \rightarrow \infty$ дорівнює одиниці, отже $dx_2(t)/dt = -k_2 x_2$. Тобто значення коефіцієнта $k_2 \cdot (1 - e^{-k_1 t})$ в разі зміни часу t від 0 до ∞ змінюється від 0 до k_2 , правильно відображаючи динаміку процесів.

З рівняння (1.24) видно, що для трьох груп процесів, аналогічно, значення швидкості протікання процесів в разі зміни часу t від 0 до ∞

змінюється від 0 до k_3 , правильно відображаючи динаміку процесів всіх трьох груп.

Розв'язком рівнянь математичної моделі (1.20)–(1.24) є такі рівняння [84, 115]:

$$x(t) = x_0 e^{-k_1 t}, \quad (1.25)$$

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\frac{k_2}{k_1} [e^{-k_1 t} + k_1 t - 1]}, \quad (1.26)$$

$$x(t) = x_0 e^{-k_3 \left\{ t - \int_0^t e^{-k_2 (1 - e^{-k_1 \tau})} d\tau \right\}}, \quad (1.27)$$

де τ — проміжна змінна інтегрування.

Як видно, математична модель (1.20)–(1.27) є лінійною відносно змінної стану x і дає досить адекватний опис, вимагаючи для ідентифікації структури та параметрів порівняно мало експериментальних даних [84].

На рис. 1.2 та 1.3 наведено приклад моделювання за допомогою моделі (1.20)–(1.27) процесів самоочищення річкової води після надходження до неї певного забруднення, яке характеризується деяким показником якості води x .

Легко можна довести, що математична модель (1.20)–(1.27) при $l = 1$ стає ідентичною математичній моделі (1.6), а при $l = 2$ — математичній моделі В. І. Лаврика (1.17). Якщо перший факт — очевидний, то другий варто довести. Зокрема, доведемо, що математична модель (1.17) є ідентичною моделі (1.26).

Введемо заміну змінних:

$$k_1 = \frac{1}{m}, \quad k_2 = \gamma_{\max}. \quad (1.28)$$

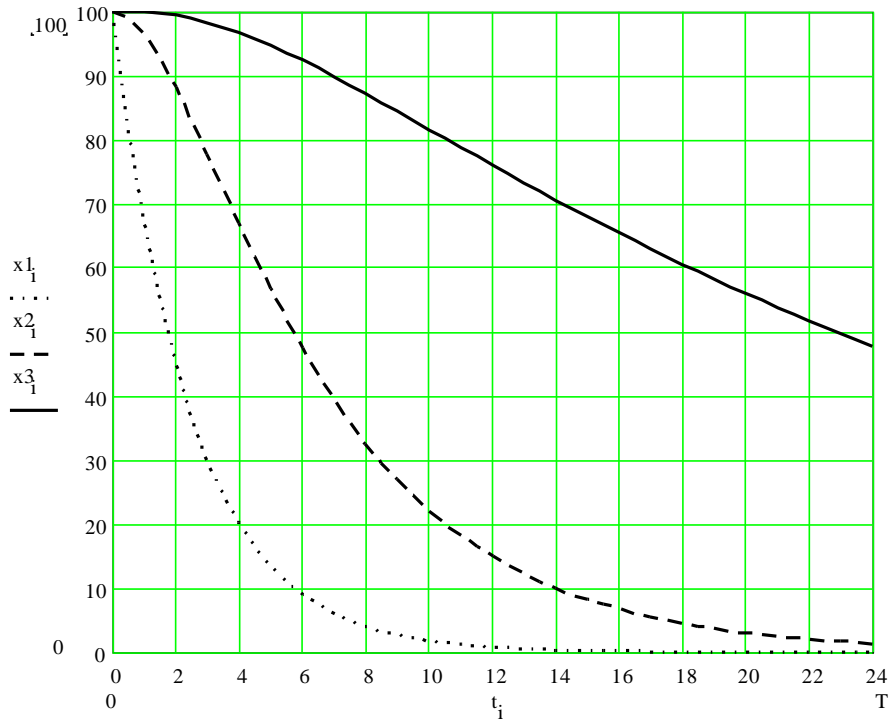


Рисунок 1.2. Значення показника якості води за умов дії на нього послідовно-одночасних процесів однієї (x_1), двох (x_2) та трьох (x_3) груп з параметрами: $k_1 = 0,4$; $k_2 = 0,2$; $k_3 = 0,04$.

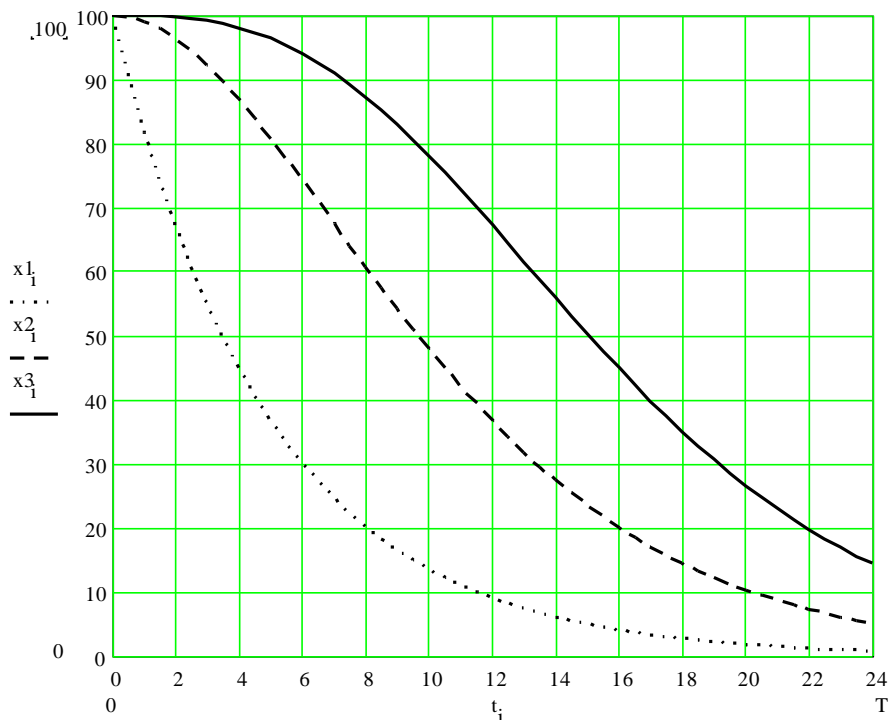


Рисунок 1.3. Значення показника якості води за умов дії на нього послідовно-одночасних процесів однієї (x_1), двох (x_2) та трьох (x_3) груп з параметрами: $k_1 = 0,2$; $k_2 = 0,2$; $k_3 = 0,2$.

Підставимо (1.28) у (1.26) та виконаємо перетворення:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 e^{-\frac{k_2}{k_1} [e^{-k_1 t} + k_1 t - 1]} = x_0 e^{\left(-\frac{k_2}{k_1} e^{-k_1 t} - k_2 t + \frac{k_2}{k_1} \right)} = \\
 &= x_0 e^{\left(-\gamma_{\max} m e^{-\frac{t}{m}} - \gamma_{\max} t + \gamma_{\max} m \right)} = x_0 e^{\left(\gamma_{\max} \left(m \left(1 - e^{-\frac{t}{m}} \right) - t \right) \right)}.
 \end{aligned}$$

Як бачимо, отримана в результаті перетворень авторська математична модель (1.20)–(1.27) при $l = 2$ є ідентичною математичній моделі (1.17) В. І. Лаврика, що додатково підтверджує адекватність авторської математичної моделі та правильність вихідних передумов та виведень, але авторська математична модель при $l = 3$ може розв’язувати і ті задачі, які не охоплюються математичною моделлю В. І. Лаврика.

Зазначимо також, що у першому наближенні авторську математичну модель (1.20)–(1.27) можна використовувати як самостійну математичну модель третього типу, розглядаючи процеси розбавлення як один із послідовно-одночасно діючих на ПЯВ процесів. Однак, такий підхід може не забезпечувати належний рівень адекватності математичної моделі, оскільки специфіка процесів розбавлення вимагає окремого математичного опису, іншого за структурою від математичної моделі процесів самоочищення. У відповідності з цим, у роботах [79, 84] розроблено математичну модель, основу на розв’язанні рівняння, подібного за структурою до (1.23), яка, однак, для опису специфіки процесів самоочищення річкових вод використовує математичну модель (1.20)–(1.27).

Просторову математичну модель виведено двома шляхами — за допомогою теореми Гауса – Остроградського та на основі формування балансу речовини в елементарному об’ємі річкового потоку за відо-

мим (див., наприклад, роботу [43]) у математичній фізиці алгоритмом:

$$\frac{\delta^*}{v^2} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \left(1 - \frac{v^*}{v}\right) \frac{dx(t)}{dt} - G_l(t) \cdot x(t) = 0, \quad (1.29)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_{00}, \quad (1.30)$$

де v^* , δ^* — умовні швидкісний та турбулентно-дифузний коефіцієнти;
 v — усереднена швидкість течії річки.

1.4. Висновки

Описано відомі підходи до формалізації річки як кібернетичного об'єкта — об'єкта управління з метою поліпшення якості річкових вод чи підтримання її на заданому нормативному рівні: виділено входи, виходи та змінні стану річкового об'єкта. Вказано, що в основі усіх підходів лежить однаковий критерій якості води — відповідність показників якості нормативним вимогам ГДК чи ГДВ.

Наведена класифікація та аналіз відомих математичних моделей процесів зміни значень показників якості води у часі й у просторі за типами та природою процесів, що одночасно враховуються. Виділено їх переваги та недоліки, а також пріоритетні задачі, де ці математичні моделі застосовуються.

Доведено, що виведена у роботах автора [60, 65, 74, 84, 104, 115] математична модель процесів забруднення та самоочищення у річках за випадків $l = 1$ та $l = 2$ зводиться до відомих аналогічних математичних моделей, що дає підстави використовувати її у подальшому як більш загальну, оскільки вона має і випадок, коли $l = 3$.

2. РОЗРОБКА ПРОСТОРОВО-ОДНОВИМІРНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ТА УПРАВЛІННЯ ЯКІСТЮ РІЧКОВИХ ВОД

2.1. Розробка одновимірної математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення великої кількості стічних вод для найбільш забрудненого потоку річки

2.1.1. Постановка задачі.

У розділі 1 зроблено класифікацію та наведено і проаналізовано найбільш поширені математичні моделі динаміки стану річкових вод (процесів самоочищення та розбавлення стічних вод у річках).

Виділимо їх основні особливості, які є важливими для постановки задачі моделювання річкових процесів для розгалуженої річкової системи із багатьма скидами стічних вод та водозаборами.

1. Почнемо з декомпозиції річки — розбиття на *елементарні ділянки* (ЕД), кожна з яких має не більше одного просторово-зосередженого входу стічних чи інших вод зі значенням ПЯВ u та витратами води q . На рис. 2.1 зображено i -ту ЕД.

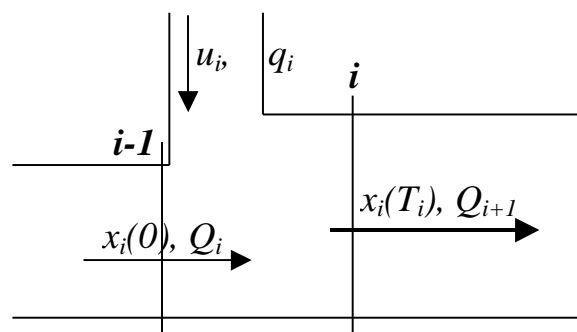


Рисунок 2.1. Схема i -ї елементарної ділянки річки, на яку надходять стічні води

2. Очевидно, що, якщо час T_i , необхідний для добігання води від $(i-1)$ -го створу до i -го, достатній для того, щоб завершився процес змішування стічних вод з витратами q_i та значенням ПЯВ u_i з річковими водами з витратами Q_i та значенням ПЯВ $x_i(0)$, то має місце таке відоме співвідношення [10, 34, 95, 101, 117, 128, 137]:

$$Q_{i+1}x_i(T_i) = (Q_i + q_i)x_i(T_i) = Q_i x_i(0) + q_i u_i$$

або

$$x_i(T_i) = \frac{Q_i x_i(0) + q_i u_i}{Q_i + q_i}. \quad (2.1)$$

3. Якщо розглядаються процеси тільки у певному об'ємі води, що рухається вздовж течії річки зі швидкістю v , тоді усі величини в математичній моделі, що залежать від t , можна вважати такими, що залежать й від $z = v \cdot t$ [84, 101, 125] (див. співвідношення (1.5)).

4. Розглядатимемо класичний випадок, коли стічні води є бруднішими за річкові, а найбільш забрудненим річковим потоком є той, куди ці води надходять.

Оскільки критерієм якості річкової води є “не перевищення показником певного гранично допустимого значення”, то, якщо значення ПЯВ у найбільш забрудненому потоці не перевищує граничне, тоді й усіх інших потоках річки якість вода теж задовольняє вимогам.

5. Теоретично, процес перемішування та розбавлення стічних вод у річкових є нескінченним, але умовно його вважають завершеним, якщо у розбавленні бере участь 80-90% ($\beta = 0,8-0,9$) річкової води — це відбувається у створі "повного змішування" на відстані $L^* = v \cdot T^*$ (T^* — час добігання води річки до створу повного змішування). Далі за течією у позначеннях рис. 2.1 ПЯВ набуває значення (2.1) і вже не змінюється за відсутності зовнішніх збурень чи надходжень вод до річки [34, 40, 48, 84, 101, 125, 128].

6. Для опису процесів у річці до створу повного змішування, хоча б умовного, де вираз (2.1) є несправедливим, слід застосовувати іншу математичну модель, наприклад, Фролова – Родзиллера (1.6) для ПЯВ у найбільш забрудненій частині річкового потоку $x(t)$, де значення ПЯВ у річці має дві складові — приріст, обумовлений ще не повним розбавленням забруднень зі стічних вод у найбільш забрудненому потоці річки (зона I рис. 2.2), і значення x_i після завершення процесу розбавлення, яке розраховується за формулою (2.1) (зона II рис. 2.2) [101, 125, 128]:

$$x_i(t) = x_i^* + (u_i - x_i^*) \cdot e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}}, \quad x_i^* = \frac{Q_i x_i(0) + q_i u_i}{Q_i + q_i}, \quad t = [0, T_i], \quad (2.2)$$

де x_i^* — теоретичне значення ПЯВ у створі повного змішування для стічних вод з витратами q_i та значенням ПЯВ u_i з річковими водами з витратами Q_i та значенням ПЯВ $x_i(0)$, α_i — коефіцієнт, що враховує гідравлічні умови змішування на i -й ЕД, який обчислюється за паспортними даними ділянки річки, що моделюється, за стандартним алгоритмом, розробленим В.А. Фроловим [101, 125, 128].

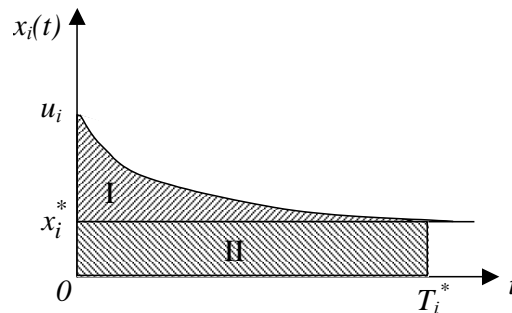


Рисунок 2.2. Складові значення ПЯВ річки $x_i(t)$:

$t = 0$ відповідає надходженню стічних вод з ПЯВ u_i до річки; T_i^* — теоретичний час добігання води до умовного створу повного змішування; зона I — приріст значення ПЯВ у річці внаслідок неповного розбавлення забруднень зі стічних вод у найбільш забрудненому потоці річки ($0 \leq t < T_i^*$); зона II — значення ПЯВ річки після завершення розбавлення забруднень зі стічних вод ($t = T_i^*$)

7. Досліджені особливості змішування стічних вод з річковими дозволяють стверджувати, що у будь-якому створі річки, розташованому між місцем початку цього змішування та створом повного змішування, значення ПЯВ будуть знаходитись у діапазоні між певними найбільшим та найменшим значеннями. Наприклад, у разі берегового скиду стічних вод, як це умовно показано на рис. 2.3, найбільш забрудненим потоком буде частина річки, куди вже дійшов основний потік забруднених стічних вод, а найменш забрудненим — річковий потік біля протилежного від надходження стічних вод берега.

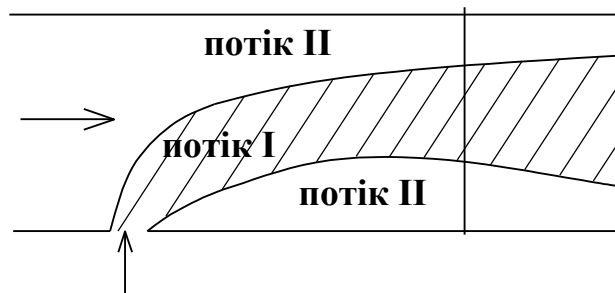


Рисунок 2.3. Схема змішування стічних вод з річковими з умовним поділом річкового потоку після місця початку змішування на потік I, що суттєво зазнав впливу стічних вод (найбільш забруднений потік) та потік II, що ще не зазнав цього впливу (найменш забруднений потік) [87, 101]

8. Поряд із найпоширенішою серед порівняно простих, і в той же час адекватних, математичних моделей процесів розбавлення стічних вод із річковими варто застосовувати аналогічну (найпоширенішу серед порівняно простих, і в той же час достатньо адекватну) математичну модель для загального опису річкових процесів самоочищення без виділення фізичної природи процесів розбавлення [34, 40, 48, 84, 101, 117, 128, 129, 138]:

$$x_i(t) = (Q_i x_i(0) + q_i u_i) \cdot e^{-k_i t}, \quad t = [0, T_i], \quad (2.3)$$

де k_i — коефіцієнт самоочищення річкових вод від забруднювальної речовини на i -й ЕД [101, 117].

Вираз (2.3) є розв'язком диференціального рівняння першого порядку, подібного до (1.11).

9. Слід пам'ятати, що, як зазначалось у розділі 1, математичні моделі типу (2.2) або (1.6) не враховують загальної дії річкових процесів самоочищення різної природи, а математичні моделі типу (2.3) або (1.11) — фізичної природи процесів розбавлення та особливостей змішування стічних вод з річковими, що відображені на рис. 2.1. Привертає увагу і те, що ще не до кінця вивчене питання адаптації відомих математичних моделей для опису впливу багатьох скидів стічних вод та водозаборів на якість води у розгалуженій річковій системі, тобто, наприклад, коли антропогенного впливу зазнають притоки річки, а значення показників якості води треба знайти у гирлі основної річки. Не кажучи вже про зворотну задачу, коли слід визначити квоти на скид стічних вод та на водозабір на притоках приток основної річки, виходячи із вимоги, щоб на усіх створах (точках) основної річки та усіх створах її приток якість вод не перевищувала нормативної.

Узагальнюючи зазначене вище, сформулюємо задачу, яка буде розв'язуватись у цьому розділі так: треба побудувати просторово-одновимірну математичну модель для процесів самоочищення та розбавлення багатьох скидів стічних вод та урахування дії багатьох водозаборів на багатьох водотоках розгалуженої річкової системи, яка б давала можливість використовувати інші відомі математичні моделі розбавлення стічних вод з річковими та математичні моделі процесів самоочищення в цілому. Ця математична модель повинна забезпечувати також визначення діапазону значень ПЯВ для будь-якого створу

довільного водотоку річкової системи, тобто необхідно мати змогу за її допомогою окремо моделювати значення ПЯВ у найбільш забрудненому потоці річки і окремо — у найменш забрудненому. Врахування специфіки процесів розбавлення у цій моделі, у першому наближенні, повинно здійснюватись на основі математичної моделі Фролова – Родзиллера (2.2), а інших самоочисних процесів — на основі розв’язку диференціального рівняння першого порядку (2.3).

2.1.2. Розв’язання задачі для випадку трьох входів стічних вод.

Сформулюємо вихідні положення та припущення, необхідні для розв’язання поставленої вище задачі [72]:

1. Будемо розглядати теоретичне розбавлення, яке закінчується, якщо $\beta = 1$, а не $\beta = 0,8-0,9$, тоді можна не моделювати окремо процеси до створу повного змішування і окремо — після.

2. Оскільки усі процеси самоочищення діють на зменшення ПЯВ весь час і одразу після надходження стічних вод до річки, то справедливо записати узагальнену математичну модель самоочищення та розбавлення для елементарної ділянки з урахуванням (2.3) у вигляді:

$$x_i(t) = \left(x_i^* + (u_i - x_i^*) e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right) e^{-k_i t}, \quad t = [0, T_i]. \quad (2.4)$$

3. Якщо на ділянці річки має місце не вхід стічних вод, а водозабір із витратами q_{vi} , тоді:

$$x_i(T_i) = x_i(0), \quad Q_{i+1} = Q_i - q_{vi}. \quad (2.5)$$

Розглянемо випадок, коли на річці знаходиться $N = 3$ входів стічних вод, причому час добігання води від i -го до $(i+1)$ -го створу становить T_i (рис. 2.4):

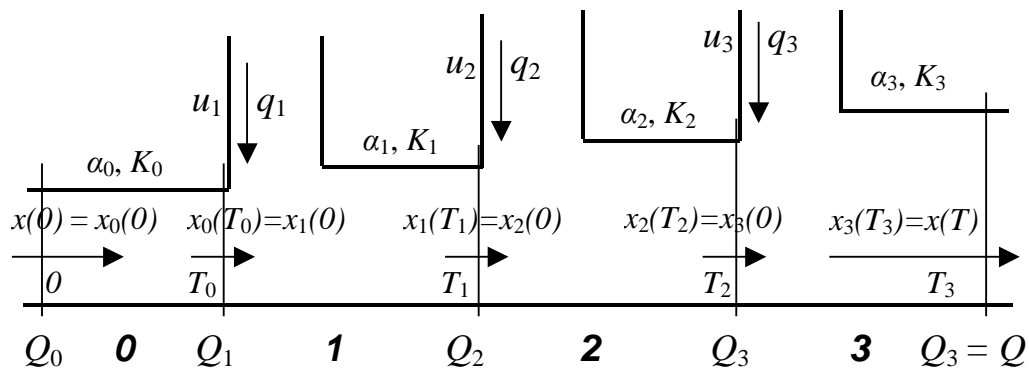


Рисунок 2.4. Схема ділянки річки із трьома входами — скидами стічних вод

На рис. 2.4 введено такі нові позначення:

- K_i — вектор усіх параметрів математичної моделі i -ої ЕД річки;

- T — час, необхідний для добігання води від нульового створу усієї ділянки річки, що моделюється, до її останнього створу, яким є кінцевий створ N -ої ЕД:

$$T = T_0 + T_1 + \dots + T_{N-1} + T_N;$$

- $x_0(t)$, Q_0 , α_0 , T_0 — для нульової елементарної ділянки річки ($i = 0$) мають ті ж значення, що були введені вище для i -ої ЕД, однак, варто зазначити, що нульова ЕД — це ділянка річки, на якій немає жодного скиду стічних вод чи водозабору, тобто це ЕД, розташована між початком ділянки річки, яка моделюється в цілому, та першим скидом стічних вод чи водозабором в напрямку течії річки; у разі, якщо за умовами задачі ділянка, що моделюється, починається від першого скиду стічних вод чи водозабору, тоді нульова ділянка не формується, а відлік починається одразу з першої, але як правило, фонові якість вод вище місць водокористування спостерігається і тому запропонована на рис. 2.4 схема завжди буде мати місце;

- Q — витрати води в останньому створі ділянки річки, що мо-

делюється, яким є кінцевий створ N -ої ЕД:

$$Q = Q_N;$$

- $x(t)$, $t = [0, T]$ — значення ПЯВ у межах усієї ділянки річки — формується припасуванням ПЯВ $x_i(t)$ ($t = [0, T_i]$) на усіх ЕД; відповідно $x(0)$ — це значення ПЯВ в нульовому створі ділянки річки (початковому створі нульової ЕД), а $x(T)$ — це значення ПЯВ в останньому створі ділянки річки (кінцевому створі N -ої ЕД).

Фактично, поставлена у цьому розділі задача зводиться до побудови математичної моделі для знаходження діапазону можливих значень саме величини $x(t)$, $t = [0, T]$.

Побудуємо спочатку модель самоочищення та розбавлення для найбільш забрудненої частини потоку ділянки річки у позначеннях рис. 2.4 — модель основана на виразі (2.4), куди підставлено (2.2):

$$x_i(t) = \left(\frac{Q_i x_i(0) + q_i u_i}{Q_i + q_i} + \left(u_i - \frac{Q_i x_i(0) + q_i u_i}{Q_i + q_i} \right) e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right) e^{-k_i t}, \quad t = [0, T_i].$$

Приводимо вираз до загального знаменнику та враховуємо те, що $Q_i + q_i = Q_{i+1}$:

$$x_i(t) = \left(Q_i x_i(0) + q_i u_i + (Q_i u_i + q_i u_i - Q_i x_i(0) - q_i u_i) e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right) \frac{e^{-k_i t}}{Q_{i+1}}, \quad t = [0, T_i].$$

Таким чином, загальний вигляд моделі:

$$x_0(t) = x(0) e^{-k_0 t}, \quad Q_1 = Q_0, \quad t = [0, T_0],$$

$$\left[(Q_i x_i(0) + q_i u_i) + Q_i (u_i - x_i(0)) e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right] \frac{e^{-k_i t}}{Q_{i+1}} = x_i(t), \quad t = [0, T_i], \quad (2.6)$$

$$x_{i+1}(0) = x_i(T_i), \quad x(T) = x_N(T_N), \quad Q_{i+1} = Q_i + q_i, \quad i = 1, \dots, N = 3.$$

Отримана модель є рекурентною, тобто, щоб знайти $x(T)$, треба знайти усі $x_i(T_i)$, $i = 0, \dots, N$. Усунемо цей недолік і виведемо вираз, який дозволить знайти $x(T)$ по вхідних даних одразу.

Для цього перетворимо модель (2.6), врахувавши, що, фактично,

$q_0 = 0$, та привівши подібні члени відносно $x_i(0)$ та u_i :

$$\left[Q_i x_i(0) - Q_i x_i(0) e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} + q_i u_i + Q_i u_i e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right] \frac{e^{-k_i t}}{Q_{i+1}} = x_i(t), \quad t = [0, T_i],$$

$$\left(1 - e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right) \frac{Q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i t} x_i(0) + \left(\frac{q_i}{Q_i} + e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right) \frac{Q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i t} u_i = x_i(t), \quad t = [0, T_i]$$

Таким чином, загальний вигляд математичної моделі:

$$x_0(t) = x(0) e^{-k_0 t}, \quad t = [0, T_0],$$

$$\gamma_i(t) \frac{Q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i t} x_i(0) + \varphi_i(t) \frac{Q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i t} u_i = x_i(t), \quad t = [0, T_i],$$

$$x_{i+1}(0) = x_i(T_i), \quad Q_{i+1} = Q_i + q_i, \quad q_0 = 0, \quad i = 0, \dots, N = 3, \quad (2.7)$$

$$x_0(0) = x(0), \quad x(T) = x_N(T_N),$$

$$\gamma_i(t) = 1 - e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}}, \quad \varphi_i(t) = \frac{q_i}{Q_i} + e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}}, \quad (2.8)$$

де функції $\gamma_i(t)$ та $\varphi_i(t)$ враховують гідравлічні процеси змішування та розбавлення стічних вод у річкових з урахуванням співвідношення їх витрат — відповідно для річкових та для стічних вод.

Перепишемо цю математичну модель для граничного випадку на кожній i -й елементарній ділянці, тобто для випадку, коли на кожній ЕД $t = T_i$:

$$x_0(T_0) = x(0) e^{-k_0 T_0} = x_I(0), \quad (2.9)$$

$$\gamma_i(T_i) \frac{Q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i T_i} x_i(0) + \varphi_i(T_i) \frac{Q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i T_i} u_i = x_i(T_i), \quad (2.10)$$

$$x_{i+1}(0) = x_i(T_i), \quad x_N(T_N) = x(T), \quad Q_{i+1} = Q_i + q_i, \quad q_0 = 0, \quad i = 0, \dots, 3. \quad (2.11)$$

Перепишемо вирази (2.9) та (2.10) у скороченому вигляді:

$$x_0(T_0) = A_0 x(0) = x_I(0), \quad (2.12)$$

$$A_i x_i(0) + B_i u_i = x_i(T_i), \quad (2.13)$$

$$A_0 = e^{-k_0 T_0}, \quad A_i = \gamma_i(T_i) \frac{Q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i T_i}, \quad B_i = \varphi_i(T_i) \frac{Q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i T_i}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.14)$$

Рекурентно підставляючи у вираз (2.13) для i -ої ЕД цей же вираз для $(i-1)$ -ої ЕД з урахуванням умов (2.9), (2.11), виведемо вираз для обчислення $x_1(T_1), x_2(T_2), x_3(T_3) = x(T)$ одразу по вхідних даних:

$$\begin{aligned} x_1(T_1) &= A_1 x_1(0) + B_1 u_1 = A_1 x_0(T_0) + B_1 u_1 = A_1 x(0) + B_1 u_1, \\ x_2(T_2) &= A_2 x_2(0) + B_2 u_2 = A_2 x_1(T_1) + B_2 u_2 = \\ &= A_2 (A_1 x(0) + B_1 u_1) + B_2 u_2 = A_2 A_1 x(0) + A_2 B_1 u_1 + B_2 u_2, \\ x(T) = x_3(T_3) &= A_3 x_3(0) + B_3 u_3 = \\ &= A_3 x_2(T_2) + B_3 u_3 = A_3 (A_2 A_1 x(0) + A_2 B_1 u_1 + B_2 u_2) + B_3 u_3 = \\ &= A_3 A_2 A_1 A_0 x(0) + A_3 A_2 B_1 u_1 + A_3 B_2 u_2 + B_3 u_3. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Поставлена задача для випадку трьох входів стічних вод розв'язана. Перейдемо до загального випадку.

2.1.3. Розв'язання задачі для випадку довільної кількості місць надходження стічних вод та водозаборів.

Застосовуючи метод математичної індукції до рівнянь, подібних до (2.15), легко можна довести, що у загальному випадку для i -ої елементарної ділянки має місце співвідношення [72]

$$x_i(T_i) = \prod_{j=0}^i A_j x(0) + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\left(\prod_{m=j+1}^i A_m \right) B_j u_j \right) + B_i u_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.16)$$

Повернемось до заміни (2.14) і запишемо (2.16) через вхідні параметри (2.9)–(2.11). Розглянемо першу складову рівняння (2.16)

$$\prod_{j=0}^i A_j = A_0 A_1 \cdot \dots \cdot A_{i-1} A_i =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-k_0 T_0} \gamma_1(T_1) \frac{Q_1}{Q_2} e^{-k_1 T_1} \dots \gamma_{i-1}(T_{i-1}) \frac{Q_{i-1}}{Q_i} e^{-k_{i-1} T_{i-1}} \gamma_i(T_i) \frac{Q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i T_i} = \\
&= \frac{Q_1}{Q_{i+1}} \cdot \left(\prod_{j=1}^i \gamma_j(T_j) \right) e^{-\sum_{j=0}^i k_j T_j} = \frac{Q_0}{Q_0 + \sum_{j=0}^i q_j} \cdot \left(\prod_{j=1}^i \gamma_j(T_j) \right) e^{-\sum_{j=0}^i k_j T_j}. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Формування другої складової рівняння (2.16) проаналізуємо для випадку $N = 3$ за допомогою рівняння (2.15):

- коефіцієнт біля u_1 :

$$\begin{aligned}
A_3 A_2 B_1 &= \gamma_3(T_3) \frac{Q_3}{Q_4} e^{-k_3 T_3} \gamma_2(T_2) \frac{Q_2}{Q_3} e^{-k_2 T_2} \frac{Q_1}{Q_2} \varphi_1(T_1) e^{-k_1 T_1} = \\
&= \frac{Q_1}{Q_4} \gamma_3(T_3) \gamma_2(T_2) \varphi_1(T_1) e^{-\sum_{j=1}^3 k_j T_j};
\end{aligned}$$

- коефіцієнт біля u_2 :

$$A_3 B_2 = \gamma_3(T_3) \frac{Q_3}{Q_4} e^{-k_3 T_3} \frac{Q_2}{Q_3} \varphi_2(T_2) e^{-k_2 T_2} = \frac{Q_2}{Q_4} \gamma_3(T_3) \varphi_2(T_2) e^{-\sum_{j=2}^3 k_j T_j}.$$

Застосовуючи метод математичної індукції, легко можна довести, що у загальному випадку в рівнянні (2.16) коефіцієнт біля u_j ($j = 1, \dots, i-1$) знаходиться за формулою

$$\left(\prod_{m=j+1}^i A_m \right) B_j = \frac{Q_0 + \sum_{m=0}^{j-1} q_m}{Q_0 + \sum_{m=0}^i q_m} \left(\prod_{m=j+1}^i \gamma_m(T_m) \right) \varphi_j(T_j) e^{-\sum_{m=j}^i k_m T_m}. \quad (2.18)$$

Підставляємо (2.17), (2.18) та (2.14) у (2.16) ($i = 1, \dots, N$):

$$x_i(T_i) = \frac{Q_0}{Q_0 + \sum_{j=0}^i q_j} \cdot \left(\prod_{j=1}^i \gamma_j(T_j) \right) e^{-\sum_{j=0}^i k_j T_j} x(0) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{Q_0 + \sum_{m=0}^{j-1} q_m}{Q_0 + \sum_{m=0}^i q_m} \left(\prod_{m=j+1}^i \gamma_m(T_m) \right) \varphi_j(T_j) e^{-\sum_{m=j}^i k_m T_m} u_j \right) + \\
& + \varphi_i(T_i) \frac{Q_0 + \sum_{j=0}^{i-1} q_j}{Q_0 + \sum_{j=0}^i q_j} e^{-k_i T_i} u_i.
\end{aligned}$$

Отриманий вираз дозволяє обчислити значення заданого показника якості річкової води у кінцевому створі ($t = T_i$) заданої елементарної ділянки, а також знайти внесок кожного джерела стічних вод цієї та попередніх ділянок. Перейдемо від математичної моделі для граничних значень $t = T_i$ до математичної моделі для будь-якого $t = [0, T_i]$.

Запишемо математичну модель для $x_i(t)$ ($t = [0, T_i]$) в цілому (з урахуванням формули (2.9)) (див. рис. 2.4):

$$x_0(T_0) = x(0)e^{-k_0 T_0} = x_1(0), \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
x_i(t) = & \frac{Q_0}{Q_{i+1}} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} \gamma_j(T_j) \cdot \gamma_i(t) e^{-\sum_{j=0}^{i-1} k_j T_j - k_i t} x(0) + \varphi_i(t) \frac{Q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i t} u_i + \\
& + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{Q_j}{Q_{i+1}} \prod_{m=j+1}^{i-1} \gamma_m(T_m) \cdot \gamma_i(t) \varphi_j(T_j) e^{-\sum_{m=j}^{i-1} k_m T_m - k_i t} u_j \right), \quad (2.20)
\end{aligned}$$

$$\gamma_j(t) = 1 - e^{-\alpha_j \sqrt[3]{t}}, \quad \varphi_j(t) = \frac{q_j}{Q_j} + e^{-\alpha_j \sqrt[3]{t}}, \quad t = [0, T_i], \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.21)$$

$$Q_{i+1} = Q_i + q_i, \quad q_0 = 0. \quad (2.22)$$

У разі, якщо $i = 0$, тоді математична модель (2.19)–(2.22) вироджується до вигляду:

$$x_0(t) = x(0)e^{-k_0 t}, \quad t = [0, T_0]. \quad (2.23)$$

Узагальнюючи вищевикладене, можна стверджувати, що алгоритм синтезу математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення для значення ПЯВ у найбільш забрудненому річковому потоці річки є таким [72]:

1. Розбити ділянку річки на елементарні ділянки (ЕД) таким чином, щоб на кожній з них було не більше одного просторово-зосередженого входу стічних чи природних вод або водозабору.

У відповідності з рекомендаціями роботи [84], критерієм розбиття може бути, також, незмінність параметрів математичної моделі — α_i та k_i . Якщо їх значення суттєво міняються в межах однієї ЕД, тоді останню слід розбити ще на декілька таким чином, щоб у межах кожної з них вказані параметри були приблизно незмінними.

2. Визначити усі вхідні дані $x(0)$, Q_0 , u_i , q_i ($i = 1, \dots, N$) та параметри T_i , α_i , k_i ($i = 0, \dots, N$) математичної моделі.

3. Для кожної ЕД, починаючи з нульової, робити наступне:

- якщо це нульова ділянка, тоді виконати обчислення за виразом (2.19) або за більш загальним — (2.23);
- якщо це водозабір, тоді врахувати його витрати, взяті з від'ємним знаком у співвідношенні (2.22) та перейти до наступної ЕД, прирівнявши її початкові умови початковим умовам ЕД з водозабором;
- якщо це надходження стічних вод, тоді провести розрахунки за математичною моделлю (2.20)–(2.22).

