

УДК 681.7:535.243

## РОЗРОБКА ТА АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТРАНСФОРМАЦІЇ ВИПРОМІНЮВАННЯ БІОТКАНИНОЮ

Докт. техн. наук, доц. Петрук В.Г., Томчук М.А., Чорноволик Г.О.,  
Бозняк Ю.А.

Взаємодія випромінювання, зокрема видимого і прилеглих до нього діапазонів, з шорсткою поверхнею біотканини та трансформацією його усередині функціонуючої системи є надто складним і неоднозначним процесом. Проте сучасні методи лазерної та фототерапії, задачі судово-медичної експертизи, розробка нових медико-діагностичних неінвазивних систем тощо вимагають докорінного обґрунтування цієї проблеми.

Математична модель трансформації світла плоско-паралельним зразком, зокрема біотканиною, ґрунтується на теорії переносу випромінювання, в основі якої лежить відповідне рівняння (РПВ) [1]:

$$\begin{aligned} \cos \frac{dI_R(\ell, \theta)}{d\ell} = I_0(\theta) [r_1 - (1-r_1)\alpha - (1-r_1)(1-\alpha)\Gamma] + \\ + \frac{(1-r_1)(1-\alpha)(1-T)\sigma}{2} \cdot \int_0^{4\pi} \int_0^\ell f(\theta, \theta') \cdot I_0(\ell, \theta') d\theta' + \frac{I'(\ell, \theta)}{2}, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\theta$  - кут між нормаллю і напрямком падаючого на біотканину випромінювання;  $I_R$  - сумарна інтенсивність відбитого від біотканини

випромінювання, причому:

$$\frac{I_R}{I_0} = R,$$

а

$$I_R = I_1 + I_2 + I_3, \quad (2)$$

де  $I_1 = f(I_0, R, \theta)$  - функція інтенсивності проміння, що визначається першократним відбиванням  $r_1$  і специфікою (спектральним складом, вмістом меланіну, віковими і статевими ознаками, поляризаційними та іншими особливостями) виключно від поверхневої межі епідермісу біотканини, що

залежить від першопочаткової інтенсивності падаючого випромінювання  $I_0=f(\lambda)$ , а також кута його падіння  $\theta$  при умові, коли здійснюється закон Ламберта [2]:

$$I_\theta = I_0 \cos(\theta); \quad (3)$$

$I_2=f(I_0, P, \lambda, \ell, \theta')$ , де  $I_2$  - вклад у сумарну інтенсивність відбитого проміння, що зумовлений верхньою півсферою джерела розсіювання і залежить від тілесної індикатриси (альbedo)  $f(\theta, \theta')$ , інтенсивності розсіювання  $I_0(\theta, \theta')$ , що здійснюється у верхній тілесний кут  $2\pi$  та глибини  $\ell$  проникнення фотона, яка, у свою чергу, визначається спектральною функцією пропускання біотканини:

$$T_\lambda = f\left(\hat{P}_{ij}(\lambda)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda^n \int_0^\ell W_{ij,n}(\ell) p(\lambda, \ell) d\ell, \quad (4)$$

де

$$p(\lambda, \ell) = \int_0^\ell W(\alpha) \exp(-m_\alpha \ell) d\alpha, \quad (5)$$

у якому  $W_{ij,n}(\ell)$  - матриця переносу фотона у відсутності поглинання на шляху  $\ell$ , коли на ньому відбувається  $n$ -актів його розсіювання;  $\Lambda = \sigma / (\alpha + \sigma)$  - ймовірність виживання фотона в акті розсіювання, де  $\beta = \alpha / \sigma$  - питома поглинальна здатність біомедичного зразка;  $m_\alpha$  - показник поглинання елементарного об'єму речовини зразка.  $I_3=f(I')$  - можливе підсилення сумарної інтенсивності відбитого біотканинного проміння внаслідок аутофлюоресценції шкіри людини *in vivo* завдяки її хромофорів: гемоглобіну, меланіну (видима ділянка спектру) та нуклеїновим кислотам, триптофану, тирозину, урокаїнової кислоти, колагену та ін. (УФ-область). Це явище носить назву ефекту антистоксового поглинання [3].

