УДК 624.4

Г.С. Ратушняк, Н.М. Слободян

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ РОЗРАХУНКІВ ПРОГИНІВ ЕЛАСТИЧНОГО ПРИВАНТАЖЕННЯ ПІД ЧАС ФОРМУВАННЯ ДЕКОРАТИВНИХ БЕТОННИХ БЛОЧКІВ: МОДЕЛІ ГНУЧКИХ ПЛАСТИН ТА МЕМБРАН. II

3. Модель затиснутої вздовж контуру гнучкої пластини.

Тепер перейдемо до випадку прямокутної гнучкої пластинки, затиснутої вздовж контуру. Така задача розв'язана у [1,2]. Відношення сторін a/b будемо вважати таким, що лежить у межах $1 \le a/b \le 1{,}5$. Якщо це не так, то за $a/b > 1{,}5$ можна отримати задовільні результати, розглядаючи пластинку як нескінченної довжини [2].

Використовуючи рівняння Кармана, дослідимо найнижчу (просторову) форму коливань. При цьому апроксимуємо її прогин за допомогою виразу:

$$w = f \cdot \sin^2(rx) \cdot \sin^2(sy),$$

де $r = \pi / a, s = \pi / b$.

Рівняння сумісності деформацій приймає вид:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{E}{2} \cdot f^2 \cdot r^2 \cdot s^2 \cdot (\cos 2rx + \cos 2sy - \cos 4rx - \cos 4sy + \cos 4rx \cdot$$

$$\cos 2sy + \cos 2rx \cdot \cos 4sy - 2\cos 2rx \cdot \cos 2sy).$$

Розв'язок цього рівняння:

$$\Phi = \mathrm{E} \cdot \left\{ \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{s^2}{r^2} \cdot \cos 2rx + \frac{r^2}{s^2} \cdot \cos 2sy \right) - \frac{1}{512} \cdot \left(\frac{s^2}{r^2} \cdot \cos 4rx + \frac{r^2}{s^2} \cdot \cos 4sy \right) + \frac{r^2 \cdot s^2}{32} \right.$$

$$\left. \cdot \left[\frac{1}{4r^2 + s^2} \cdot \cos 4rx \cdot \cos 2sy + \frac{1}{r^2 + 4s^2} \cdot \cos 2rx \cdot \cos 4sy - \frac{r^2 \cdot s^2}{16 \cdot (r^2 + s^2)^2} \cdot \cos 2rx \cdot \cos 2sy \right] \right\}$$

Тоді напруження у серединній поверхні пластинки будуть:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \; \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \; \tau = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

Використовуючи процедуру Бубнова – Гальоркіна для $\xi = f / h$ (де h – товщина пластинки), можна отримати наступне нелінійне диференціальне рівняння:

$$\rho \cdot h \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{16\pi^4 \cdot D}{9a^4} \cdot \left(3 + 2\lambda^2 + 3\lambda^4\right) \cdot \xi + \frac{2\pi^4 \cdot Eh^3}{9a^2 b^2} \cdot \left\{ \frac{17}{32\lambda^2} + \lambda^2 \cdot \left[\frac{17}{32} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{(1+\lambda^2)^2} + \frac{1}{4(1+4\lambda^2)^2} + \frac{1}{4(4+\lambda^2)^2} \right] \right\} \cdot \xi^3 = 0,$$

де ρ – густина матеріалу пластинки, D – її циліндрична жорсткість, E – модуль Юнга, $\lambda = a/b$.

Введемо наступні позначення:

$$\omega_0{}^2 = \frac{16\pi^4 \cdot D}{9a^4} \cdot \frac{(3+2\lambda^2+3\lambda^4)}{\rho \cdot h};$$

$$K \cdot \omega_0{}^2 = \frac{2\pi^4 Eh^3}{9a^2b^2} \cdot \left\{ \frac{17}{32\lambda^2} + \lambda^2 \cdot \left[\frac{17}{32} + \frac{1}{(1+\lambda^2)^2} + \frac{1}{4(1+4\lambda^2)^2} + \frac{1}{4(4+\lambda^2)^2} \right] \right\}. \quad (6)$$

Тоді (5) можна звести до наступного:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega_0{}^2 \cdot (1 + K \cdot \xi^2) \cdot \xi = 0. \quad (7)$$

Розв'язок (7), що відповідає початковим умовам $\xi = A$, $\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = 0$ при $t = 0$ (тобто нує початковий прогин декоративного блочка під дією, наприклад, ваги привантаження, розподіленого по його поверхні, або власної ваги самої гнучкої пластинки), виражається через еліптичний косинус (функція Якобі):

$$\xi = A \cdot cn(\gamma \cdot t, \chi), \quad (8)$$

$$\gamma = \omega_0 \cdot \sqrt{1 + K \cdot A^2}, \; \chi = A \cdot \sqrt{\frac{K}{2 \cdot (1 + K \cdot A^2)}}.$$

Період Т для цього розв'язку (8) має значення:

$$T = \frac{4}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{s}}} \cdot F\left(\sqrt{\frac{\tilde{s}}{2(1+\tilde{s})}}, \; \pi/2\right), \quad (9)$$

де $\tilde{s} = K \cdot A^2$, $F\left(\sqrt{\frac{\tilde{s}}{2(1+\tilde{s})}}, \; \pi/2\right)$ – еліптичний інтеграл першого роду [3].

Якщо у (9) покласти $\tilde{s} = 1$, то можна отримати вираз для періоду малих (лінійних) коливань гнучкої пластинки:

$$T_0 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0}. \quad (10)$$

Відношення частоти нелінійних коливань до частоти малих (лінійних) коливань $\nu = T_0 / T$ отримує вид:

$$\nu = \frac{\pi \cdot \sqrt{1+\tilde{s}}}{2} \cdot \frac{1}{F\left(\sqrt{\frac{\tilde{s}}{2(1+\tilde{s})}}, \; \pi/2\right)}. \quad (11)$$

У Таблиці 1 наведені значення амплітуд А для різних значень параметра ν^*:

$$\nu^* = \nu \cdot 4 \cdot \sqrt{3 + 2\lambda^2 + 3\lambda^4} \, / 3 \cdot (1 + \lambda^2), \quad (12)$$

причому $\lambda = 1$ (випадок квадратних декоративних блочків).

Таблиця 1

ν^*	A
1,9	0
2,0	0,5
3,0	1,8
4,0	3,0
5,0	4,0

Таким чином, амплітуда згину гнучкої пластинки (наприклад, у її центрі) за підвищення частоти (власних) нелінійних коливань суттєво зростає і у декілька разів (2...4) може перевищувати власну товщину цієї пластинки. Подібних резонансних явищ слід уникати, бо це може суттєво вплинути на якість формування поверхні декоративних бетонних блочків за допомогою еластичного привантаження.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432с.
2. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гостехиздат, 1956. – 250с.
3. Янке, Эмде. Таблицы функций. – М.: Физматгиз, 1959. – 430с.

РАТУШНЯК Георгій Сергійович – к.т.н., професор, завідуючий кафедрою теплогазопостачання Вінницького державного політехнічного університету.

Наукові інтереси:

– нелінійні рівняння механіки деформованого твердого тіла, прикладна математика.

СЛОБОДЯН Наталія Михайлівна – асистент кафедри теплогазопостачання Вінницького державного політехнічного університету.

Наукові інтереси:

– нелінійні рівняння механіки деформованого твердого тіла, прикладна математика.