УДК 624.4

Г.С. Ратушняк, Н.М. Слободян

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ РОЗРАХУНКІВ ПРОГИНІВ ЕЛАСТИЧНОГО ПРИВАНТАЖЕННЯ ПІД ЧАС ФОРМУВАННЯ ДЕКОРАТИВНИХ БЕТОННИХ БЛОЧКІВ: МОДЕЛІ ГНУЧКИХ ПЛАСТИН ТА МЕМБРАН. І

Відомо [1], що у процесі формування бетонних блочків виникає нагальна потреба у визначенні лінії прогинів еластичного привантаження, яка б забезпечувала рівну поверхню декоративного блочка. У якості математичної моделі еластичного привантаження иноді розглядають динаміку (поведінку) під дією розподіленого навантаження закріпленої по контуру тонкої прямокутної пластини. Як правило, до тонких відносяться пластини, товщина яких не перевищує 1/5 мінімального розміру основи [2].

Плита перебуває у плоскому напруженому стані і відноситься до двовимірних задач теорії пружності.

У [1], згідно варіаційних методів пошуку розв'язку поставленої задачі, вихідне диференціальне рівняння розрахунку плити отримане безпосередньо при мінімізації виразу потенціальної енергії системи, що дозволило безпосередньо знайти розв'язок, який відповідає мінімуму енергії. Такий підхід дозволив обійти суттєві математичні ускладнення, пов'язані з інтегруванням (нелінійних) диференціальних рівнянь.

Метою даної роботи є порівняльний аналіз математичних методів розрахунку прогинів еластичних привантажень у процесі формування декоративних бетонних блочків за використання моделей гнучких пластин [3,4] та мембран [5].

1. Модель мембрани.

Для обгрунтування й виводу двовимірного хвильового рівняння, яке описує вільні коливання однорідної мембрани, слід зробити цілу низку припущень. Серед них наступні: 1) говорячи про мембрану, слід розуміти пружну натягнуту плівку, товщина якої близька до нуля, що вільно згинається; 2) всі точки останньої рухаються перпендикулярно площині XOY (площині мембрани, що знаходиться у спокої), тобто розглядати слід лише поперечні коливання мембрани; 3) вивчаючи малі коливання мембрани, нехтують відхиленням (кут цього відхилення $\gamma \approx 0$) нормалі до мембранної поверхні від вісі відхилення (u) точок мембрани - Ou; 4) нехтують квадратами частинних похідних $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \approx 0$, як і наступним: $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \approx 0$; 5) врахування попереднього (п. 4) дозволяє стверджувати, що у задачі про коливання мембрани нехтують зміною її площі поверхні у процесі коливань (це, природно, відноситься як до усієї мембрани, так і до будь-якої її частини); 6) вважають, що мембрана знаходиться під дією рівномірного натягу (це означає, що величина сили, прикладеної до будь-якого елементу dS лінії розрізу, дорівнює TdS, тобто пропорційна довжині елементу dS (T – зусилля розтягу мембрани у її площині); 7) проекція на вісь Ou сил натягу, що є єдиними діючими у процесі її вільних коливань, може бути обчислена за допомогою виразу [5]: $\iint\limits_{\Delta} (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) dxdy$, де Δ – проекція поверхні мембрани на площину XOY.

Застосовуючи у межах припущень 1-7 до елементу поверхні мембрани $d\sigma = dxdy$ (як до матеріальної точки) закон Ньютона, можна отримати рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}), \quad a^2 = \frac{T}{\rho}, \tag{1}$$

де ρ – поверхнева щільність матеріалу мембрани (вважається постійною, бо мембрана однорідною за припущенням).

Відомо [5], що аналіз вільних коливань прямокутної мембрани, яка обмежена прямими $x = 0, x = l, y = 0, y = m$, зводиться до розв'язку (1) за початкових умов:

$$u\Big|_{t=0} = f(x, y), \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x, y),$$

й крайових, що задані на границі прямокутника:

$$u\Big|_{x=0} = 0, \ u\Big|_{x=l} = 0, \ u\Big|_{y=0} = 0, \ u\Big|_{y=m} = 0.$$

Використовуючи метод Фур'є для розв'язку задачі (1)-(3) при $f(x, y) \equiv 0, F(x, y) = v_0$, де v_0 – початкова швидкість руху мембрани, матимемо:

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_{k,n} \cdot \sin(\omega_{k,n} \cdot t) \cdot \sin\frac{k\pi x}{l} \sin\frac{n\pi y}{m},$$

де $\omega_{k,n} = \pi a\sqrt{\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}}$ – власні частоти коливань мембрани, а

$$b_{k,n} = \frac{4}{lm \cdot \omega_{k,n}} \cdot \int_0^l\int_0^m v_0 \cdot \sin\frac{k\pi x}{l} \cdot \sin\frac{n\pi y}{m} dxdy = \frac{4v_0}{\pi^2 \cdot \omega_{k,n} \cdot kn} \cdot (1 - \cos k\pi) \cdot (1 - \cos n\pi).$$