Раніше в такого роду вимірюваннях біооб'єктів  $I_3=f(I')$  не враховувалось, проте в деяких спектральних смугах його вклад у сумарну інтенсивність відбитого (чи пропущеного) проміння для біотканин, зокрема, крові, може сягати до 20%;  $R$  - коефіцієнт відбивання, до складу якого входять дві компоненти: дифузна -  $\gamma_{\text{диф}}$  та дзеркальна -  $\gamma_{\text{дзерк}}$ ;  $\alpha$  - коефіцієнт поглинання;  $T$  - коефіцієнт пропускання, що теж складається з двох

компонент: прозорі –  $\tau_{\text{проз}}$  та дифузної –  $\tau_{\text{диф}}$ ;  $\sigma$  – коефіцієнт розсіяння;  $\theta'$  – кут освітлення об'єму стороннім джерелом в акті розсіяння;  $f(\theta, \theta')$  – індикатриса розсіяння, чи, по іншому, функція інтенсивності, що залежить від кута падіння  $\theta$  та кута розсіювання  $\theta'$  випромінювання.

Рівняння (1) істотно ускладнюється, якщо врахувати когерентну і некогерентну частини взаємного впливу центрів розсіювання біотканини, а також закон збереження і, особливо, стан поляризації випромінювання. У цьому випадку важливим є значення матриці переносу  $\hat{P}_{ij}(\lambda)$  у виразі (4), що у своїх 16-ти параметрах містить всю доступну оптичним методам інформацію про феноменологічні характеристики даного біомедичного об'єкту контролю.

У спрощеному вигляді дослідна біотканина представляє собою багатошарову систему, яка складається, принаймні, із 4-х різних за природою шарів (рис.1): 1 – епідерміс; 2 – дерма; 3 – підшкірно-жирова клітчатка та, нарешті, 4 – м'язова тканина.

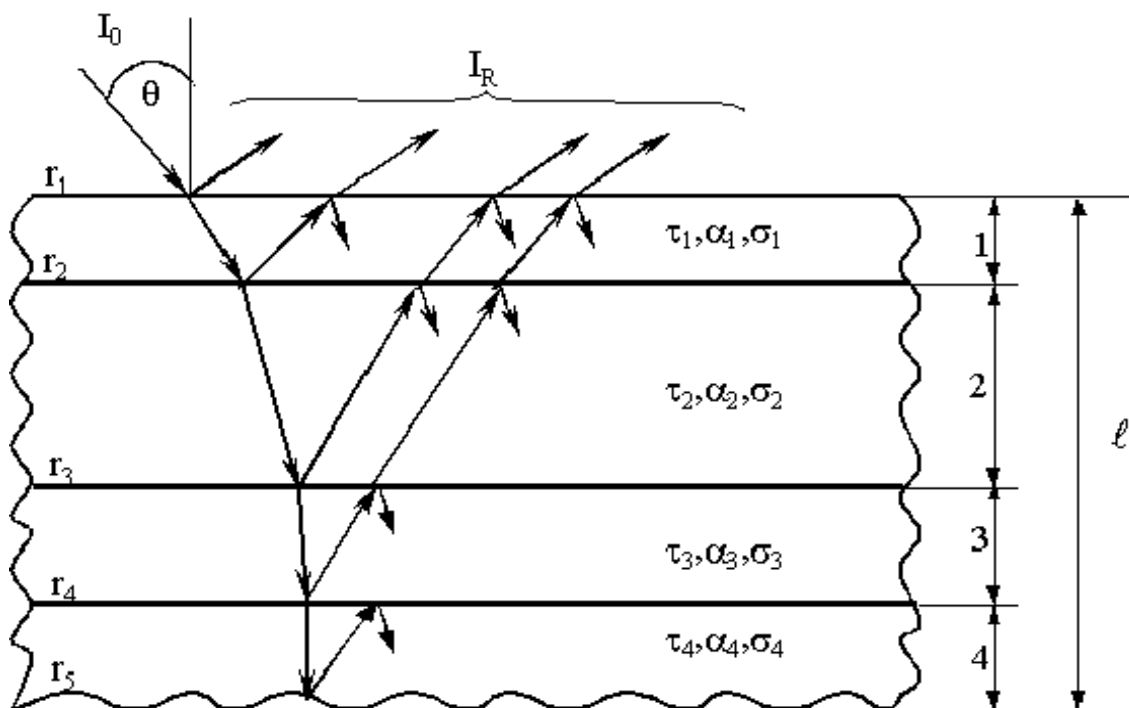


Рис.1. Схематичне зображення елементу приповерхневого прошарку біотканини.