Важливо відмітити, що запропонований у роботі [72] підхід не накладає суттєвих обмежень на вибір математичних моделей процесів самоочищення та розбавлення. Взяті за основу математичні моделі (2.2) та (2.3) можуть бути й більш складними, як, наприклад у роботах

[23, 34, 62, 84, 128, 136, 138], але це призведе лише до ускладнення виразів (2.6)–(2.21). Два приклади такого ускладнення наведені нижче.

2.1.4. Приклад моделювання для безіменної малої річки Вінницької області.

Застосуємо виведені співвідношення для моделювання зміни значень деякого показника якості води ділянки річки, приведеної на рис. 2.4. Параметри елементарних ділянок річки приведені у табл. 2.1, а вхідні дані про витрати стічних вод та їх стан — у табл. 2.2. Значення ПЯВ у початковому створі ділянки річки $x(0) = 3$ мг/л. Витрати води у початковому створі ділянки річки $Q_0 = 1,2$ млн. л/год.

Таблиця 2.1

Параметри елементарних ділянок річки

| № ЕД, i | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----------------------------------------------------------|------|------|------|-------|
| Тривалість протікання води по ЕД T_i , (год.) | 1,0 | 1,2 | 0,8 | 2,2 |
| Гідравлічний параметр α_i , (1/год. ³) | 0,2 | 0,24 | 0,4 | 0,15 |
| Інтенсивність самоочищення k_i , (1/год.) | 0,01 | 0,02 | 0,04 | 0,015 |

Таблиця 2.2

Вхідні дані про витрати стічних вод та їх стан

| № ЕД, i | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---------------------------------------------|---|------|------|------|
| Значення ПЯВ у стічних водах u_i , (мг/л) | 0 | 8 | 6 | 4 |
| Витрати стічних вод q_i , (млн. л/год.) | 0 | 0,09 | 0,22 | 0,14 |

На рис. 2.5 приведено графік значень ПЯВ у найбільш забрудненій частині потоку усієї ділянки річки, розрахованих за математич-

ною моделлю (2.19)–(2.22). Розрахунок проведено з часовим інтервалом у 3 хв., тобто $\Delta t = 0,05$ (год.).

Як видно з рис. 2.5, на границі будь-яких двох елементарних ділянок графік робить стрибки. Важливо зазначити, що при цьому не відбувається порушення закону нерозривності потоку та речовини — просто найбільш забрудненою стає інша частина річкового потоку, до якої щойно надійшли стічні води. Також слід пам'ятати, що графік на рис. 2.5 — це не забруднення певного потоку річки, а лише найбільші можливі значення показника якості води у будь-якій частині річкового потоку [72].

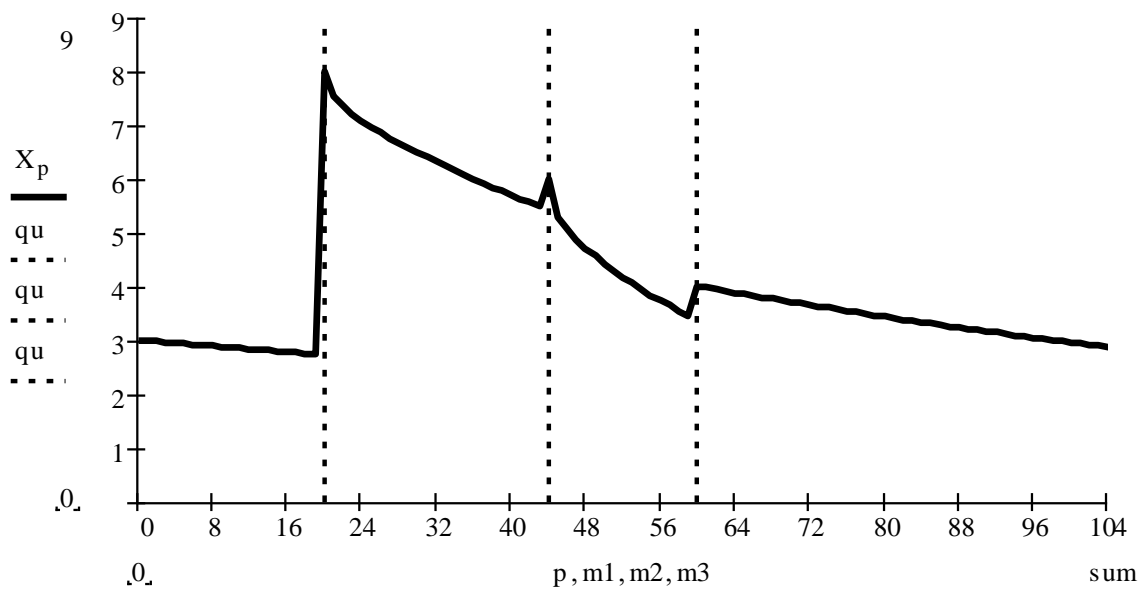


Рисунок 2.5. Графік значень ПЯВ у найбільш забрудненій частині потоку ділянки річки, схема якої із трьома входами вод наведена на рис. 2.4 (вертикальні пунктирні лінії відповідають місцям надходження стічних вод)

2.2. Розробка одновимірної математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення великої кількості стічних вод для найменш забрудненого потоку річки

2.2.1. Постановка задачі.

Перейдемо до синтезу математичної моделі динаміки стану вод у найменш забрудненій частині потоку річки. Після чого, буде можливим і виведення узагальненої одновимірної математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення стічних вод у розгалуженій річковій системі, яка забезпечуватиме визначення усього діапазону можливих значень ПЯВ в будь-якому створі річки у відповідності до умовного поділу річки на потоки різної забрудненості. як зображено на рис. 2.3.

Як було зазначено у підрозд. 2.1, математичні моделі, що синтезуються, основані на моделі розбавлення стічних вод з річковими Фролова – Родзиллера, яка описує зміну значення ПЯВ у найбільш забрудненій частині річкового потоку $x_{\max i}(t)$, тобто у частині, куди безпосередньо надходять стічні води з ПЯВ u_i .

Для найбільш забрудненої частини потоку математична модель Фролова – Родзиллера записується у вигляді (2.2) (рис. 2.1):

$$x_{\max i}(t) = x_i^* + (u_i - x_i^*) \cdot e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}}, \quad x_i^* = \frac{Q_i x_i + q_i u_i}{Q_i + q_i}, \quad t = [0, T_i^*], \quad (2.24)$$

Для моделювання зміни ПЯВ у найменш забрудненій частині річкового потоку $x_{\min i}(t)$ треба у формулі (2.24) замінити u_i на $x_i(0)$ [34, 101, 128, 138]:

$$x_{\min i}(t) = x_i^* + (x_i(0) - x_i^*) \cdot e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}}, \quad x_i^* = \frac{Q_i x_i + q_i u_i}{Q_i + q_i}, \quad t = [0, T_i^*]. \quad (2.25)$$

Графіки зміни ПЯВ за математичними моделями (2.24) та (2.25) приведено на рис. 2.6.

Варто зазначити, що якщо річкові води більш забруднені по заданому ПЯВ, ніж "стічні" (наприклад, надходить притока із джерельною водою, в якій відсутні, наприклад, хлориди чи феноли), тобто $x_i(0) > u_i$, тоді математична модель (2.24) описує $x_{min\ i}(t)$, а математична модель (2.25) — $x_{max\ i}(t)$, однак, розглядається протилежний випадок.

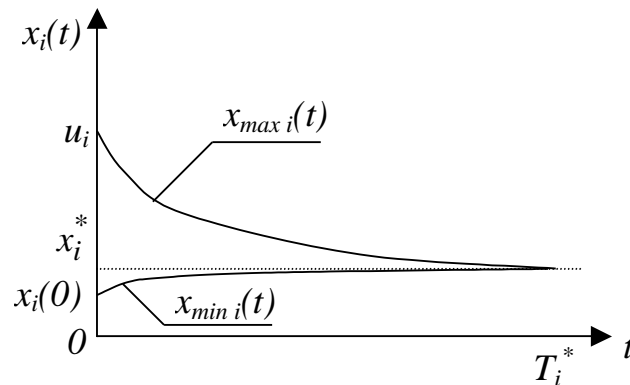


Рисунок 2.6. Графіки зміни ПЯВ у максимально та мінімально забруднених частинах річкового потоку після змішування з більш брудними стічними водами

Перейдемо до розв'язання задач розробки математичної моделі процесів у найменш забрудненій частині потоку річки, аналогічної до математичної моделі (2.19)-(2.23).

2.2.2. Побудова математичної моделі.

Математичну модель для найменш забрудненої частини річкового потоку будемо розробляти за аналогією з розробленою вище математичною моделлю для найбільш забрудненої частини (див. підрозд. 2.1).

Нагадаємо, що математичні моделі (2.6) та (2.7) для найбільш забрудненої частини річкового потоку були отримані на основі мате-

матичної моделі (2.24), виходячи з таких перетворень:

- врахування тільки процесів розбавлення математичною моделлю (2.24):

$$x_{\max i}(t) = \frac{Q_i x_i(0) + q_i u_i}{Q_i + q_i} + \left(u_i - \frac{Q_i x_i(0) + q_i u_i}{Q_i + q_i} \right) e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}},$$

$$(Q_i + q_i)x_{\max i}(t) = (Q_i x_i(0) + q_i u_i) + (Q_i u_i + q_i u_i - Q_i x_i(0) - q_i u_i) \cdot e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}}$$

$$Q_i x_i(0) + q_i u_i + Q_i(u_i - x_i(0)) \cdot e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} = (Q_i + q_i)x_{\max i}(t),$$

- врахування інших самоочисних процесів:

$$\left[(Q_i x_i(0) + q_i u_i) + Q_i(u_i - x_i(0)) e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right] \frac{e^{-k_i t}}{Q_i + q_i} = x_{\max i}(t), \quad t = [0, T_i]$$

або (див. (2.7) та (2.8)):

$$\left(1 - e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right) \frac{Q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i t} x_i(0) + \left(\frac{q_i}{Q_i} + e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right) \frac{Q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i t} u_i = x_{\max i}(t), \quad t = [0, T_i] \quad (2.26)$$

Побудуємо аналогічну математичну модель для найменш забрудненої частини річкового потоку i -ої ЕД на основі математичної моделі (2.25) за тим же алгоритмом:

- врахування тільки процесів розбавлення математичною моделлю (2.25):

$$x_{\min i}(t) = \frac{Q_i x_i(0) + q_i u_i}{Q_i + q_i} + \left(x_i(0) - \frac{Q_i x_i(0) + q_i u_i}{Q_i + q_i} \right) e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}},$$

$$(Q_i + q_i)x_{\min i}(t) =$$

$$= (Q_i x_i(0) + q_i u_i) + (Q_i x_i(0) + q_i x_i(0) - Q_i x_i(0) - q_i u_i) \cdot e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}},$$

$$Q_i x_i(0) + q_i u_i + q_i(x_i(0) - u_i) \cdot e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} = (Q_i + q_i)x_{\min i}(t),$$

- врахування інших самоочисних процесів:

$$\begin{aligned} & \left[(Q_i x_i(0) + q_i u_i) + q_i (x_i(0) - u_i) e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right] \frac{e^{-k_i t}}{Q_i + q_i} = x_{\min i}(t), \quad t = [0, T_i], \\ & \left[Q_i x_i(0) + q_i x_i(0) e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} + q_i u_i - q_i u_i e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right] \frac{e^{-k_i t}}{Q_i + q_i} = x_{\min i}(t), \quad t = [0, T_i], \\ & \left(\frac{Q_i}{q_i} + e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right) \frac{q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i t} x_i(0) + \left(1 - e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right) \frac{q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i t} u_i = x_{\min i}(t), \quad t = [0, T_i] \end{aligned} \quad (2.27)$$

З порівняння математичних моделей (2.26) та (2.27) видно, що вони мають багато спільного, але деякі елементи їх складових міняються місцями. Повторимо синтез математичної моделі (2.19)–(2.22), але вже на основі виразу (2.27).

За аналогією з (2.13) має місце вираз:

$$A_i x_i(0) + B_i u_i = x_{\min i}(T_i), \quad (2.28)$$

де

$$A_i = \left(\frac{Q_i}{q_i} + e^{-\alpha_i \sqrt[3]{T_i}} \right) \frac{q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i T_i}, \quad (2.29)$$

$$B_i = \left(1 - e^{-\alpha_i \sqrt[3]{T_i}} \right) \frac{q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i T_i}. \quad (2.30)$$

Легко показати, що співвідношення (2.15) та (2.16) справедливі і для цього випадку, але зміняться вирази для складових математичної моделі у вигляді (2.16). Виведемо їх. За аналогією з (2.17):

$$\begin{aligned} & \prod_{j=0}^i A_j = A_0 A_1 A_2 \cdots A_{i-1} A_i = \\ & = e^{-k_0 T_0} \chi_1 \frac{q_1}{Q_2} e^{-k_1 T_1} \chi_2 \frac{q_2}{Q_3} e^{-k_2 T_2} \cdots \chi_{i-1} \frac{q_{i-1}}{Q_i} e^{-k_{i-1} T_{i-1}} \chi_i \frac{q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i T_i} = \end{aligned}$$

$$= \left(\prod_{j=1}^i \frac{q_j}{Q_{j+1}} \chi_j \right) e^{-\sum_{j=0}^i k_j T_j} = \left(\prod_{j=1}^i \frac{q_j}{Q_0 + \sum_{m=0}^j q_m} \chi_j \right) e^{-\sum_{j=0}^i k_j T_j}, \quad (2.31)$$

де

$$\chi_i = \frac{Q_i}{q_i} + e^{-\alpha_i \sqrt[3]{T_i}}. \quad (2.32)$$

Аналогічно, формування другої складової формули (2.16) проаналізуємо для випадку $N = 3$, тобто як у рівняннях (2.15):

- коефіцієнт біля u_1 :

$$\begin{aligned} A_3 A_2 B_1 &= \chi_3 \frac{q_3}{Q_4} e^{-k_3 T_3} \chi_2 \frac{q_2}{Q_3} e^{-k_2 T_2} \frac{q_1}{Q_2} \gamma_1 e^{-k_1 T_1} = \\ &= \frac{q_1}{Q_2} \frac{q_2}{Q_3} \frac{q_3}{Q_4} \chi_3 \chi_2 \gamma_1 e^{-\sum_{j=1}^3 k_j T_j}; \end{aligned}$$

- коефіцієнт біля u_2 :

$$A_3 B_2 = \chi_3 \frac{q_3}{Q_4} e^{-k_3 T_3} \gamma_2 \frac{q_2}{Q_3} e^{-k_2 T_2} = \frac{q_2}{Q_3} \frac{q_3}{Q_4} \chi_3 \gamma_2 e^{-\sum_{j=2}^3 k_j T_j},$$

де γ_2 має те саме значення, що й в (2.18).

Застосовуючи метод математичної індукції, легко можна довести, що у загальному випадку коефіцієнт біля u_j ($j = 1, \dots, i-1$) знаходиться за формулою

$$\left(\prod_{m=j+1}^i A_m \right) B_j = \left(\prod_{m=j}^i \frac{q_m}{Q_0 + \sum_{r=0}^m q_r} \right) \left(\prod_{m=j+1}^i \chi_m \right) \gamma_j e^{-\sum_{m=j}^i k_m T_m}. \quad (2.33)$$

Підставляємо (2.30)–(2.33) у рівняння (2.16), записане для $x_{\min i}(T_i)$:

$$\begin{aligned}
x_{\min i}(T_i) = & \left(\prod_{j=1}^i \frac{q_j}{Q_0 + \sum_{m=0}^j q_m} \left(\frac{Q_j}{q_j} + e^{-\alpha_j \sqrt[3]{T_j}} \right) \right) e^{-\sum_{j=0}^i k_j T_j} x(0) + \\
& + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\left(\prod_{m=j}^i \frac{q_m}{Q_0 + \sum_{r=0}^m q_r} \right) \left(\prod_{m=j+1}^i \left(\frac{Q_m}{q_m} + e^{-\alpha_m \sqrt[3]{T_m}} \right) \right) \left(1 - e^{-\alpha_j \sqrt[3]{T_j}} \right) e^{-\sum_{m=j}^i k_m T_m} u_j \right) + \\
& + \left(1 - e^{-\alpha_i \sqrt[3]{T_i}} \right) \frac{q_i}{Q_0 + \sum_{j=0}^i q_j} e^{-k_i T_i} u_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Аналогічно, за допомогою отриманого виразу легко записати математичну модель самоочищення та розбавлення для найменш забрудненої частини річкового потоку, що описує зміну значення ПЯВ у річці $x_{\min i}(t)$ ($t = [0, T_i]$) на будь-якій з елементарних ділянок річки:

$$\begin{aligned}
x_{\min i}(t) = & \prod_{j=1}^i \frac{q_j}{Q_0 + \sum_{m=0}^j q_m} \prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{Q_j}{q_j} + e^{-\alpha_j \sqrt[3]{T_j}} \right) \left(\frac{Q_i}{q_i} + e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right) e^{-\sum_{j=0}^{i-1} k_j T_j - k_i t} x(0) + \\
& + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\left(\prod_{m=j}^i \frac{q_m}{Q_0 + \sum_{r=0}^m q_r} \right) \left(\prod_{m=j+1}^{i-1} \left(\frac{Q_m}{q_m} + e^{-\alpha_m \sqrt[3]{T_m}} \right) \right) \left(\frac{Q_i}{q_i} + e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right) \right).
\end{aligned}$$

$$\left. \left(1 - e^{-\alpha_j \sqrt[3]{T_j}} \right) e^{-\sum_{m=j}^{i-1} k_m T_m - k_i t} u_j \right) +$$

$$+ \left(1 - e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right) \frac{q_i}{Q_0 + \sum_{j=0}^i q_j} e^{-k_i t} u_i, \quad t = [0, T_i], \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.35)$$

За аналогією з (2.20) запишемо математичну модель (2.35) у скороченому вигляді:

$$x_{\min i}(t) = \prod_{j=1}^i \frac{q_j}{Q_{j+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \chi_j(T_j) \cdot \chi_i(t) e^{-\sum_{j=0}^{i-1} k_j T_j - k_i t} x(0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \left(\left(\prod_{m=j}^i \frac{q_m}{Q_{m+1}} \right) \left(\prod_{m=j+1}^{i-1} \chi_m(T) \right) \chi_i(t) \gamma_j(T_j) e^{-\sum_{m=j}^{i-1} k_m T_m - k_i t} u_j \right) +$$

$$+ \gamma_i(t) \frac{q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i t} u_i, \quad t = [0, T_i], \quad i = \overline{1, N},$$

$$\gamma_j(t) = 1 - e^{-\alpha_j \sqrt[3]{t}}, \quad \chi_i(t) = \frac{Q_i}{q_i} + e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}}, \quad Q_{i+1} = Q_i + q_i, \quad q_0 = 0. \quad (2.36)$$

2.3. Узагальнення одновимірної математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення стічних вод у розгалуженій річковій системі на найменш та найбільш забруднений річковий потік

2.3.1. Вихідні передумови та постановка задачі.

У підрозділах 2.1 та 2.2 побудовано математичні моделі процесів самоочищення та розбавлення великої кількості стічних вод та водозаборів окремо для найменш та окремо для найбільш забрудненого

потокі річки. Легко бачити, що отримані математичні моделі є дуже схожими. Отже, є можливість побудови узагальненої математичної моделі на найменш та найбільш забруднений річковий потік.

Введемо такі позначення: w_i — значення ПЯВ найбільш забруднених вод з витратами q_{wi} у місці їх змішування з менш брудними, які мають значення ПЯВ \bar{w}_i та витрати вод $q_{\bar{w}i}$, тобто:

$$w_i = \begin{cases} u_i, & \text{якщо } u_i > x_i(0), \\ x_i(0), & \text{якщо } u_i \leq x_i(0), \end{cases} \quad q_{wi} = \begin{cases} q_i, & \text{якщо } u_i > x_i(0), \\ Q_i, & \text{якщо } u_i \leq x_i(0), \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\bar{w}_i = \begin{cases} x_i(0), & \text{якщо } u_i > x_i(0), \\ u_i, & \text{якщо } u_i \leq x_i(0), \end{cases} \quad q_{\bar{w}i} = \begin{cases} Q_i, & \text{якщо } u_i > x_i(0), \\ q_i, & \text{якщо } u_i \leq x_i(0). \end{cases} \quad (2.38)$$

У такому разі, наприклад, математична модель (2.24), (2.25) для $x_{\min i}(t)$ та $x_{\max i}(t)$ набуде такого уніфікованого вигляду:

$$x_{\max i}(t) = x_i^* + (w_i - x_i^*) \cdot e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}}, \quad (2.39)$$

$$x_{\min i}(t) = x_i^* + (\bar{w}_i - x_i^*) \cdot e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}}, \quad (2.40)$$

$$x_i^* = \frac{q_{wi}w_i + q_{\bar{w}i}\bar{w}_i}{q_{wi} + q_{\bar{w}i}}. \quad (2.41)$$

За аналогією з (2.4), тобто з урахуванням процесів самоочищення узагальнену математичну модель самоочищення та розбавлення стічних вод у річкових можна записати у вигляді:

$$x_{\max i}(t) = \left(x_i^* + (w_i - x_i^*) e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right) e^{-k_i t}, \quad (2.42)$$

$$x_{\min i}(t) = \left(x_i^* + (\bar{w}_i - x_i^*) e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}} \right) e^{-k_i t}. \quad (2.43)$$

Отже, є достатньо передумов для розв'язання задачі побудови уніфікованої математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення великої кількості стічних вод та водозаборів для найменш та найбільш забрудненого річкового потоку, аналогічно до математичних моделей (2.39)–(2.43).

2.3.2. Узагальнення математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення річкового потоку з багатьма входами стічних вод на найменш та найбільш забруднений річковий потік.

Порівняльний аналіз математичних моделей (2.20), (2.21) та (2.36) показує, що за структурою вони є подібними, і якщо в чисельниках перших множників усіх складових першої поміняти q_i на Q_i та множники $\chi_i(t)$ на $\gamma_i(t)$ і $\gamma_i(t)$ на $\varphi_i(t)$, то отримаємо другу. При цьому слід враховувати ідентичність множників з витратами вод:

$$\prod_{j=1}^i \frac{Q_j}{Q_{j+1}} = \frac{Q_1}{Q_2} \frac{Q_2}{Q_3} \dots \frac{Q_i}{Q_{i+1}} = \frac{Q_1}{Q_{i+1}} = \frac{Q_0}{Q_{i+1}},$$

тобто

$$\frac{Q_0}{Q_{i+1}} = \prod_{j=1}^i \frac{Q_j}{Q_{j+1}}; \quad (2.44)$$

$$\prod_{m=j}^i \frac{Q_m}{Q_{m+1}} = \frac{Q_j}{Q_{j+1}} \frac{Q_{j+1}}{Q_{j+2}} \dots \frac{Q_{i-1}}{Q_i} \frac{Q_i}{Q_{i+1}} = \frac{Q_j}{Q_{i+1}},$$

$$\frac{Q_j}{Q_{i+1}} = \prod_{m=j}^i \frac{Q_m}{Q_{m+1}}. \quad (2.45)$$

Для більшої наочності твердження про ідентичність математичних моделей наведемо їх, врахувавши (2.44) та (2.45) у математичній моделі (2.20) та те, що математична модель (2.20) записана, фактично, для $x_{\max i}(t)$:

$$x_{\max i}(t) = \prod_{j=1}^i \frac{Q_j}{Q_{j+1}} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} \gamma_j(T_j) \cdot \gamma_i(t) e^{-\sum_{j=0}^{i-1} k_j T_j - k_i t} x(0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \left(\left(\prod_{m=j}^i \frac{Q_m}{Q_{m+1}} \right) \prod_{m=j+1}^{i-1} \gamma_m(T_m) \cdot \gamma_i(t) \varphi_j(T_j) e^{-\sum_{m=j}^{i-1} k_m T_m - k_i t} u_j \right) +$$

$$+ \varphi_i(t) \frac{Q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i t} u_i, \quad (2.46)$$

$$x_{\min i}(t) = \prod_{j=1}^i \frac{q_j}{Q_{j+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \chi_j(T_j) \cdot \chi_i(t) e^{-\sum_{j=0}^{i-1} k_j T_j - k_i t} x(0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \left(\left(\prod_{m=j}^i \frac{q_m}{Q_{m+1}} \right) \left(\prod_{m=j+1}^{i-1} \chi_m(T) \right) \chi_i(t) \gamma_j(T_j) e^{-\sum_{m=j}^{i-1} k_m T_m - k_i t} u_j \right) +$$

$$+ \gamma_i(t) \frac{q_i}{Q_{i+1}} e^{-k_i t} u_i, \quad (2.47)$$

$$\gamma_i(t) = 1 - e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}}, \quad \chi_i(t) = \frac{Q_i}{q_i} + e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}}, \quad \varphi_i(t) = \frac{q_i}{Q_i} + e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}}, \quad (2.48)$$

$$Q_{i+1} = Q_i + q_i, \quad q_0 = 0, \quad t = [0, T_i], \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.49)$$

Співвідношення (2.19) та (2.23), які доповнюють математичну модель (2.46), (2.48), (2.49), виконуються і для математичної моделі (2.47)–(2.49). Врахування виявлених відмін та особливостей дозволяє записати узагальнену математичну модель процесів самоочищення та розбавлення річкового потоку з багатьма входами вод для значення деякого показника ПЯВ у будь-якій точці створів річки у вигляді:

$$x_i(t) = \prod_{j=1}^i \frac{q_{w_j}}{Q_{j+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \psi_j(T_j) \chi_i(t) e^{-\sum_{j=0}^{i-1} k_j T_j - k_i t} x(0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \left(\left(\prod_{m=j}^i \frac{q_{w_m}}{Q_{m+1}} \right) \left(\prod_{m=j+1}^{i-1} \psi_m(T_m) \right) \psi_i(t) \theta_j(T_j) e^{-\sum_{m=j}^{i-1} k_m T_m - k_i t} u_j \right) +$$

$$+ \theta_i(t) \frac{q_{w_i}}{Q_{i+1}} e^{-k_i t} u_i, \quad t = [0, T_i], \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.50)$$

$$x_0(t) = x(0) e^{-k_0 t}, \quad t = [0, T_0], \quad (2.51)$$

$$\Psi_j(t) = \begin{cases} \gamma_j(t), & \text{якщо } u > x_0, \\ \chi_j(t), & \text{якщо } u \leq x_0, \end{cases} \quad \Theta_j(t) = \begin{cases} \varphi_j(t), & \text{якщо } u > x_0, \\ \gamma_j(t), & \text{якщо } u \leq x_0, \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\gamma_j(t) = 1 - e^{-\alpha_j \sqrt[3]{t}}, \quad \chi_i(t) = \frac{q_{\bar{w}_j}}{q_{w_j}} + e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}}, \quad \varphi_j(t) = \frac{q_{w_j}}{q_{\bar{w}_j}} + e^{-\alpha_j \sqrt[3]{t}}, \quad (2.53)$$

$$Q_{i+1} = q_{w_i} + q_{\bar{w}_i}, \quad q_{w_0} = 0, \quad q_{\bar{w}_0} = Q_0. \quad (2.54)$$

Замикається математична модель (2.50)–(2.54) виразами (2.37) та (2.38).

Таким чином, алгоритм синтезу математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення забруднень чи значень ПЯВ у річці є таким:

1. Розбити ділянку річки на елементарні ділянки (ЕД) таким чином, щоб на кожній з них було не більше одного просторово-зосередженого входу стічних чи природних вод або водозабору.

У відповідності з роботою [84], критерієм розбиття може бути, також, незмінність параметрів математичної моделі — α_i та k_i . Якщо їх значення суттєво міняються в межах однієї ЕД, тоді останню слід розбити ще на декілька таким чином, щоб у межах кожної з них вказані параметри були приблизно незмінними.

2. Визначити усі вхідні дані $x(0)$, Q_0 , u_i , q_i ($i = 1, \dots, N$) та параметри T_i , α_i , k_i ($i = 0, \dots, N$) математичної моделі.

3. Для кожної ЕД, починаючи з нульової, необхідно робити наступне:

- якщо це нульова ділянка, тоді виконати обчислення за виразом (2.19) або за більш загальним — (2.23) чи (2.51);

- якщо це водозабір, тоді врахувати його витрати, взяті з від'ємним знаком у співвідношенні (2.22) чи (2.54) та перейти до наступної ЕД, прирівнявши її початкові умови початковим умовам ЕД з водозабором;

- якщо це надходження вод, тоді: порівняти їх значення ПЯВ з отриманим на виході попередньої ЕД i , відповідно до результатів порівняння, вибрати та обчислити функції за виразами (2.37), (2.38), (2.52)–(2.54); провести розрахунки за математичною моделлю (2.50) спочатку для найбільш (у позначеннях (2.37)), а потім для найменш (у позначеннях (2.38)) забрудненої частини річкового потоку.

Важливо відзначити, що, як і вище, запропонований підхід до побудови узагальненої математичної моделі не накладає суттєвих обмежень на вибір математичних моделей процесів самоочищення та розбавлення. Взяті за основу математичні моделі (2.5) та (2.3) можуть бути й більш складними, як, наприклад у роботах [2, 4, 17, 34, 40, 55, 56, 62, 84, 117, 128–130, 133, 138, 143], але це призведе до ускладнення виразів (2.4)–(2.54).

Розглянемо приклад.

2.3.3. Узагальнення розроблених математичних моделей для розгалуженої річкової системи

Побудовані у цьому розділі математичні моделі описують процеси самоочищення та розбавлення стічних вод у річкових, а саме зміну деякого показника якості води тільки на деякій i -й ($i = \overline{0, N}$) елементарній ділянці. Покажемо яким чином отримані результати можна розповсюдити на будь-яку розгалужену річкову систему.

Математична модель (2.50)–(2.54) була побудована, виходячи із 9-ти положень, викладених у підрозд. 2.1.1 та 3-х положень, викладених у підрозд. 2.1.2. Доповнимо їх ще одним: “Води, що надходять до i -ої ЕД річки з параметрами u_i та q_i , можуть бути не тільки результатом антропогенної діяльності, тобто стічними чи зворотними водами,

а й бути природного походження, у т.ч. бути притокою річки, до якої вони надходять.” Тобто пропонується не розрізняти природу походження вод, що надходять до річки.

Таким чином, для розрахунку значення ПЯВ, наприклад, у гирлі головної річки з розгалуженою системою приток, слід спочатку розрахувати значення ПЯВ у гирлах приток цієї річки.

2.3.4. Приклад моделювання для безіменної малої річки Вінницької області.

Застосуємо виведені співвідношення для моделювання зміни значень деякого показника якості води ділянки річки, приведеної на рис. 2.6. Усі параметри та вхідні значення — ті ж самі, що у прикладі п. 2.1.4.

На рис. 2.7 приведено графік значень ПЯВ у найбільш забрудненій частині потоку усієї ділянки річки, розрахованих за математичною моделлю (2.19)–(2.22), та графік значень ПЯВ у найменш забрудненій частині потоку, розрахованих за математичною моделлю (2.47)–(2.49). Розрахунок проведено з часовим інтервалом у 3 хв., тобто $\Delta t = 0,05$ (год.).

Як видно на рис. 2.7, на нульовій елементарній ділянці ($N = 0$), де немає скидів стічних вод, забруднення річкового потоку однакове по ширині річки у кожному її створі і графіки співпадають. На інших елементарних ділянках вони відрізняються. На границі будь-яких двох елементарних ділянок графік найбільш забрудненої частини річки робить стрибки. Важливо нагадати, що при цьому не відбувається порушення закону нерозривності потоку та речовини — просто найбільш забрудненою стає інша частина річкового потоку, яка щойно надійшла зі стічними водами.

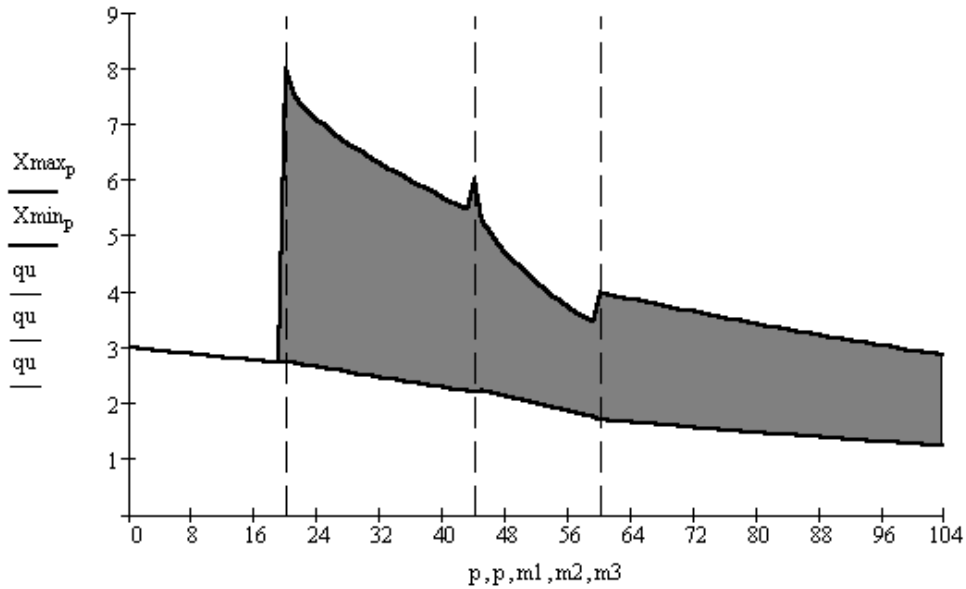


Рисунок 2.7. Графіки значень деякого ПЯВ у найбільш (верхній графік) та у найменш (нижній графік) забруднених частинах потоку усєї ділянки річки, наведеної на рис. 2.4 (усі можливі значення забруднення в різних потоках по ширині річки охоплюються зафарбованою зоною; пунктирною лінією відмічено місця надходження стічних вод)

2.4. Розширення запропонованого підходу до побудови математичних моделей з використанням в якості базових інших відомих моделей процесів самоочищення річкових вод

Розроблені вище математичні моделі будуються із врахуванням специфіки процесів розбавлення на основі математичної моделі Фролова – Родзиллера (2.2), а інших самоочисних процесів — на основі розв’язку типового в екології диференціального рівняння першого порядку (2.3):

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = k_i x_i(t), \quad x_i(0) = Q_i x_i(0) + q_i u_i, \quad t = [0, T_i], \quad (2.55)$$

З рівняння (2.55) зрозуміло, що ця математична модель ґрунту-

ється лише на припущенні, що у кожний момент часу швидкість зміни значення деякого ПЯВ з коефіцієнтом k_i прямо пропорційна поточно-му значенню ПЯВ. Такий опис може бути справедливим, якщо на зменшення значення ПЯВ у кожен момент часу діє або один домінуючий процес з інтенсивністю, пропорційною k_i , або група однотипних процесів, спільна дія яких, також, може враховуватись коефіцієнтом k_i . У роботах же [7, 9, 11, 20, 33, 36, 41, 49, 84, 90, 97, 111, 113, 116, 117, 119, 129, 131, 132, 138] наведено досить багато прикладів, коли на зменшення значення ПЯВ у річковій воді з часом може діяти значно більше дуже різномірних за своєю природою та інтенсивністю процесів. Отже, для забезпечення більшої адекватності варто ускладнити і математичний опис самоочисних процесів. Розглянемо два варіанти цього ускладнення.

2.4.1. Використання авторської математичної моделі послідовно-одночасних річкових самоочисних процесів

Замість математичної моделі (2.55) візьмемо за основу математичну модель (1.20)–(1.24), яка у позначеннях (2.55) запишеться таким чином [84, 115]:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = G_{il}(t) x_i(t), \quad l = 1 \vee 2 \vee 3, \quad t = [0, T_i], \quad (2.56)$$

$$x_i(0) = Q_i x_i(0) + q_i u_i, \quad (2.57)$$

$$G_{i1}(t) = -k_{i1}, \quad (2.58)$$

$$G_{i2}(t) = -k_{i2} \left(1 - e^{-k_{i1}t} \right), \quad (2.59)$$

$$G_{i3}(t) = -k_{i3} \left[1 - e^{-k_{i2} \left(1 - e^{-k_{i1}t} \right) t} \right], \quad (2.60)$$

де індекс “ i ” означає належність параметра до математичної моделі i -ої ЕД.

Для застосування математичної моделі самоочисних процесів (2.56)–(2.60) замість математичної моделі (2.55) у загальній математичній моделі (2.50)–(2.54) слід записати розв’язок рівнянь (2.56)–(2.60) аналогічно до виразу (2.3) (див. (1.22), (1.23)):

$$x_i(t) = (Q_i x_i(0) + q_i u_i) \cdot M_{il}(K_i, t), \quad t = [0, T_i], \quad (2.61)$$

$$M_{il}(K_i, t) = e^{-\mu_{il}(K_i, t)}, \quad \mu_{il}(K_i, t) = \begin{cases} -K_{i1} \cdot t, & l=1, \\ -\frac{K_{i2}}{K_{i1}} \cdot (e^{-K_{i1} \cdot t} + K_{i1} t - 1), & l=2, \\ -K_{i3} \cdot \left[t - \int_0^t e^{-K_{i2} \cdot q} (1 - e^{-K_{i1} \cdot q}) dq \right], & l=3, \end{cases} \quad (2.62)$$

де індекс “ l ” означає належність параметра до математичної моделі i -ої ЕД.

