УДК 519.85

А. С. Кузьменко
А. О. Бричанський

Порівняння термінів варіаційного числення та теорії дослідження функцій на максимум та мінімум

Вінницький національний технічний університет

Анотація: У статті, зважаючи на подібність методів розв'язання варіаційних задач із методами дослідження функцій на максимум та мінімум, розглядається теорія максимуму та мінімуму функцій і паралельно вводяться аналогічні поняття для функціоналів.
Ключові слова: *функціонал, варіаційне числення, варіація функціонала, максимум, мінімум.*

Abstract: *In this paper, according of the similarity of methods for solving variational problems with methods of research functions to the maximum and minimum, the theory of functions maximum and minimum is considered and simultaneously a similar concept to functional is introduced.*
Keywords: *functional, calculus of variations, variation of functional, maximum, minimum.*

Методи розв'язання варіаційних задач, тобто задач на дослідження функціоналів на максимум і мінімум, досить подібні з методами дослідження на максимум і мінімум функцій [1]. Тому доцільно нагадати коротко теорію максимуму й мінімуму функцій і паралельно ввести аналогічні поняття й довести подібні теореми для функціоналів.

1. Змінна величина z називається функцією змінної величини x, що позначається так: $z = f(x)$, якщо кожному значенню x з деякої області зміни x відповідає значення z, тобто має місце відповідність: числу x відповідає число z. Аналогічно визначаються й функції декількох змінних.	1. Змінна величина v називається функціоналом, що залежать від функції $y(x)$, що позначається так: $v = v[y(x)]$, якщо кожної функції $y(x)$ з деякого класу функцій відповідає значення v, тобто має місце відповідність: функції $y(x)$ відповідає число v. Аналогічно визначаються й функціонали, що залежать від декількох функцій, і функціонали, що залежать від функцій декількох незалежних змінних.
2. Приростом Δx аргументу x функції $f(x)$ називається різниця між двома значеннями цієї змінної $\Delta x = x - x_1$. Якщо x – незалежна змінна, то диференціал х співпаде з приростом $dx = \Delta x$.	2. Приростом або варіацією δy аргументу $y(x)$ функціонала $v[y(x)]$ називається різниця між двома функціями $\delta y = y(x) - y_1(x)$. При цьому передбачається, що $y(x)$ змінюється довільно в деякому класі функцій.
3. Функція $f(x)$ називається неперервною, якщо малій зміні x відповідає мала зміна функції $f(x)$.	3. Функціонал $v[y(x)]$ називається неперервним, якщо малій зміні $y(x)$ відповідає мала зміна функціонала $v[y(x)]$.

Останнє визначення потребує уточнення й роз'яснення: які зміни функції $y(x)$, що є аргументом функціонала, називаються малими або, що те ж саме, які криві $y = y(x)$ і $y = y_1(x)$ вважаються мало відмінними або близькими.

Можна вважати близькими функції $y(x)$ і $y_1(x)$ у тому випадку, якщо модуль їх різниці $y(x) - y_1(x)$ малий для всіх значень x, для яких задаються функції $y(x)$ і $y_1(x)$, тобто вважати близькими криві, що близькі по ординатах.

В багатьох випадках більш природно вважати близькими тільки ті криві, які близькі по ординатах і по напрямках дотичних у відповідних точках, тобто вимагати, щоб для близьких кривих не тільки модуль різниці $y(x)-y_1(x)$ був би малий, але, крім того, був би малий і модуль різниці $y'(x)-y_1'(x)$.

Іноді ж виявляється необхідним уважати близькими тільки ті функції, для яких малі модулі кожної з різниць:

$$y(x)-y_1(x),\ y'(x)-y_1'(x),\ y''(x)-y_1''(x),\ \ldots\ y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x).$$

У зв'язку із цим доводиться ввести наступні визначення близькості кривих $y(x)$ і $y_1(x)$.