Цілком зрозуміло, що всі шари мають різну природу, а, відтак, різні оптичні параметри, зокрема, коефіцієнти дифузного відбивання –  $R$ , пропускання –  $T$ , і, саме головне, поглинання –  $\alpha$ , а також показник заломлення –  $n$ . При цьому товщина епідермісу досягає приблизно від 1 до 5 мкм, дерма має товщину в межах 0,5-5 мм, підшкірно-жирова клітчатка – в межах 2-4 мм, а глибина проникнення випромінювання в м'язові тканини, як найбільш кровенаповнені, для ймовірності виживання фотона є незначною, що пов'язано з суттєвим поглинанням, зокрема, гемоглобіну і його похідних у видимій області довжин хвиль. Отже, коефіцієнт поглинання біозразка є комплексним і складатиметься, щонайменше, із 4-х компонент [2]:

$$\bar{\alpha} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \quad (6)$$

а комплексний коефіцієнт відбивання:

$$\begin{aligned} \bar{R} &= r_1 + (1-r_1)\tau_1^2 r_2 r_1 \alpha_1 + (1-r_1)(1-r_2)\tau_2^2 r_3 r_2 \tau_1 r_1 \alpha_2 \alpha_1 + \\ &+ (1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)\tau_3^2 r_4 r_3 \tau_2 r_2 \tau_1 r_1 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 + (1-r_1)(1-r_2)(1-r_3)(1-r_4)\tau_4^2 r_5 r_4 \alpha_4 = \\ &= r_1 + r_2^\infty + r_3^\infty + r_4^\infty + r_5^\infty \approx r_1 \end{aligned} \quad (7)$$

За аналогією:

$$\bar{T} = (1-r_1) \cdot \tau_1 \cdot \alpha_1 \cdot r_2 \cdot \tau_2 \cdot \alpha_2 \cdot r_3 \cdot \tau_3 \cdot \alpha_3 \cdot r_4 \cdot \tau_4 \cdot \alpha_4 \cdot r_5 \approx 0. \quad (8)$$

Зрозуміло, що за таких обставин повинен здійснюватися закон збереження променистої енергії:

$$\bar{R} + \bar{\alpha} + \bar{T} + \bar{\sigma} = 1, \quad (9)$$

де

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 \quad (10)$$

– комплексний коефіцієнт розсіяння, що складається із відповідних компонент розсіяння кожного із прошарків. У даному випадку (у випадку біотканини) коефіцієнтом розсіяння можна знехтувати, оскільки вся розсіяна багаторазово енергія у глибинному режимі в межах нижньої півсфери поглинеться речовиною біозразка. Отже, біологічні тканини з товщиною

понад 3-5 мм реалізують умови глибинного режиму, коли  $R_{\infty}(l)=const$ , а  $T=0$ . Тому

$$\bar{R} = r_1 + R_{\infty}(1) = r_1 + const, \quad (11)$$

а вираз (9) набуде вигляду

$$r_1 + \bar{\alpha} + const = 1. \quad (12)$$

Треба пам'ятати, що величина константи у виразі (12) формується, в основному, коефіцієнтом розсіяння  $\sigma$ . Проте, як було доведено вище, частково розсіяне випромінювання збільшує  $\alpha$  за рахунок багаторазового переопромінення (нижня напівсфера), а частково – коефіцієнт дифузного відбивання  $R_{\infty}$  з глибинних шарів (верхня напівсфера). Тому, виходячи з такого роду міркувань, можна вважати, що і коефіцієнт дифузного відбивання  $\bar{R}$  і коефіцієнт поглинання  $\bar{\alpha}$  підсиляться за рахунок константи розсіяння приблизно навіпіл. Звідси вираз (12) матиме спрощений і остаточний вид:

$$\bar{R}'_1 + \bar{\alpha}' \cong 1. \quad (13)$$

Як впливає з виразу (13), достатньо виміряти кооперативний коефіцієнт дифузного відбивання  $\bar{R}'_1$  біотканини, як автоматично знаходиться значення її поглинальних властивостей, що надзвичайно важливо у спектроскопічному експерименті і, взагалі, у біомедичних дослідженнях. При цьому

$$\bar{\alpha}' \cong 1 - \bar{R}'_1 = k, \quad (14)$$

де  $k$  – коефіцієнт послаблення (затухання або екстинкції). Тобто, у значній мірі, для такого роду важливих об'єктів контролю ці дві величини є оберненими, що і підтверджується експериментальними даними [5].