З порівняння математичних моделей (2.61)–(2.62) та (1.22)–(1.23) видно, що їх позначення ідентичні за змістом, але математична модель (2.61)–(2.62) більше відповідає позначенням цього розділу, зокрема тому, що математична модель (2.61)–(2.62) записана для i -ої ЕД. Перенесення ж параметра l із дужок в індекс у функціях $M(\cdot)$ та $\mu(\cdot)$ має за мету просто скоротити запис.

Математична модель (2.61) є значно загальнішою, ніж математична модель (2.3). Фактично, у математичній моделі (2.61) функція $M_{il}(K_i, t)$ може мати й вигляд, що відрізняється від (2.62), тобто описувати самоочисні процеси зовсім по-іншому. Повертаючись до узагальненої одновимірної математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення стічних вод у розгалуженій річковій системі на найменш та найбільш забруднений річковий потік (2.50)–(2.54), можна легко показати, що використання математичної моделі (2.61) замість (2.3) приведе до таких змін:

$$\begin{aligned}
x_i(t) = & \left(\prod_{j=1}^i \frac{q_{w_j}}{Q_{j+1}} \right) \left(\prod_{j=1}^{i-1} \psi_j(T_j) \right) \chi_i(t) \left(\prod_{j=0}^{i-1} M_{jl}(K_j, T_j) \right) M_{il}(K_i, t) x(0) + \\
& + \sum_{j=1}^{i-1} \left(\left(\prod_{m=j}^i \frac{q_{w_m}}{Q_{m+1}} \right) \left(\prod_{m=j+1}^{i-1} \psi_m(T_m) \right) \psi_i(t) \theta_j(T_j) \left(\prod_{m=j}^{i-1} M_{ml}(K_m, T_m) \right) M_{il}(K_i, t) u_j \right) + \\
& + \theta_i(t) \frac{q_{w_i}}{Q_{i+1}} M_{il}(K_i, t) u_i, \quad , \quad t = [0, T_i], \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.63)
\end{aligned}$$

$$x_0(t) = x(0) M_{0l}(K_0, t), \quad t = [0, T_0], \quad (2.64)$$

$$\psi_j(t) = \begin{cases} \gamma_j(t), & \text{якщо } u > x_0, \\ \chi_j(t), & \text{якщо } u \leq x_0, \end{cases} \quad \theta_j(t) = \begin{cases} \phi_j(t), & \text{якщо } u > x_0, \\ \gamma_j(t), & \text{якщо } u \leq x_0, \end{cases} \quad (2.65)$$

$$\gamma_j(t) = 1 - e^{-\alpha_j \sqrt[3]{t}}, \quad \chi_i(t) = \frac{q_{\bar{w}_j}}{q_{w_j}} + e^{-\alpha_i \sqrt[3]{t}}, \quad \phi_j(t) = \frac{q_{w_j}}{q_{\bar{w}_j}} + e^{-\alpha_j \sqrt[3]{t}}, \quad (2.66)$$

$$Q_{i+1} = q_{w_i} + q_{\bar{w}_i}, \quad q_{w_0} = 0, \quad q_{\bar{w}_0} = Q_0, \quad x_i(0) = x_{i-1}(T_{i-1}), \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.67)$$

Легко бачити, що, фактично, змін зазнали тільки вирази (2.63) та (2.64). Математична модель (2.63)–(2.67) доповнюється виразами (2.37), (2.38) та (2.62) для моделі процесів самоочищення у вигляді (2.56)–(2.60).

Варто зазначити, що математична модель (2.61)–(2.62) перетворюється на математичну модель (2.3) у випадку $l = 1$. З урахуванням цього, математична модель (2.62)–(2.67), (2.37), (2.38) є узагальненням математичної моделі (2.50)–(2.54) на більш складні способи опису самочисних процесів у річці.

2.4.2. Використання математичних моделей В. І. Лаврика

Покажемо, як можна аналогічно синтезувати узагальнену математичну модель для багатьох входів на основі математичних моделей В. І. Лаврика (1.7) та (1.17), наведених у розділі 1.

Сам В. І. Лаврик теж розглядав задачу моделювання значень ПЯВ у випадку багатьох входів до річки природного чи антропогенного характеру, але він пропонує застосовувати, як це вже зазначалось у підрозд. 1.3, свою математичну модель розбавлення (1.7) до результатів обчислень за математичною моделлю (1.17) [46]. Розроблена ж у цьому розділі математична модель дозволяє визначати ПЯВ у будь-якому створі ділянки річки $x(z) = x(vt)$. Покажемо як можна у ній використати математичні моделі В. І. Лаврика (1.7) та (1.17), записані для i -ої ЕД:

$$x_i(t) = x_i^* + (u_i - x_i^*) e^{-\frac{1+K_i\tau_i}{\tau_i} t},$$

$$\tau_i = \frac{W_i}{Q_{i-1} + q_i} = \frac{W_i}{Q_i},$$

$$x_i(t) = (x_i(0) + u_i) e^{\left(\gamma_{\max i} \left(m_i \left(1 - e^{-\frac{t}{m_i}} \right) - t \right) \right)}, \quad t = [0, T_i].$$

Легко показати, що у разі підстановки цих рівнянь у математичну модель (2.62)–(2.67) та виконання необхідних перетворень, отримана математична модель буде відрізнятись тільки виразами (2.62) та (2.66):

$$M_{il}(K_i, t) = e^{\left(\gamma_{\max i} \left(m_i \left(1 - e^{-\frac{t}{m_i}} \right) - t \right) \right)}, \quad K_i = \begin{bmatrix} \gamma_{\max i} \\ m_i \end{bmatrix},$$

$$\gamma_j(t) = 1 - e^{-\frac{1+K_j\tau_j}{\tau_j} t}, \quad \chi_i(t) = \frac{q_{\bar{w}_j}}{q_{w_j}} + e^{-\frac{1+K_j\tau_j}{\tau_j} t}, \quad \varphi_j(t) = \frac{q_{w_j}}{q_{\bar{w}_j}} + e^{-\frac{1+K_j\tau_j}{\tau_j} t}.$$

Вирази ж (2.63)–(2.65), (2.67) змін не зазнають.

2.5. Розробка алгоритмів ідентифікації параметрів та структури математичних моделей процесів самоочищення та розбавлення стічних вод у розгалуженій річковій системі на найменш та найбільш забруднений річковий потік

Не менш важливою задачею, ніж побудувати адекватну математичну модель, є задача розробки алгоритмів ідентифікації структури та параметрів цих моделей за експериментальними даними, у т.ч. з використанням даних регулярного державного моніторингу України.

Розробимо алгоритм ідентифікації структури та параметрів математичної моделі (2.62)–(2.67).

Слід зазначити, що ідентифікація структури розробленої математичної моделі стосується тільки ідентифікації кількості елементарних ділянок N та значення l_i ($i = \overline{0, N}$) в (2.62), а оцінювання або обчислення значень величин K_i та α_i на усіх елементарних ділянках відносимо до ідентифікації параметрів цієї моделі.

Нагадаємо, що математична модель (2.62)–(2.67) є “гібридом” декількох окремих математичних моделей, об’єднаних певним чином. Кожна з цих математичних моделей (і модель Фролова – Родзиллера (2.2), і модель (2.3), і модель (2.56)–(2.60)) вимагають своєї методики ідентифікації параметрів. Виходячи з припущення про те, що ці математичні моделі описують процеси різної природи, які по-різному себе проявляють, можна, у першому наближенні, оцінити параметри цих моделей відокремлено — за їх “власними” методиками ідентифікації. А потім, визначені у такий спосіб параметри використати як початкові оцінки параметрів загальної математичної моделі (2.62)–(2.67).

Наведемо ці методики.

2.5.1. Відомі алгоритми ідентифікації параметрів та структури математичних моделей процесів самоочищення та математичних моделей розбавлення стічних вод у річкових, на основі яких виведено узагальнену математичну модель.

1. Математична модель Фролова – Родзиллера (2.2).

Невідомий параметр на i -й ЕД: α_i — коефіцієнт, що враховує гідравлічні умови змішування на i -й ЕД.

Вхідні дані: $x_i(0)$, Q_i , u_i , q_i , T_i .

Параметр α_i визначається для конкретного створу i -ої елементарної ділянки окремо на основі емпіричних досліджень за формулою [101, 125, 128]

$$\alpha_i = \zeta_i \varphi_i \sqrt[3]{\frac{E_i}{q_i}}, \quad (2.68)$$

де ζ_i — коефіцієнт, який залежить від місця випуску стоку в річку на i -й ЕД: біля берега — $\zeta_i = 1$, в фарватері річки, тобто в місці найбільших швидкостей — $\zeta_i = 1,5$;

φ_i — коефіцієнт звивистості для i -ої ЕД річки, тобто відношення її довжини L_{pi} , визначеної по прямій, до її довжини L_i , визначеної вздовж фарватеру річки

$$\varphi_i = \frac{L_{pi}}{L_i}, \quad (2.69)$$

E_i — коефіцієнт турбулентної дифузії, який може визначатись:

- за формулою М. В. Потапова для рівнинних річок (застосовується зрідка) [34, 101, 128]:

$$E_i = H_i v_i / 200, \quad (2.70)$$

де v_i — середня швидкість течії; H_i — середня глибина річки на i -й елементарній ділянці;

- за формулою В. М. Макаєєва для усіх проточних водойм (за-

стосовується найчастіше) [34, 101, 128]:

$$E_i = \frac{gH_i v_i}{2mC_i}, \quad (2.71)$$

де g — прискорення сили тяжіння, як правило береться $9,81 \text{ м/с}^2$;

m — коефіцієнт Бусінського для води, тобто $22,3$;

C_i — коефіцієнт Шезі, який визначається за формулою [34, 101, 128]

$$C_i = \frac{1}{n_i} \sqrt[6]{H_i}, \quad (2.72)$$

де n_i — коефіцієнт шорсткості за М.Ф. Срібним, який визначається за таблицею 2.3 відповідно до однієї з дев'яти категорій водотоків.

Таблиця 2.3.

Коефіцієнти шорсткості за М. Ф. Срібним
(без урахування гірських річок) [34, 101, 128]

| № | Характеристика русла | n_i |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 1 | Природні русла у надто сприятливих умовах (чисті, прямі, незасмічені, земляні з вільною течією). | 0,025 |
| 2 | Русла постійних водотоків рівнинного типу, переважно великих і середніх річок, за сприятливих умов стану ложа і течії води. Періодичні потоки (великі і малі) у дуже гарному стані поверхні і формі ложа. | 0,033 |
| 3 | Порівняно чисті русла постійних рівнинних водотоків за звичайних умов, звивисті, з деякими дефектами направлення струменів або ж прямі, але з дефектами в рельєфі дна (мілини, промоїни, місцями каміння). Земляні русла періодичних водотоків (сухих логів) за відносно сприятливих умов. | 0,040 |

Продовження таблиці 2.3.

| № | Характеристика русла | n_i |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 4 | Русла великих і середніх річок значно засмічені, звивисті і такі, що частково заросли, кам'янисті з неспокоїною течією. Періодичні (дощові і весняні) водотоки з великою галькою або покритим рослинністю ложем. Заплави великих і середніх річок, відносно розроблені, покриті нормальною кількістю рослинності (трави, чагарники). | 0,050 |
| 5 | Русла періодичних водотоків, суттєво засмічені і звивисті, такі, що відносно заросли, нерівні, погано розроблені заплави річок (промоїни, чагарники, дерева). Порожисті ділянки рівнинних річок. | 0,067 |
| 6 | Річки зі слабкою течією і заплави такі, що значно заросли, з великими глибокими промоїнами. | 0,080 |
| 7 | Заплави такі ж, як і у попередній категорії, але з дуже неправильною косоструменевою течією, заводями тощо. | 0,100 |
| 8 | Річки болотного типу (зарості, купини, в багатьох місцях майже стояча вода). Заплави з дуже великими мертвими просторами з місцевими заглибленнями (озерами тощо). | 0,133 |
| 9 | Глухі заплави (суцільно лісні). | 0,200 |

Таким чином, визначивши по довідниках та по карті річки величини n_i , H_i , v_i , L_{pi} , L_i , ζ_i , можна просто обчислити параметр α_i за формулою (2.68) для кінцевого створу кожної i -ої ЕД, який розташований на відстані L_i від нульового створу.

2. Математична модель (2.3), що основана на розв'язку типового в екології диференціального рівняння першого порядку [34, 40, 48, 84, 101, 117, 128, 129, 138].

Невідомий параметр на i -й ЕД: k_i — коефіцієнт, що враховує гідравлічні умови змішування на i -й ЕД.

Вхідні дані: показник якості води та хімічні речовини чи гідробіонти, концентрацію чи вміст яких у воді він описує.

Численні дослідження, проведені з різними хімічними речовинами та з різними мікроорганізмами, що узагальнені в роботі [117], дозволили визначити значення так званої константи самоочищення, якій в математичній моделі (2.3) відповідає параметр k_i . Фактично, за такого способу визначення цей коефіцієнт не залежить від особливостей протікання процесів на елементарних ділянках — він враховує тільки особливості “поведінки” речовин чи мікроорганізмів, які характеризує заданий ПЯВ, у воді цих ЕД. Отже є справедливим положення:

$$k_0 = k_1 = \dots = k_i = \dots = k_N = k, \quad (2.73)$$

тобто усі ЕД мають однакове значення параметра k , оскільки на усіх них моделюється один і той самий показник якості води. Звичайно, можна стверджувати, що є багато показників якості води, котрі враховують концентрацію багатьох видів різних речовин чи мікроорганізмів, наприклад “рН”, “Лужність”, “Жорсткість”, “Кишкові палички” тощо, і оскільки на кожній ЕД можуть переважати різні види окремих речовин, то було б доцільнішим визначати параметр k для кожної ЕД окремо. Але, у такому складному випадку математична модель (2.3) не забезпечить адекватного опису процесів — краще застосовувати більш складну математичну модель (2.61)–(2.62) з відповідною методикою її ідентифікації.

Варто зазначити, що далеко не для всіх відомих та поширених у стічних водах хімічних речовин та гідробіонтів визначені “константи самоочищення”.

3. Авторська математична модель (2.61)–(2.62), що оснований на врахуванні послідовно-одночасних груп процесів, які діють на ПЯВ [84, 115].

Невідомі параметри на i -й ЕД: K_{il} — вектор з $l = 1, 2$ або 3 коефіцієнтами k_{il} , які враховують інтенсивність протікання груп самоочисних процесів у річці на i -й ЕД.

Вхідні дані: Q_0, u_i, q_i, T_i , виміряне значення ПЯВ \tilde{x}_{00} у початковому створі усієї ділянки, що моделюється, а також не менше п’яти значень заданого показника якості води $\tilde{x}_{ij}, j = \overline{1, K_i}$ на кожній (i -й) ЕД ($i = \overline{0, N}$).

У монографії [84] питанням ідентифікації математичної моделі (2.61)–(2.62) присвячено цілий розділ. Викладемо його основні положення.

Значення $\tilde{x}_{00} = x(0)$.

З мінімальної кількості $K_{min} \ i = 4$ даних реальних вимірювань ПЯВ у річці виділяються такі:

- три значення \tilde{x}_{ij} необхідно для оцінювання параметрів k_{i1}, k_{i2}, k_{i3} для математичної моделі $l = 3$ (для моделей з меншими l достатньо l даних);

- решта значень \tilde{x}_{ij} (як мінімум одне) необхідні для забезпечення надлишковості даних для коректного застосування методу найменших квадратів в задачі ідентифікації параметрів математичної моделі при $l = 3$; для забезпечення надлишковості при ідентифікації математичних моделей з меншим l , зрозуміло, достатньо менше даних.

Для забезпечення ідентифікації структури математичної моделі (2.61)–(2.62), тобто точного значення параметру l , необхідно ще хоча б одне значення вимірювань, тобто мінімальний загальний їх обсяг $K_{\min i}^*$ складає

$$K_{\min i}^* = K_{\min i} + 1 = 4 + 1 = 5,$$

а бажаний:

$$K_i^* \geq K_{\min i}^* > K_{\min i}, \quad K_i \geq K_{\min i}. \quad (2.74)$$

Тоді, після ідентифікації параметрів математичних моделей по K_i даним реальних вимірювань для усіх трьох значень $l = 1, 2$ або 3 , оцінюється похибка ε_{il} між реальними даними \tilde{x}_{ij} та значеннями ПЯВ $x_{il}(t_j)$, які забезпечують ці математичні моделі у створах ЕД з t_j , що відповідають місцям вимірювань значень \tilde{x}_{ij} . Але похибка оцінюється вже не по K_i даних реальних вимірювань, а по K_i^* (див. (2.74)):

$$\varepsilon_{il} = \frac{\sum_{j=1}^{K_i^*} |\tilde{x}_{ij} - x_{il}(t_j)|}{\sum_{j=1}^{K_i^*} |x_{il}(t_j)|} \cdot 100\%. \quad (2.75)$$

Далі порівнюються між собою значення ε_{i1} , ε_{i2} , ε_{i3} та визначається найменше з них. Зрозуміло, що оптимальною тоді буде та математична модель, яка забезпечує мінімальне значення похибки ε_{il} .

Чим більше даних реальних вимірювань на кожній ЕД, вимірних за усіма вимогами, викладеними у роботі [84], тим адекватніше буде математична модель (2.61), (2.62) описувати процеси, що відбуваються у річці. Серед згаданих вимог є, наприклад, те, що вимірювання повинні робитись приблизно одночасно з урахуванням часу на добігання вод від одного створу до іншого, оскільки, нагадуємо, ма-

тематична модель (2.61), (2.62) тільки тоді можна називати і просторово-одновимірною, і динамічною (хоча і не одночасно), коли вона записується для деякого об'єму води, який рухається з течією річки зі швидкістю v , і тоді для неї справедливе співвідношення (1.5).

2.5.2. Розробка алгоритму ідентифікації параметрів та структури узагальненої математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення стічних вод у річкових.

Наведені у попередньому пункті методики ідентифікації окремих параметрів узагальненої математичної моделі (2.62)–(2.67) мають один спільний недолік: оцінювання одного параметра відокремлено від іншого може спричинити помилки, оскільки, фактично, математична модель самоочисних процесів у вигляді (2.2) або (2.61) враховує і процеси розбавлення, тому їх розрізнена ідентифікація може не дати бажаних результатів. Крім того, ідентифікація параметрів математичних моделей (2.2) та (2.3) відокремлено від експериментальних даних може призвести до помилок, обумовлених різницею умов, в яких збирались довідкові дані, по яких робиться розрахунок, та тих, в яких проводиться моделювання.

Отже, більш доцільно проводити ідентифікацію узагальненої математичної моделі (2.62)–(2.67) одночасно усіх параметрів та безпосередньо по експериментальних даних, а за методиками, викладеними вище, знаходити тільки їх початкові оцінки.

Як і під час ідентифікації параметрів математичної моделі (2.61), (2.62), для ідентифікації усіх параметрів узагальненої математичної моделі є необхідним певна кількість \widehat{K}_i даних реальних вимірювань \tilde{x}_{ij} , $j = \overline{1, \widehat{K}_i}$ (пасивний експеримент) плюс значення ПЯВ \tilde{x}_{00} , виміряне у початковому створі усієї ділянки, що моделюється.

Визначимо мінімальну кількість таких даних, які дозволили б оцінити значення параметрів математичної моделі (2.62)–(2.67) за методом найменших квадратів. Потрібні такі дані:

- одне значення \tilde{x}_{ij} необхідно для оцінювання параметра α_i ;
- ще три значення \tilde{x}_{ij} необхідно для оцінювання параметрів k_{i1} , k_{i2} , k_{i3} для моделі $l = 3$ (для моделей з меншими l достатньо l даних);
- мінімум одне значення \tilde{x}_{ij} необхідно для забезпечення надлишковості при ідентифікації параметрів математичної моделі α_i та k_{i1} , k_{i2} , k_{i3} ;
- мінімум одне значення \tilde{x}_{ij} необхідно для забезпечення надлишковості при ідентифікації структури математичної моделі, тобто значення l .

Всього на кожній i -й ЕД:

$$\widehat{K}_i \geq \widehat{K}_{\min i} = 6. \quad (2.76)$$

Додатково необхідним є значення \tilde{x}_{00} , яке є оцінкою початкового значення ПЯВ $x(0)$.

Варто зазначити, що інтервал Δ_{ij} між \widehat{K}_i вимірювальними створами не повинен бути однаковим, як це часто вимагається. Річковий об'єкт на відміну від, наприклад каналів чи трубопроводів, є значно неодноріднішим об'єктом, тому величина Δ_{ij} може приймати різні значення. На рис. 2.8 показано приклад розташування створів спостережень якості води на деякій i -й елементарній ділянці річки у $\widehat{K}_i = 6$ створах.

Слід відмітити декілька вимог, важливих для ідентифікації математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення у річці, пов'язаних із забором проб. Математична модель (2.62)–(2.67) разом

із заміною (2.37) та (2.38) описує процеси як у найбільш, так і в найменш забрудненій частині потоку річки. Отже, першою вимогою є те, що під час ідентифікації математичної моделі по експериментальних даних слід чітко знати, якої частини потоку стосуються ці дані за критерієм забрудненості води.

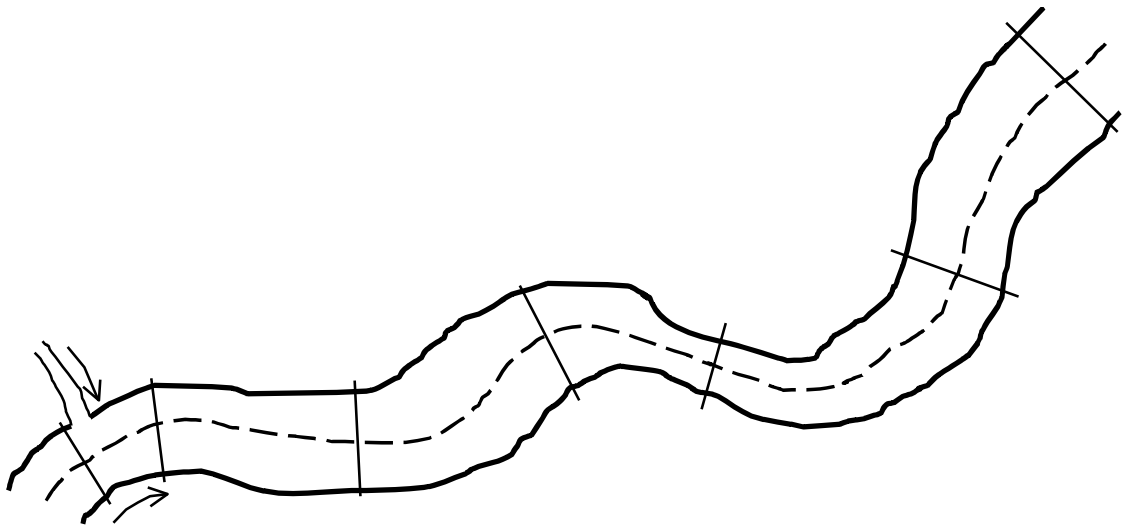


Рисунок 2.8. Приклад розташування створів спостережень якості води на елементарній ділянці річки

Наприклад, можна вимагати, щоб під час забору проб фіксувалось в якій частині потоку проводився забір у відповідності зі схемою на рис. 2.3. Однак, слід враховувати, що схема, зображена на рис. 2.3 є дуже умовною. Внаслідок поперечних течій та циркуляцій річкових вод, неоднорідності дна русла та непаралельності і звивистості берегів річки схема розбавлення та перемішування стічних вод з річковими на практиці є значно складнішою за ту, що зображена на рис. 2.3.

Отже, більш коректним буде забір та аналіз проб вздовж кожного поперечного створу річки. Порівняння між собою вимірних наборів значень ПЯВ вздовж одного створу річки легко дозволить встановити мінімальне та максимальне значення ПЯВ у кожному створі. Для мінімізації обсягу подібних додаткових вимірювань можна вимагати забору проб хоча б тільки біля обох берегів та всередині фарватеру

річки.

Важливою перевагою розробленої у цій роботі математичної моделі (2.62)–(2.67), (2.37), (2.38) є те, що структура та параметри математичних моделей для найбільш та найменш забруднених частин річкового потоку ідентичні — відрізняється лише врахування даних про якість та витрати стічних вод та основного річкового потоку. Отже, для ідентифікації структури та параметрів обох моделей достатньо $\widehat{K}_{\min i} = 6$, а не більше, як було б, якщо їх треба було б ідентифікувати окремо.

Друга вимога враховує те, що розроблена математична модель описує процеси в деякому об'ємі води, який пересувається зі швидкістю течії вздовж річки. Отже, дані \tilde{x}_{ij} , які вимірюються для проведення ідентифікації цієї математичної моделі, повинні відбиратись з урахуванням часу на добігання Δ_{ij} води від одного створу до іншого, щоб характеризувати один і той самий об'єм води.

Третьою вимогою є те, що на кожній ЕД для ідентифікації використовуються значення \tilde{x}_{ij} , виміряні нижче за течією від місця надходження вод до річки, якщо це надходження мало місце. Дані, виміряні вище за течією, повинні використовуватись для ідентифікації на попередній ЕД. У відповідності ж з (2.67), вихідне значення $(i-1)$ -ої ЕД $x_{i-1}(T_{i-1})$ дорівнює вхідному значенню ПЯВ i -ої ЕД $x_i(0)$.

У разі наявності експериментальних даних на елементарній ділянці у кількості \widehat{K}_i , яка відповідає умові (2.76), ідентифікація усіх параметрів математичної моделі (2.62)–(2.67), (2.37), (2.38) повинна відбуватись за методом найменших квадратів з урахуванням таких положень:

- \tilde{x}_{i0} є оцінкою $x_i(0)$;

- в математичній моделі розбавлення оцінювання параметра $\tilde{\alpha}_i$ пропонується проводити у вигляді

$$\tilde{\alpha}_i = \hat{\alpha}_i + \Delta_{ci}, \quad (2.77)$$

де $\hat{\alpha}_i$ — оцінка параметра $\tilde{\alpha}_i$, розрахована за паспортними даними за формулою (2.68); Δ_{ci} — додатна, нульова або від’ємна величина, яка враховує відміни реальних гідравлічних умов протікання змішування від значення $\hat{\alpha}_i$;

- в математичній моделі самоочищення пропонується одночасно оцінювати параметри моделі (вектор K_{il}) та її структуру (значення величини l) шляхом ідентифікації послідовно усієї математичної моделі (2.62)–(2.67) для K_{i1} , K_{i2} та K_{i3} , обчислення в кожному випадку похибок ε_{i1} , ε_{i2} , ε_{i3} за формулою (2.75) та вибір таких значень K_{il} та l , які забезпечують найменше ε_{il} .

Запишемо вирази для ідентифікації параметрів та структури загальної математичної моделі, за якими безпосередньо повинні проводитися розрахунки. Метод найменших квадратів полягає в обчисленні таких значень параметрів моделі, котрі забезпечують мінімум суми квадратів відхилень експериментальних даних від тих, що забезпечує модель (“теоретичних” значень) [6, 44, 50, 59, 84, 89]:

$$\Sigma^N = \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\hat{K}_i} \left(x_i \left(\Delta_{ci}, K_{il}, T_{i-1} + \sum_{p=1}^j \Delta_{ip} \right) - \tilde{x}_{ij} \right)^2, \quad T_{-1} = 0. \quad (2.78)$$

У виразі (2.78) зазначено:

- загальне відхилення експериментальних даних від теоретичних обчислюється по усіх елементарних ділянках, у т.ч. по нульовій, якщо вона є;

- серед аргументів теоретичних значень $x_i(\cdot)$ вказано параметри, які саме потребують ідентифікації за методом найменших квадра-

тів на кожній i -й ЕД (Δ_{ai}, K_{il}) та координата часу, яка обчислюється як тривалість добігання вод до $(i-1)$ -го створу кожної ЕД (зрозуміло, що для $i = 0$: $T_{i-1} = 0$) плюс сума часових інтервалів Δ_{ij} на добігання вод між $(j-1)$ -м та j -м вимірювальними створами i -ої ЕД.

За методом найменших квадратів оптимальні оцінки параметрів математичної моделі (2.78) знаходяться як розв'язок системи рівнянь [6, 44, 50, 59, 84, 89]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \Delta_{ai}} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\bar{K}_i} \left(x_i \left(\Delta_{ai}, K_{il}, T_{i-1} + \sum_{p=1}^j \Delta_{ip} \right) - \tilde{x}_{ij} \right)^2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial K_{il}} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\bar{K}_i} \left(x_i \left(\Delta_{ai}, K_{il}, T_{i-1} + \sum_{p=1}^j \Delta_{ip} \right) - \tilde{x}_{ij} \right)^2 = 0, \end{cases} \quad (2.79)$$

$$x_0(0) = \tilde{x}_{00}, \quad T_{-1} = 0.$$

Оскільки, запропонований спосіб побудови математичної моделі базується на тому, що весь вплив на кожну елементарну ділянку з боку інших ЕД враховується початковими умовами (2.67), то ідентифікацію оптимальних параметрів та структури узагальненої математичної моделі можна робити для кожної елементарної ділянки окремо.

Друге з рівнянь (2.79), в залежності від значення параметра l , слід розуміти як рівняння чи система рівнянь типу ($i = \overline{0, N}$) ($T_{-1} = 0$):

$$\frac{\partial}{\partial k_{i1}} \sum_{j=1}^{\bar{K}_i} \left(x_i \left(\Delta_{ai}, k_{i1}, T_{i-1} + \sum_{p=1}^j \Delta_{ip} \right) - \tilde{x}_{ij} \right)^2 = 0 \quad (2.80)$$

або

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial k_{i1}} \sum_{j=1}^{\bar{K}_i} \left(x_i \left(\Delta_{ai}, k_{i1}, k_{i2}, T_{i-1} + \sum_{p=1}^j \Delta_{ip} \right) - \tilde{x}_{ij} \right)^2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial k_{i2}} \sum_{j=1}^{\bar{K}_i} \left(x_i \left(\Delta_{ai}, k_{i1}, k_{i2}, T_{i-1} + \sum_{p=1}^j \Delta_{ip} \right) - \tilde{x}_{ij} \right)^2 = 0 \end{cases} \quad (2.81)$$

або

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial k_{i1}} \sum_{j=1}^{\bar{K}_i} \left(x_i \left(\Delta_{\alpha i}, k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, T_{i-1} + \sum_{p=1}^j \Delta_{ip} \right) - \tilde{x}_{ij} \right)^2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial k_{i2}} \sum_{j=1}^{\bar{K}_i} \left(x_i \left(\Delta_{\alpha i}, k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, T_{i-1} + \sum_{p=1}^j \Delta_{ip} \right) - \tilde{x}_{ij} \right)^2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial k_{i3}} \sum_{j=1}^{\bar{K}_i} \left(x_i \left(\Delta_{\alpha i}, k_{i1}, k_{i2}, k_{i3}, T_{i-1} + \sum_{p=1}^j \Delta_{ip} \right) - \tilde{x}_{ij} \right)^2 = 0. \end{cases} \quad (2.82)$$

Легко бачити, що вирази (2.80)–(2.82) стосуються тільки однієї i -ої ЕД, а не усіх одночасно — цим підкреслюється, що ці вирази повинні записуватись для кожної ЕД окремо, оскільки, в загальному випадку, на різних ЕД можуть бути оптимальними математичній моделі з різним l .

Якщо ж згадати, що експериментальні дані \tilde{x}_{ij} можуть характеризувати як найменш забруднену частину потоку річки (введемо позначення — \tilde{x}_{ij}^{\vee}), так і найбільш забруднену (\tilde{x}_{ij}^{\wedge}), то, для врахування цього факту, під час ідентифікації математичної моделі (2.62)–(2.67) слід доповнювати вирази системи рівнянь (2.79) умовою $u_i \leq x_i(0)$ для першого випадку та $u_i > x_i(0)$ для другого аби мати більш чітке розуміння, яку слід застосовувати заміну змінних у виразах (2.37) та (2.38) під час визначення функції $x_i(\cdot)$ ($T_{-1} = 0$). Для ідентифікації математичної моделі (2.62)–(2.67) на основі вхідних даних \tilde{x}_{ij}^{\vee} та \tilde{x}_{ij}^{\wedge} слід використовувати систему рівнянь (2.83).

Таким чином, алгоритм ідентифікації параметрів та структури узагальненої математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення стічних вод у річкових полягає у наступному:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial}{\partial \Delta_{ci}} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\bar{K}_i} \left(x_i \left(\Delta_{ci}, K_{il}, T_{i-1} + \sum_{p=1}^j \Delta_{ip} \right) - \tilde{x}_{ij}^{\vee} \right)^2 = 0, \quad u_i \leq x_i(0), \\
\frac{\partial}{\partial \Delta_{ci}} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\bar{K}_i} \left(x_i \left(\Delta_{ci}, K_{il}, T_{i-1} + \sum_{p=1}^j \Delta_{ip} \right) - \tilde{x}_{ij}^{\wedge} \right)^2 = 0, \quad u_i > x_i(0), \\
\frac{\partial}{\partial K_{il}} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\bar{K}_i} \left(x_i \left(\Delta_{ci}, K_{il}, T_{i-1} + \sum_{p=1}^j \Delta_{ip} \right) - \tilde{x}_{ij}^{\vee} \right)^2 = 0, \quad u_i \leq x_i(0), \\
\frac{\partial}{\partial K_{il}} \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{\bar{K}_i} \left(x_i \left(\Delta_{ci}, K_{il}, T_{i-1} + \sum_{p=1}^j \Delta_{ip} \right) - \tilde{x}_{ij}^{\wedge} \right)^2 = 0, \quad u_i > x_i(0).
\end{array} \right. \quad (2.83)$$

1. Розбити ділянку річки, яка моделюється, на елементарні ділянки за двома критеріями:

1) “Одна ЕД — одне просторово-зосереджене надходження вод природного чи антропогенного походження” — початок кожної i -ої ($i = \overline{1, N}$) елементарної ділянки річки повинен бути розташований на річці біля місця надходження до неї стічних вод, але дещо вище за течією від нього; початок нульової елементарної ділянки річки ($i = 0$) повинен співпадати із початком усієї ділянки, для якої виконується моделювання, але якщо цей початковий створ співпадає із початковим створом першої ЕД, тоді нульова елементарна ділянка не створюється, а відлік ведеться від $i = 1$;

2) “Приблизна чи умовна незмінність значень паспортних даних протягом однієї ЕД” — якщо на деякій i -й елементарній ділянці такі паспортні дані як n_i , H_i , v_i , L_{pi} , L_i зазнають суттєвих змін (значно міняється характер дна русла, глибина чи швидкість течії річки, її звивистість), тоді вона розбивається ще на декілька для забезпечення приблизної (умовної) незмінності цих параметрів вздовж кожної елемен-

тарної ділянки.

2. Збирається уся вхідна інформація про річковий потік та усі надходження вод чи водозабори на ділянці, що моделюється: Q_0 , u_i , q_i , ζ_i . Якщо деяка r -та ЕД була створена для забезпечення виконання другого критерію у п.1, тобто для забезпечення незмінності паспортних даних ЕД, а отже, на ній може і не бути надходження вод чи водозабору взагалі, тоді приймається $q_r = 0$ і всі розрахунки далі проводяться по вироджених математичних моделях, подібних до тих, які використовуються для нульової ($i = 0$) ЕД.

3. Збираються чи визначаються значення паспортних даних усіх елементарних ділянок, створених у п.1: n_i , H_i , v_i . Визначається довжина L_i кожної i -ої ЕД. На основі L_i та v_i оцінюється час добігання води T_i від початку до кінця кожної i -ої ЕД. По карті (по електронній за допомогою геоінформаційних технологій [3, 53, 63, 69, 83, 136] чи по паперовій вручну) визначаються величини L_{pi} .

4. Проводиться збирання та обробка експериментальних даних про якість води у річці \tilde{x}_{ij} — не менше шести вимірювань на кожній ЕД з обов'язковим встановленням частини потоку, до якої варто віднести зібрані дані за критерієм забрудненості, тобто, це дані \tilde{x}_{ij}^{\vee} чи \tilde{x}_{ij}^{\wedge} . Окремо визначаються значення \tilde{x}_{i0} , які є оцінкою $x_i(0)$ у початковому створі усієї ділянки, що моделюється, котрий ще не зазнав забруднення i -ми стічними водами. Забір проб, де визначаються значення ПЯВ \tilde{x}_{ij} , проводиться з урахуванням часу добігання Δ_{ij} води від одного створу до іншого, щоб характеризувати один і той самий об'єм води.

5. За формулами (2.68)–(2.72) для усіх ЕД розраховуються початкові наближення параметра α_i — величини $\hat{\alpha}_i$.