Якщо хоча б одне з чисел k чи n парне, то $b_{k,n} \equiv 0$, тому $k = 2r + 1, n = 2s + 1$ – непарні числа. Тоді маємо:

$$u(x, y, t) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} b_{2r+1,2s+1} \cdot \sin(\omega_{k,n} t) \cdot \sin(2r + 1)\frac{\pi x}{l} \cdot \sin(2s + 1)\frac{\pi y}{m}.$$

Оскільки знаменники у коефіцієнтів $b_{2r+1,2s+1}$ дуже швидко зростають, то ряд добре збігається й для обчислення значень функції прогину мембрани $u(x, y, t)$ необхідно брати лише невелику кількість членів. До речі, сам коефіцієнт $b_{2r+1,2s+1}$ описує амплітуду коливань певної форми (r, s).

2. Модель гнучкої пластини.

Відомо [3,4], що за малих товщин пластинки, коли її прогини від поперечного навантаження перевищують 0,25 – 0,2 товщини (а при формуванні декоративних бетонних блочків це дійсно так!), технічна теорія згину пластин дає некоректні результати, тому, перш за все, сама пластинка повинна розглядатись як гнучка (кінцевої товщини h). Теорія гнучких пластинок заснована на врахуванні поряд з поперечним згином (тут він традиційно позначається w) також і деформування пластинок у своїй площині. Рівняння вільних коливань гнучкої пластинки (еластичного привантаження) у прямокутній системі координат мають вид [3]:

$$\begin{cases} D \cdot \Delta\Delta w - h \cdot (\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}) + m \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \\ \Delta\Delta\Phi = \mathrm{E} \cdot [(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}], \end{cases}$$

де Ф- функція напружень, що пов'язана із напруженням у серединній поверхні пластинки співвідношеннями:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Ці рівняння (7) носять назву нелінійних рівнянь Кармана. У (7) E- модуль пружності Юнга, D – згинна (циліндрична) жорсткість пластинки, m – маса її одиниці площі, Δ – оператор Лапласа.

Граничні умови для (7) мають вигляд:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0,\ \ при\ \ x = \pm l/2;\ \ w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0,\ \ при\ \ x = \pm m/2; \tag{9}$$

$$\begin{cases} \int\limits_{-l/2}^{l/2} \left[\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \cdot \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \dfrac{E}{2} \cdot \left(\dfrac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0, \\ \int\limits_{-m/2}^{m/2} \left[\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \cdot \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \dfrac{E}{2} \cdot \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy = 0, \end{cases} \tag{10}$$

де ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки, а початок системи координат (для задачі (7), (9), (10)) взятий у центрі гнучкої пластинки.

Детальний розв'язок задачі (7), (9), (10) для найнижчої форми коливань викладений у [4] і тут у зв'язку із складністю опущений.

Проте слід зазначити, що для амплітуди вільних коливань гнучкої пластинки певної просторової форми треба вже розв'язувати суттєво нелінійне звичайне диференціальне рівняння для $\xi = f/h$, де f – амплітуда прогину $w(x, y, t)$. Точний розв'язок вказаного рівняння можна отримати за допомогою еліптичних функцій Якобі (для початкових умов типу: $\xi = A, \dfrac{d\xi}{dt} = 0$ при $t = 0$ й ін.). Зміняться й формули для власних частот вільних коливань гнучкої пластинки (у порівнянні з такими для мембрани), бо вони вже залежатимуть від самої амплітуди коливань (!).

Таким чином, при розгляді математичної моделі розрахунків прогинів еластичного привантаження під час формування декоративних бетонних блочків модель гнучкої пластинки дає результати, які суттєво відрізняються від мембранної моделі. Зокрема, резонансні властивості систем різко відмінні (якщо розглядати у межах моделі гнучкої пластинки чи мембрани). Це, у свою чергу, може суттєво вплинути на якість формування вказаних блочків (у випадках вироджених резонансів).

ЛІТЕРАТУРА:

Слободян Н.М. Математична модель розрахунків прогинів еластичного привантаження під час формування декоративних бетонних блочків// Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2001. - №1. – С. 10-12.

Безухов М.И. Основы теории упругости, пластичности, ползучести. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.

Справочник по динамике сооружений/ Под ред. Б.Г. Коренева, И.М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.

Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972.–432с.

Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 288 с.

РАТУШНЯК Георгій Сергійович – к.т.н., професор, завідувач кафедри теплогазопостачання Вінницького державного політехнічного університету.

Наукові інтереси:

- нелінійні рівняння механіки деформованого твердого тіла, прикладна математика.

СЛОБОДЯН Наталія Михайлівна – асистент кафедри теплогазопостачання Вінницького державного політехнічного університету.

Наукові інтереси:

- нелінійні рівняння механіки деформованого твердого тіла, прикладна математика.