З врахуванням вищенаведеного, особливо виразу (14), другий член (функція джерела) у правій частині РПВ (1) коректно поглинається його першим членом. Тоді воно спрощується і набуває цілком практичної математичної моделі, а саме:

$$dI_R(\ell) = I_0[r_1 - (1-r_1)(1-\bar{R}'_1)]d\ell = -0.8I_0(1-\bar{R}'_1)d\ell. \quad (15)$$

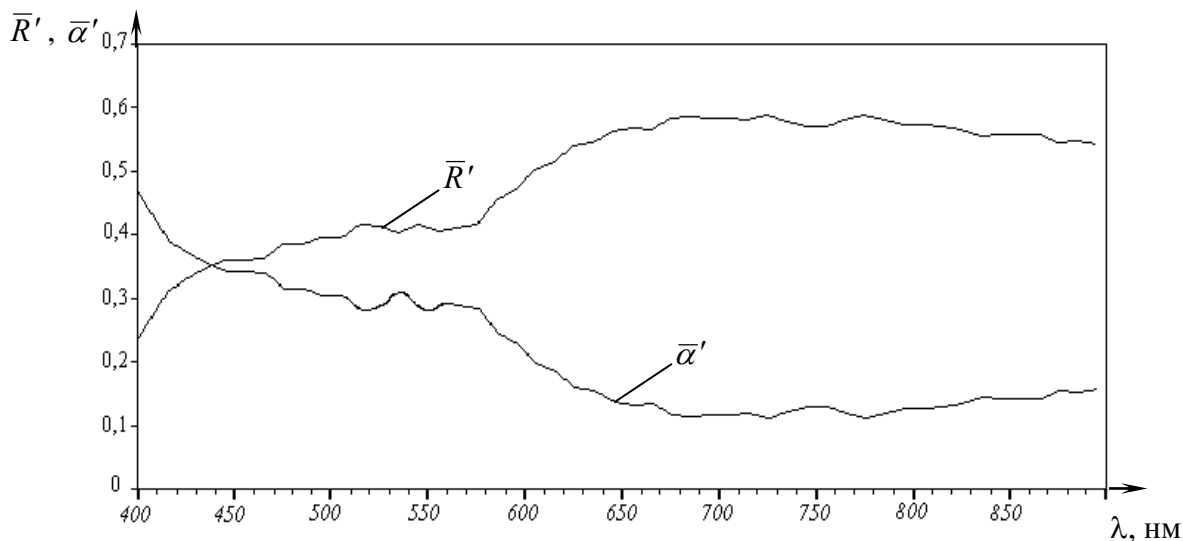


Рис.2. Спектральні коефіцієнти поглинання  $\alpha'_1$  та дифузного відбивання  $\bar{R}'$  біотканини.

При цьому значення  $r_1$ , взяті із роботи [4], для епідермісу приблизно дорівнює 8-10%, тобто  $r_1 \approx 0,1$ . Це значення може корегуватися в залежності від властивостей базального шару епідермісу, тобто від зміни концентрації меланоцитів, що утворюють пігмент меланін, а саме: незначна їх кількість у світлошкірих людей до значної – у темношкірих ( $r_1 \approx 0.05 \div 0.15$ ). Отже:

$$\bar{R}' = \frac{dI_R}{I_0} = -0.8\bar{\alpha}'d\ell. \quad (16)$$

Розв'язок рівняння (16) може бути знайдений з еквівалентних виразів, що базуються на методах інваріантності Амбарцумяна, двопотокового наближення, чи інваріанта Стокса [5] в залежності від обраної моделі об'єкта дослідження:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}' &= r_1 + \frac{(1-r_1)^2 r_1 \exp(-2\bar{m}_\alpha \ell)}{1-r_1^2 \exp(-2\bar{m}_\alpha \ell)} \\ \bar{T}' &= \frac{(1-r_1)^2 \exp(-\bar{m}_\alpha \ell)}{1-r_1^2 \exp(-2\bar{m}_\alpha \ell)} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Друге рівняння системи розв'яжемо відносно  $r_1$ . Отримаємо:

$$r_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{(-\bar{m}_\alpha \ell)} \pm 2\sqrt{(e^{(-\bar{m}_\alpha \ell)})^2 - \bar{T}'e^{(-2\bar{m}_\alpha \ell)}e^{(-\bar{m}_\alpha \ell)} + \bar{T}'^2 e^{(-2\bar{m}_\alpha \ell)}}}{\bar{T}'e^{(-2\bar{m}_\alpha \ell)}}. \quad (18)$$

Підставивши (18) у перше рівняння системи (17), розв'яжемо його при умові  $\ell = 1$ , де  $\ell$  подається в одиницях товщини досліджуваного об'єкта. Тоді матимемо залежність між показником питомого поглинання  $\bar{m}_\alpha$  та вимірними кооперативними коефіцієнтами дифузного відбивання  $\bar{R}'$  і пропускання  $\bar{T}$ :

$$\bar{m}_\alpha = -\frac{1}{\ell} \ln\left(\frac{\bar{T}}{\bar{R}' \cdot Z - 2 \cdot Z + 1}\right), \quad (19)$$