б. За рівняннями (2.79) для \tilde{x}_{ij} або (2.83) для \tilde{x}_{ij}^{\vee} та \tilde{x}_{ij}^{\wedge} з урахуванням (2.80)–(2.82) проводиться розв’язання систем рівнянь (від 2-х для $l = 1$ і \tilde{x}_{ij} до 8-ми для $l = 3$ і \tilde{x}_{ij}^{\vee} та \tilde{x}_{ij}^{\wedge}) з використанням відомих обчислювальних методів, наприклад, градієнтним методом або методом Ньютона [6, 8, 13, 44], за допомогою генетичного алгоритму тощо [54, 96, 98, 99]. Після знаходження розв’язку для кожного l за формулою (2.75) обчислюється значення відносної похибки δ_{il} , а потім, як оптимальні, вибираються такі значення K_{il} та l , які забезпечують найменше значення цієї відносної похибки. Варто пам’ятати, що для кожної i -ої ЕД ідентифікація оптимальних параметрів та структури математичної моделі здійснюється окремо, тобто, фактично, замість системи рівнянь (2.79) слід розв’язувати таку (без знаку суми по $i = 0, \dots, N$):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \Delta_{ai}} \sum_{j=1}^{\bar{K}_i} \left(x_i \left(\Delta_{ai}, K_{il}, T_{i-1} + \sum_{p=1}^j \Delta_{ip} \right) - \tilde{x}_{ij} \right)^2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial K_{il}} \sum_{j=1}^{\bar{K}_i} \left(x_i \left(\Delta_{ai}, K_{il}, T_{i-1} + \sum_{p=1}^j \Delta_{ip} \right) - \tilde{x}_{ij} \right)^2 = 0, \end{cases} \quad (2.84)$$

$$i = \overline{0, N}, \quad x_0(0) = \tilde{x}_{00}.$$

2.5.3. Варіації алгоритму ідентифікації параметрів та структури узагальненої математичної моделі.

Запропонуємо деякі варіації розробленого у попередньому пункті алгоритму ідентифікації узагальненої математичної моделі.

Варіація 1. Як математичну модель самоочисних процесів можна використовувати не модель (2.61)–(2.62), а значно простішу модель (2.3), якій відповідає математична модель (2.61)–(2.62) при $l = 1$. В ре-

зультаті мінімальна кількість експериментальних даних на кожній i -й ЕД $\widehat{K}_{\min i}$ дорівнюватиме трьом, тобто:

- одне значення \tilde{x}_{ij} необхідно для оцінювання параметра α_i ;
- одне значення \tilde{x}_{ij} необхідно для оцінювання параметра k_i ;
- мінімум одне значення \tilde{x}_{ij} необхідно для забезпечення збитковості при ідентифікації параметрів математичної моделі α_i та k_i .

Отже, експериментальних даних треба майже вдвічі менше. Хоча і адекватність математичної моделі реальним процесам теж дещо зменшується.

Варіація 2. Якщо елементарні ділянки — це ділянки однієї річки з приблизно однаковими гідрологічними та гідроморфологічними умовами або немає можливості встановити усі необхідні паспортні дані на різних ЕД, тоді, в першому наближенні, пропонується вважати їх однаковими на певній кількості або усіх ЕД:

$$\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_1 = \dots = \hat{\alpha}_i = \dots = \hat{\alpha}_N = \hat{\alpha}, \quad (2.85)$$

реальні ж їх відміни будуть враховані значеннями $\Delta_{\alpha i}$, ідентифікованими за наведеним вище алгоритмом.

2.6. Ідентифікація узагальненої математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення за даними регулярного державного моніторингу вод

2.6.1. Розробка алгоритму ідентифікації.

Математичні моделі та алгоритми, які дозволяють розв'язувати задачі моделювання, прогнозування, контролю та управління значеннями показників якості води у річках саме за даними регулярного державного моніторингу вод (РДМВ) України, є надзвичайно важли-

вим та потужним інструментом для “аналізу інформації про стан вод, прогнозування його змін та розроблення науково-обґрунтованих рекомендацій для прийняття рішень у галузі використання і охорони вод та відтворення водних ресурсів” у відповідності з Постановою Кабінету Міністрів України від 20.07.1996 р. № 815 “Про затвердження Порядку здійснення державного моніторингу вод” із змінами та доповненнями протягом 1996–2004 рр. [93].

В той же час, усі розроблені вище алгоритми ідентифікації математичних моделей, будучи коректними в математичному плані, іноді зустрічаються з певними проблемами під час застосування на практиці, зокрема під час проведення ідентифікації за даними РДМВ [103, 105]:

1. Кожен *суб'єкт моніторингу* вод проводить спостереження за своїм власним графіком, який формується згідно власних потреб та цілей (Водоканал — питне водопостачання, держуправління екології та природних ресурсів — контроль забруднення та очищення довкілля, санепідемстанція — контроль за впливом довкілля на захворюваність населення, облводгосп — зміна водного режиму річок, центр з гідрометерології — прогноз погоди тощо), а також за своїм власним набором показників у своїх створах.

2. Спостережні створи розташовуються лише біля надходжень стічних чи природних вод порівняно великого обсягу — або на 100–1000 метрів нижче за течією, або і вище, і нижче.

3. Між місцями надходження вод до річки кількість спостережних створів практично ніколи не буває більше одного.

4. Спостережні створи розташовані, як правило, на середніх та великих річках, а скиди стічних вод, у більшості випадків, здійснюються в струмки та малі річки, які є притоками перших.

5. Гідропости, де здійснюється регулярне вимірювання витрат річкової води, розташовуються, принаймні у Вінницькій області, з такими закономірностями: на малих річках — не більше одного і переважно близько до гирла чи у середній течії, на середніх річках — до двох (у витокі та у гирлі), на великих — з досить великим інтервалом (від 90 до 180 км). Отже, встановити значення витрат води у початковому створі довільної ділянки, де треба провести моделювання, у більшості випадків неможливо, а можливо встановити тільки у деякому створі (всередині ділянки, в кінці тощо) — початкові ж витрати Q_0 слід вираховувати через q_i .

У зв'язку зі згортанням у 1994 році програми паспортизації малих річок України такими паспортними даними як n_i , H_i та v_i , забезпечені далеко не усі малі річки¹⁾, а якщо ця інформація є, то тільки одне значення на усю річку. Середні річки²⁾ мають 3-5 ділянок, забезпечених окремими паспортними даними. Таких висновків дійшов автор цієї роботи під час створення геоінформаційного електронного кадастру поверхневих вод Вінницької області на замовлення Держуправління екології та природних ресурсів у Вінницькій області та Вінницького облводгоспу у 2003–2004 роках [81, 83, 86, 102, 104].

Запропонуємо зміни у формуванні та алгоритмах ідентифікації математичних моделей показників якості води у річках, які дозволять їх реалізовувати, незважаючи на окреслені вище проблеми. При цьому варто враховувати варіації, викладені у попередньому підрозділі для спрощення процедури ідентифікації.

Отже, модифікований алгоритм буде таким:

¹⁾ Малі річки — це річки, площа водозбірного басейну яких складає менше 2 тис. км² [18].

²⁾ Середні річки — це річки, площа водозбірного басейну яких знаходиться між 2 та 50 тис. км² [18].

1. Формуються окремі елементарні ділянки для ідентифікації параметрів $\hat{\alpha}_i$ математичних моделей розбавлення та окремі ЕД для ідентифікації параметрів Δ_{ai} і k_i узагальненої математичної моделі.

2. ЕД для ідентифікації $\hat{\alpha}_i$ формуються з урахуванням таких критеріїв:

1) суттєва зміна умов протікання процесів самоочищення та розбавлення у річці, обумовлена переходом від водосховища до вільної течії і навпаки;

2) якщо є наявною інформація про параметри n_i , H_i та v_i у новостворених ЕД.

3. ЕД для ідентифікації Δ_{ai} і k_i формуються з урахуванням вимоги щодо забезпечення такого мінімального обсягу даних:

- значення \tilde{x}_{i0} , яке є оцінкою $x_i(0)$ у початковому створі усієї ділянки, яка моделюється, котрий ще не зазнав забруднення i -ми стічними водами;

- на кожній i -й ($i = \overline{1, N}$) ЕД кількість вимірних даних нижче місця надходження до річки вод не повинна бути менша $\widehat{K}_{\min i} = 3$: одне значення \tilde{x}_{ij} необхідно для оцінювання параметра α_i , одне — для k_i і одне — для забезпечення надлишковості при ідентифікації обох параметрів.

4. Для збільшення точності ідентифікації математичної моделі пропонується скористатись даними у цих створах за минулі роки, тобто, взявши дані за один і той самий часовий інтервал, коли характер процесів розбавлення та самоочищення були приблизно однаковими у різні роки, записати і розв'язати систему рівнянь (2.79) для цього розширеного набору експериментальних даних.

5. Якщо на ділянці, яка моделюється, тільки загальна кількість

\widehat{K} створів спостереження відповідає умові $\widehat{K} \geq \widehat{K}_{\min} + 1 = 3 + 1 = 4$, але їх не вистачає навіть на дві ЕД, тоді пропонується:

1) виходячи з припущення, що процеси розбавлення та самоочищення на усій ділянці, що моделюється, є більш-менш однорідними, здійснювати ідентифікацію єдиних параметрів Δ_α і k ;

2) на різних елементарних ділянках, створених у відповідності з наведеними вище критеріями, записувати рівняння відповідно до (2.79), але тільки по тих небагатьох створах (чи одному створу), які є на цій ЕД;

3) записані рівняння для усіх ЕД розв'язувати як одну систему рівнянь для ідентифікації єдиних параметрів математичної моделі Δ_α і k .

2.6.2. Приклад ідентифікації математичної моделі за відсутності скидів стічних вод чи водозаборів.

Розглянемо реальний приклад за даними регулярного державного моніторингу вод Вінницької області та за допомогою інструментарію комп'ютеризованої геоінформаційної аналітичної системи моніторингу поверхневих вод Вінницької області, розробленої під керівництвом автора у 2002-2004 роках [69, 82, 86, 102-105].

На рис. 2.9 зображено фрагмент схеми водних об'єктів та їх користувачів у Вінницькій області. Зокрема, зображено малу річку Рів (площа водозбору дорівнює 1160 км²) біля міста Браїлів.

Задача:

“Побудувати математичну модель ділянки річки Рів, розташованої між створом № 13 (центр міста Браїлів) та її гирлом у селі Могилівка.”



Рисунок 2.9. Фрагмент схеми річки Рів та схеми її моніторингу

Стосовно зображеної на рис. 2.9 ділянки річки відомо (за інформацією, наданою суб'єктами системи державного моніторингу вод Вінницької області та за даними джерел [14, 100]):

- 1) великих надходжень вод антропогенного характеру чи водозаборів немає;
- 2) приток-малих річок немає — є лише декілька струмків³⁾ довжиною 1,5 км, 8,3 км та 3,3 км;
- 3) є гідропост “Демидівка” (8,32 км від гирла), в якому проводяться щоденні вимірювання Держгідрометслужбою України;
- 4) є пост спостережень № 13 (м. Браїлів; 16,89 км від гирла), в якому вимірювання проводить Держуправління екології та природних ресурсів у Вінницькій області 5 разів на рік;
- 5) є пост спостережень № 55 (в центрі с. Демидівка; 7,85 км від гирла), в якому вимірювання проводить Вінницький обласний Центр з гідрометеорології 12 разів на рік, але з певних причин ці дані не були

³⁾ Струмки — це малі річки, довжина яких менша 10 км.

надані для проведення моделювання;

6) є пост спостережень № 49 (нижче с. Демидівка; 6,42 км від гирла), в якому вимірювання проводить Вінницький обласний Центр з гідрометеорології 2 рази на рік, але, як і по посту № 55, з певних причин ці дані не були надані для проведення моделювання;

7) є пост спостережень № 42 (вище с. Могилівка; 0,91 км від гирла), в якому вимірювання проводить Південно-Бузьке басейнове управління водних ресурсів 12 разів на рік;

8) у відповідності з паспортними даними річки Рів [92], швидкість течії коливається від 0,3 м на плесах до 0,9 м на перекатах — на цій ділянці, що є близькою до гирла, можна прийняти $v_1 = 0,7$ м.

Таким чином, є один гідропост, тобто один створ, де точно відомі витрати води, і 2 створи спостережень (№ 13 та № 42). Відстань між ними складає $L_1 = 16,0$ км = 16 000 м, тому час добігання становить:

$$T_1 = \frac{L_1}{v_1} = \frac{16000}{0,7} = 22857 \text{ с} = 6,35 \text{ год.}$$

Аналіз даних моніторингу за останні роки показав, що, не зважаючи на різну періодичність забору у створах № 13 та № 42, двічі вони майже співпадали у часі (табл. 2.3).

Отже, будемо обробляти дані спостережень за березень та за квітень. Важливо зазначити, що хоча дані по гідропосту і відомі, їх можна не враховувати під час ідентифікації, а також не визначати параметр α_i , оскільки на визначеній ділянці відсутні надходження стічних вод, а отже, немає і процесів розбавлення стічних вод з річковими і математичну модель слід будувати у вигляді

$$x(t) = x(0)e^{-kt}, \quad t = [0, T_1]. \quad (2.86)$$

Таблиця 2.3

Дати спостережень \tilde{x}_j якості води у створах № 13 та № 42 системи моніторингу вод Вінницької області за 2001 рік

| № створу | Дати забору проб по місяцях | | | | | | |
|----------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 21.02 | 11.03 | 24.04 | 20.06 | – | 14.09 | – |
| 13 | 21.02 | 11.03 | 24.04 | 20.06 | – | 14.09 | – |
| 42 | – | 11.03 | 25.04 | – | 03.07 | – | 15.10 |

Що стосується ідентифікації математичної моделі, то, у відповідності з алгоритмом (див. попередній розділ):

$$x(0) = \tilde{x}_0,$$

що дорівнює, в свою чергу, значенню ПЯВ у створі № 13 на початку ділянки, яка моделюється, яке за дві різні дати спостережень позначимо, відповідно: \tilde{x}_{01} та \tilde{x}_{02} , де перший індекс означає порядковий номер створу на ділянці, що моделюється, а другий — порядковий номер дати з тих двох, що обробляються.

Невідомим є тільки параметр k математичної моделі, але для його ідентифікації у нас є ще один створ спостережень із даними за дві різні дати, тобто \tilde{x}_{11} та \tilde{x}_{21} .

У відповідності з (2.80) для математичної моделі (2.86):

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial k} \sum_{j=1}^2 (x(k, T_1) - \tilde{x}_j)^2 = 0 \right.$$

або

$$\frac{\partial}{\partial k} \sum_{j=1}^2 (\tilde{x}_{0j} e^{-kT_1} - \tilde{x}_{1j})^2 = 0.$$

Беремо похідну:

$$-2T_1 \left[\tilde{x}_{01} (\tilde{x}_{01} e^{-kT_1} - \tilde{x}_{11}) + \tilde{x}_{02} (\tilde{x}_{02} e^{-kT_1} - \tilde{x}_{12}) \right] = 0$$

або

$$\tilde{x}_{01} (\tilde{x}_{01} e^{-kT_1} - \tilde{x}_{11}) + \tilde{x}_{02} (\tilde{x}_{02} e^{-kT_1} - \tilde{x}_{12}) = 0,$$

або

$$(\tilde{x}_{01}^2 + \tilde{x}_{02}^2) e^{-kT_1} = \tilde{x}_{01} \tilde{x}_{11} + \tilde{x}_{02} \tilde{x}_{12},$$

звідки:

$$k = -\frac{1}{T_1} \ln \left(\frac{\tilde{x}_{01} \tilde{x}_{11} + \tilde{x}_{02} \tilde{x}_{12}}{\tilde{x}_{01}^2 + \tilde{x}_{02}^2} \right) = \frac{1}{T_1} \ln \left(\frac{\tilde{x}_{01}^2 + \tilde{x}_{02}^2}{\tilde{x}_{01} \tilde{x}_{11} + \tilde{x}_{02} \tilde{x}_{12}} \right). \quad (2.87)$$

З виразу (2.87), можна знайти оптимальне значення параметра k математичної моделі (2.86).

Розглянемо два приклади. Деякі дані моніторингу якості вод річки Рів у Вінницькій області за 2001 рік по створах № 13 та 42 наведено у табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Дані спостережень \tilde{x}_{ij} якості води у р. Рів у створах № 13 та № 42

| № створу | Колірність | | Лужність | |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| | 11.03.2001 ($j = 1$) | 24.04.2001 ($j = 2$) | 11.03.2001 ($j = 1$) | 24.04.2001 ($j = 2$) |
| 13 (\tilde{x}_{0j}) | 25 | 20 | 4,6 | 4,3 |
| 42 (\tilde{x}_{1j}) | 24,4 | 19,7 | 4,59 | 4,28 |

Ідентифікація математичної моделі для ПЯВ “Колірність”.

$$k = \frac{1}{T_1} \ln \left(\frac{\tilde{x}_{01}^2 + \tilde{x}_{02}^2}{\tilde{x}_{01} \tilde{x}_{11} + \tilde{x}_{02} \tilde{x}_{12}} \right) = \frac{1}{6,35} \ln \left(\frac{25^2 + 20^2}{25 \cdot 24,4 + 20 \cdot 19,7} \right) = 0,0033(1/\text{год}).$$

Таким чином, математична модель має вигляд:

$$x_{\text{Color}}(t) = x(0)e^{-0,0033 t}, \quad t = [0, T_1],$$

де час вимірюється в годинах.

Ідентифікація математичної моделі для ПЯВ “Лужність”.

$$k = \frac{1}{T_1} \ln \left(\frac{\tilde{x}_{01}^2 + \tilde{x}_{02}^2}{\tilde{x}_{01}\tilde{x}_{11} + \tilde{x}_{02}\tilde{x}_{12}} \right) = \frac{1}{6,35} \ln \left(\frac{4,6^2 + 4,3^2}{4,6 \cdot 4,59 + 4,3 \cdot 4,28} \right) = 0,00053 \text{ (1/год)}.$$

Таким чином, математична модель має вигляд:

$$x_{\text{Alkalinity}}(t) = x(0)e^{-0,00053 t}, \quad t = [0, T_1],$$

де час вимірюється в годинах, або

$$x_{\text{Alkalinity}}(t) = x(0)e^{-0,013 t}, \quad t = [0, T_1],$$

де час вимірюється в добах.

Задача розв’язана.

2.7. Доведення адекватності розробленої математичної моделі

2.7.1. Підхід до побудови математичної моделі для багатьох скидів стічних вод І. Д. Родзиллера.

Розв’язанням поставленої у цьому розділі задачі займались й інші вчені. Однією з найбільш фундаментальних робіт у галузі моделювання розбавлення стічних вод з річковими є згадувана вище монографія І. Д. Родзиллера [101], де викладено результати його багаторічних досліджень. І. Д. Родзиллер отримав розв’язок задачі для багатьох входів стічних вод, який набув великого поширення на практиці, завдяки своїй математичній простоті. Порівняємо математичну модель І. Д. Родзиллера для багатьох входів стічних вод (назвемо її “багатовходовою”) з розробленою новою багатовходовою математичною

моделлю (2.19)–(2.22), запропонованою у цій роботі.

Оскільки І. Д. Родзиллер розглядав, головним чином, статичну задачу для випадків $t = T_i$, тому, для забезпечення максимальної наближеності результатів цієї роботи до результатів І. Д. Родзиллера, введемо такі умовні позначення:

$$x_i(0) = x_{i-1}(T_{i-1}) = c_{i-1}, \quad x_i(T_i) = x_{i+1}(0) = c_i, \quad \beta_i = e^{-\alpha_i \sqrt[3]{T_i}}. \quad (2.88)$$

За таких позначень схема на рис. 2.1 набуде вигляду:

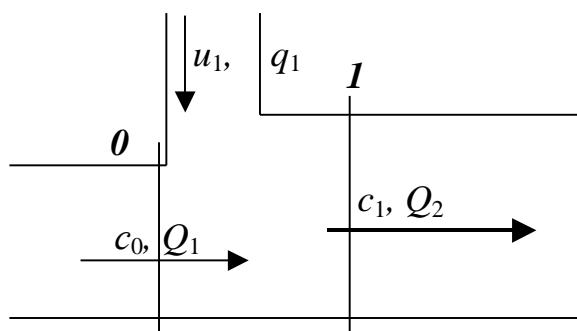


Рисунок 2.10. Схема ЕД № 1 річки, на яку надходять стічні води, у позначеннях (2.88)

Для простоти порівняння не будемо враховувати інші самоочисні процеси, окрім розбавлення — основні вирази І. Д. Родзиллера виведені якраз для такого випадку. Іншими словами можна вважати, що в усіх вище наведених виразах

$$k_0 = k_1 = \dots = k_i = k_N = 0. \quad (2.89)$$

Багатовходова математична модель (2.19)–(2.22), що основана на математичній моделі Фролова – Родзиллера, для одного входу стічних вод, яка для кінцевого створу ЕД № 1 у позначеннях (2.88) для найбільш забрудненої частині річкового потоку записується у вигляді

$$c_1 = c_1^* + (u_1 - c_1^*) \cdot \beta_1, \quad c_1^* = \frac{Q_1 c_0 + q_1 u_1}{Q_1 + q_1}. \quad (2.90)$$

Аналогічна багатовходова математична модель І. Д. Родзиллера основана на іншому представленні моделі Фролова – Родзиллера для

одного входу стічних вод (у позначеннях даної роботи) [101]:

$$c_1 = c_0 + \frac{u_1 - c_0}{n_1}, \quad n_1 = \frac{q_1 + \gamma_1 Q_1}{q_1}, \quad \gamma_1 = \frac{1 - \beta_1}{1 + \frac{Q_1}{q_1} \beta_1}. \quad (2.91)$$

Доведемо ідентичність математичних моделей (2.90) та (2.91).

Підставляємо другий вираз (2.90) у перший:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{Q_1 c_0 + q_1 u_1}{Q_1 + q_1} + \left(u_1 - \frac{Q_1 c_0 + q_1 u_1}{Q_1 + q_1} \right) \beta_1 = \\ &= \frac{Q_1 c_0 + q_1 u_1 + u_1 \beta_1 Q_1 + u_1 \beta_1 q_1 - Q_1 c_0 \beta_1 - q_1 u_1 \beta_1}{Q_1 + q_1} = \\ &= \frac{Q_1 c_0 + q_1 u_1 + u_1 \beta_1 Q_1 - Q_1 c_0 \beta_1}{Q_1 + q_1}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Тепер підставимо другий та третій вирази (2.91) у перший:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_0 + \frac{u_1 - c_0}{q_1 + \frac{1 - \beta_1}{1 + \frac{Q_1}{q_1} \beta_1} Q_1} = c_0 + \frac{q_1 (u_1 - c_0)}{q_1 + \frac{1 - \beta_1}{q_1 + Q_1 \beta_1} q_1 Q_1} = \\ &= c_0 + \frac{u_1 - c_0}{1 + \frac{1 - \beta_1}{q_1 + Q_1 \beta_1} Q_1} = c_0 + \frac{(u_1 - c_0)(q_1 + Q_1 \beta_1)}{q_1 + Q_1 \beta_1 + Q_1 - Q_1 \beta_1} = \\ &= c_0 + \frac{u_1 q_1 - c_0 q_1 + u_1 Q_1 \beta_1 - c_0 Q_1 \beta_1}{q_1 + Q_1} = \\ &= \frac{Q_1 c_0 + u_1 q_1 + u_1 Q_1 \beta_1 - c_0 Q_1 \beta_1}{q_1 + Q_1}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Легко пересвідчитись в ідентичності кінцевих виразів (2.92) та (2.93).

Для врахування двох входів стічних вод на виході ЕД № 2 І. Д. Родзиллер запропонував математичну модель, аналогічну (2.91) [101]:

$$c_2 = c_1 + \frac{u_2 - c_1}{n_2}, \quad n_2 = \frac{q_2 + \gamma_2 Q_2}{q_2}, \quad \gamma_2 = \frac{1 - \beta_2}{1 + \frac{Q_2}{q_2} \beta_2}, \quad (2.94)$$

де змінна c_1 задається математичною моделлю (2.91).

Підставляючи (2.91) у (2.94), І. Д. Родзиллер отримав [101]:

$$c_2 = \left(c_0 + \frac{u_1 - c_0}{n_1} \right) + \frac{u_2 - \left(c_0 + \frac{u_1 - c_0}{n_1} \right)}{n_2} = c_0 + \frac{u_1 - c_0}{n_1} + \frac{u_2 - c_0}{n_2} - \frac{u_1 - c_0}{n_1 n_2}, \quad (2.95)$$

але далі він стверджує, що “третій член рівняння значно менший перших двох внаслідок більшого значення його знаменника, тому без великої шкоди для точності розв’язку його можна відкинути. До того ж він має знак мінус, внаслідок чого його відкидання дещо збільшить розрахункову концентрацію c_2 у порівнянні з дійсною концентрацією, що підвищить надійність розрахунку. В результаті отримаємо досить простий вираз” (переклад з російської — авторський) [101]:

$$c_2 = c_0 + \frac{u_1 - c_0}{n_1} + \frac{u_2 - c_0}{n_2}. \quad (2.96)$$

Поширюючи це припущення на більшу кількість входів стічних вод, І. Д. Родзиллер легко довів, що в загальному випадку N входів має місце просте на вигляд співвідношення:

$$c_N = c_0 + \sum_{i=1}^N \frac{u_i - c_0}{n_i}, \quad n_i = \frac{q_i + \gamma_i Q_i}{q_i}, \quad \gamma_i = \frac{1 - \beta_i}{1 + \frac{Q_i}{q_i} \beta_i}. \quad (2.97)$$

Знайдемо відповідь на два питання:

1. Чи забезпечує виведена у цьому розділі нова математична модель (2.19)–(2.22) ідентичність виразу (2.95) для випадку $N = 2$?

2. Наскільки великою може бути похибка, яка має місце у разі відкидання складової $\frac{u_1 - c_0}{n_1 n_2}$ у математичній моделі (2.95)?

Особливу зацікавленість викликає розгляд чисельного прикладу, подібного до наведеного у підрозділі 2.3.4, на якому цікаво порівняти результати, які забезпечує нова математична модель (2.19)–(2.22), математична модель І. Д. Родзиллера (2.97) та математична модель (2.95), де враховуються усі складові рівняння моделі.

2.7.2. Перевірка ідентичності розробленої математичної моделі та математичної моделі І. Д. Родзиллера.

Порівняємо математичну модель, яку розроблено у цьому розділі, із моделлю (2.95) для двох входів стічних вод. Для перевірки справедливості виведених у цьому розділі співвідношень проаналізуємо їх двома способами — шляхом прямої підстановки із використанням блоку аналітичних перетворень обчислювального пакету Mathcad Professional та із виразів (2.20).

З метою спрощення будемо вважати на цьому етапі, що

$$\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_i = \dots = \beta_N = \beta = const. \quad (2.98)$$

І. Нова математична модель.

Варіант 1. Пряма підстановка у рекурентні співвідношення.

$$c_2 = c_2^* + (u_2 - c_2^*) \cdot \beta, \quad c_2^* = \frac{Q_2 c_1 + q_2 u_2}{Q_2 + q_2}, \quad (2.99)$$

куди підставляється (2.92), та приведення подібних відносно змінних c_0 , u_1 та u_2 , дає такий результат (з урахуванням того, що $Q_0 = Q_1$ – див. (2.22)):

$$c_2 = \rho_0 c_0 + \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2, \quad (2.100)$$

$$\rho_0 = \frac{Q_1(1-\beta)^2}{Q_3}, \quad \rho_1 = \frac{(1-\beta)(q_1 + Q_1\beta)}{Q_3}, \quad \rho_2 = \frac{Q_2\beta + q_2}{Q_3}. \quad (2.101)$$

Для перевірки правильності виведення співвідношень (2.101) був задіяний блок аналітичних перетворень пакету Mathcad

Professional (для того, щоб навести і вхідну формулу і результат, вони розділені на три фрагменти, розташовані нижче один під одним):

$$\begin{aligned}
& \frac{u_2 \cdot q_2 + \left[\frac{u_1 \cdot q_1 + c_0 \cdot Q_1}{q_1 + Q_1} + \left(u_1 - \frac{u_1 \cdot q_1 + c_0 \cdot Q_1}{q_1 + Q_1} \right) \cdot \beta \right] \cdot (Q_1 + q_1)}{q_2 + Q_1 + q_1} + \\
& + \left[u_2 - \frac{u_2 \cdot q_2 + \left[\frac{u_1 \cdot q_1 + c_0 \cdot Q_1}{q_1 + Q_1} + \left(u_1 - \frac{u_1 \cdot q_1 + c_0 \cdot Q_1}{q_1 + Q_1} \right) \cdot \beta \right] \cdot (Q_1 + q_1)}{q_2 + Q_1 + q_1} \right] \cdot \beta \quad \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{collect, } c_0, u_1, u_2 \rightarrow \end{array} \right. \\
& \frac{-\left(2 \cdot Q_1 \cdot \beta - Q_1 - Q_1 \cdot \beta^2 \right)}{(q_2 + Q_1 + q_1)} \cdot c_0 - \frac{\left(-q_1 + \beta \cdot q_1 + Q_1 \cdot \beta^2 - Q_1 \cdot \beta \right)}{(q_2 + Q_1 + q_1)} \cdot u_1 - \frac{\left(-\beta \cdot q_1 - Q_1 \cdot \beta - q_2 \right)}{(q_2 + Q_1 + q_1)} \cdot u_2
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Варіант 2. Математична модель (2.16) при $N = 2$ у позначеннях (2.88) має вигляд:

$$c_2 = \prod_{j=0}^2 A_j c_0 + A_2 B_1 u_1 + B_2 u_2. \tag{2.103}$$

Скориставшись виразами (2.17)–(2.21), приведемо математичну модель (2.103) до вигляду, аналогічного до (2.100):

$$c_2 = \rho'_0 c_0 + \rho'_1 u_1 + \rho'_2 u_2, \tag{2.104}$$

де (з урахуванням (2.89) і (2.98) та того, що $q_0 = 0$ – див. (2.22)):

$$\rho'_0 = \prod_{j=0}^2 A_j = A_0 A_1 A_2 = \frac{Q_0}{Q_3} \cdot \gamma_1 \gamma_2 = \frac{Q_1}{Q_3} \cdot (1 - \beta)^2, \tag{2.105}$$

$$\begin{aligned}
\rho'_1 = A_2 B_1 &= \frac{Q_0 + q_0}{Q_0 + \sum_{m=0}^2 q_m} \gamma_2 \varphi_1 = \frac{Q_1}{Q_3} (1 - \beta) \left(\frac{q_1}{Q_1} + \beta \right) = \\
&= (1 - \beta) \frac{Q_1}{Q_3} \frac{q_1 + Q_1 \beta}{Q_1} = (1 - \beta) \frac{q_1 + Q_1 \beta}{Q_3}, \tag{2.106}
\end{aligned}$$

$$\rho'_2 = B_2 = \frac{Q_2}{Q_3} \varphi_2 = \frac{Q_2}{Q_3} \left(\frac{q_2}{Q_2} + \beta \right) = \frac{Q_2}{Q_3} \frac{q_2 + Q_2 \beta}{Q_2} = \frac{q_2 + Q_2 \beta}{Q_3}. \quad (2.107)$$

Ідентичність кінцевих виразів (2.100) та (2.104) додатково свідчить про правильність виведення формул (2.16)–(2.22).

II. Математична модель І. Д. Родзиллера. Підставимо усі змінні у вираз (2.95), з урахуванням (2.98), та приведемо його до вигляду, подібного до (2.100), знову скориставшись блоком аналітичних перетворень пакету Mathcad Professional (для того, щоб навести і вхідну формулу і результат, вони розділені на три фрагменти, розташовані нижче один під одним):

$$\begin{aligned} & c_0 + \frac{u_1 - c_0}{\frac{q_1 + \frac{1-\beta}{Q_1 \cdot \beta} \cdot Q_1}{1 + \frac{Q_1 \cdot \beta}{q_1}} \cdot Q_1} + \frac{u_2 - c_0}{\frac{q_2 + \frac{1-\beta}{(Q_1+q_1) \cdot \beta} \cdot (Q_1+q_1)}{1 + \frac{(Q_1+q_1) \cdot \beta}{q_2}} \cdot (Q_1+q_1)} \\ & - \frac{u_1 - c_0}{\frac{q_1 + \frac{1-\beta}{Q_1 \cdot \beta} \cdot Q_1}{1 + \frac{Q_1 \cdot \beta}{q_1}} \cdot Q_1} \cdot \frac{q_2 + \frac{1-\beta}{(Q_1+q_1) \cdot \beta} \cdot (Q_1+q_1)}{1 + \frac{(Q_1+q_1) \cdot \beta}{q_2}} \cdot (Q_1+q_1) \quad \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{collect, } c_0, u_1, u_2 \rightarrow \end{array} \right. \\ & - \frac{(2 \cdot Q_1 \cdot \beta - Q_1 - Q_1 \cdot \beta^2)}{(q_2 + Q_1 + q_1)} \cdot c_0 - \frac{(-q_1 + \beta \cdot q_1 + Q_1 \cdot \beta^2 - Q_1 \cdot \beta)}{(q_2 + Q_1 + q_1)} \cdot u_1 - \frac{(-\beta \cdot q_1 - Q_1 \cdot \beta - q_2)}{(q_2 + Q_1 + q_1)} \cdot u_2 \end{aligned} \quad (2.108)$$

Ідентичність кінцевих виразів (2.102) та (2.108) свідчить про ідентичність розробленої у цьому розділі математичної моделі (2.19)–(2.22) моделі (2.95), яку на проміжному етапі отримав І. Д. Родзиллер, виходячи з інших міркувань, але стосовно цієї ж задачі. Цього ж висновку можна дійти, якщо відкинути обмеження (2.98) і знову провести усі перетворення для загального випадку значень β_i .

Таким чином, знайдено відповідь на перше з двох поставлених у попередньому підрозділі питань.

Знайдемо відповідь і на друге питання. Для цього розглянемо чисельний приклад.

2.7.3. Порівняльний аналіз адекватності розробленої математичної моделі та моделі І. Д. Родзиллера на прикладах.

Розглянемо два чисельні приклади поставленої у цьому розділі задачі, на яких перевіримо та порівняємо адекватність математичної моделі (2.19)–(2.22) та математичної моделі І. Д. Родзиллера.

Приклад 1. Кількість входів стічних вод $N = 2$.

Схема ділянки річки подібна до приведеної на рис. 2.4 тільки без третьої елементарної ділянки та третього скиду стічних вод.

Параметри елементарних ділянок річки та інші вхідні дані задачі наведені у табл. 2.5.

Таблиця 2.5

Параметри елементарних ділянок річки та дані про стічні води

| № ЕД, i | 0 | 1 | 2 |
|-----------------------------------------------------------|------|------|------|
| Тривалість протікання води по ЕД T_i , (год.) | 1,0 | 1,4 | 0,6 |
| Гідравлічний параметр α_i , (1/год. ³) | 0,21 | 0,22 | 0,23 |
| Значення ПЯВ у стічних водах u_i , (мг/л) | 0 | 8 | 9 |
| Витрати стічних вод q_i , (млн. л/год.) | 0 | 0,09 | 0,22 |

Значення ПЯВ у початковому створі ділянки річки, як і в попередніх прикладах – $x(0) = 3$ мг/л, витрати води у початковому створі ділянки річки – $Q_0 = 1,2$ млн. л/год.

Як і в попередньому пункті, не враховуємо інші процеси самоочищення, окрім процесів розбавлення, тобто приймаємо значення

$$k_1 = k_2 = 0.$$

На рис. 2.11 приведено чотири графіки різного типу значень ПЯВ у найбільш забрудненій частині потоку усієї ділянки річки.