Криві $y(x)$ і $y_1(x)$ близькі в розумінні близькості нульового порядку, якщо модуль різниці $y(x)-y_1(x)$ малий.

Криві $y(x)$ і $y_1(x)$ близькі в розумінні близькості першого порядку, якщо модулі різниць $y(x)-y_1(x)$ і $y'(x)-y_1'(x)$ малі.

Криві $y(x)$ і $y_1(x)$ близькі в розумінні близькості k-го порядку, якщо модулі різниць $y(x)-y_1(x)$, $y'(x)-y_1'(x)$, … $y^{(k)}(x)-y_1^{(k)}(x)$ малі.

На рис. 1 зображені криві, близькі в змісті близькості нульового порядку, але не близькі в розумінні близькості першого порядку, тому що ординати в них близькі, а напрямки дотичних не близькі. На рис. 2 зображені криві, близькі в розумінні близькості першого порядку.

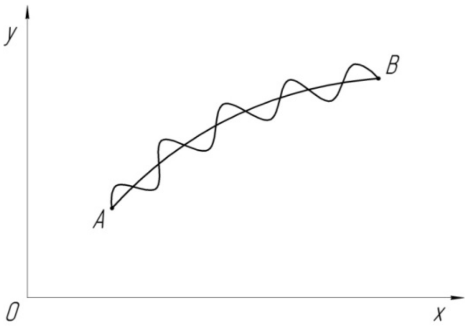

Рис. 1

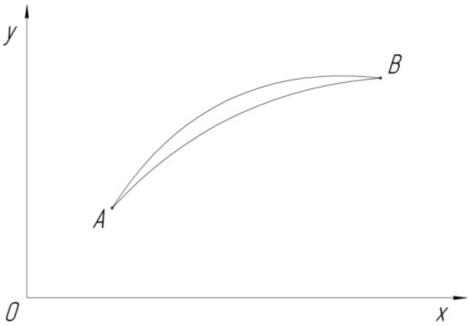

Рис. 2

Якщо криві близькі в розумінні близькості k-го порядку, то вони тим більше близькі у розумінні близькості будь-якого меншого порядку.

4. Лінійною функцією називається функція $l(x)$, що задовольняє такі умови:

$$l(cx)=cl(x),$$

$$l(x_1+x_2)=l(x_1)+l(x_2),$$

де c – довільна стала.

Лінійна функція однієї змінної має вигляд

$$l(x)=kx,$$

де k – стала.

4. Лінійним функціоналом називається функціонал $L[y(x)]$, що задовольняє наступним умовам:

$$L[cy(x)]=cL[y(x)]$$

$$L[y_1(x)+y_2(x)]=L[y_1(x)]+L[y_2(x)],$$

де c – довільна стала.

Прикладом лінійного функціонала є

$$L[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left(p(x)y+q(x)y'\right)dx.$$

5. Якщо приріст функції $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ може бути представлений у вигляді

$$\Delta f=A(x)\Delta x+\beta(x,\Delta x)\cdot\Delta x,$$

5. Якщо приріст функціонала $\Delta v=v[y(x)+\delta y]-v[y(x)]$ можна записати у вигляді

$$\Delta v=L[y(x),\delta y]+\beta(y(x),\delta y)\max|\delta y|,$$

де $A(x)$ не залежить від Δx, а $\beta(x,\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, то функція називається диференційною, а лінійна відносно Δx частина приросту – $A(x)\Delta x$ називається диференціалом функції і позначається df. Поділивши на Δx і переходячи до границі при $\Delta x\to 0$, отримаємо, що $A(x)=f'(x)$, і, звідки, $df=f'(x)\Delta x$.

де $L[y(x),\delta y]$ – лінійний відносно δy функціонал, $\max|\delta y|$ - максимальне значення $|\delta y|$ і $\beta(y(x),\delta y)\to 0$ при $\max|\delta y|\to 0$, то лінійна відносно δy частина приросту функціонала, тобто $L[y(x),\delta y]$, називається варіацією функціонала і позначається δv.