де

$$Z = \frac{1}{2(\bar{R}' - 2)} \cdot ((\bar{R}')^2 - 1 - \bar{T}^2 - 2 \cdot \bar{R}' + \sqrt{(\bar{R}')^4 + 6(\bar{R}')^2 - 2(\bar{R}')^2 \bar{T}^2 - 4(\bar{R}')^3 + 1 + 2\bar{T}^2 - 4\bar{R}' + \bar{T}^4 + 4\bar{T}^2 \bar{R}'}).$$

Як бачимо, вираз (19) суттєво відрізняється від класичного закону

Бугера (20) для однорідних середовищ, який застосовувався раніше без належного обґрунтування для неоднорідних середовищ:

$$m_\alpha = -\frac{1}{\ell} \ln(1 - \alpha). \quad (20)$$

Рівняння (19) представимо з допомогою пакета прикладних математичних програм Maple у

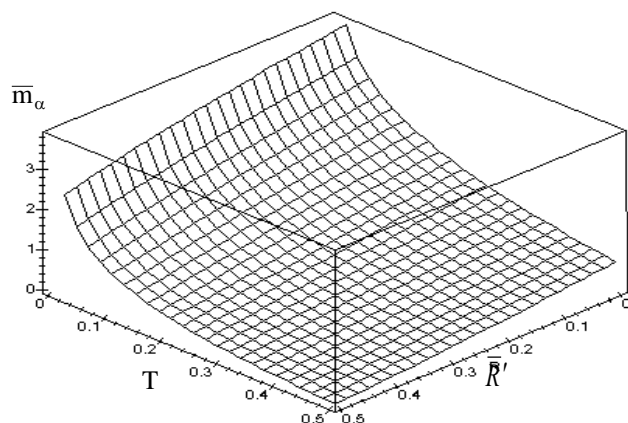


Рис.3. Залежність  $\bar{m}_\alpha$  від  $\bar{R}'$  і  $\bar{T}$ .

вигляді тривимірної поверхні  $\bar{m}_\alpha = f(\bar{R}', \bar{T})$ , рис.3. При цьому в ідеальному варіанті за відсутності поглинання:

$$\bar{R}' + \bar{T} = 1. \quad (21)$$

Звідси при значних  $\bar{R}'$  коефіцієнт пропускання  $\bar{T}$  набуває малих значень і, навпаки, що цілком коректно підтверджується даною математичною моделлю. Розходження експериментальних результатів з математичною моделлю не перевищує 10% у спектральному діапазоні 400÷1100 нм. Тому одержані результати мають неабияку теоретичну цінність, оскільки на їх основі можна вирішувати ряд прикладних спектроскопічних задач в біомедичній діагностиці.

## ВИСНОВКИ

1. Розроблена математична модель дозволяє стверджувати коректність застосування методу дифузного відбивання для функціонуючої живої біосистеми на основі неінвазивних методик. Вона показує ефективність цього методу, обґрунтовує вилучення багатьох величин ( $\alpha$ ,  $f(\theta)$ ,  $n$  тощо) для біотканин, у яких, на відміну від інших матеріалів, важко визначити  $r_1$ , і  $R_\infty$ .
2. Метод дифузного відбивання дає можливість коректно визначати  $m_\alpha$  – питомий показник поглинання елементарного об'єму речовини біотканини, що проблематично здійснити іншими методами без руйнування чи втручання у функціонуючу живу систему. У свою чергу, знання спектральних значень  $m_\alpha$  дозволяє вивчати найтонші клітинні ефекти та молекулярні переходи, що може бути з успіхом використано для діагностики різноманітних поверхневих патологій, відхилень від норми, травм тощо.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Иванов В.В. Столетие интегрального уравнения переноса излучения: В кн. “Рассеяние и поглощение света в природных и искусственных дисперсных средах” . - Мн.: ИФ АН Белоруси, 1991. - С.10-36.
2. Иванов А.П. Оптика рассеивающих сред.-Мн.: Наука і тэхніка, 1969. - 592с.
3. Петрук В.Г. Фізико-хімічний механізм антистоксового поглинання гуморальними середовищами з позиції координаційної теорії кристалічного поля //Вісник ВПІ. - 1995. - №2. - С.78-82.
4. Павлов С.В., Рами Хамди, П.Ф.Колесник, Троян А.С., Готра О.З. Анализ оптических методов оценки физиологических свойств кожи //



Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. - 1998.-№3.-С.137-141.

5. Петрук В.Г., Томчук М.А., Моканюк О.І. Аналіз спектрів дифузного відбивання інтактної і травмованої біотканини // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах.-Хмельницький, ТУП.- 1998.-№.2-С.149-151.

Кафедра хімії та екологічної безпеки.