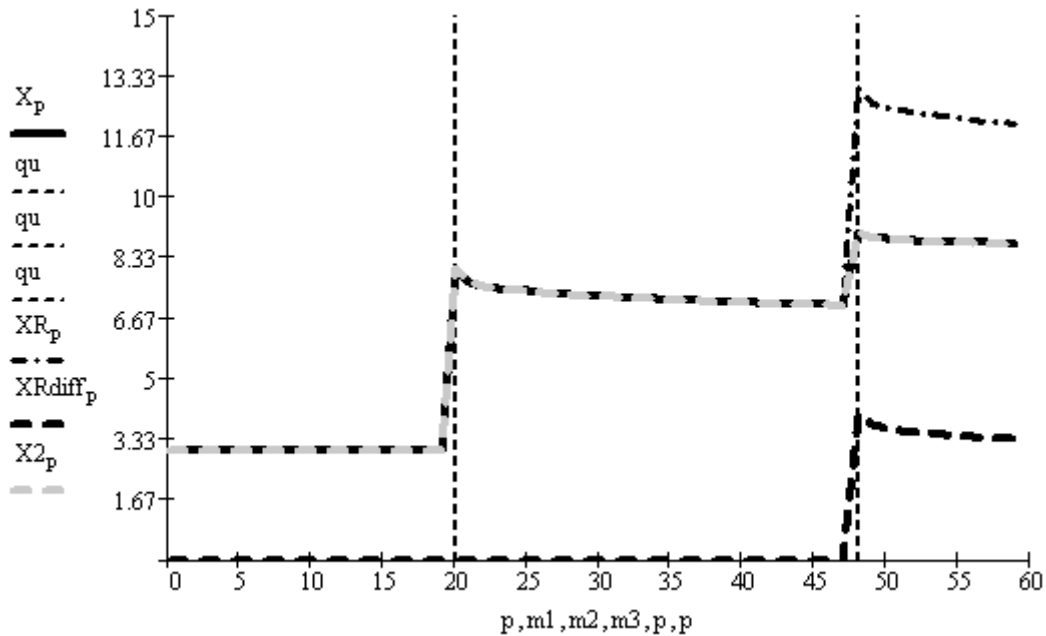


Рисунок 2.11. Графіки значень деякого ПЯВ у найбільш забрудненій частині потоку ділянки річки з двома входами стічних вод (суцільна чорна лінія відповідає розробленій у роботі математичній моделі, пунктирна світло-сіра лінія, яка зливається з чорною суцільною, — моделі (2.95), штрих-пунктирна чорна лінія відповідає основній математичній моделі І. Д. Родзиллера (2.96), чорна пунктирна товста лінія відповідає складовій $\frac{u_1 - c_0}{n_1 n_2}$, на яку відрізняються математичні моделі (2.95) та (2.96) І. Д. Родзиллера, тонкі вертикальні пунктирні лінії відповідають місцям надходження стічних вод)

Графіки на рис. 2.11 розраховані за такими математичними моделями:

X_p — по розробленій у цій роботі математичної моделі (2.19)–(2.22) при $N = 2$;

XR_p — по математичній моделі І. Д. Родзиллера (2.96);

$XRdiff_p$ — по останній складовій рівняння (2.95): $\frac{u_1 - c_0}{n_1 n_2}$, яку

І. Д. Родзиллер запропонував не враховувати у рівнянні (2.96);

$X2_p$ — по моделі (2.95): $X2_p = XR_p + XRdiff_p$.

Розрахунок проведено з часовим інтервалом у 3 хвилини, тобто $\Delta t = 0,05$ (год.).

Проаналізувавши графіки на рис. 2.11, можна зробити такі висновки:

1. Графік розробленої у цій роботі математичної моделі (2.19)–(2.22) дійсно співпадає з рівнянням (2.95), яке вивів І. Д. Родзиллер.

2. Основна математичну модель І. Д. Родзиллера (2.96), яка не враховує член $\frac{u_1 - c_0}{n_1 n_2}$ у рівнянні (2.95) дає досить велику похибку.

Розрахунки показують, що в момент $p = 48$ в результаті надходження другого скиду стічних чи зворотніх вод, $X_{48} = 9,0$ мг/л, а $XR_{48} = 12,985$ мг/л, тобто значення, розраховане за математичною моделлю І. Д. Родзиллера (2.96), перевищує дійсне (яке співпадає і з проміжною моделлю І. Д. Родзиллера (2.95)) на 44,3 %, тобто має досить велику похибку.

Приклад 2. Кількість входів стічних вод $N = 3$.

Схема ділянки річки ідентична приведеній на рис. 2.4. Параметри елементарних ділянок річки та інші вхідні дані задачі наведені у табл. 2.6.

Значення ПЯВ у початковому створі ділянки річки, як і в попередніх прикладах – $x(0) = 3$ мг/л, витрати води у початковому створі ділянки річки – $Q_0 = 1,2$ млн. л/год. Як і в попередньому пункті, не враховуємо інші процеси самоочищення, окрім процесів розбавлення,

тобто приймаємо $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Таблиця 2.6

Параметри елементарних ділянок річки та дані про стічні води

| № ЕД, i | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Тривалість протікання води по ЕД T_i , (год.) | 1,0 | 1,4 | 0,6 | 1,7 |
| Гідравлічний параметр α_i , (1/год. ³) | 0,120 | 0,013 | 0,014 | 0,011 |
| Значення ПЯВ у стічних водах u_i , (мг/л) | 0 | 8 | 9 | 10 |
| Витрати стічних вод q_i , (млн. л/год.) | 0 | 0,09 | 0,22 | 1,04 |

Для виконання розрахунку треба спочатку вивести математичні моделі для трьох входів стічних вод за підходом І. Д. Родзиллера, подібні до (2.95) та (2.96) (останню можна взяти з його роботи [101]). За аналогією із (2.94):

$$c_3 = c_2 + \frac{u_3 - c_2}{n_3}, \quad n_3 = \frac{q_3 + \gamma_3 Q_3}{q_3}, \quad \gamma_3 = \frac{1 - \beta_3}{1 + \frac{Q_3}{q_3} \beta_3}. \quad (2.109)$$

Підставляємо (2.95) в (2.109):

$$c_3 = \left(c_0 + \frac{u_1 - c_0}{n_1} + \frac{u_2 - c_0}{n_2} - \frac{u_1 - c_0}{n_1 n_2} \right) + \frac{u_3 - \left(c_0 + \frac{u_1 - c_0}{n_1} + \frac{u_2 - c_0}{n_2} - \frac{u_1 - c_0}{n_1 n_2} \right)}{n_3} =$$

$$= c_0 + \frac{u_1 - c_0}{n_1} + \frac{u_2 - c_0}{n_2} + \frac{u_3 - c_0}{n_3} - \frac{u_1 - c_0}{n_1 n_2} - \frac{u_1 - c_0}{n_1 n_3} - \frac{u_2 - c_0}{n_2 n_3} + \frac{u_1 - c_0}{n_1 n_2 n_3}. \quad (2.110)$$

Якщо ж записати математичну модель для c_3 за загальною формулою І. Д. Родзиллера (2.97)

$$c_3 = c_0 + \frac{u_1 - c_0}{n_1} + \frac{u_2 - c_0}{n_2} + \frac{u_3 - c_0}{n_3}, \quad (2.111)$$

тоді, як це видно із (2.110), дійсний результат буде менший на вели-

чину Δc_3 , яка визначається виразом

$$\Delta c_3 = \frac{u_1 - c_0}{n_1 n_2} + \frac{u_1 - c_0}{n_1 n_3} + \frac{u_2 - c_0}{n_2 n_3} - \frac{u_1 - c_0}{n_1 n_2 n_3}. \quad (2.112)$$

На рис. 2.12 приведено чотири графіки різного типу значень ПЯВ у найбільш забрудненій частині потоку усієї ділянки річки.

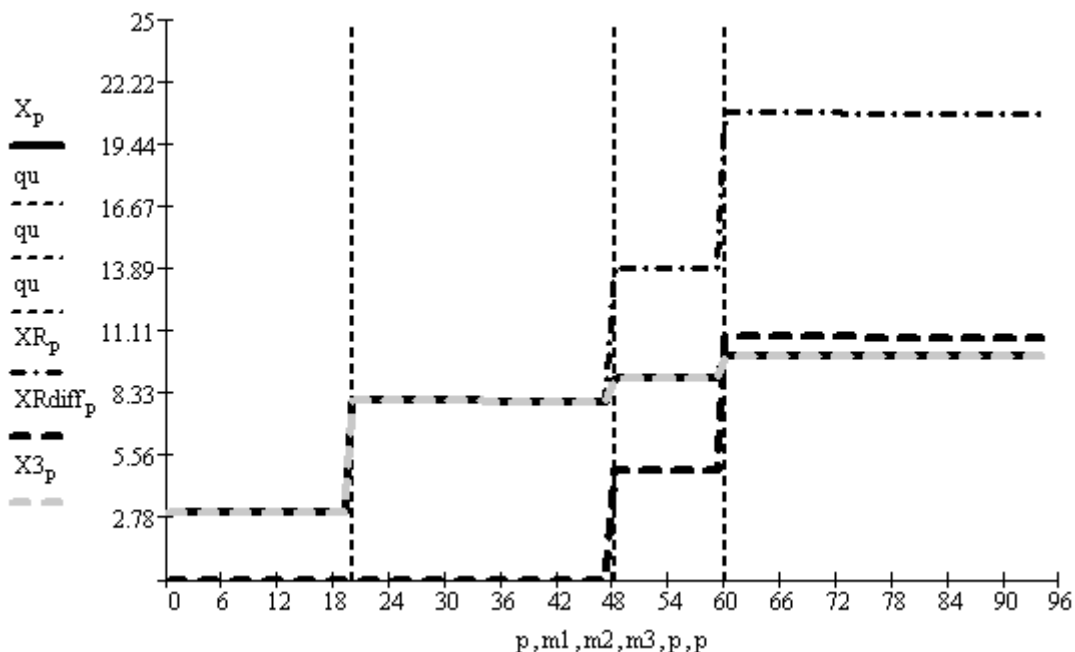


Рисунок 2.12. Графіки значень деякого ПЯВ у найбільш забрудненій частині потоку ділянки річки з трьома входами стічних вод (суцільна чорна лінія відповідає розробленій у роботі математичній моделі, пунктирна світло-сіра лінія, яка зливається з чорною суцільною, — моделі (2.110), штрих-пунктирна чорна лінія відповідає основній моделі І. Д. Родзиллера (2.111), чорна пунктирна товста лінія відповідає складовій, яка задається виразом (2.112), на яку відрізняються моделі (2.110) та (2.111) І. Д. Родзиллера, тонкі вертикальні пунктирні лінії відповідають місцям надходження стічних вод)

Графіки на рис. 2.12 розраховані за такими моделями:

X_p — по розробленій у цій роботі математичній моделі (2.19)–(2.22) при $N = 3$;

XR_p — по математичній моделі І. Д. Родзиллера (2.111);

XR_{diff_p} — по математичній моделі (2.112), яку І. Д. Родзиллер запропонував не враховувати у рівнянні (2.111);

XZ_p — по математичній моделі (2.110): $XZ_p = XR_p + XR_{diff_p}$.

Розрахунок проведено з часовим інтервалом у 3 хв., тобто $\Delta_t = 0,05$ (год.).

Проаналізувавши графіки на рис. 2.12, можна зробити такі висновки:

1. Графік розробленої у цій роботі математичній моделі (2.19)–(2.22) з точністю до позначень дійсно співпадає з рівнянням (2.110), яке виведено за підходом І. Д. Родзиллера і описане в його монографії [101].

2. Основна математична модель І. Д. Родзиллера (2.111), яка не враховує складову Δc_3 , дає досить велику похибку. Моделювання показує, що в моменти $p = 48$ та $p = 60$, чому на графіку відповідають другий та третій скиди стічних вод, відповідно:

$$X_{48} = 9,0 \text{ мг/л}, XR_{48} = 13,933 \text{ мг/л},$$

$$X_{60} = 10,0 \text{ мг/л}, XR_{60} = 20,864 \text{ мг/л},$$

тобто значення, розраховані по математичній моделі І. Д. Родзиллера (2.111), перевищують дійсні (які співпадають з моделлю (2.110), виведеною теж за підходом І. Д. Родзиллера) на, відповідно, 54,8% та 108,6%, тобто має дуже велику похибку, яка має тенденцію до накопичення з кожним новим входом стічних вод.

Можна показати, що усі отримані висновки щодо математичної моделі для найбільш забрудненої частини річкового потоку справедливі і для математичних моделей для найменш забрудненої її частини і стосуються як розроблених у цьому розділі математичних моделей, так і моделей І. Д. Родзиллера, котрий у своїй роботі [101] теж розглядав ці два класи математичних моделей.

2.8. Висновки

Розв'язано задачу моделювання зміни показників якості води у річці під дією річкових процесів самоочищення та розбавлення. Розроблено новий підхід до синтезу узагальненої математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення забруднень у річці, що надійшли зі стічними водами. Показано, яким чином можна враховувати й води менш забруднені, ніж річкові, наприклад, притоки із джерельною водою, а також водозабори. Розроблено алгоритм синтезу математичної моделі річки для розрахунку зміни діапазону значень якості річкової води, тобто у кожному створі річки математична модель дозволяє встановити найменше та найбільше значення заданого показника якості річкової води.

Показано яким чином розроблений підхід до синтезу узагальнених математичних моделей може бути поширений на відомі математичні моделі процесів самоочищення та моделей процесів розбавлення.

Наведений приклад ілюструє працездатність розроблених алгоритмів. Застосування математичної моделі обмежується малими та середніми річками, де в першому наближенні можна використовувати просторові одновимірні математичні моделі процесів розбавлення та змішування стічних вод з річковими.

Доведена адекватність розроблених математичних моделей річковим процесам шляхом доведення ідентичності цих моделей на прикладі математичної моделі для найбільш забрудненої частини річкового потоку класичній математичній моделі, виведеній відомим вченим І. Д. Родзиллером у його роботі [101]. Однак, показано, що розроблена у цьому розділі математична модель є більш адекватною, ніж

відома модель І. Д. Родзиллера, оскільки для її отримання він здійснив спрощення класичної математичної моделі шляхом відкидання окремих членів її рівняння. На прикладах проведено оцінювання похибки, яку спричиняє таке ігнорування членів класичної математичної моделі і доведено, що ця похибка, по-перше може перевищувати 100%, а по-друге, має тенденцію до накопичення через рекурентність рівняння математичної моделі та способу його виведення.

3. РОЗРОБКА ПРОСТОРОВО-ДВОВИМІРНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ТА УПРАВ- ЛІННЯ ЯКІСТЮ РІЧКОВИХ ВОД

3.1. Розробка двовимірної просторової математичної моделі процесів поширення стічних вод у річці від одного джерела

3.1.1. Постановка задачі.

У розділі 2 була поставлена та розв'язана задача побудови та ідентифікації математичної моделі зміни значення деякого показника якості води у річці внаслідок надходження до неї стічних вод або здійснення водозаборів. Математична модель враховує розгалуженість річки та дозволяє визначити діапазон можливих значень ПЯВ у кожному створі річки, тобто визначити найменше та найбільше значення ПЯВ.

Забезпечення математичною моделлю можливості визначення діапазону значень ПЯВ дозволяє більш об'єктивно використовувати дані спостереження для ідентифікації математичних моделей, оскільки враховується з якого потоку річки були відібрані проби води. Однак, такий підхід має і недолік, пов'язаний зі складністю визначення того, яка ж частина потоку у створі спостереження є найбільш, а яка найменш забрудненою. Запропонований для ідентифікації математичної моделі алгоритм проведення декількох вимірювань з метою вибору серед них найменшого та найбільшого, фактично, вимагає проведення на кожній елементарній ділянці більшої кількості $K_{min i}$ необхідних вимірювань, ніж це було визначено у розд. 2. Зазначена мінімальна кількість $K_{min i} = 6$ вимірювань буде мати місце тільки після попереднього обстеження умов протікання річки та з'ясування де саме річ-

ковий потік є більш забрудненим, а де — менш.

Таким чином, поряд із використанням просторово-одновимірної математичної моделі є доцільним розробка просторово-двовимірної математичної моделі, яку б можна було ідентифікувати з урахуванням координат забору проб, які визначались би не тільки вздовж фарватеру річки від початкового створу ділянки, що моделюється, а й від цього фарватеру до лівого та до правого берегів. Така математична модель, по-перше, дала б можливість об'єктивніше враховувати дані реальних спостережень, по-друге, давала б можливість побудови двовимірної просторової (“площинної” [34] або “планової” [48]) картини забруднення річкового потоку, а по-третє, більш адекватно враховувала особливості протікання процесів розбавлення та перемішування з урахуванням таких гідрологічних параметрів як швидкість течії річки та коефіцієнт турбулентної дифузії.

Математичні моделі, які описують зазначені процеси, вже існують і були розглянуті у розділі 1, але нагадаємо, що основна мета створення математичних моделей у цій роботі — це забезпечення можливості їх використання для розв'язання задач контролю та управління якістю річкової води з метою її покращення. Для розв'язання цих задач найбільш доцільним є побудова математичної моделі, яка б мала аналітичний розв'язок відносно значення ПЯВ x . Відомі ж математичні моделі, які враховують особливості протікання процесів розбавлення та перемішування з урахуванням таких гідрологічних параметрів як швидкість течії річки та коефіцієнта турбулентної дифузії, як правило, допускають розв'язання тільки різними чисельними методами [34, 35, 40, 42, 94, 129].

Отже, актуальною є задача побудови адекватної математичної моделі динаміки процесів самоочищення вод деякої ділянки річки, що

враховує дві просторові координати і дозволяє отримати аналітичний розв'язок рівнянь в явній формі та враховує особливості протікання річкових процесів у різних частинах потоку. Зауважимо, що при цьому розглядається ділянка річки, на якій відсутні зовнішні збурення у вигляді стічних вод чи природних стоків з берегів, а також відсутнє вторинне забруднення — на ній протікають тільки процеси самоочищення річки від забруднення, що надійшло до неї раніше.

Варто зазначити, що на відміну від математичних моделей, розроблених у розділі 2, ця математична модель повинна описувати самоочисні процеси не у певному об'ємі води, що рухається зі швидкістю v вздовж течії річки і для якого координати часу t і простору z пов'язані співвідношенням $z = vt$, а в усьому водному потоці заданої ділянки річки (з усередненням по глибині) з урахуванням змін деякого показника якості води в часі.

З теорії Л. Прандтля відомо [10, 95], що річкові процеси розбавлення мають різну природу по ширині потоку: в середині потоку знаходиться *турбулентна зона*, де переважають процеси перемішування та турбулентної дифузії, а ближче до берега знаходиться *гранична ламінарна зона*, де вода тече окремими елементарними струмками, що не змішуються між собою (рис. 3.1).

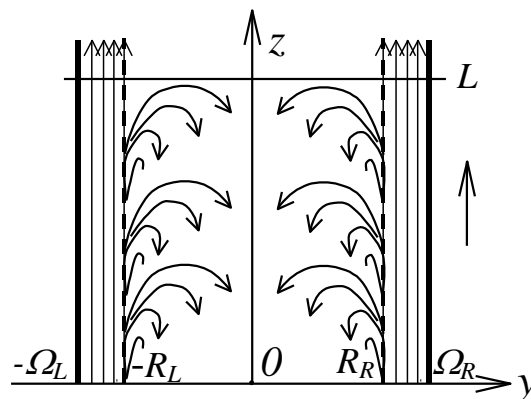


Рисунок 3.1. Картина напрямків течії елементарних струмків річкового потоку

Особливо ця теорія забезпечує коректне представлення для річок, де прибережна зона чітко окреслена — має малі глибину та швидкість течії, а русло річки близьке до прямолінійного. Такі параметри забезпечують низькі значення числа Рейнольдса, котрі відповідають ламінарному режиму течії [10, 34, 95].

Побудуємо окремі математичні моделі для динаміки процесів в турбулентній та ламінарних зонах біля правого (*права ламінарна зона*) та лівого (*ліва ламінарна зона*) берегів і покажемо як їх об'єднати та припасувати розв'язки.

На рис. 3.1 показано зв'язану з річковим потоком декартову систему координат, центр якої знаходиться на початку ділянки річки довжиною L в середині усередненого по ширині та глибині потоку річки [20, 84]. Як видно з рис. 3.1: вісь координат z проходить вздовж центру усередненого по ширині та глибині потоку річки в напрямку її течії; вісь координат y спрямована перпендикулярно осі координат z від центру координат до правого берега річки; Ω_R, Ω_L — відстані від центру координат до, відповідно, правого та лівого берегів річки, R_R, R_L — відстані від центру координат до границь між турбулентною зоною і правою та лівою ламінарною зонами річки, відповідно.

Далі у цьому підрозділі наведено результати, основні положення яких викладено у роботі автора [62].

3.1.2. Розробка математичної моделі ламінарної зони.

В реальних водотоках у правій та лівій від фарватеру ламінарних зонах хід протікання самоочисних процесів, як правило, відрізняється. Врахуємо це відповідними значеннями індексу $w = 1$ або 2 замість введених на рис. 3.1 індексів “ R ” або “ L ” в усіх відповідних змінних та позначеннях з урахуванням того, що у позначеннях по осі

координат у правій та лівій зонах, окрім номеру, міняється ще й знак (див. рис. 3.1):

$$R_1 = R_R, \quad \Omega_1 = \Omega_R, \quad R_2 = -R_L, \quad \Omega_2 = -\Omega_L.$$

Як було зазначено вище, в ламінарних зонах відсутні процеси перемішування. Отже, очищення протікає, головним чином, під дією біохімічних процесів, що дозволяє описати його математичними моделями [34, 35, 40, 48, 84, 138]

$$K_{tw}(y) \frac{\partial X_w^L(t, y, z)}{\partial z} = K_{zw}(y) \cdot \frac{\partial X_w^L(t, y, z)}{\partial t}, \quad X_w^L(0, y, 0) = X_{0w}(y), \quad (3.1)$$

$$X_w^L(0, y, L) = X_{Lw}(y), \quad z = [0, L], \quad t = [0, T], \quad y = [R_w, \Omega_w],$$

де $X_w^L(t, y, z)$ — показник якості річкової води в точці w -ої ламінарної зони, усереднений по глибині;

$X_{0w}(y)$ — значення показника якості води в початковий момент часу на початку ($z = 0$) w -ої ламінарної зони;

$X_{Lw}(y)$ — значення показника якості води в початковий момент часу в кінці ($z = L$) w -ої ламінарної зони;

$K_{tw}(y)$ — величина сумарної інтенсивності біохімічних процесів очищення води, що діють протягом часу t у w -ій ламінарній зоні, котрі можуть змінюватись по ширині річкового потоку вздовж осі координат y ;

$K_{zw}(y)$ — величина сумарної інтенсивності біохімічних процесів очищення води, що діють вздовж осі координат z у w -ій ламінарній зоні, котрі можуть змінюватись по ширині річкового потоку вздовж осі координат y .

Рівняння (3.1) описує динаміку зміни якості води в часі t та по координаті z з урахуванням відсутності перемішування окремих струменів річкового потоку в напрямку осі координат y . А те, що в різних струменях різна інтенсивність процесів самоочищення, враховується

залежністю параметрів K_{tw} , K_{zw} від осі координат y .

Розв'яжемо рівняння (3.1) методом Фур'є [43]. Введемо функцію

$$X_w^L(t, y, z) = T_w(t)Z_w(z)Y_w(y), \quad (3.2)$$

де $T_w(t)$, $Z_w(z)$, $Y_w(y)$ — функції, які описують зміну $X_w^L(t, y, z)$ в часі t та по координатах z та y , відповідно.

Але, оскільки у ламінарних зонах відсутнє перемішування, пропонуємо в (3.2) покласти

$$Y_w(y) = 1. \quad (3.3)$$

Підставляємо (3.2) з урахуванням (3.3) в рівняння (3.1):

$$K_{tw}(y)Z_w(z)\frac{dT_w(t)}{dt} = K_{zw}(y)T_w(t)\frac{dZ_w(z)}{dz}, \quad T_w(0)Z_w(0) = X_{0w}(y), \quad (3.4)$$

$$T_w(0)Z_w(L) = X_{Lw}(y), \quad z = [0, L], \quad t = [0, T], \quad y = [R_w, \Omega_w].$$

Ділимо обидві частини (3.4) на добуток $T_w(t) \cdot Z_w(z)$ і прирівнюємо обидва відношення деякому числу $-\lambda_w$:

$$K_{tw}(y)\frac{dT_w(t)}{T_w(t)dt} = K_{zw}(y)\frac{dZ_w(z)}{Z_w(z)dz} = -\lambda_w(y). \quad (3.5)$$

Рівняння (3.1) в частинних похідних можна замінити системою двох рівнянь у повних похідних:

$$\begin{aligned} \frac{dT_w(t)}{dt} &= -\frac{\lambda_w(y)}{K_{tw}(y)}T_w(t), \quad t = [0, T], \\ \frac{dZ_w(z)}{dz} &= -\frac{\lambda_w(y)}{K_{zw}(y)}Z_w(z), \quad z = [0, L], \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$T_w(0)Z_w(0) = X_{0w}(y), \quad T_w(0)Z_w(L) = X_{Lw}(y), \quad y = [R_w, \Omega_w].$$

Розв'язками рівнянь (3.6) є

$$\begin{aligned} T_w(t) &= T_w(0)e^{-\frac{\lambda_w(y)}{K_{tw}(y)}t}, \quad t = [0, T], \\ Z_w(z) &= Z_w(0)e^{-\frac{\lambda_w(y)}{K_{zw}(y)}z}, \quad z = [0, L], \quad y = [0, R_w]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Параметр $\lambda_w(y)$ знаходиться з рівняння для $Z_w(z)$ та граничних умов (3.6). Для $Z_w(L)$

$$Z_w(L) = Z_w(0) e^{-\frac{\lambda_w(y)}{K_{zw}(y)} L}.$$

Із граничних умов (3.6)

$$Z_w(0) = \frac{X_{0w}(y)}{T_w(0)}, \quad Z_w(L) = \frac{X_{Lw}(y)}{T_w(0)}, \quad y = [R_w, \Omega_w].$$

Таким чином,

$$\frac{X_{Lw}(y)}{T_w(0)} = \frac{X_{0w}(y)}{T_w(0)} e^{-\frac{\lambda_w(y)}{K_{zw}(y)} L},$$

звідки

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{X_{Lw}(y)}{X_{0w}(y)}\right) &= -\frac{\lambda_w(y)}{K_{zw}(y)} L, \\ -\ln\left(\frac{X_{0w}(y)}{X_{Lw}(y)}\right) &= -\frac{\lambda_w(y)}{K_{zw}(y)} L \end{aligned}$$

або

$$\lambda_w(y) = \frac{K_{zw}(y)}{L} \ln\left(\frac{X_{0w}(y)}{X_{Lw}(y)}\right). \quad (3.8)$$

Підставляємо (3.7), з урахуванням (3.8), в (3.3) і, згадуючи про початкову та граничні умови в (3.6), отримуємо розв'язок рівняння (3.1)

$$\begin{aligned} X_w^L(t, y, z) &= X_{0w}(y) \cdot e^{-[K_{tw}^*(y)t + K_{zw}^*(y)z]}, \\ t &= [0, T], \quad z = [0, L], \quad y = [R_w, \Omega_w], \quad w = 1 \vee 2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$R_1 = R_R, \quad \Omega_1 = \Omega_R, \quad R_2 = -R_L, \quad \Omega_2 = -\Omega_L.$$

$$K_{tw}^*(y) = \frac{K_{zw}(y)}{LK_{tw}(y)} \ln\left(\frac{X_{0w}(y)}{X_{Lw}(y)}\right), \quad K_{zw}^*(y) = \frac{1}{L} \ln\left(\frac{X_{0w}(y)}{X_{Lw}(y)}\right). \quad (3.10)$$

Вирази (3.9)–(3.10) є розв'язком математичної моделі процесів самоочищення в ламінарних зонах річкового потоку.

3.1.3. Розробка математичної моделі турбулентної зони.

Так само як і в правій та лівій ламінарних зонах, у правій та лівій турбулентних зонах хід протікання самоочисних процесів може відрізнятись. Врахуємо це відповідним значенням індексу $w = 1$ або 2 в усіх змінних та позначеннях.

В загальному випадку математична модель процесів у річці за умов площинної задачі має вигляд [34, 35, 84]:

$$\frac{\partial X_w^T(t,y,z)}{\partial t} = \delta_w \frac{\partial^2 X_w^T(t,y,z)}{\partial y^2} - v_w \frac{\partial X_w^T(t,y,z)}{\partial z} - K_{zw} X_w^T(t,y,z), \quad (3.11)$$

де $X_w^T(t,y,z)$ — показник якості річкової води в точці w -ої турбулентної зони, усереднений по глибині;

δ_w — коефіцієнт турбулентної дифузії w -ої турбулентної зони;

v_w — усереднена швидкість течії річки в напрямку осі координат z w -ої турбулентної зони;

K_{zw} — коефіцієнт самоочищення річкової води під впливом біохімічних процесів, що діють в напрямку осі координат z w -ої турбулентної зони.

Розглянемо питання про граничні та початкові умови рівняння (3.11). Внаслідок принципу нерозривності водного потоку та потоку речовини в ньому [10, 35, 43, 95], значення показника $X_w^T(t,y,z)$ на границі турбулентної та ламінарної зон повинно бути однакове. Це дає дві граничні умови (для правої ($w = 1$) та лівої ($w = 2$) ламінарних зон, відповідно):

$$X_w^T(t, R_w, z) = X_{0w} \cdot e^{-[K_{tw}^*(R_w)t + K_{zw}^*(R_w)z]}, \quad t = [0, T], \quad z = [0, L], \quad w = 1, 2. \quad (3.12)$$

Умови (3.12) задають закон зміни величини $X_w^T(t,y,z)$ по усіх трьох координатах t , y та z на границі розділу ламінарної та турбу-

лентної зон. Отже, для турбулентної зони ми отримуємо задачу з фіксованими лівою та правою границями і вільними нижньою та верхньою (див. рис. 3.1).

Як і в попередньому випадку, спробуємо розв'язати рівняння математичної моделі (3.11)–(3.12) методом Фур'є [43]. Введемо функцію

$$X_w^L(t, y, z) = T_w(t)Z_w(z)Y_w(y), \quad (3.13)$$

де $T_w(t)$, $Z_w(z)$, $Y_w(y)$ — функції, які описують зміну $X_w^T(t, y, z)$ в часі t та по координатах z та y , відповідно.

Підставляємо (3.13) в (3.11):

$$\begin{aligned} & Y_w(y)Z_w(z)\frac{dT_w(t)}{dt} = \\ & = \delta_w T_w(t)Z_w(z)\frac{d^2 Y_w(y)}{dy^2} - \nu_w T_w(t)Y_w(y)\frac{dZ_w(z)}{dz} - K_{zw} T_w(t)Y_w(y)Z_w(z). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ділимо обидві частини (3.14) на добуток $T_w(t)Z_w(z)Y_w(y)$ і прирівнюємо обидва відношення деякому числу $-\lambda_w$:

$$\frac{dT_w(t)}{T_w(t)dt} = \delta_w \frac{d^2 Y_w(y)}{Y_w(y)dy^2} - \nu_w \frac{dZ_w(z)}{Z_w(z)dz} - K_{zw} = -\lambda_w. \quad (3.15)$$

Рівняння (3.15) в частинних похідних можна замінити системою трьох рівнянь у повних похідних

$$\begin{aligned} \frac{dT_w(t)}{dt} &= -\lambda_w T_w(t), \quad t = [0, T], \\ \frac{d^2 Y_w(y)}{dy^2} &= -\frac{\lambda_{1w}}{\delta_w} Y_w(y), \quad y = [0, R_w], \\ \frac{dZ_w(z)}{dz} &= \frac{\lambda_{2w} - K_{zw}}{\nu_w} Z_w(z), \quad z = [0, L], \end{aligned} \quad (3.16)$$

де λ_{1w} та λ_{2w} — деякі коефіцієнти, котрі забезпечують виконання умови, зрозумілої з (3.15):

$$\lambda_w = \lambda_{1w} + \lambda_{2w}: \quad \lambda_{1w} = \delta_w \frac{d^2 Y_w(y)}{Y_w(y) dy^2}, \quad \lambda_{2w} = v_w \frac{dZ_w(z)}{Z_w(z) dz} + K_{zw}. \quad (3.17)$$

Початкові та граничні умови математичної моделі (3.16) для функцій $T(t)$, $Y(y)$ та $Z(z)$ слід вибрати такими, щоб виконувались умови (3.14) з урахуванням (3.13), а також умова нерозривності потоку на границі правої та лівої турбулентних зон, тобто на фарватері річки:

$$T_w(0) = 1, \quad Z_w(0) = 1, \quad Y_w(R_w) = X_{0w}, \quad Y_1(0) = Y_2(0), \quad Y_1'(0) = Y_2'(0). \quad (3.18)$$

Тоді на границі w -ої турбулентної зони з w -ої ламінарною:

$$T_w(t) = e^{-K_{tw}^*(R_w)t}, \quad t = [0, T]; \quad Z_w(z) = e^{-K_{zw}^*(R_w)z}, \quad z = [0, L], \quad (3.19)$$

Будемо шукати розв'язки рівнянь (3.16), які забезпечать виконання умов (3.18)–(3.19).

Розв'язок рівняння (3.16) для функції часу $T_w(t)$ має вигляд

$$T_w(t) = T_w(0) e^{-\lambda_w t}. \quad (3.20)$$

За початкової умови $T_w(0) = 1$ (див. (3.18)) вираз (3.20) буде мати вигляд (3.19)

$$T_w(t) = e^{-K_{tw}^*(R_w)t}, \quad y = [0, R_w]$$

тільки за умови, якщо λ_w в (3.20) буде дорівнювати

$$\lambda_w = K_{tw}^*(R_w), \quad y = [0, R_w]. \quad (3.21)$$

Аналогічно, розв'язок (3.16) для функції $Z_w(z)$ має вигляд

$$Z_w(z) = Z_w(0) e^{\frac{\lambda_{2w} - K_{zw}}{v_w} z}. \quad (3.22)$$

За початкової умови $Z_w(0) = 1$ (див. (3.18)) вираз (3.22) буде мати вигляд (3.19)

$$Z_w(z) = e^{-K_{zw}^*(R_w)z}, \quad y = [0, R_w]$$

тільки за умови, якщо λ_w буде дорівнювати:

$$\lambda_{2w} = -v_w K_{zw}^*(R_w) + K_{zw}, \quad y = [0, R_w]. \quad (3.23)$$

Із співвідношень (3.17), (3.21), (3.23) запишемо вираз для λ_{1w} :

$$\lambda_{1w} = \lambda_w - \lambda_{2w} = K_{tw}^*(R_w) + \nu_w K_{zw}^*(R_w) - K_{zw}, \quad y = [0, R_w], \quad (3.24)$$

Розв'язок диференціального рівняння другого порядку (3.16) для функції $Y_w(y)$ слід шукати у стандартному для таких рівнянь вигляді [43]:

$$Y_w(y) = C_{w1} \cos \alpha_w y + C_{w2} \sin \alpha_w y, \quad \alpha_w = \sqrt{\frac{\lambda_{1w}}{\delta_w}}, \quad y = [0, R_w], \quad (3.25)$$

де C_{w1} , C_{w2} — константи, що знаходяться з граничних умов (3.18), тобто з системи рівнянь

$$\begin{cases} C_{11} \cos \alpha_1 R_1 + C_{12} \sin \alpha_1 R_1 = X_{01}, \\ C_{21} \cos \alpha_2 R_2 + C_{22} \sin \alpha_2 R_2 = X_{02}, \\ C_{11} = C_{21}, \\ \alpha_1 C_{12} = \alpha_2 C_{22}. \end{cases} \quad (3.26)$$

Третє з цих рівнянь випливає з умови $Y_1(0) = Y_2(0)$:

$$Y_w(0) = C_{w1},$$

а четверте рівняння — з умови $Y_1'(0) = Y_2'(0)$:

$$Y_w'(y) = -\alpha_w C_{w1} \sin \alpha_w y + \alpha_w C_{w2} \cos \alpha_w y,$$

$$Y_w'(0) = \alpha_w C_{w2}.$$

За допомогою обчислювального модулю “Symbolics” (“Розв'язання в аналітичному вигляді”) пакету Mathcad Professional отримуємо розв'язок системи рівнянь (3.26):

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{\alpha_2 X_{02} \sin \alpha_1 R_1 - \alpha_1 X_{01} \sin \alpha_2 R_2}{\alpha_2 \sin \alpha_1 R_1 \cos \alpha_2 R_2 - \alpha_1 \sin \alpha_2 R_2 \cos \alpha_1 R_1}, \\ C_{12} &= \frac{\alpha_2 (X_{01} \cos \alpha_2 R_2 - X_{02} \cos \alpha_1 R_1)}{\alpha_2 \sin \alpha_1 R_1 \cos \alpha_2 R_2 - \alpha_1 \sin \alpha_2 R_2 \cos \alpha_1 R_1}, \\ C_{21} &= \frac{\alpha_2 X_{02} \sin \alpha_1 R_1 - \alpha_1 X_{01} \sin \alpha_2 R_2}{\alpha_2 \sin \alpha_1 R_1 \cos \alpha_2 R_2 - \alpha_1 \sin \alpha_2 R_2 \cos \alpha_1 R_1} = C_{11}, \\ C_{22} &= \frac{\alpha_1 (X_{01} \cos \alpha_2 R_2 - X_{02} \cos \alpha_1 R_1)}{\alpha_2 \sin \alpha_1 R_1 \cos \alpha_2 R_2 - \alpha_1 \sin \alpha_2 R_2 \cos \alpha_1 R_1}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

За умови однорідності процесів розбавлення та перемішування в правій та лівій турбулентних зонах, тобто

$$v_1 = v_2 = v, \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta,$$

а також, якщо виконується співвідношення

$$K_{t1}^*(R_1) + vK_{z1}^*(R_1) = K_{t2}^*(R_2) + vK_{z2}^*(R_2),$$

внаслідок чого має місце рівність

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \tag{3.28}$$

математична модель (3.25), (3.27) значно спрощується:

$$Y_w(y) = C_1 \cos \alpha y + C_2 \sin \alpha y, \quad y = [0, R_w], \tag{3.29}$$

де C_1, C_2 — константи, які не залежать від особливостей протікання процесів у різних турбулентних зонах і тому не містять індексу w — знаходяться із виразів (див. (3.27)):

$$C_1 = \frac{X_{01} \sin \alpha R_2 + X_{02} \sin \alpha R_1}{\sin \alpha (R_1 - R_2)}, \tag{3.30}$$

$$C_2 = \frac{X_{01} \cos \alpha R_2 + X_{02} \cos \alpha R_1}{\sin \alpha (R_1 - R_2)}.$$

При отриманні виразів (3.30) було використано таке тригонометричне перетворення [8, 44]:

$$\sin \alpha R_1 \cos \alpha R_2 - \sin \alpha R_2 \cos \alpha R_1 = \sin \alpha R_1 - \alpha R_2 = \sin \alpha (R_1 - R_2).$$

За умов симетрії русла річки та характеру процесів у ній: $X_{01} = X_{02} = X_0$, $R_1 = R_2 = R$ і вирази (3.29) та (3.30) зазнають ще більших спрощень (слід пам'ятати, що у виразах (3.30) $-R_2 = R_L = R$, тобто у разі повернення до індексів (як на рис. 3.1) відбувається заміна знаку: $R_1 - R_2 = R + R = 2R$):

$$Y(y) = X_0 \sec \alpha R \cos \alpha y, \quad y = [-R, R], \quad C_1 = X_0 \sec \alpha R, \quad C_2 = 0. \tag{3.31}$$

При отриманні виразу (3.31) було використано такі тригонометричні перетворення:

$$\frac{X_0 \sin \alpha R + X_0 \sin \alpha R}{\sin \alpha(R+R)} = \frac{2X_0 \sin \alpha R}{\sin 2\alpha R} = \frac{2X_0 \sin \alpha R}{2\sin \alpha R \cos \alpha R} = \frac{X_0}{\cos \alpha R} = X_0 \sec \alpha R.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (3.11) з умовами (3.14) має вигляд

$$X^T(t, y, z) = \begin{cases} e^{-[K_{t1}^*(R_1)t + K_{z1}^*(R_1)z]} (C_{11} \cos \alpha_1 y + C_{12} \sin \alpha_1 y), & y = [0, R_1], \\ e^{-[K_{t2}^*(R_2)t + K_{z2}^*(R_2)z]} (C_{21} \cos \alpha_2 y + C_{22} \sin \alpha_2 y), & y = [0, R_2], \end{cases} \quad (3.32)$$

$$C_{11} = \frac{\alpha_2 X_{02} \sin \alpha_1 R_1 - \alpha_1 X_{01} \sin \alpha_2 R_2}{\alpha_2 \sin \alpha_1 R_1 \cos \alpha_2 R_2 - \alpha_1 \sin \alpha_2 R_2 \cos \alpha_1 R_1},$$

$$C_{12} = \frac{\alpha_2 (X_{01} \cos \alpha_2 R_2 - X_{02} \cos \alpha_1 R_1)}{\alpha_2 \sin \alpha_1 R_1 \cos \alpha_2 R_2 - \alpha_1 \sin \alpha_2 R_2 \cos \alpha_1 R_1},$$

$$C_{21} = \frac{\alpha_2 X_{02} \sin \alpha_1 R_1 - \alpha_1 X_{01} \sin \alpha_2 R_2}{\alpha_2 \sin \alpha_1 R_1 \cos \alpha_2 R_2 - \alpha_1 \sin \alpha_2 R_2 \cos \alpha_1 R_1} = C_{11},$$

$$C_{22} = \frac{\alpha_1 (X_{01} \cos \alpha_2 R_2 - X_{02} \cos \alpha_1 R_1)}{\alpha_2 \sin \alpha_1 R_1 \cos \alpha_2 R_2 - \alpha_1 \sin \alpha_2 R_2 \cos \alpha_1 R_1},$$

$$\alpha_w = \sqrt{\frac{\lambda_{1w}}{\delta_w}}, \quad \lambda_{1w} = \lambda_w - \lambda_{2w} = K_{tw}^*(R_w) + \nu_w K_{zw}^*(R_w) - K_{zw}, \quad y = [0, R_w],$$

$$R_1 = R_R, \quad R_2 = -R_L. \quad (3.33)$$

Нагадаємо, що для ламінарної зони математична модель (3.32)–(3.33) доповнюється моделлю (3.9)–(3.10).