Варіація функціонала – це головна, лінійна відносно δy, частина приросту функціонала.

Означення. Функціонал $v[y(x)]$ досягає на кривій $y=y_0(x)$ максимуму, якщо значення функціонала $v[y(x)]$ на будь-якій близькій до $y=y_0(x)$ кривій не більше, ніж $v[y_0(x)]$, тобто $\Delta v=v[y(x)]-v[y_0(x)]\le 0.$

Якщо $\Delta v\le 0,$ причому $\Delta v=0$ тільки при $y(x)=y_0(x)$, то говорять, що на кривій $y=y_0(x)$ досягається строгий максимум. Аналогічно визначається крива $y=y_0(x)$, на якій реалізується мінімум. В цьому випадку $\Delta v\ge 0,$ для всіх кривих, близьких до кривої $y=y_0(x)$.

6. Якщо диференційована функція $f(x)$ досягає максимуму або мінімуму у внутрішній точці $x=x_0$ області визначення функції, то в цій точці

$$df=0.$$

6. Якщо функціонал $v[y(x)]$, що має варіацію, досягає максимуму або мінімуму при $y=y_0(x)$, де $y_0(x)$ – внутрішня функція області визначення функціонала, то при $y=y_0(x)$,

$$\delta v=0.$$

Поняття екстремуму функціонала потребує уточнення [2]. Говорячи про максимум або мінімум, точніше, про відносний максимум або мінімум, ми мали на увазі найбільше або найменше значення функціонала тільки стосовно значень функціонала на близьких кривих. Але, як було зазначено вище, близькість кривих може бути, що розуміється по-різному, тому у визначенні максимуму або мінімуму треба вказувати, якого порядку близькість мається на увазі.

Якщо функціонал $v[y(x)]$ досягає на кривій $y=y_0(x)$ максимуму або мінімуму стосовно всіх кривих, для яких модуль різниці $y(x)-y_0(x)$ малий, тобто стосовно кривих, близьких у розумінні близькості нульового порядку, то максимум або мінімум називається сильним.

Якщо ж функціонал $v[y(x)]$ досягає на кривій $y=y_0(x)$ максимуму або мінімуму лише стосовно кривих, близьким до $y=y_0(x)$ у розумінні близькості першого порядку, тобто стосовно кривих, близьких до $y=y_0(x)$ не тільки по ординатах, але й по напрямках дотичних, то максимум або мінімум називається слабким.

Очевидно, що якщо на кривій $y=y_0(x)$ досягається сильний максимум (або мінімум), то тим більше досягається й слабкий.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гельфанд И. М. Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 228 с.

2. Mikhalevich V. M., Kraevskii V. A. Variational problems for damage accumulation models heritable type / V. M. Mikhalevich, V. A. Kraevskii // The nonlinear analysis and application 2009: Materials of the international scientific conference (April 02-04th 2009, Kyiv). – Kyiv: NTUU "KPI", 2009. – p. 109-110.

***Кузьменко Аліна** – студент Вінницького національного технічного університету, факультет будівництва, теплоенергетики та газопостачання, група БМ-14, alinchik270@gmail.com*

Бричанський Артур *– студент Вінницького національного технічного університету, факультет будівництва, теплоенергетики та газопостачання, група БМ-14*

Науковий керівник: Краєвський Володимир Олександрович *– к.т.н., доцент кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету*

Kuzmenko Alina *- student of Vinnytsia National Technical University, Faculty of Civil Engineering, Thermal Power Engineering and Gas Supply*

Brichanskii Artur *- student of Vinnytsia National Technical University, Faculty of Civil Engineering, Thermal Power Engineering and Gas Supply*

Supervisor: Kraevskii Vladimir *- Ph.D., Associate Professor, Department of Mathematics Vinnytsia National Technical University*