За симетричного випадку

$$X_{01} = X_{02} = X_0, \quad |R_1| = |R_2| = |R|, \quad K_{z1}^*(y) = K_{z2}^*(y), \quad K_{t1}^*(y) = K_{t2}^*(y),$$

$$K_{z1} = K_{z2}$$

та за умови (3.28), загальна математична модель (3.11), (3.14) суттєво спрощується:

$$X^T(t, y, z) = X_0 \sec \alpha R e^{-[K_t^*(R)t + K_z^*(R)z]} \cos \alpha y, \quad y = [-R, R] \quad (3.34)$$

або

$$X^T(t, y, z) = X_0 \frac{\cos \alpha y}{\cos \alpha R} e^{-[K_t^*(R)t + K_z^*(R)z]}, \quad y = [-R, R], \quad (3.35)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{K_t^*(R) + \nu K_z^*(R) - K_z}{\delta}}. \quad (3.36)$$

Нагадаємо, що для ламінарної зони за симетричного випадку математична модель (3.35) доповнюється виразами:

$$X^L(t, y, z) = X_0(y) \cdot e^{-[K_t^*(y)t + K_z^*(y)z]}, \quad (3.37)$$

$$t = [0, T], \quad z = [0, L], \quad y = [R, \Omega] \vee [-R, -\Omega],$$

$$K_t^*(y) = \frac{K_z(y)}{LK_t(y)} \ln\left(\frac{X_0(y)}{X_L(y)}\right), \quad K_z^*(y) = \frac{1}{L} \ln\left(\frac{X_0(y)}{X_L(y)}\right).$$

В цілому ж усе поле значень ПЯВ $X(t, y, z)$ в будь-якій точці річкового потоку, усереднене по глибині, визначається виразом:

$$X(t, y, z) = \begin{cases} X_2^L(t, y, z), & y = [-R_L, -\Omega_L], \\ X_2^T(t, y, z), & y = [0, -R_L], \\ X_1^T(t, y, z), & y = [0, R_R], \\ X_1^L(t, y, z), & y = [R_R, \Omega_R]. \end{cases} \quad (3.38)$$

Аналіз показує, що через використання у рівняннях для турбулентної зони тригонометричних функцій, доцільно всі величини по осі координат у нормувати:

$$y = [-1, \dots, -R_{2n}, \dots, R_{1n}, \dots, 1], \quad \Omega_n = 1, \quad R_{1n} = R_1/\Omega, \quad R_{2n} = R_2/\Omega, \quad (3.39)$$

не забуваючи, звісно, під час роботи з результатами обчислень робити зворотний перехід.

Продемонструємо використання розробленої математичної моделі (3.35)–(3.39) на прикладі.

3.1.4. Приклад моделювання.

Нехай, моделюється зміна значень концентрації деякої забруднювальної речовини на річковій ділянці довжиною $L = 100$ м без джерел стічних чи природних вод. Параметри правої та лівої ламінарних

зон ідентичні:

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 20 \text{ м}, R_1 = R_2 = R = 5 \text{ м},$$

$$X_{01}(y) = X_{02}(y) = X_0(y) = 10 \cdot e^{-0,3 \cdot |y-R|} \text{ мг/л},$$

$$X_{L1}(y) = X_{L2}(y) = X_L(y) = 8 \cdot e^{-0,3 \cdot |y-R|} \text{ мг/л},$$

$$K_{t1}(y) = K_{t2}(y) = K_t(y) = 0,04 \cdot e^{-0,4 \cdot |y-R|} \text{ 1/с},$$

$$K_{z1}(y) = K_{z2}(y) = K_z(y) = 0,3 \cdot e^{-0,2 \cdot |y-R|} \text{ 1/м}.$$

Параметри турбулентної зони:

$$\delta = 0,008 \text{ м}^2/\text{с}, \nu = 0,04 \text{ м/с}, K_z = 0,002 \text{ 1/с}.$$

Рівняння математичної моделі із заданими параметрами мають вигляд:

$$X(t, y, z) = 10,61 e^{-(0,017t + 0,00209z)} \cos(1,361y), \quad y = [-0,75, 0,75],$$

$$X(t, y, z) = 10 \cdot e^{-[K_{t1}^*(y)t + K_{z1}^*(y)z - 0,3y]}, \quad y = [-1, -0,75] \cup [0,75, 1].$$

Графік розподілу значень показника $X(t, y, z)$ в усіх частинах річкового потоку, розрахований за математичною моделлю (3.35)–(3.39) при $t = 0$ в обчислювальному пакеті Mathcad Professional, наведено на рис. 3.2.

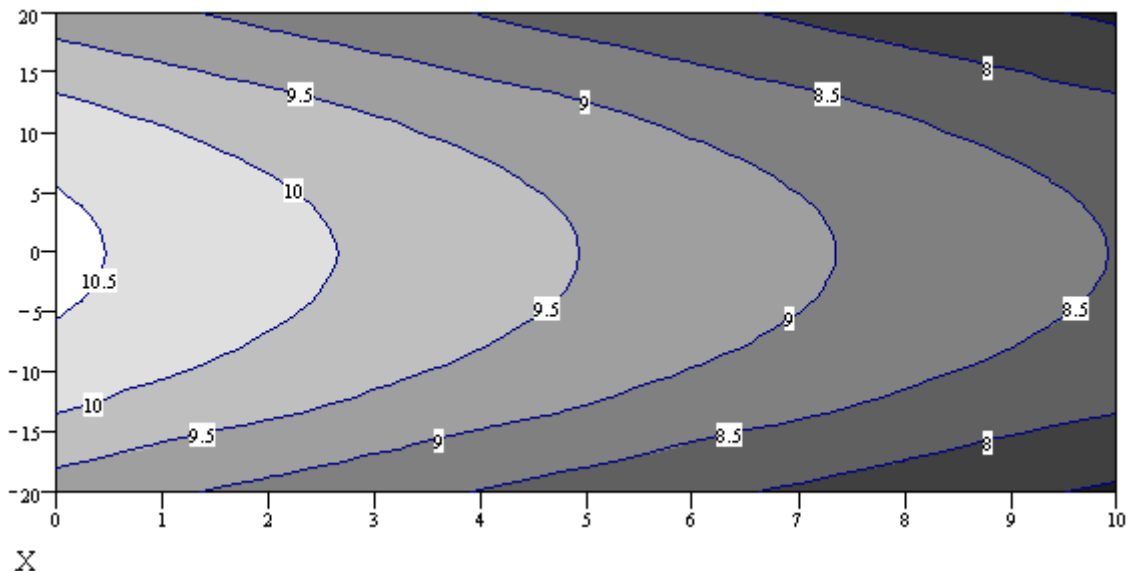


Рисунок 3.2. Графік розподілу значень показника $X(0, y, z)$ (світліші області — більше забруднення, темніші — менше)

Як видно з наведеного прикладу, розроблена математична модель (3.35)–(3.39) добре описує реальні річкові процеси — картина розподілу концентрацій на рис. 3.2 є реалістичною.

3.2. Визначення допустимої області параметрів двовимірної просторової математичної моделі

Наявність у математичних моделях (3.32) та (3.35) тригонометричних функцій вносить обмеження на можливі значення параметрів цих моделей, за яких значення, розраховані за ними, будуть мати фізичний сенс та відповідати тим вимогам, які були накладені на показники якості води у розділі 1.

Визначимо межі допустимих значень для параметрів математичної моделі (3.35).

На рис. 3.3 наведено графік функції $\frac{\cos(\alpha y)}{\cos(\alpha R)}$ за умови, що $\alpha R = 2\pi$. Ця функція є множителем у математичній моделі (3.35).

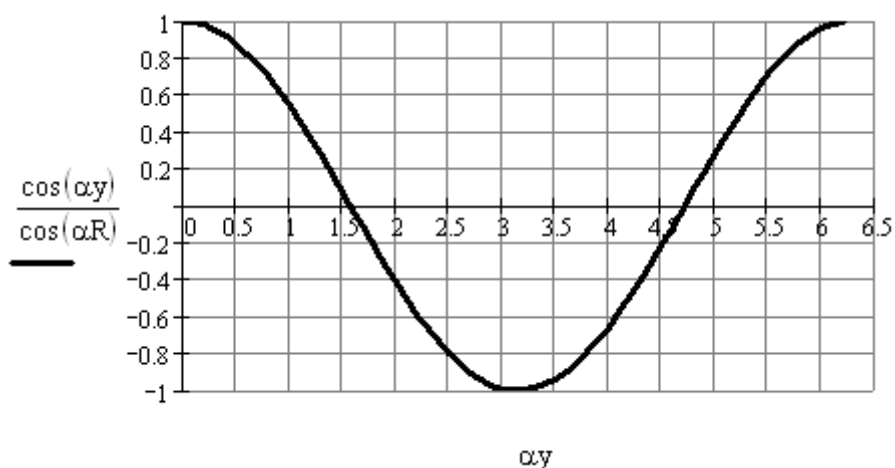


Рисунок 3.3. Графік функції $\frac{\cos(\alpha y)}{\cos(\alpha R)}$ для $\alpha R = 2\pi$

Як видно із графіку, функція приймає як додатні, так і від’ємні

значення. Враховуючи ж, що у виразі (3.35) функція $e^{-\cdot}$ є додатною, а величина X_0 за умовами задачі теж є не меншою нуля, то як додатні, так і від'ємні значення буде приймати і функція $X(t, y, z)$, що недопустимо у відповідності з першою вимогою до показників якості води, викладеною у розділі 1.

Визначимо межі допустимих значень для добутку αR та його складових.

Фактично, вихід за межі додатності обумовлений не добутком αR , а добутком αy , де $y = [0, R]$. Зрозуміло, що для того, щоб функція $\frac{\cos(\alpha y)}{\cos(\alpha R)}$ була завжди додатною, повинна виконуватись умова (див. рис. 3.3):

$$\alpha R < \frac{\pi}{2}. \quad (3.40)$$

У цьому разі, буде і $\cos(\alpha R) > 0$, і $\cos(\alpha y) > 0$ за будь-яких $y = [0, R]$.

Підставляючи у (3.40) вираз (3.36), отримуємо

$$R \sqrt{\frac{K_t^*(R) + \nu K_z^*(R) - K_z}{\delta}} < \frac{\pi}{2}, \quad (3.41)$$

що є одним з обмежень на область допустимих значень параметрів математичної моделі (3.35), яке обов'язково повинне виконуватись, щоб ця модель забезпечувала значення, котрі мають фізичний сенс, наприклад тільки невід'ємні концентрації речовин чи вміст бактерій у воді.

Із (3.41) можна записати:

$$K_t^*(R) + \nu K_z^*(R) - K_z < \frac{\pi^2 \delta}{4R^2}, \quad (3.42)$$

Наступне обмеження випливає з виразу (3.36) через викорис-

тання у ньому алгебраїчного кореню. Для того, щоб уникнути комплексного значення параметра α , за якого наприклад, не виконувалась би умова (3.41) та виникли б інші проблеми, пов'язані з розрахунками за математичною моделлю та трактуванням результатів моделювання, повинна виконуватись вимога

$$K_t^*(R) + vK_z^*(R) - K_z > 0$$

або

$$K_t^*(R) + vK_z^*(R) > K_z. \quad (3.43)$$

За своєю природою коефіцієнт K_z , звичайно, подібний до $K_z^*(R)$, але він лише доповнює останній і тому, може і повинен бути меншим, ніж сума значення $K_t^*(R)$ та значення $K_z^*(R)$, помноженого на швидкість течії річки v , котра у більшості випадків є меншою 1.

Інші вимоги можна сформулювати як вимоги щодо додатності параметрів математичної моделі (3.35), що було закладено в основу її виведення:

$$K_t^*(R) \geq 0, \quad K_z^*(R) \geq 0, \quad K_z \geq 0, \quad v \geq 0, \quad \delta \geq 0. \quad (3.44)$$

Усі ці обмеження (3.40), (3.42) – (3.44) повинні враховуватись на етапі ідентифікації математичної моделі за даними реальних спостережень.

Зрозуміло, що ці самі вимоги повинні виконуватись і для параметрів математичної моделі (3.32)–(3.33), тільки з урахуванням індексу $w = 1$ або 2 у відповідних змінних.

Наявність же у (3.33), поряд із функціями $\cos(\alpha_w R_w)$, функцій $\sin(\alpha_w R_w)$, не накладає додаткових обмежень на значення $\alpha_w R_w$, окрім умови (3.40), оскільки $\sin(\alpha_w R_w)$ в діапазоні значень $\alpha_w R_w = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ приймає значення $[0, 1)$, тобто невід'ємні.

3.3. Ідентифікація параметрів та структури математичної моделі

Як і в підрозд. 3.1 в усіх змінних та позначеннях використовуємо універсальний індекс $w = 1$ або 2 для, відповідно, правої та лівої турбулентних та ламінарних зон.

Задача ідентифікації структури зводиться до ідентифікації:

1) параметра R_w ($0 < R_w < \Omega_w$), який встановлює умовну границю між ламінарною та турбулентною зоною річки;

2) структури математичних моделей функцій $K_{tw}^*(y)$, $K_{zw}^*(y)$, що характеризують дію самоочисних процесів.

Ідентифікація параметрів математичної моделі зводиться до ідентифікації параметра K_{zw} та параметрів функцій $K_{tw}^*(y)$, $K_{zw}^*(y)$, наприклад визначення величин $K_{tw}^*(R)$, $K_{zw}^*(R)$, які використовуються у функції α_w . Також, до невідомих параметрів можна віднести величини ν_w та δ_w , хоча їх можна віднести і до паспортних даних, особливо швидкість течії ν_w . У загальному випадку невідомими є і параметри X_{0w} , які можна визначити прямим вимірюванням значень \tilde{X}_i у річці тільки тоді, якщо вже відомо значення R_w , тобто відомо розташування границі між w -ою ламінарною та турбулентною зонами.

Визначимо деякі концептуальні положення ідентифікації окреслених структури та параметрів математичної моделі (3.32)–(3.33).

Вхідні дані для ідентифікації: дані спостережень \tilde{X}_i ($i = \overline{1, M}$), усереднені по глибині для точок з координатами (y_i, z_i) , виміряні у моменти часу t_i . На ділянці, яка моделюється, бажано знати усереднені величини ν_w та δ_w .

Ідентифікацію параметра R_w пропонується проводити ітеративно: на кожній ітерації задаємо значенням R_{wh} ($h = 1, 2, \dots$), залучаємо все нові значення \tilde{X}_i , починаючи від кожного з берегів у відповідності зі схемою на рис. 3.4:

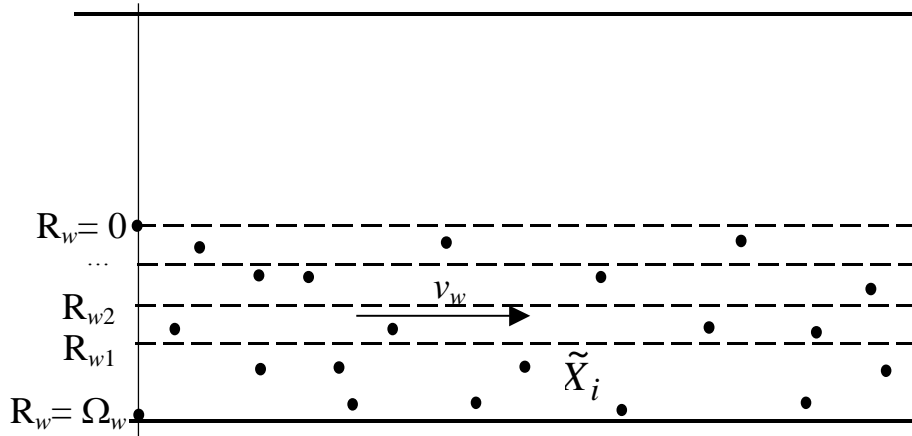


Рисунок 3.4. Схема ітеративного вибору оптимального значення R_w

На кожній ітерації під номером $h = 1, 2, \dots$ методом найменших квадратів проводимо ідентифікацію обох математичних моделей:

- для ламінарної зони — (3.9)–(3.10);
- для турбулентної зони — (3.32)–(3.33).

При цьому підраховуємо відносну похибку ε_{wh}^L для ламінарної зони за формулою

$$\varepsilon_{wh}^L = \frac{\sum_{i=1}^M |\tilde{X}_i - X_w^L(t_i, y_i, z_i)|}{\sum_{i=1}^M |X_w^L(t_i, y_i, z_i)|} \cdot 100\%, \quad y_i = [0, \Omega_w] \quad (3.45)$$

та відносну похибку ε_{wh}^T для турбулентної зони за формулою

$$\varepsilon_{wh}^T = \frac{\sum_{i=1}^M |\tilde{X}_i - X_w^T(t_i, y_i, z_i)|}{\sum_{i=1}^M |X_w^T(t_i, y_i, z_i)|} \cdot 100\% \quad y_i = [0, \Omega_w]. \quad (3.46)$$

Оптимальним значенням R_w буде таке R_{wh} , за якого буде виконуватись умова

$$\varepsilon_{wh}^L \leq \varepsilon_{wh}^T, \quad \varepsilon_{wh+1}^L > \varepsilon_{wh+1}^T, \quad (3.47)$$

тобто коли ітерація h буде останньою, коли математична модель ламінарної зони ще краще буде описувати експериментальні дані, ніж математична модель турбулентної зони.

При цьому варто зазначити граничні випадки

$$R_w = \begin{cases} \Omega_w, & \varepsilon_{w1}^L > \varepsilon_{w1}^T, \\ 0, & \forall \varepsilon_{wh}^L \leq \varepsilon_{wh}^T, \quad h = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (3.48)$$

де символ “ \forall ” означає “будь-яке”.

Вираз (3.48) враховує такі випадки: якщо математичну модель ламінарної зони на усіх ітераціях краще описує експериментальні дані, тоді можна зробити висновок про відсутність турбулентної течії взагалі, але для реальних водотоків такий випадок практично неможливий. Якщо ж на усіх ітераціях математична модель турбулентної зони краще описує дані, тоді можна зробити висновок про відсутність ламінарної зони і вся математична модель ламінарної зони виродиться до того, що вона буде описувати тільки зміну граничних умов математичної моделі турбулентної зони.

Розглянемо особливості ідентифікації функцій $K_{tw}^*(y)$, $K_{zw}^*(y)$. Ці функції визначаються через функції $K_{zw}(y)$, $K_{tw}(y)$, $X_{0w}(y)$, $X_{Lw}(y)$ відповідно до співвідношень (3.10):

$$K_{tw}^*(y) = \frac{K_{zw}(y)}{LK_{tw}(y)} \ln \left(\frac{X_{0w}(y)}{X_{Lw}(y)} \right), \quad K_{zw}^*(y) = \frac{1}{L} \ln \left(\frac{X_{0w}(y)}{X_{Lw}(y)} \right). \quad (3.49)$$

Таким чином, структура функцій $K_{tw}^*(y)$, $K_{zw}^*(y)$ напряму залежить від структури функцій $K_{zw}(y)$, $K_{tw}(y)$, $X_{0w}(y)$, $X_{Lw}(y)$. Як математичний опис останніх пропонуємо такий:

$$K_{tw}(y) = \Lambda_{tw0} e^{-\rho_{tw}|y-R_w|}, \quad K_{zw}(y) = \Lambda_{zw0} e^{-\rho_{zw}|y-R_w|}, \quad (3.50)$$

$$X_{0w}(y) = \Lambda_{0w} e^{-\rho_{0w}y}, \quad X_{Lw}(y) = \Lambda_{Lw} e^{-\rho_{Lw}y}, \quad (3.51)$$

де Λ_{tw0} , Λ_{zw0} , Λ_{0w} , Λ_{Lw} , ρ_{tw0} , ρ_{zw0} , ρ_{0w} , ρ_{Lw} — деякі невід'ємні константи.

Підставимо (3.50) та (3.51) у перший з виразів (3.49) — для $K_{tw}^*(y)$:

$$\begin{aligned} K_{tw}^*(y) &= \frac{\Lambda_{zw0} e^{-\rho_{zw}|y-R_w|}}{L\Lambda_{tw0} e^{-\rho_{tw}|y-R_w|}} \ln \left(\frac{\Lambda_{0w} e^{-\rho_{0w}y}}{\Lambda_{Lw} e^{-\rho_{Lw}y}} \right) = \\ &= \frac{\Lambda_{zw0}}{L\Lambda_{tw0}} e^{-(\rho_{zw}-\rho_{tw})|y-R_w|} \ln \left(\frac{\Lambda_{0w}}{\Lambda_{Lw}} e^{-(\rho_{0w}-\rho_{Lw})y} \right) = \\ &= \frac{\Lambda_{zw0}}{L\Lambda_{tw0}} \left[\ln \left(\frac{\Lambda_{0w}}{\Lambda_{Lw}} \right) - (\rho_{0w} - \rho_{Lw})y \right] e^{-(\rho_{zw}-\rho_{tw})|y-R_w|}. \end{aligned}$$

Таким чином, математичну модель функції $K_{tw}^*(y)$ можна записати у вигляді

$$K_{tw}^*(y) = A_{tw}^* + \Lambda_{tw}^* y e^{-\rho_{tw}^*|y-R_w|}, \quad (3.52)$$

де

$$A_{tw}^* = \frac{\Lambda_{zw0}}{L\Lambda_{tw0}} \ln \left(\frac{\Lambda_{0w}}{\Lambda_{Lw}} \right), \quad \Lambda_{tw}^* = \frac{\Lambda_{zw0}}{L\Lambda_{tw0}} (\rho_{Lw} - \rho_{0w}), \quad \rho_{tw}^* = \rho_{zw} - \rho_{tw}. \quad (3.53)$$

Аналогічно для $K_{zw}^*(y)$:

$$K_{zw}^*(y) = \frac{1}{L} \ln \left(\frac{\Lambda_{0w} e^{-\rho_{0w}y}}{\Lambda_{Lw} e^{-\rho_{Lw}y}} \right) = \frac{1}{L} \left[\ln \left(\frac{\Lambda_{0w}}{\Lambda_{Lw}} \right) - (\rho_{0w} - \rho_{Lw})y \right].$$

Таким чином, математичну модель функції $K_{zw}^*(y)$ можна записати у вигляді

$$K_{zw}^*(y) = A_{zw}^* + \Lambda_{zw}^* y, \quad (3.54)$$

де

$$A_{zw}^* = \frac{1}{L} \ln \left(\frac{\Lambda_{0w}}{\Lambda_{Lw}} \right), \quad \Lambda_{zw0}^* = \frac{1}{L} (\rho_{Lw} - \rho_{0w}). \quad (3.55)$$

Отже, для ідентифікації функцій $K_{tw}^*(y)$, $K_{zw}^*(y)$ у моделі (3.9)–(3.10) слід проводити ідентифікацію параметрів функцій (3.52)–(3.55). Що ж стосується моделі (3.32)–(3.33), то у ній використовуються не функції $K_{tw}^*(y)$, $K_{zw}^*(y)$, а лише їх значення $K_{tw}^*(R_w)$, $K_{zw}^*(R_w)$, котрі знайти простіше. Запишемо вирази (3.52)–(3.55) для випадку $y = R_w$:

$$K_{tw}^*(R_w) = \frac{\Lambda_{zw0}}{L\Lambda_{tw0}} \left[\ln \left(\frac{\Lambda_{0w}}{\Lambda_{Lw}} \right) - (\rho_{0w} - \rho_{Lw}) R_w \right], \quad (3.56)$$

$$K_{zw}^*(R_w) = \frac{1}{L} \left[\ln \left(\frac{\Lambda_{0w}}{\Lambda_{Lw}} \right) - (\rho_{0w} - \rho_{Lw}) R_w \right] — \quad (3.57)$$

це вже числа, а не функції.

Підведемо підсумки стосовно основних положень ідентифікації просторово-двовимірної математичної моделі процесів самоочищення у річці:

1. Ідентифікацію параметра R_w , що можна трактувати як ідентифікацію структури математичної моделі стосовно поділу річкового потоку на турбулентну та ламінарну зони, слід проводити ітеративно шляхом послідовної ідентифікації параметрів та структури математичної моделі для різних наборів даних спостережень \tilde{X}_i .
2. Структурно, функції $K_{tw}^*(y)$, $K_{zw}^*(y)$ пропонується використовувати у вигляді (3.50), (3.51).
3. Параметрами математичної моделі ламінарної зони (3.9)–

(3.10) є параметри функцій A_{tw}^* , Λ_{tw}^* , ρ_{tw}^* , A_{zw}^* , Λ_{zw}^* .

4. Параметрами математичної моделі турбулентної зони (3.32)–(3.33) є параметри α_w , $K_{tw}^*(R_w)$, $K_{zw}^*(R_w)$, X_{0w} , котрі можна ідентифікувати трьома способами:

- якщо ламінарна математична модель вже ідентифікована — обчислити по (3.50), (3.51);

- якщо даних мало і ламінарна математична модель повинна ідентифікуватись одночасно із турбулентною (найбільш поширений випадок) — замість параметрів $K_{tw}^*(R_w)$, $K_{zw}^*(R_w)$ шукати параметри відповідних функцій у загальному вигляді (3.56), (3.57), тобто A_{tw}^* , Λ_{tw}^* , ρ_{tw}^* , A_{zw}^* , Λ_{zw}^* , замість X_{0w} — шукати параметри функції (3.51), тобто Λ_{0w} , Λ_{Lw} , ρ_{0w} , ρ_{Lw} , разом із числовим значенням параметра α_w ;

- якщо ламінарна зона у річці є надто малою, щоб її враховувати, або відсутні будь-які дані прибережних спостережень — ідентифікувати окремо як звичайні числові параметри.

При цьому повинно відслідковуватись виконання умови (3.44).

5. Ідентифікація параметра α_w повинна враховувати вимоги умови (3.40) з урахуванням нормування параметра R_w за (3.39), тобто використання у (3.40) параметра R_{hw} замість R_w . Також, треба слідкувати, щоб параметр α_w не був комплексним, що автоматично забезпечить виконання вимоги (3.43).

6. Ідентифіковані параметри α_w , $K_{tw}^*(R_w)$, $K_{zw}^*(R_w)$ дозволяють обчислити параметр K_{zw} , якщо в цьому є потреба, із виразу (3.36):

$$K_{zw} = K_{tw}^*(R_w) + v_w K_{zw}^*(R_w) - \delta_w \alpha_w^2. \quad (3.58)$$

Запишемо вирази для ідентифікації параметрів математичних

моделей (3.9)–(3.10) та (3.32)–(3.33) за методом найменших квадратів. Як відомо, метод найменших квадратів полягає в обчисленні таких значень параметрів математичної моделі, котрі забезпечують мінімум суми Σ квадратів відхилень експериментальних даних від тих, що забезпечує модель (“теоретичних” значень) [6, 44, 50, 59, 84, 89]:

$$\Sigma = \sum_{i=1}^M (X(\Theta, t_i, y_i, z_i) - \tilde{X}_i)^2, \quad (3.59)$$

де Θ — вектор параметрів математичної моделі розмірності \mathcal{G} .

Оптимальні ж оцінки параметрів математичної моделі знаходяться як розв’язок системи \mathcal{G} рівнянь [6, 44, 50, 59, 84, 89]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \Theta_1} \sum_{i=1}^M (X(\Theta, t_i, y_i, z_i) - \tilde{X}_i)^2 = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial \Theta_{\mathcal{G}}} \sum_{i=1}^M (X(\Theta, t_i, y_i, z_i) - \tilde{X}_i)^2 = 0, \end{cases} \quad (3.60)$$

де $\Theta_{\mathcal{G}}$ — \mathcal{G} -й параметр вектора Θ .

Функція $X(\Theta, t, y, z)$ обчислюється з урахуванням співвідношення (3.38). Вектор же параметрів Θ формується у відповідності з вибраним способом ідентифікації у п.4 наведених вище положень. У загальному випадку цей вектор містить такі параметри:

$$\Theta \subset [X_0, \alpha_1, \alpha_2, R_1, R_2, A_{t1}^*, A_{t2}^*, \Lambda_{t1}^*, \Lambda_{t2}^*, \rho_{t1}^*, \rho_{t2}^*, A_{z1}^*, A_{z2}^*, \Lambda_{z1}^*, \Lambda_{z2}^*, \Lambda_{01}, \Lambda_{02}, \rho_{01}, \rho_{02}, \Lambda_{L1}, \Lambda_{L2}, \rho_{L1}, \rho_{L2}]. \quad (3.61)$$

Мінімальна кількість M_{min} даних спостережень \tilde{X}_i , яка необхідна для ідентифікації параметрів математичної моделі $X(\Theta, t, y, z)$, дорівнює $\mathcal{G} + 1$. Отже, у загальному випадку (3.61) $M_{min} = 24$.

3.4. Приклад ідентифікації параметрів та структури двовимірної просторової динамічної математичної моделі

Розглянемо ідентифікацію математичної моделі на тому ж прикладі, який було розглянуто в підрозд. 3.2. Як вхідні дані використаємо значення $X(t, y, z)$, обчислені за математичною моделлю, а потім порівняємо ідентифіковані значення параметрів з тими, що були задані у підрозд. 3.2.

Таким чином, задача ідентифікації спрощується у порівнянні з розглянутою у цьому підрозділі, оскільки математична модель підрозділу 3.2 — є симетричною. Отже, можна опустити індекс w в усіх відповідних змінних та позначеннях.

Відомо: набір значень \tilde{X}_i , варіант якого при $t = 0$ наведений на рис. 3.2. Відомими є і гідравлічні параметри у турбулентній зоні:

$$\delta = 0,008 \text{ м}^2/\text{с}, \nu = 0,04 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Математична модель, параметри якої повинні бути ідентифіковані (див. (3.35)–(3.39), (3.51), (3.52), (3.54)) має вигляд:

$$X(t, y, z) = \begin{cases} X^L(t, y, z), & y = [R, \Omega] \vee [-R, -\Omega], \\ X^T(t, y, z), & y = [0, R]. \end{cases} \quad (3.62)$$

$$X^T(t, y, z) = X_0 \frac{\cos \alpha y}{\cos \alpha R} e^{-[K_z^*(R)z + K_t^*(R)t]}, \quad y = [-R, R], \quad (3.63)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{K_t^*(R) + \nu K_z^*(R) - K_z}{\delta}}. \quad (3.64)$$

$$X^L(t, y, z) = X_0(y) \cdot e^{-[K_t^*(y)t + K_z^*(y)z]}, \quad (3.65)$$

$$t = [0, T], \quad z = [0, L], \quad y = [R, \Omega] \vee [-R, -\Omega],$$

$$X_0(y) = \Lambda_0 e^{-\rho_0 y}, \quad (3.66)$$

$$K_t^*(y) = A_t^* + \Lambda_t^* y e^{-\rho_t^* |y-R|}, \quad (3.67)$$

$$K_z^*(y) = A_z^* + \Lambda_z^* y, \quad (3.68)$$

$$\Omega_H = 1, \quad R_{1H} = R_1/\Omega, \quad R_{2H} = R_2/\Omega. \quad (3.69)$$

Варто зазначити, що X_0 у виразі (3.63) та $X_0(0)$ у (3.66) — це різні значення у різних точках:

$$X_0 = X(0, 0, 0), \quad X_0(0) = X(0, R, 0).$$

Переписувати вирази (3.61)–(3.68) для переходу до нормованих значень у відповідності з (3.69) не будемо — просто врахуємо (3.69) для ренормування ідентифікованого значення R .

У відповідності з (3.59) сформуємо вектор параметрів Θ :

$$\Theta \subset [X_0, \alpha, R, A_t^*, \Lambda_t^*, \rho_t^*, A_z^*, \Lambda_z^*, \Lambda_0, \rho_0]. \quad (3.70)$$

Його розмірність: $\mathcal{G} = 10$. Таким чином, для ідентифікації параметрів математичної моделі (3.62)–(3.68) необхідно не менше $M_{min} = \mathcal{G} + 1 = 11$ даних спостережень ПЯВ \tilde{X}_i .

Для порівняння ідентифікованих параметрів з усіма вихідними у прикладі в пункті 3.1.4 треба ще буде виконати такі перетворення:

1) із (3.64) знайти параметр K_z , користуючись виразом, подібним до (3.58):

$$K_z = K_t^*(R) + \nu K_z^*(R) - \delta \alpha^2; \quad (3.71)$$

2) по вихідних функціях $X_0(y)$, $X_L(y)$, $K_t(y)$, $K_z(y)$, заданих у вигляді (3.50), (3.51), розрахувати параметри A_t^* , Λ_t^* , ρ_t^* , A_z^* , Λ_z^* , користуючись співвідношеннями (3.53) та (3.55), щоб вони відповідали параметрам ідентифікованого вектора Θ (3.70).

Розглянемо формування системи рівнянь (3.60) для ідентифікації параметрів (3.70). Для цього конкретизуємо математичну модель (3.59) для даного випадку — для турбулентної та для правої ламінарної зон на основі (3.65) та (3.63), відповідно:

$$X^T(t,y,z) = X_0 \frac{\cos \alpha y}{\cos \alpha R} e^{-\left((A_t^* + \Lambda_t^* R)t + (A_z^* + \Lambda_z^* R)z\right)}, \quad y = [-R, R], \quad (3.73)$$

$$X^L(t,y,z) = \Lambda_0 e^{-\rho_0 y} \cdot e^{-\left[\left((A_t^* + \Lambda_t^* y)e^{-\rho_t y}\right)t + (A_z^* + \Lambda_z^* y)z\right]}, \quad y = [0, (1-R)], \quad (3.74)$$

де по-перше, використано те, що за (3.69) $\Omega = 1$, по-друге, з метою позбавитись модулю $|y - R|$ і перейти до y у виразах (3.67) та (3.68), що підставляються в рівняння (3.74), зроблено зсув координат y на R , по третє, у (3.73) замість функцій $K_t^*(R), K_z^*(R)$ підставлено їх значення (3.67) та (3.68) при $y = R$, які використано у (3.74).

Знайдемо частинні похідні по параметрах математичних моделей (3.73) та (3.74), прирівняємо їх нулю та підставимо у (3.60) (з метою скорочення запису виразів будемо використовувати проміжні константи).

Для (3.73):

$$\frac{\partial}{\partial X_0} X^T(t,y,z) = \frac{\partial}{\partial X_0} X_0 \frac{\cos \alpha y}{\cos \alpha R} e^{-[\cdot]} = \frac{\cos \alpha y}{\cos \alpha R} e^{-[\cdot]}, \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} X^T(t,y,z) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} X_0 \frac{\cos \alpha y}{\cos \alpha R} e^{-[\cdot]} = -X_0 \frac{y \sin \alpha y}{\cos \alpha R} e^{-[\cdot]} + X_0 \frac{R \cos \alpha y \sin \alpha R}{\cos(\alpha R)^2} e^{-[\cdot]} = \\ &= \frac{X_0 \sin \alpha R}{\cos \alpha R} e^{-[\cdot]} \left(\frac{R \cos \alpha y}{\cos \alpha R} - \frac{y \sin \alpha y}{\sin \alpha R} \right), \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial A_t^*} X^T(t,y,z) = -X_C z e^{-\left((A_t^* + \Lambda_t^* R)t + (A_z^* + \Lambda_z^* R)z\right)}, \quad (3.77)$$

де

$$X_C = X_0 \frac{\cos \alpha y}{\cos \alpha R},$$

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda_t^*} X^T(t,y,z) = -X_C R z e^{-\left((A_t^* + \Lambda_t^* R)t + (A_z^* + \Lambda_z^* R)z\right)}, \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial A_z^*} X^T(t, y, z) = -X_C t e^{-\left((A_t^* + \Lambda_t^* R)t + (A_z^* + \Lambda_z^* R)z\right)}, \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda_z^*} X^T(t, y, z) = -X_C R t e^{-\left((A_t^* + \Lambda_t^* R)t + (A_z^* + \Lambda_z^* R)z\right)}. \quad (3.80)$$

Для (3.74):

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda_0} X^L(t, y, z) = \frac{\partial}{\partial \Lambda_0} \Lambda_0 e^{-\rho_0 y} \cdot e^{-[\cdot]} = e^{-\rho_0 y} \cdot e^{-[\cdot]}, \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_0} X^L(t, y, z) = \frac{\partial}{\partial \rho_0} \Lambda_0 e^{-\rho_0 y} \cdot e^{-[\cdot]} = -\Lambda_0 y e^{-\rho_0 y} \cdot e^{-[\cdot]}, \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A_t^*} X^L(t, y, z) &= \frac{\partial}{\partial A_t^*} \Lambda_0 e^{-\rho_0 y} \cdot e^{-\left[\left((A_t^* + \Lambda_t^* y) e^{-\rho_t^* y}\right)t + (A_z^* + \Lambda_z^* y)z\right]} = \\ &= -\Lambda_0 e^{-\rho_0 y} t \cdot e^{-\left[\left((A_t^* + \Lambda_t^* y) e^{-\rho_t^* y}\right)t + (A_z^* + \Lambda_z^* y)z\right]}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Lambda_t^*} X^L(t, y, z) &= \frac{\partial}{\partial \Lambda_t^*} \Lambda_0 e^{-\rho_0 y} \cdot e^{-\left[\left((A_t^* + \Lambda_t^* y) e^{-\rho_t^* y}\right)t + (A_z^* + \Lambda_z^* y)z\right]} = \\ &= -\Lambda_0 e^{-\rho_0 y} y e^{-\rho_t^* y} t \cdot e^{-\left[\left((A_t^* + \Lambda_t^* y) e^{-\rho_t^* y}\right)t + (A_z^* + \Lambda_z^* y)z\right]}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho_t^*} X^L(t, y, z) &= \frac{\partial}{\partial \rho_t^*} \Lambda_0 e^{-\rho_0 y} \cdot e^{-\left[\left((A_t^* + \Lambda_t^* y) e^{-\rho_t^* y}\right)t + (A_z^* + \Lambda_z^* y)z\right]} = \\ &= -\Lambda_0 e^{-\rho_0 y} (A_t^* + \Lambda_t^* y) y e^{-\rho_t^* y} t \cdot e^{-\left[\left((A_t^* + \Lambda_t^* y) e^{-\rho_t^* y}\right)t + (A_z^* + \Lambda_z^* y)z\right]}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

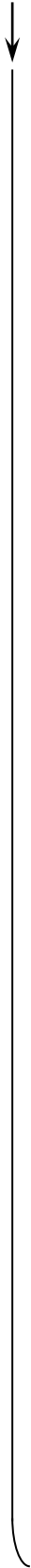
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A_z^*} X^L(t, y, z) &= \frac{\partial}{\partial A_z^*} \Lambda_0 e^{-\rho_0 y} \cdot e^{-\left[\left((A_t^* + \Lambda_t^* y) e^{-\rho_t^* y}\right)t + (A_z^* + \Lambda_z^* y)z\right]} = \\ &= -\Lambda_0 e^{-\rho_0 y} z \cdot e^{-\left[\left((A_t^* + \Lambda_t^* y) e^{-\rho_t^* y}\right)t + (A_z^* + \Lambda_z^* y)z\right]}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Lambda_z^*} X^L(t, y, z) &= \frac{\partial}{\partial \Lambda_z^*} \Lambda_0 e^{-\rho_0 y} \cdot e^{-\left[\left((A_t^* + \Lambda_t^* y) e^{-\rho_t y} \right) t + (A_z^* + \Lambda_z^* y) z \right]} = \\ &= -\Lambda_0 e^{-\rho_0 y} y z \cdot e^{-\left[\left((A_t^* + \Lambda_t^* y) e^{-\rho_t y} \right) t + (A_z^* + \Lambda_z^* y) z \right]}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Як видно з порівняння рівнянь (3.75)–(3.80) з (3.81)–(3.87) деякі з них стосуються одних і тих же параметрів. Це пов'язано з тим, що математична модель (3.74) задає граничні умови для (3.73). Два способи ідентифікації одних і тих же параметрів по різних наборах даних (для ламінарних та для турбулентних зон) покращить точність ідентифікації та адекватність математичної моделі в цілому.

Підставляючи вирази (3.75)–(3.87) у (3.60), отримуємо систему рівнянь

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\cos \alpha R} \sum_{i=1}^{M_T} \cos \alpha y_i \cdot e^{-\left[(A_t^* + \Lambda_t^* R) t_i + (A_z^* + \Lambda_z^* R) z_i \right]} S_i^T = 0, \\ &X_0 \operatorname{tg} \alpha R \sum_{i=1}^{M_T} \left(\frac{R \cos \alpha y_i}{\cos \alpha R} - \frac{y_i \sin \alpha y_i}{\sin \alpha R} \right) e^{-\left[(A_t^* + \Lambda_t^* R) t_i + (A_z^* + \Lambda_z^* R) z_i \right]} S_i^T = 0, \\ &- X_0 \frac{1}{\cos \alpha R} \sum_{i=1}^{M_T} \cos(\alpha y_i) z_i e^{-\left[(A_t^* + \Lambda_t^* R) t_i + (A_z^* + \Lambda_z^* R) z_i \right]} S_i^T = 0, \\ &- X_0 \frac{1}{\cos \alpha R} \sum_{i=1}^M \cos(\alpha y_i) R z_i e^{-\left[(A_t^* + \Lambda_t^* R) t_i + (A_z^* + \Lambda_z^* R) z_i \right]} S_i^T = 0, \\ &- X_0 \frac{1}{\cos \alpha R} \sum_{i=1}^M \cos(\alpha y_i) t_i e^{-\left[(A_t^* + \Lambda_t^* R) t_i + (A_z^* + \Lambda_z^* R) z_i \right]} S_i^T = 0, \\ &- X_0 \frac{1}{\cos \alpha R} \sum_{i=1}^M \cos(\alpha y_i) R t_i e^{-\left[(A_t^* + \Lambda_t^* R) t_i + (A_z^* + \Lambda_z^* R) z_i \right]} S_i^T = 0, \\ &S_i^T = \left(X^T(t_i, y_i, z_i) - \tilde{X}_i \right)^2, \quad y = [-R, R], \end{aligned} \right.$$



$$X_0 > 0,$$

$$0 > R \geq 1,$$

$$\sum_{i=1}^{M_L} e^{-\rho_0 y_i} \cdot e^{-\left[\left(A_t^* + \Lambda_t^* y_i\right) e^{-\rho_t^* y_i}\right] t_i + \left(A_z^* + \Lambda_z^* y_i\right) z_i} S_i^L = 0, \quad (3.88)$$

$$-\sum_{i=1}^{M_L} \Lambda_0 y_i e^{-\rho_0 y_i} \cdot e^{-\left[\left(A_t^* + \Lambda_t^* y_i\right) e^{-\rho_t^* y_i}\right] t_i + \left(A_z^* + \Lambda_z^* y_i\right) z_i} S_i^L = 0,$$

$$-\sum_{i=1}^{M_L} \Lambda_0 t_i e^{-\rho_0 y_i} \cdot e^{-\left[\left(A_t^* + \Lambda_t^* y_i\right) e^{-\rho_t^* y_i}\right] t_i + \left(A_z^* + \Lambda_z^* y_i\right) z_i} S_i^L = 0,$$

$$-\sum_{i=1}^{M_L} \Lambda_0 y_i t_i e^{-(\rho_0 + \rho_t^*) y_i} \cdot e^{-\left[\left(A_t^* + \Lambda_t^* y_i\right) e^{-\rho_t^* y_i}\right] t_i + \left(A_z^* + \Lambda_z^* y_i\right) z_i} S_i^L = 0,$$

$$-\sum_{i=1}^{M_L} \Lambda_0 \left(A_t^* + \Lambda_t^* y_i\right) y_i t_i e^{-(\rho_0 + \rho_t^*) y_i} \cdot$$

$$\cdot e^{-\left[\left(A_t^* + \Lambda_t^* y_i\right) e^{-\rho_t^* y_i}\right] t_i + \left(A_z^* + \Lambda_z^* y_i\right) z_i} S_i^L = 0,$$

$$-\sum_{i=1}^{M_L} \Lambda_0 y_i z_i e^{-\rho_0 y_i} \cdot e^{-\left[\left(A_t^* + \Lambda_t^* y_i\right) e^{-\rho_t^* y_i}\right] t_i + \left(A_z^* + \Lambda_z^* y_i\right) z_i} S_i^L = 0,$$

$$S_i^L = \left(X^L(t_i, y_i, z_i) - \tilde{X}_i\right)^2, \quad y = [0, (1-R)],$$

$$X_0 = \Lambda_0,$$

$$0 < \alpha R < \frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання цієї системи рівнянь дозволить ідентифікувати параметри (3.70) математичної моделі (3.73), (3.74) за даними спостережень $\tilde{X}_i (i = \overline{1, M}, M = M_T + M_L)$.

3.5. Висновки

Розглянуто задачу аналітичного моделювання динаміки процесів, що впливають на якість води у річці. Побудовано адекватну двовимірну просторову математичну модель динаміки, що враховує особливості протікання річкових процесів в різних частинах потоку — в турбулентній бистринній та ламінарних прибережних зонах. Отримано аналітичний розв'язок рівнянь в явній формі.

Розглянуто задачу математичного опису процесів змішування берегового стоку з річковою водою на ділянці, розташованій між двома створами повного змішування річки — до і після берегового стоку. За результатами натурного експерименту запропоновано систему математичних моделей, які є двовимірною математичною моделлю динаміки процесів забруднення та самоочищення річки. Наявність же аналітичного розв'язання рівнянь математичної моделі обумовлює перспективу її використання для розв'язання ряду важливих задач контролю та управління якістю річкової води з метою її поліпшення: визначення оптимальних скидів стічних вод, що не спричиняють наднормативного забруднення річки; відновлення обсягів скидів по відомій якості річкової води (ідентифікація офіційно незареєстрованих стоків) тощо.

Основним обмеженням на використання запропонованої математичної моделі є вимога щодо умов протікання процесів у водотоках, для яких є справедливими заміни функцій (3.2) та (3.13), тобто вимога щодо виконання припущення про існування функцій, котрі окремо описують зміну значення X по різних координатах. Якщо це припущення не виконується, хоча б у першому наближенні, тоді і весь математичний апарат цього розділу застосовувати не можна.

Слід зазначити, що розв'язанням рівняння, подібного до (3.11), в аналітичному вигляді за допомогою методу Фур'є займався і В. І. Лаврик (див. наприклад [48]), але він розглядав інші граничні та початкові умови з іншими обмеженнями та припущеннями, що унеможливило порівняння отриманих ним результатів із тими, що отримані у даному розділі, але це підтверджує коректність застосування методу Фур'є до розв'язання рівняння (3.11) для моделювання процесів у реальних водотоках.

4. МЕТОД КОНТРОЛЮ ВИТРАТ ТА ЯКОСТІ СТІЧНИХ ЧИ ЗВОРОТНИХ ВОД, ЩО НАДІЙШЛИ ДО РІЧКИ

4.1. Постановка задачі

Якщо на річці стався непрогнозований скид стічних або зворотних вод, але обсяг, ступінь забруднення і місце скиду точно відомі, тоді можна вживати певних санкцій щодо джерела забруднення з метою запобігання таких скидів в подальшому. Інша ситуація виникає, якщо відомим є тільки місце скиду. Наприклад, коли забруднення такого типу характерне тільки стічним водам певного підприємства або прямі виміри у водотоку показали наявність стрибкоподібного погіршення якості річкової води у певному створі. Тоді постає задача контролю за величиною забруднення, яке вносять стічні води, скинуті до річки [84, 85, 139-141].

Під величиною забруднення води у цьому розділі мається на увазі добуток значення концентрації певної забруднювальної речовини у воді на величину витрат цієї води.

Розв'язанню задачі контролю за величиною забруднення річкової води повинні передувати:

- ідентифікація математичної моделі процесів очищення та забруднення річкових вод;
- побудова алгоритмів контролю на основі запропонованої математичної моделі;
- натурні вимірювання забруднення річкової води в ряді створів.

4.2. Огляд та адаптація до особливостей задачі відомих математичних моделей річкових процесів

Будемо розрізняти такі характеристики стану та якості річкових та стічних вод кожної i -ої елементарної ділянки річки:

x_i, u_i, w_i — значення показників якості води у річці та в офіційно зареєстрованих і офіційно незареєстрованих стічних водах, відповідно;

Q_i, q_i, q_{wi} — значення витрат води річки та в офіційно зареєстрованих і офіційно незареєстрованих стічних водах, відповідно;

X_i, U_i, W_i — добутки значень показників якості у річці та в офіційно зареєстрованих і офіційно незареєстрованих стічних водах, відповідно, на витрати цих вод:

$$X_i = Q_i x_i, \quad U_i = q_i u_i, \quad W_i = q_{wi} w_i.$$

У розділах 1-3 наведено чимало математичних моделей. Більшість із них, у тому числі розроблені у розділах 2 та 3, можна представити у вигляді:

- для динамічного випадку (або статичного просторового одновимірного у разі $X_i(z/v_i) = X_i(t)$):

$$X_i(t) = X_{0i}(0) \cdot M_i(t), \quad t \in [0, T_i], \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.1)$$

- для динамічного просторового одновимірного випадку:

$$X_i(t, z) = X_{0i}(t, 0) \cdot M_i(t, z), \quad t \in [0, T_i], \quad z \in [0, L_i], \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.2)$$

- для динамічного просторового двовимірного випадку:

$$X_i(t, y, z) = X_{0i}(t, y, 0) \cdot M_i(t, y, z), \quad (4.3)$$
$$t \in [0, T_i], \quad z \in [0, L_i], \quad y \in [-\Omega_i, \Omega_i], \quad i = \overline{1, N}.$$

де $M_i(t)$ — лінійна відносно X_i функція, яка враховує зменшення

початкового забруднення в окремо виділеному об'ємі річки, який рухається в усередненому потоці i -ої елементарної ділянки річки вздовж осі координат z ($z = v_i t$) або з часом t ($t = z/v_i$) внаслідок дії процесів самоочищення річки;

$M_i(t, z)$ — лінійна відносно X_i функція, яка враховує зменшення початкового забруднення в усередненому потоці i -ої елементарної ділянки річки вздовж осі координат z з часом t внаслідок дії процесів самоочищення річки;

$M_i(t, y, z)$ — лінійна відносно X_i функція, яка враховує зменшення початкового забруднення, що розпливлось по всій ширині i -ої елементарної ділянки річки, вздовж осей координат y та z з часом t внаслідок дії процесів самоочищення річки.

З метою спрощення розрахунків не будемо враховувати окремо процеси розбавлення та перемішування стічних вод з річковими — будемо вважати, що ці процеси враховуються параметрами математичних моделей (4.1)–(4.3).

Запишемо вирази для функцій $M_i(\cdot)$ рівнянь (4.1)–(4.3).

Для моделі (2.56)–(2.62) у виразі (4.1):

$$M_i(t) = e^{-\mu_i(t)}, \quad \mu_i(t) = \begin{cases} -K_{1i} \cdot t, & l=1, \\ -\frac{K_{2i}}{K_{1i}} \cdot (e^{-K_{1i} \cdot t} + K_{1i} \cdot t - 1), & l=2, \\ -K_{3i} \cdot \left[t - \int_0^t e^{-K_{2i} \cdot q} (1 - e^{-K_{1i} \cdot q}) dq \right], & l=3. \end{cases} \quad (4.4)$$

Якщо на основі математичної моделі (3.1) записати динамічну просторову одновимірну модель, то вона набуде вигляду:

$$K_t \frac{\partial X(t, z)}{\partial z} = K_z \frac{\partial X(t, z)}{\partial t}, \quad (4.5)$$

$$X(0, 0) = X_0, \quad X(0, L) = X_L, \quad z = [0, L], \quad t = [0, T].$$

Розв'язок рівняння (4.5) за аналогією з (3.9), (3.10) має вигляд

$$X(t, z) = X_0 e^{-[K_t^* t + K_z^* z]}, t = [0, T], z = [0, L], \quad (4.6)$$

$$K_t^* = \frac{K_z}{LK_t} \ln\left(\frac{X_0}{X_L}\right), \quad K_z^* = \frac{1}{L} \ln\left(\frac{X_0}{X_L}\right). \quad (4.7)$$

Отже, у математичній моделі (4.2) функція $M_i(t, z)$ може мати вигляд:

$$M_i(t, z) = e^{-[K_{ii}^* t + K_{zi}^* z]}, t = [0, T_i], z = [0, L_i]. \quad (4.8)$$

Математична модель (4.6)–(4.8) може розглядатись як самостійна математична модель ЕД річки у першому наближенні, завдяки її більш простій формі, ніж, наприклад математична модель турбулентної зони (3.34)–(3.36), забезпечуючи, у той же час, певну адекватність динаміці реальних річкових процесів.

У математичній моделі (4.3) у відповідності з (3.34)–(3.36)

$$M_i(t, y, z) = \frac{\cos(\alpha_i y)}{\cos(\alpha_i R_i)} e^{-[K_{zi}^*(R_i)z + K_{ii}^*(R_i)t]}, \quad (4.9)$$

$$t = [0, T_i], z = [0, L_i], y = [-R_i, R_i],$$

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{K_{ii}^*(R_i) + v_i K_{zi}^*(R_i) - K_{zi}}{\delta_i}}. \quad (4.10)$$

Будемо далі розглядати математичну модель (4.3) як найбільш узагальнену форму запису лінійної моделі самоочисних процесів у річці.

4.3. Характеристика проблеми контролю змін забруднення води в цілому

Формалізуємо постановку задачі. Фактично, задача формулюється таким чином: виміряно певну кількість значень деякого показ-

ника якості води на i -й та $(i-1)$ -й елементарних ділянках річки $\tilde{X}_{i-1}(t, y, z)$ та $\tilde{X}_i(t, y, z)$, з'ясовано, що між цими точками на відстані λ_i був незареєстрований скид стічних вод (наприклад, з'ясувалось, що починаючи зі створу на відстані λ_i значення ПЯВ раптово збільшились в межах тієї ж ЕД), треба знайти величину забруднення $W_i(t)$, що надійшло на i -ту ЕД на відстані λ_i від її нульового створу.

Вхідні дані задачі:

1. Ідентифікована математична модель $M_i(t, y, z)$ на усіх ЕД.
2. Наявна інформація про усі офіційно зареєстровані джерела скиду стічних вод $U_i(t)$.
3. Дані спостережень значень показників якості та витрат річкових вод на усіх ЕД, тобто значення добутоків $\tilde{X}_i(t, y, z)$.

Умовам задачі відповідає така математична модель:

$$X_i(t, y, z) = X_{fi}(t)M_i(t, y, z) + W_i(t)M_i(t, y, z - \lambda_i), \quad t = [0, T_i], \quad \lambda_i < L_i, \quad (4.11)$$

де $X_{fi}(t)$ — фонове значення показника якості води в нульовому створі річки:

$$X_{fi}(t) = X_{i-1}(t, 0, L_{i-1}) + U_i(t). \quad (4.12)$$

В математичній моделі (4.11), (4.12) використано припущення про те, що по-перше, в межах однієї ЕД інтенсивність протікання процесів визначається тільки точкою їх початку, тобто і від початку ділянки, і від місця надходження офіційно незареєстрованих стічних вод процеси знешкодження та розбавлення стічних вод протікають однаково і описуються однією моделлю $M_i(\cdot)$.

Якщо вимірювання було б проведено ідеально, тоді вимірявши значення $\tilde{X}_{i-1}(t, 0, L_{i-1})$ на виході $(i-1)$ -ої ЕД та значення $\tilde{X}_i(t, y, z)$ у

будь-якій точці i -ої ЕД, де було виявлено суттєве відхилення ПЯВ від розрахункового, значення $W_i(t)$ можна було б знайти із простого співвідношення

$$\begin{aligned} \tilde{X}_i(t, y, z) &= (\tilde{X}_{i-1}(t, 0, L_{i-1}) + U_i(t)) \cdot M_i(t, y, z) + W_i(t) M_i(t, y, z - \lambda_i), \\ t &= [0, T_i], \quad \lambda_i < L_i \end{aligned} \quad (4.13)$$

або

$$\begin{aligned} \tilde{X}_i(t, y, z) - (\tilde{X}_{i-1}(t, 0, L_{i-1}) + U_i(t)) M_i(t, y, z) &= W_i(t) M_i(t, y, z - \lambda_i), \\ W_i(t) &= \frac{1}{M_i(t, y, z - \lambda_i)} (\tilde{X}_i(t, y, z) - (\tilde{X}_{i-1}(t, 0, L_{i-1}) + U_i(t)) M_i(t, y, z)), \quad (4.14) \\ t &= [0, T_i], \quad \lambda_i < L_i, \quad t = [0, T_i], \quad y = [-\Omega, \Omega]. \end{aligned}$$

Такий підхід до ідентифікації значення U_i був запропонований автором у роботі [84] ще для математичної моделі у вигляді (4.1), але цей підхід є недосконалим, оскільки, на практиці, вимірювання завжди вносять свою похибку (при заборі проби, при аналізі забруднення води тощо) [21, 38, 52, 57, 58, 108, 122], тому розв'язання задачі пропонується проводити на основі серій з P_i замірів $\tilde{X}_{ij}(t_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ на кожній i -й ЕД та з використанням методу найменших квадратів для ідентифікації математичної моделі на основі надлишкової кількості вхідних даних [140].

Як це видно із (4.11) та (4.12), має місце функціональна залежність

$$W_i(t) = F\{X_{i-1}(t, y, z), X_i(t, y, z), \lambda_i\}, \quad (4.15)$$

тобто ідентифікації $W_i(t)$ повинна передувати ідентифікація таких значень:

1) значення $X_{i-1}(t, 0, L_{i-1})$ по математичній моделі

$$\begin{aligned} X_{i-1}(t, 0, L_{i-1}) &= X_{fi-1}(t) M_{i-1}(t, y, L_{i-1}) = \\ &= (X_{i-2}(t, 0, L_{i-2}) + U_{i-1}(t)) M_{i-1}(t, y, L_{i-1}); \end{aligned} \quad (4.16)$$

2) значення $X_i(t, y, z)$ по багатьох вимірюваннях $\tilde{X}_i(t, y, z)$;

3) значення λ_i .

Якщо ідентифікацію значення $X_{i-1}(t,0,L_{i-1})$ варто проводити окремо по спостереженнях на $(i-1)$ -й ЕД, то ідентифікацію λ_i краще проводити одночасно з ідентифікацією значень стану $X_i(t,y,z)$ та $W_i(t)$ по вимірюваннях $\tilde{X}_i(t,y,z)$ із (4.14).

Такий алгоритм ідентифікації ґрунтується на тому, що на $(i-1)$ -й ЕД відсутні офіційно незареєстровані скиди стічних вод, які слід ідентифікувати. Якщо це — не так, тоді слід спочатку їх рекурентно ідентифікувати за даними $(i-2)$ -ої ЕД і т.д.

Запишемо ідентифікаційні співвідношення.

Ідентифікацію значення $X_{i-1}(t,0,L_{i-1})$ слід проводити по P_{i-1} вимірам значень $\tilde{X}_{i-1}(t,y,z)$ за такими співвідношеннями:

$$\sum_{j=1}^{P_{i-1}} \left[\tilde{X}_{i-1}(t_j, y_j, z_j) - (X_{i-2}(t_j, 0, L_{i-2}) + U_{i-1}(t_j)) M_{i-1}(t_j, y_j, z_j) \right]^2 = 0,$$

звідки знаходиться $X_{i-2}(t,0,L_{i-2})$:

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^{P_{i-1}} M_{i-1}(t_j, y_j, z_j) \left[\tilde{X}_{i-1}(t_j, y_j, z_j) - U_{i-1}(t_j) M_{i-1}(t_j, y_j, z_j) \right] = \\ = \sum_{j=1}^{P_{i-1}} X_{i-2}(t_j, 0, L_{i-2}) M_{i-1}^2(t_j, y_j, z_j). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ідентифікацію λ_i та $W_i(t)$ слід здійснювати як розв'язок системи рівнянь по вимірюваннях $\tilde{X}_i(t,y,z)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial W_i(t_j)} \sum_{j=1}^{P_i} \left[\tilde{X}_i(t_j, y_j, z_j) - X_{fij} M_i(t_j, y_j, z_j) - W_i(t_j) M_i(t_j, y_j, z_j - \lambda_i) \right]^2 = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \sum_{j=1}^{P_i} \left[\tilde{X}_i(t_j, y_j, z_j) - X_{fij} M_i(t_j, y_j, z_j) - W_i(t_j) M_i(t_j, y_j, z_j - \lambda_i) \right]^2 = 0, \end{cases}$$

де

$$X_{fij} = X_{i-1}(t_j, 0, L_{i-1}) + U_i(t_j)$$

або із системи рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{P_i} M_i(t_j, y_j, z_j - \lambda_i) [\hat{X}_i(t_j, y_j, z_j) - W_i(t_j) M_i(t_j, y_j, z_j - \lambda_i)]^2 = 0, \\ \sum_{j=1}^{P_i} \frac{\partial M_i(t_j, y_j, z_j - \lambda_i)}{\partial \lambda_i} W_i(t_j) [\hat{X}_i(t_j, y_j, z_j) - W_i(t_j) M_i(t_j, y_j, z_j - \lambda_i)]^2 = 0, \\ \hat{X}_i(t_j, y_j, z_j) = \tilde{X}_i(t_j, y_j, z_j) - (X_{i-1}(t_j, 0, L_{i-1}) + U_i(t_j)) M_i(t_j, y_j, z_j). \end{array} \right.$$

(4.18)

Поставлена задача розв'язана.

Стосовно значень λ_i можна додати, що у більшості випадків заздалегідь відомі усі ймовірні місця офіційно незареєстрованих надходжень стічних вод, які можуть суттєво вплинути на якість річкових вод. Отже, під час ідентифікації можливе лише уточнення який з цих джерел дійсно здійснив скид. Таким чином, відпадає необхідність у точній ідентифікації значення λ_i математичними методами по (4.18) — це можна встановити по базі даних. Якщо, наприклад, відомо, що λ_1 приймає значення між 1,0 км та 2,5 км, а на цій ЕД є тільки одна труба зі зворотними водами певного заводу на відстані 2,1 км, то можна з великою впевненістю стверджувати, що $\lambda_1 = 2,1$ км. Підсилити цю впевненість може аналіз ПЯВ, по яких виявлено відхилення від розрахункових та порівняння із переліком речовин, які скидає цей завод.

Варто ще зазначити, що якщо із вхідних даних зрозуміло, що виявлений офіційно незареєстрований скид — це той же самий скид стічних вод, який вважається офіційно зареєстрованим, тоді слід

прийняти $\lambda_i = 0$, що спростить систему рівнянь (4.18) до рівняння, подібного до (4.17):

$$-\sum_{j=1}^{P_{i-1}} M_{i-1}(t_j, y_j, z_j) \widehat{X}_{i-1}(t_j, y_j, z_j) = \sum_{j=1}^{P_{i-1}} W_{i-1}(t_j) M_{i-1}^2(t_j, y_j, z_j), \quad (4.19)$$

де

$$\widehat{X}_i(t_j, y_j, z_j) = \widetilde{X}_i(t_j, y_j, z_j) - (X_{i-1}(t_j, 0, L_{i-1}) + U_i(t_j)) M_i(t_j, y_j, z_j).$$

4.4. Розв'язання задачі контролю змін окремо показників якості та окремо витрат стічних вод

Запропоновані алгоритми та математичні моделі контролю дозволяють дослідити та знайти величину забруднення води в цілому. Як було зазначено вище, під "величиною забруднення" мається на увазі добуток значення концентрації певної забруднювальної речовини у воді на величину витрат цієї води. На практиці ж цікавішим є ідентифікація не змін забруднення в цілому, а змін окремо витрат стічних вод, з якими до річки надходить забруднювальна речовина та якості цих вод, тобто концентрації у ній забруднювальної речовини.

Введемо позначення як на рис. 4.1, 4.2.

Важливим питанням є ймовірне місце надходження стічних вод та місце спостережень $\widetilde{X}_i(t, y, z)$.

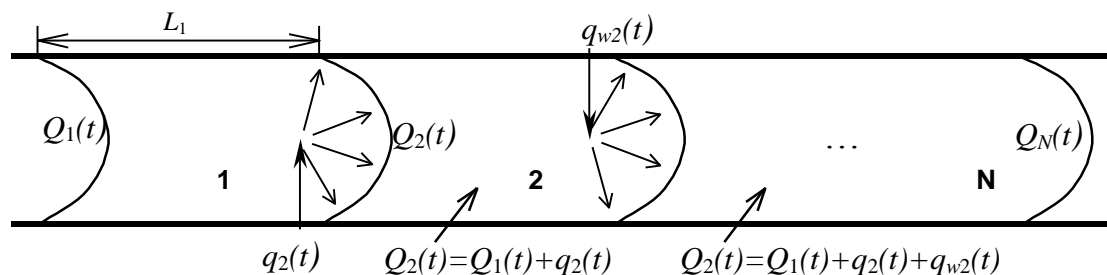


Рис. 4.1 Баланс витрат води на припасованих елементарних ділянках річки

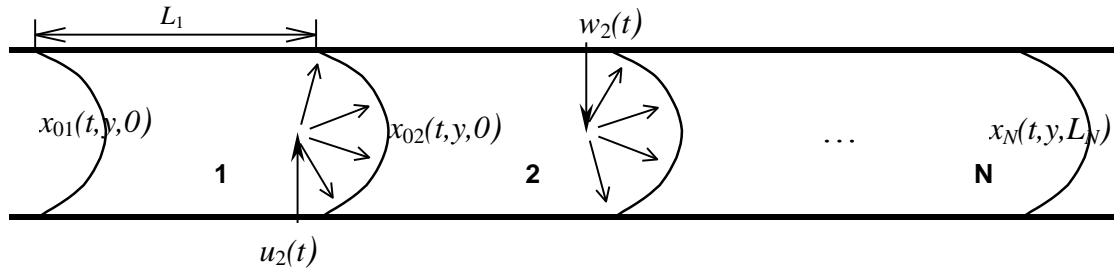


Рис. 4.2 Позначення показників якості річкових та стічних вод

Якщо надходження стічних вод відбувається так, як показано на рис. 4.2, тобто в середину фарватеру та ще й через спеціальні розсіювальні пристрої, котрі забезпечують швидке перемішування стічних вод з річковими, тоді можна стверджувати, що має місце спрощене співвідношення:

$$W_i(t) = (q_{wi} + Q_i + q_i)w_i(t), \quad (4.20)$$

інакше:

$$W_i(t) = q_{wi}w_i(t). \quad (4.21)$$

Випадок (4.20) не накладає суттєвих обмежень чи не ставить вимог щодо вимірювань значень ПЯВ $\tilde{X}_i(t, y, z)$, оскільки по усій ширині річки вже є частка стічних вод, які надійшли. Варіант же (4.21) накладає обмеження та ставить вимогу в тому, що вимірювання $\tilde{X}_i(t, y, z)$ повинні здійснюватись саме в тій частині річкового потоку, в яку надійшли стічні води. Але, оскільки заздалегідь може бути не відомо з якого берега вони надійшли, чи з фарватеру, то найоб'єктивніший результат ідентифікації буде забезпечений, якщо спостереження значень $\tilde{X}_i(t, y, z)$ у кожному створі річки будуть здійснюватись у трьох місцях: у фарватері, біля правого берега та біля лівого.

На рис. 4.1 та 4.2 враховані такі припущення та співвідношення:

1. У межах однієї ділянки річки, де немає природних чи антропогенних стоків чи витоків витрати води Q_i вважаються сталими. Це, звичайно, спричиняє певну похибку, обумовлену неврахуванням про-

цесів випаровування води з поверхні річки, підживлення ґрунтовими водами та інфільтрації води у ґрунт [10, 48, 56, 67, 73, 84, 95, 97, 120]. Але цю похибку можна усунути, якщо на початку кожної ЕД робити відповідну поправку ΔQ_i величини $X_{oi}(t, y, z)$.

2. Сталі в будь-якій точці річки витрати річкового стоку Q_i та сталі в межах перерізу річки у місці скиду стічних вод витрати цих вод q_i зазнають змін у часі t .

3. Витрати води у річці на кожній ЕД складаються із таких витрат:

$$Q_i(t) = Q_{i-1}(t) + q_i(t) + q_{wi}(t) + \Delta Q_i(t), \quad (4.22)$$

звідки:

$$q_{wi}(t) = Q_i(t) - Q_{i-1}(t) - q_i(t) - \Delta Q_i(t), \quad (4.23)$$

У той же час, $W_i(t) = q_{wi}(t)w_i(t)$. Якщо відомо добуток двох величин, то, щоб знайти усі його множники, слід знайти спочатку хоча б один. А потім вже легко знайти і інший. Тож, якщо із (4.23) знайти значення витрат стічних вод $q_{wi}(t)$, що надходять до річки, то, знайшовши значення $W_i(t)$ із (4.18) або (4.19), легко можна знайти безпосередньо значення ПЯВ $w_i(t)$ із співвідношення:

$$w_i(t) = W_i(t) / q_{wi}(t). \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.24)$$

Задачу ж ідентифікації витрат стічних вод $q_{wi}(t)$ слід розв'язувати теж математичним шляхом, оскільки прямому вимірюванню вона не піддається. Пропонується такий алгоритм:

1) вивчається гідрологічний режим річки на ЕД, визначаються зміни метеоумов за той час, що досліджується, — за цими даними визначається вплив процесів випаровування води з поверхні річки, підживлення ґрунтовими водами та інфільтрація води у ґрунт на загальний баланс вод i -ої ЕД; відповідно встановлюється поправочний коефіцієнт $\Delta Q_i(t)$;

2) порівнюються виміряні витрати річкової води на початку цієї $\tilde{Q}_i(t)$ та наступної $\tilde{Q}_{i+1}(t)$ елементарних ділянок: якщо між ними є відхилення, більше за поправку $\Delta Q_i(t)$, тоді робиться висновок про наявність додаткового непрогнозованого скиду стічних вод;

3) встановлюється значення витрат виявленого скиду стічних вод за формулою (4.23).

Звичайно, більша точність такого алгоритму буде забезпечена, якщо обчислення за формулою (4.23) буде здійснюватись протягом певного часу на основі серії з P_i вимірювань витрат $\tilde{Q}_{ij}(t)$ та значень $\Delta \tilde{Q}_{ij}(t)$ з наступним усередненням за методом найменших квадратів подібно до виразів (3.88).

Задача розв'язана.

Повертаючись до зроблених на початку другого розділу припущень щодо симетричності схеми напрямків течії річки та інших спрощень математичної моделі, можна стверджувати, що запропонована технологія контролю обсягу та якості незареєстрованих джерел стічних вод у річці буде працювати і для загального вигляду математичної двовимірної просторової моделі річкових процесів, розробленої в роботі [62], але усі вирази суттєво ускладняться, оскільки всі розрахунки доведеться проводити окремо для лівої та правої частини потоку річки.

4.5. Приклад розв'язання задачі контролю

Наведемо приклад. Нехай має місце забруднення річки, наведене на рис. 4.3.

За офіційними даними було відомо, що зареєстроване джерело

скиду не функціонувало: $U_2(t_f) = 0,0$ (тис. м³·мг)/(с·л). Однак, у місці його розташування було виявлено суттєве забруднення — цьому відповідає значення $\lambda_i = 0$. Отже, розрахунки слід робити за співвідношеннями (4.19).

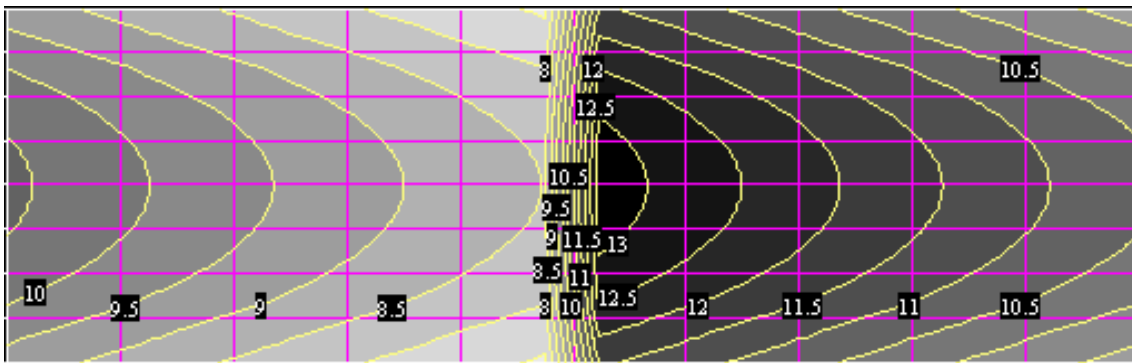


Рис. 4.3. Картина забруднення річки на двох ЕД

Для фіксованого часу $t = t_f$, в який проводився експеримент, проведення розрахунків за співвідношеннями (4.17)–(4.23) дало $W_2(t_f) = 2,652$ (тис. м³·мг)/(с·л). В той час, як насправді це значення дорівнювало 2,684 (тис. м³·мг)/(с·л). Похибка в 1,2 % є прийнятною.

Вимірювання витрат на початку першої та другої елементарних ділянок річки дало значення, відповідно: $\tilde{Q}_1(t_f) = 0,10$ тис. м³/с та $\tilde{Q}_2(t_f) = 0,14$ тис. м³/с. Спеціальні дослідження періоду зміни витрат води дозволили з'ясувати, що значення поправки слід встановлювати у розмірі $\Delta Q_2(t_f) = 0,015$ тис. м³/с. Таким чином, за формулою (4.23) знаходимо ($q_2(t) = 0$)

$$\begin{aligned} q_{w2}(t_f) &= \tilde{Q}_2(t_f) - \Delta Q_1(t_f) - \tilde{Q}_1(t_f) = 0,140 - 0,015 - 0,100 = \\ &= 0,025 \text{ (тис. м}^3\text{/с)} = 25 \text{ (м}^3\text{/с)}. \end{aligned}$$

Застосовуючи формулу (4.24), знаходимо

$$w_2(t_f) = W_2(t_f)/q_{w2}(t_f) = 2,652 / 0,025 = 106,08 \text{ (мг/л)}.$$

Насправді ж значення становило $w_2(t_f) = 103$ мг/л. Отже похибка дорівнює приблизно 3% і є цілком прийнятною.

4.6. Висновки

Розроблено новий метод контролю за величиною забруднення річкової води, яке вносять стічні води, скинуті до річки, з використанням розробленої у даній роботі динамічної двовимірної просторової моделі річкових процесів. Метод є нечутливим до випадкових похибок, що виникають при вимірюваннях, завдяки усередненню на множині багатьох вимірювань методом найменших квадратів. Метод дозволяє окремо визначити такі параметри офіційно незареєстрованого скиду стічних вод:

- місце розташування скиду;
- витрати стічних вод;
- значення показників якості стічних вод.

Окремо наведено алгоритм ідентифікації реальних параметрів стічних вод, які надійшли з офіційно зареєстрованих джерел, якщо ці джерела скинули до річки понадлімітний і незареєстрований обсяг забруднення.

Наведений приклад доводить адекватність та працездатність запропонованих алгоритмів ідентифікації та контролю якості річкових вод.

ВИСНОВКИ

Розглянуто проблему моделювання якості річкових вод та синтезу математичних моделей, придатних для розв'язання за їх допомогою задач контролю та управління якістю вод з метою їх поліпшення.

Описано відому формалізацію річки як кібернетичного об'єкта — об'єкта управління — виділено входи, виходи та змінні стану річкового об'єкта. Вказано, що критерієм якості води вибрано відповідність показників якості нормативним вимогам ГДК чи ГДВ.

Наведена класифікація та здійснено аналіз відомих математичних моделей процесів зміни значень показників якості води у часі й у просторі за типами та природою процесів, що одночасно враховуються. Виділено їх переваги та недоліки, а також пріоритетні задачі, де ці математичні моделі застосовуються. Доведено, за яких умов виведена у попередніх роботах автора [60, 65, 74, 84, 104, 115] математична модель процесів забруднення та самоочищення у річках за випадків $l = 1$ та $l = 2$ зводиться до аналогічних математичних моделей інших авторів [34, 40, 46-48, 84, 101, 117, 128, 129, 138], що є підтвердженням її адекватності процесам і дає підстави використовувати її у подальшому як більш загальну.

Розроблено новий підхід до синтезу узагальненої математичної моделі процесів самоочищення та розбавлення забруднень у річці, що надійшли зі стічними водами. Показано, яким чином можна враховувати й води менш забруднені, ніж річкові, наприклад, притоки із джерельною водою, а також водозабори. Розроблено алгоритм синтезу математичної моделі річки для розрахунку зміни діапазону значень якості річкової води, тобто у кожному створі річки математична модель дозволяє встановити, мінімальне та максимальне значення зада-

ного показника якості річкової води. Показано, яким чином у цій математичній моделі можуть бути використані відомі математичні моделі процесів самоочищення та розбавлення. Застосування математичної моделі обмежується малими та середніми річками, де в першому наближенні можна використовувати просторові одновимірні математичні моделі процесів розбавлення та змішування стічних вод з річковими.

Розглянута задача аналітичного моделювання процесів, що впливають на якість води у річці. Побудовано нову адекватну двовимірну просторову математичну модель динаміки, що враховує особливості протікання річкових процесів в різних частинах потоку — в турбулентній бистринній та ламінарних прибережних зонах. Отримано аналітичний розв'язок рівнянь в явній формі.

Доведена адекватність розроблених автором математичних моделей річковим процесам шляхом порівняння з відомими математичними моделями І. Д. Родзиллера та В. І. Лаврика в області перекриття вихідних умов.

Розроблено новий метод контролю за величиною забруднення річкової води, яке вносять стічні води, скинуті до річки, з використанням розробленої у даній роботі двовимірної просторової математичної моделі річкових процесів. Метод є нечутливим до випадкових похибок, що виникають при вимірюваннях, завдяки усередненню на множині багатьох вимірювань методом найменших квадратів. Крім того, метод дозволяє окремо визначити такі параметри офіційно незареєстрованого скиду стічних вод: місце розташування скиду, витрати стічних вод, та значення показників їх якості.

Працездатність розроблених математичних моделей та алгоритмів доведена на практичних прикладах. В окремих прикладах вико-

ристана реальна інформація, взята з комп'ютерної геоінформаційної аналітичної системи моніторингу поверхневих вод Вінницької області, що розроблена у Вінницькому національному технічному університеті під керівництвом автора на замовлення Держуправління екології та природних ресурсів у Вінницькій області у 2002-2004 рр. Для цієї системи під керівництвом автора розроблено зовнішні програмні модулі “ЕкоМонітор” та “ЕкоКерування”, які використовують математичне та алгоритмічне забезпечення, розроблене у даній роботі. Розроблена система з 2004 року впроваджена, також, у Південно-Бузькому басейновому управлінні водних ресурсів, Вінницькому облводгоспі, Управлінні з надзвичайних ситуацій Вінницької області, Вінницькому обласному центрі з гідрометеорології, Вінницькій обласній санепідемстанції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Белогуров В.П., Василенко С.Л. Статистические модели процессов изменения качества воды в водотоках // Управление качеством вод: Сб. науч. тр. – Харьков: ВНИИВО, 1980. – С. 61–69.
2. Беляев В.И. Математическое моделирование процессов диффузии неконсервативных частиц в экологических системах // Автоматика, 1984, № 2. – С. 58–65.
3. Бусыгин Б.С., Гаркуша И.Н., Серединин Е.С., Гаевенко А.Ю. Инструментарий геоинформационных систем (справочное пособие). — К.: ИРГ "ВБ", 2000. — 172 с.
4. Вавилин В.А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках.— М.: Наука, 1983.— 300 с.
5. Василенко С.Л., Волошкіна О.С., Красовський Г.Я. Моделі якості води, зумовленої транскордонним переносом забруднюючих речовин у водотоках // Екологія і ресурси: Зб. наук. праць. – К.: УІНСіР РНБОУ, 2003. – Вип.5. – С. 98–105.
6. Вентцель Е.С. Исследование операций. — М.: Советское радио, 1972.— 552 с.
7. Возная В.Н. Химия воды и микробиология. — М.: Химия, 1967.
8. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
9. Гвоздяк П.І. Перспективи удосконалення біотехнології очищення стічних і природних вод // Зб. матеріалів конференції "Сучасні проблеми охорони і раціонального використання водних ресурсів та очистки природних і стічних вод". – К.: Тов. "Знання" України. – 20 с.
10. Гидравлика, водоснабжение и канализация: Учебник для ву-

зов / В.И. Калицун, В.С. Кедров, Ю.М. Ласков, П.В. Сафонов. — 3-е изд.— М.: Стройиздат, 1980.— 359 с.

11. Глинка Н.Л. Общая химия: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В.А. Рабиновича. — 21-е изд. — Л.: Химия, 1980.— 720 с.

12. Горстко А.Б., Сурков Ф.А. Математика и проблемы сохранения природы. — М.: Знание, 1975. — 63 с.

13. Демидович Б.П., Марон И.А. Численные методы.— М.: Наука, 1968. — 464 с.

14. Екологічний стан Вінницької області у 2001 році / Під заг. ред. Яворської О.Г. — Вінниця: Віноблдрукарня, 2002. — 67 с.

15. Економіка і екологія водних ресурсів Дніпра: Посібник / В.Я. Шевчук, М.В. Гусєв, О.О. Мазуркевич та ін.; За ред. В. Я. Шевчука. — К.: Вища шк., 1996. — 207 с.

16. Еременко Е.В. Определение в зоне смешения концентрации веществ с учетом их последовательной трансформации // Регулирование качества природных вод: Сб. науч. тр. — Харьков: ВНИИВО, 1984. — С. 3–12.

17. Еременко Е.В. Экологические модели разной сложности для прогно-зирования качества воды // Проблеми охорони навколишнього природного середовища та техногенної безпеки: Зб. наук. пр. УкрНДІЕП. — Харків, 2000. — С. 90-99.

18. Закон України "Про водний кодекс" від 21 вересня 2000 року N 1990-III зі змінами та доповненнями 2000-2005 рр.

19. Закон України "Про охорону навколишнього природного середовища" від 5 травня 1993 року № 3180-XII із змінами і доповненнями, внесеними Законами України протягом 1996-2004 рр.

20. Зенин А.А., Белоусова Н.В. Гидрохимический словарь / Под ред. А.М. Никанорова.— Л.: Гидрометеиздат, 1988.— 240 с.

21. Зорі А. А., Коренев В. Д., Хламов М. Г. Методи, засоби, системи вимірювання і контролю параметрів водних середовищ. — Донецьк: ДонНТУ, 2000. — 370 с.
22. Ивахненко А.Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. — К.: Техніка, 1975. — 311 с.
23. Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. — К.: Наук. думка, 1982. — 296 с.
24. Ивахненко А.Г. Развитие, современное состояние и будущее МГУА (обзор) // Автоматика. — 1982. — № 5. — С. 3–17.
25. Ивахненко А.Г., Сарачев А.П., Светальский Б.К. Определение базисного множества наблюдаемых переменных в задаче управления качеством воды // Автоматика. — 1984. — № 6. — С. 3–7.
26. Ивахненко А.Г., Кротов Г.И. Модернизированные алгоритмы МГУА для идентификации и двухуровневого долгосрочного прогноза экосистемы оз. Байкал // Автоматика. — 1983. — №2. — С. 11–17.
27. Ивахненко А.Г., Кротов Г.И. Моделирование загрязнения среды при отсутствии информации о выбросах источников загрязнения // Автоматика. — 1977. — № 5. — С. 14–31.
28. Ивахненко А.Г., Овчинников В.А. Управление днепровским каскадом водохранилищ ГЭС при двух критериях оптимальности на основе принципа самоорганизации // Автоматика. — 1975. — № 2. — С. 49–59.
29. Ивахненко А.Г., Юрачковский Ю.П. Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. — М.: Радио и связь, 1987. — 120 с.
30. Изерман Р. Цифровые системы управления. — Пер. с англ.— М.: Мир, 1984. — 541 с.
31. Израэль Ю.А. Экология и контроль состояния природной

среды. – М.: Гидрометеоздат, 1984. – 560 с.

32. Каминский В.С. Состав и качество поверхностных вод: Понятие «качество» воды // Основы прогнозирования качества поверхностных вод. – М.: Наука, 1982. — С. 6-22.

33. Карапетьянц М.Х., Дракин С.И. Общая и неорганическая химия. Учебное пособие для вузов.— М.: Химия, 1981.— 632 с.

34. Караушев А.В. Речная гидравлика. Курс общей и специальной гидравлики для гидрологов. Ленинград: Гидрометеорологическое изд-во, 1969. — 416 с.

35. Караушев А.В., Шварцман А.Я., Бесценная М.А. Теоретическое и экспериментальное изучение разбавления сточных вод в реках и водоемах // Труды IV Всесоюз. гидрол. съезда. — Т.9. — Л.: Гидрометеоздат. — 1976. — С. 27–35.

36. Карюхина Т.А., Чурбанова И.Н. Химия воды и микробиология. Учебник для техникумов.— М.: Стройиздат, 1974.— 215 с.

37. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления.— М.: Мир, 1977. — 463 с.

38. Керівні нормативні документи "Якість вимірювань складу та властивостей об'єктів забруднення" / За ред. В. Ф. Осики, М. С. Кравченка. — К.: Мінекобезпеки України, 1997. — 662 с.

39. Кимстач В.А. Классификация качества поверхностных вод в странах Европейского экономического сообщества. – СПб.: Гидрометеоздат, 1993. – 48 с.

40. Ковальчук П. І. Моделювання та прогнозування стану навколишнього природного середовища: Навч. посібник. — К.: Либідь, 2003. — 208 с.

41. Кокин К.А. Экология высших водных растений. – М.: Изд-во Моск. ун.- та, 1982. – 160 с.

42. Кордзадзе А. А., Деметрашвили Д. И., Сурмава А. А. Численное моделирование распространения примеси в Черном море и атмосфере Кавказа // *Екологія довкілля та безпека життєдіяльності*. — 2004. — № 6. — с.31–41.

43. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. Учеб. пособие для мех.-математичн. фак. ун-тов. — М.: Высш. шк., 1970. — 712 с.

44. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики.— 5-е изд. — М.: Наука, 1978. — 624 с.

45. Курс инженерной экологии: Учеб. для вузов / И.И. Мазур, О.И. Молдаванов; Под ред. И.И. Мазура. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Высш. шк., 2001.— 510 с.

46. Лаврик В. І., Боголюбов В. М. Математичне моделювання процесів самоочищення поверхневого стоку урбанізованих територій // *Екологія довкілля та безпека життєдіяльності*. — 2004. — № 2. — С. 62–65.

47. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології.— К.: Фітосоціоцентр, 1998. — 131 с.

48. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології: навч. посібник. — К.: Вид. дім "КМ Академія", 2002. — 203 с.

49. Лоренц В.І. Експлуатація промислових очисних споруд. — К.: Будівельник, 1982. — 212 с.

50. Маликов В.Т., Кветный Р.Н. Вычислительные методы и применение ЭВМ: Учеб. пособие. — К.: Вища школа, 1989. — 213 с.

51. Медоуз Д.Х. Пределы роста: Доклад по проекту римского клуба "Сложные положения человечества". — М.: Изд-во Моск. гос. ун.-та, 1991. — 205 с.

52. Методические указания по санитарно-микробиологическому

анализу воды поверхностных водоемов / Под ред. Б.Н. Онищенко. — М.: Химия, 1986. — 53 с.

53. Митчел Э. Руководство по ГИС-анализу. Пространственные модели и взаимосвязи. — К.: ЕСОММ, 2000. — 180 с.

54. Митюшкин Ю. И., Мокин Б. И., Ротштейн А. П. Soft Computing: идентификация закономерностей нечеткими базами знаний: Монография. — Винница: УНИВЕРСУМ-Винница, 2002. — 145 с.

55. Моисеев Н.Н. Модели экологии и эволюции. — М.: Знание, 1983. — 64 с. — (Новое в жизни, науке, технике. Математика, кибернетика; № 10).

56. Моисеев Н.Н. Человек и биосфера: Опыт системного анализа и эксперименты с моделями. — М.: Наука, 1985. — 272 с.

57. Мокин В. Б. Методы и средства измерения некоторых химических и физико-химических показателей воды при проведении ее мониторинга в реке / Винниц. гос. техн. ун-т. — Винница, 1996. — 58 с. — Рус.— Деп. в ГНТБ Украины 23.10.96, № 1963.

58. Мокин В. Б. Методы и средства определения удельной электропроводности воды при проведении мониторинга реки / Винниц. гос. техн. ун-т. — Винница, 1996. — 36 с. — Рус. — Деп. в ГНТБ Украины 23.10.96, № 1964.

59. Мокін Б. І., Мокін В. Б. Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів. Частина I. Ідентифікація електромеханічних процесів в лінійних детермінованих системах з зосередженими параметрами: Навчальний посібник. — Вінниця: “УНІВЕРСУМ-Вінниця”, 1998. — 153 с.

60. Мокін Б. І., Мокін В. Б. Новий підхід до моделювання процесів в річкових системах / Сб. тр. междунар. науч. конф. “Физико-технические и технологические приложения математического моде-

лирования”. — К.: ЗАО “Южполиграфсервис”, 1998. — С. 172–175.

61. Мокін В. Б. Аналіз взаємовпливу параметрів водних об’єктів у різних створах / Зб. тез 11-ої Міжнародної наукової конференції по автоматичному управлінню "Автоматика-2004". — Т. 1. — К: НУХТ, 2004. — С. 81.

62. Мокін В. Б. Аналітичне моделювання динаміки річкових процесів з одночасним врахуванням ламінарної та турбулентної зон // Вісник ВПІ. — 2001. — № 2. — С. 108–113.

63. Мокін В.Б. Використання ГІС-технологій для розв’язання задач моніторингу, моделювання та управління якістю вод малих та середніх річок / Зб. матеріалів другої науково-практичної конференції “Техногенно-екологічна безпека регіонів як умова сталого розвитку України”. — Київ: Тов. “Знання” України, 2002. — С. 282–284.

64. Мокін В. Б. Деякі аспекти управління скидами стічних вод до річки в разі її аварійного забруднення // Системні технології. — № 6 (23). — 2002. — С. 26–40.

65. Мокін В. Б. До питання про збіжність алгоритму розв’язання рівнянь, які моделюють динаміку хімічних та бактеріологічних показників якості річкових вод // Вісник ВПІ. — 1998. — № 3. — С. 28–35.

66. Мокін В. Б. Замкнута система оптимального управління якістю річкової води за критерієм мінімуму збитків // Вісник ВПІ. — 2000. — № 4. — С. 39–45.

67. Мокін В. Б. Ідентифікація складових водного балансу річки за басейновим принципом за даними системи державного моніторингу за допомогою геоінформаційних систем / Зб. праць Міжнародної науково-практичної конференції “Сучасні проблеми охорони довкілля, раціонального використання водних ресурсів та очистки природних і стічних вод”. — К.: Тов. “Знання” України, 2004. — С. 38-41.

68. Мокін В. Б. Керування якістю річкової води з урахуванням вагомості джерел забруднення для регіону за умов аварійного забруднення річки // Наукові праці ДонНТУ. Серія “Обчислювальна техніка та автоматизація”. Вип. 47. — Донецьк, 2002. — С. 191–198.

69. Мокін В. Б. Комп’ютеризована обробка даних регіонального державного моніторингу вод з використанням геоінформаційних технологій / Зб. наук. праць Національного гірничого університету № 19. — Т. 2. — Дніпропетровськ, 2004. — С. 193–199.

70. Мокін В. Б. Новий підхід до розробки моделі процесів змішування стічних вод із річковими на основі теорії нечітких множин / Зб. тез VII Міжнародної конференції "Контроль і управління в складних системах" (КУСС-2003). — Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. — С. 147.

71. Мокін В. Б. Новий підхід до розробки моделі процесів змішування стічних вод із річковими на основі теорії нечітких множин // Вісник ВПІ. — № 6. — 2003. — С. 180–186.

72. Мокін В. Б. Одновимірна динамічна модель процесів самоочищення та розбавлення великої кількості стічних вод для найбільш забрудненого потоку річки // Вісник ВПІ. — 2003. — № 5. — 42–47.

73. Мокін В. Б. Оптимізація ступеню зарегульованості вод річкової системи Південний Буг // Вісник СевДТУ. Вип 55: Механіка, енергетика, екологія: Зб. наук. пр. — Севастополь: Вид-во СевДТУ, 2003. — С. 181–190.

74. Мокін В. Б. Побудова алгоритму розв’язання рівнянь, які моделюють динаміку зміни хімічних та бактеріологічних показників якості річкових вод // Вісник ВПІ. — 1998. — № 2. — С. 41–47.

75. Мокін В. Б. Синтез замкнутої оптимальної системи управління якістю річкової води за критерієм мінімуму збитків // Вісник

ВПІ. – 2000. — № 3. — С. 54–61.

76. Синтез оптимального закону управління скидами стічних вод до річки в разі її аварійного забруднення за принципом “рівних можливостей” / В. Б. Мокін // Вісник Житомирського інженерно-технологічного інституту. Спеціальний випуск за матеріалами Міжнародної науково-технічної конференції “Інформаційно-комп’ютерні технології 2002”. — 2002. — С. 147–151.

77. Мокін В. Б. Синтез оптимального закону управління якістю води в річці з урахуванням засобів його реалізації // Вісник ВПІ. — 2001.— № 6.— С. 67–72.

78. Мокін В. Б. Синтез оптимальної системи управління скидами стічних вод до річки в разі її аварійного забруднення // Вісник ВПІ. — 2002. — № 2. — С. 36–41.

79. Мокін В. Б. Синтез просторово-розподіленої моделі річки на основі моделі упорядкування основних процесів // Вісник ВПІ. — 1997.— № 3. — С. 52–56.

80. Мокін В. Б. Синтез системи управління якістю річкової води, оптимальної за критерієм вартості збитків // Зб. пр. міжнародної конференції з управління "Автоматика 2000". — Т.5. — Львів: Державний НДІ інформаційної інфраструктури, 2000. — С. 152–158.

81. Мокін В. Б., Боцула М. П. Розробка геоінформаційного автоматизованого гідрологічного бюлетеню Вінницького обласного центру з гідрометеорології // Геоінформатика. — 2003. — № 4. — С. 70–75.

82. Мокін В. Б., Боцула М. П. Розробка геоінформаційної системи державного моніторингу довкілля Вінницької області / Зб. наукових праць “Національне картографування: стан, проблеми та перспективи розвитку”. — К.: ДНВП "Картографія", 2003. — С. 140–143.

83. Мокін В. Б., Катасонов А. І. Розв'язання задач геоекологічного моніторингу та управління якістю річкових вод за умов надзвичайного забруднення // Геоінформатика. — 2002. — № 2. — С. 20–23.

84. Мокін В. Б., Мокін Б.І. Математичні моделі та програми для оцінювання якості річкових вод: Монографія. — Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2000.— 152 с.

85. Мокін В.Б., Мокіна О.О. Моніторинг якості вод малих та середніх річок: поточне моделювання, прогнозування реакції на аварійні скиди стічних вод, пошук незареєстрованих скидів / Зб. матеріалів другої науково-практичної конференції “Техногенно-екологічна безпека регіонів як умова сталого розвитку України”. — Київ: Тов. “Знання” України, 2002. — С. 284–286.

86. Мокін В. Б., Ю.С. Гавриков, Яцолт А.Р. Розробка геоінформаційного кадастру річок Вінницької області // Екологія довкілля та безпека життєдіяльності. — № 1. — 2004. — С. 66–73.

87. Мокін В. Б., Ю.С. Гавриков. Новий підхід до двовимірного моделювання динаміки змішування річкових вод зі стічними, що надходять з берега // Вестник Херсонского государственного технического университета. — 2002. — № 2. — С. 340–343.

88. Объективный системный анализ и двухуровневый долгосрочный прогноз для экосистемы Каховского и Кременчугского водохранилищ / А.Г. Ивахненко, Б.К. Светальский, А.П. Сарычев и др. // Автоматика.— 1984. — № 2. — С. 30–41.

89. Ордынцев В.М. Математическое описание объектов автоматизации. — М.: Маш-ние, 1965. — 360 с.

90. Остроумов С. А. Основы теории биотического формирования качества воды и самоочищения водных экосистем // Екологія довкілля та безпека життєдіяльності. — 2004. — № 6. — С. 12–18.

91. Охрана окружающей среды: Модели управления чистотой природной среды / К.Г. Гофман, А.А. Гусев и др. — М.: Экономика, 1977.— 231 с.

92. Паспорт р. Ров / Винницкий филиал "Укргипроводхоза". — Вінниця, 1991. — 221 с.

93. Постанова Кабінету Міністрів України від 20 липня 1996 р. № 815 “Про затвердження Порядку здійснення державного моніторингу вод” від 24 вересня 1999 року № 1763 із змінами і доповненнями, внесеними постановами Кабінету Міністрів України 2000-2004 рр.

94. Практические рекомендации по расчету разбавления сточных вод в реках, озерах и водохранилищах / Под ред. А.В. Караушева. — Л.: Фотоофсетн. лаборатория ВНИГЛ ГГИ, 1970. — 90 с.

95. Прозоров И.В., Николадзе Г.И., Минаев А.В. Гидравлика, водоснабжение и канализация: Учеб. пособие для строит. вузов. — М.: Высш. шк., 1990.— 448 с.

96. Ракитянська А. Б., Ротштейн А. П. Генетический алгоритм диагностики на основе нечетких отношений // Известия Академии наук. Теория и системы управления. — 2001.— № 5. — С. 121-126.

97. Рамад Ф. Основы прикладной экологии: Воздействие человека на биосферу. — Л.: Гидрометеиздат, 1981. — 543 с.

98. Растрингин Л.А. Случайный поиск. — М.: Знание, 1979. — 64 с.

99. Растрингин Л.А. Этот случайный, случайный, случайный мир. — М.: Молодая гвардия, 1974. — 207 с.

100. Рішення Вінницької обласної Ради народних депутатів від 24 жовтня 1994 р. № 63 “Про обласний моніторинг навколишнього природного середовища”.

101. Родзиллер И.Д. Прогноз качества воды водоемов — при-

емников сточных вод.— М.: Стройиздат, 1984.— 263 с.

102. Розробка і апробація технології створення геоінформаційної аналітичної системи моніторингу водних ресурсів області (розробка структури електронних паспортів малих річок і водойм, створення запитів для кількісної і якісної оцінки стану річок): Звіт про НДР / В.Б. Мокін, М.П. Боцула / Вінниц. нац. техн. ун-т. — 8411; № ДР 0103U007941. — Інв. № 0203U008583. — К., 2003.— 82 с.

103. Розробка і впровадження геоінформаційної аналітичної системи моніторингу поверхневих водних ресурсів області (паспортизація малих річок і водойм, кількісне та якісне оцінювання їх стану): Звіт про НДР / В.Б. Мокін, М.П. Боцула / Вінниц. нац. техн. ун-т. — 8412; № ДР 0104U007756.— Інв. № 0204U006122.— К., 2004.— 183 с.

104. Розробка методів ідентифікації математичних моделей динаміки якості річкових вод та алгоритмів збору необхідної для цього інформації: Звіт про НДР (проміжн.) / Б.І. Мокін, В.Б. Мокін / Вінниц. держ. техн. ун-т. — 47-Д-172; № ДР 0197U012588; Інв. № 0298U000657. — К., 1998. — 85 с.

105. Розробка моделей та законів управління якістю річкової води. Розробка інструментальних програмних засобів реалізації законів управління якістю річкової води: Звіт про НДР / Б.І. Мокін, В.Б. Мокін / Вінниц. держ. техн. ун-т. — 84-Д-227; № ДР 0100U002936. — Інв. № 0202U004181.— К., 2002.— 52 с.

106. Розробка моделей та законів управління якістю річкової води: Звіт про НДР / Б.І. Мокін, В.Б. Мокін та ін. / Вінниц. держ. техн. ун-т. — 84-Д-227; № ДР 0100U002936. - К., 2001.— 53 с.

107. Романенко В. Д., Жукинський В. М., Оксіюк О.П. та ін. Методика екологічної оцінки якості поверхневих вод за відповідними категоріями.— Київ: СИМВОЛ–Т, 1998. — 28 с.

108. Руководство по химическому анализу поверхностных вод суши / Под ред. А.Д. Семенова. – Л.: Гидрометеиздат, 1977. – 541 с.
109. СанПиН 4630-88. Охрана поверхностных вод от загрязнения.— Введ. 1988. — М.: Изд-во стандартов, 1981. — 38 с.
110. СанПиН 4630-89. Санитарные правила и нормы охраны поверхностных вод от загрязнения. — Введ. 1.01.1989. — К.: Вид-во стандартів, 1989. — 47 с.
111. Сахаєв В.Г., Шевчук В.Я. Економіка і організація охорони навколишнього середовища: Підручник. — К.: Вища школа, 1995. — 272 с.
112. Семевский Ф.Н., Семенов С.М. Математическое моделирование экологических процессов.— Л.: Гидрометеиздат, 1982.—279 с.
113. Синельников В.Е. Механизм самоочищения водоемов.— М.: Стройиздат, 1980.— 200 с.
114. Синтез законів управління якістю води річки Південний Буг з використанням ГІС-технологій. Алгоритми збирання та підготовки даних моніторингу та розробка на основі цих даних законів управління станом річки Південний Буг у межах міста Вінниці: Звіт про НДР / Б.І. Мокін, В.Б. Мокін / Вінниц. держ. техн. ун-т. — 84-Д-239; № ДР 0102U002262.— К., 2002.— 71 с.
115. Синтез моделі річки на основі упорядкування основних процесів / В. Б. Мокін // Вісник ВПІ. — 1997. — № 2. — С. 43–48.
116. Сорокин Ю.И. Роль бактерий в жизни водоемов. – М.: Знание, 1974.
117. Справочник по гидрохимии / Под ред. А.М. Никанорова.— Л.: Гидрометеиздат. 1989.— 392 с.
118. Теория систем в приложении к проблемам защиты окружающей среды: Пер. с англ. / Под ред. С. Ринальди. - Высш. шк., 1981.

- 264 с.

119. Трунова О.Н. Биологические факторы самоочищения водоемов и сточных вод.— Л.: Наука, 1979. — 109 с.

120. Указания по расчету испарения с поверхности водоемов.— Л.: Гидрометеиздат, 1969. — 83 с.

121. Уморин П.П. Устойчивость сообщества “водоросли – бактерии – простейшие” к воздействию хлоратов // Экология, 1992.— № 5.— С. 36–42.

122. Унифицированные методы анализа вод / Под ред. Ю.Ю. Лурье. — М.: Химия, 1971. — 375 с.

123. Фалькенмарк М. Гидрология и управление окружающей средой // Природа и ресурсы / ЮНЕСКО. — 1991. — Т.27. — № 1–2. — С. 61–70.

124. Форрестер Дж. Динамика развития города. — М.: Прогресс, 1974. — 286 с.

125. Фролов В.А. Определение степени смешения сточных вод с водой водотока // Производственные сточные воды.— Вып. 2.— М.: Медгиз, 1950.— С. 134–141.

126. Холланд М., Раст У., Рюдинг С. Управление качеством воды // Природа и ресурсы / ЮНЕСКО. — 1991. — Т.27. — № 1–2. — С. 50–60.

127. Чеберкус В.И., Курковский А.П. Самоорганизация точечных моделей для прогнозирования содержания растворенного кислорода и взвешенных веществ в реке // Автоматика. — 1979. — № 5. — С. 85–89.

128. Черкинский С.Н. Санитарные условия спуска сточных вод в водоемы. — М.: Изд-во Мин-ва коммун. хоз-ва РСФСР, 1962. — 238 с.

129. Шитиков В.К., Розенберг Г.С., Зинченко Т.Д. Коли-

чественная гидроэкология: методы системной идентификации. – Тольятти: ИЭВБ РАН, 2003. – 463 с.

130. Экологический прогноз / Под ред. В.Н. Максимова. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 200 с.

131. Экология: учебник для технических вузов / Под ред. Л.И. Цветковой.— М.: Изд-во АСВ.; СПб.: Химиздат, 1999. — 488 с.

132. Яковлев С.В., Карюхина Т.А. Биохимические процессы в очистке сточных вод.— М.: Стройиздат, 1980.— 200 с.

133. Яцало Б.И. О прогнозировании динамики экологических систем // Автоматика, 1987.— № 1.— С. 69–72.

134. Яцык А.В. Экологические основы рационального водопользования. — К.: Генеза, 1997. — 628 с.

135. Beck M.B., Young P.C. A Dynamic Model for DO-BOD Relationships in a Non-Tidal Stream // Water Research.—1975.—V. 9.— P. 769–776.

136. Biesen L., Cisneros Z., Chebreegziabeber T. On the Application of the Power of GIS to Environmental Measurements for the Monitoring, Exploitation and Sustainable Environmental Management of Marine Ecosystems// XVII IMEKO World Congress – Metrology in the 3rd Millennium.– Proceedings. – Dubrovnik, Croatia: HMD Croatian Metrology Society, 2003.– TC19.– P. 2110-2113.

137. Manahan S.E. Environmental Chemistry. – NY.: Lewis Publishers, 1994. – 789 p.

138. Mathematical Models in Water Pollution Control / Edited by A. James.— John Wiley and Sons Ltd.: N.Y., Chichester, Brisbane, Toronto, 1978. — 470 p.

139. Mokin V. B. The Algorithms of River Water Quality Control // XXI International Scientific Symposium — AQUA 2000. — Plock, Po-

land: Politechnika Warszawska, 2000. — P.: 20—27.

140. Mokin V. B., Mokin B.I. Control over Volume and Quality of Sewage Water in the River Waterway // XVII IMEKO World Congress — Metrology in the 3rd Millennium. — Proceedings. — Dubrovnik, Croatia: HMD Croatian Metrology Society, 2003. — TC19. — P. 2090–2093.

141. Mokin V. B., Mokin B.I. River Water Control of Sewage Disposal Detection // XVI World Congress — IMEKO 2000. — V. VII. — Vienna, Hofburg, Austria: Abteilung Austauschbau and Messtechnik Karlsplatz, 2000. — P. 297–301.

142. Monod J. Recherches Sur La Croissance Des Cultures Bacteriennes. — Paris: Hermann et Cie, 1942. — 127 p.

143. Streeter H.W., Phelps E.B. A Study of the Pollution and Natural Purification of the Ohio River // Bulletin U. S. Public Health Service. — № 146. — 1925. — P. 13–21.

Наукове видання

Мокін Віталій Борисович

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ КОНТРОЛЮ
ТА УПРАВЛІННЯ ЯКІСТЮ РІЧКОВИХ ВОД**

Монографія

Редактор Т. Ягельська

Оригінал-макет підготовлено автором

Видавництво ВНТУ «УНІВЕРСУМ-Вінниця»
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к.114
Тел.: (0432) 44-05-32

| | |
|---------------------------|------------------------|
| Підписано до друку | 12.05.2005 р. |
| Формат 21×29.7 ½ | Папір офсетний |
| Гарнітура Times New Roman | |
| Друк різнографічний. | Умовн. друк. арк. 9,93 |
| Наклад 300 прим. | Зам. № 2005-073 |

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к.114
Тел.: (0432) 44-05-32