

УДК 621.822.57

## ЛІНІЙНИЙ СТАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ГАЗОСТАТИЧНИХ КОНІЧНИХ ПІДВІСОК, ПРОФІЛЬОВАНИХ ПОЗДОВЖНІМИ КАНАВКАМИ

Канд. фіз.-мат. наук, доц. Степанчук В. І., канд. техн. наук, доц. Федотов В. О.

Конічні газові опорні пристрої (підвіски, підшипники) залишаються доволі малодослідженими об'єктами, хоча вони є досить перспективними для застосування в шпіндельних пристроях прецизійних шліфувальних верстатів [1,2], а останнім часом у мотор-підшипниках [3]. Слід також зазначити, що найбільш авторитетні вказівки по проектуванню газових підшипників [4,5] взагалі не містять відомостей про такі опори, небагаточисленні повідомлення з'являються лише у наукових часописах.

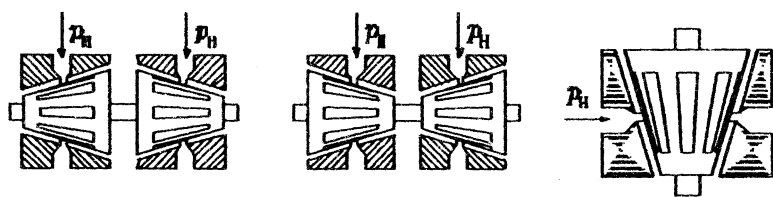


Рис. 1

Конічні газові підвіски, або підшипники, що живляться стиснутим повітрям, застосовують по симетричним схемам (рис. 1, а,б), які придатні для традиційних шпіндельних пристроїв, або ж по несиметричній схемі (рис. 1, в), яка здебільшого притаманна мотор-підшипникам. Стиснуте повітря подається у зазор через дроселюючі пристрої у вигляді щілин чи отворів малого діаметра [6,7], або безпосередньо. В останньому випадку для забезпечення працездатності опори необхідно утворити поздовжні канавки з глибиною, яка су-мірна з товщиною шару газового мастила. Такі опори технологічно прості та мають непогані динамічні властивості. В подальшому викладі обмежимося аналізом саме таких підшипників. Статичний аналіз непрофільованих опор викладений в роботах [6,7].

Основні проблеми, що постають перед розробниками таких підшипників, полягають у визначенні статичних характеристик (вантажопідйомності, жорсткості, витрат стиснутого газу), динамічних характеристик (стійкості, резонансній частоті) та у раціональному виборі конструктивних параметрів. При цьому, очевидно, керуються прагненням досягти певної оптимальності по жорсткісним та витратним властивостям.

Розглянемо роботу такого конічного підвіса в околі співвісного номінального положення (рис. 2), при якому змащувальний зазор на виступах між конічними робочими поверхнями становить  $h_0$ . Відомо [6,7], що статичні силові характеристики можна подати як

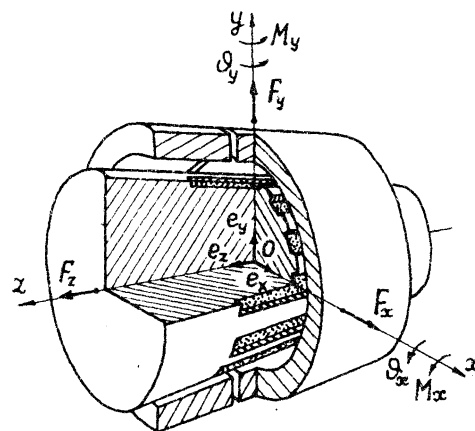


Рис. 2

$$\begin{pmatrix} F_x \\ M_y \\ F_y \\ M_x \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{z0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_{FR} & C_{F\theta} \\ C_{MR} & C_{M\theta} \\ -C_{FR} & -C_{F\theta} \\ -C_{MR} & C_{M\theta} \\ C_{FZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ \theta_y \\ e_y \\ \theta_x \\ e_z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де  $e_x, e_y, e_z, \theta_x, \theta_y$  — невеликі зміщення,  $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y$  — компоненти вектора реакції (рис. 2),  $F_{z0}$  — осьова сила в номінальному співвісному положенні.

В роботах [6,7] встановлені також умови статичної стійкості

$$C_{FZ} > 0, C_{FR} > 0, C_{M\theta} > 0, C_{FR} C_{M\theta} - (C_{F\theta} + C_{MR})^2 / 4 > 0. \quad (2)$$

Задача статичного розрахунку зводиться, таким чином, до визначення осьової сили  $F_{Z0}$ , компонентів  $C_{FR}$ ,  $C_{F\theta}$ ,  $C_{MR}$ ,  $C_{M\theta}$ ,  $C_{FZ}$  матриці жорсткості та витрат газу  $Q$  через підвіс. Для цього необхідно розв'язати задачу про розподіл тиску в масляному шарі в номінальному положенні, а також при наявності малого осьового  $e_Z$ , радіального  $e_R$  та кутового  $\theta$  зміщень.

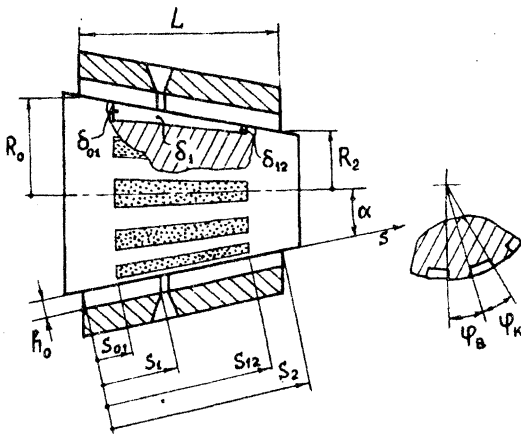


Рис. 3

Введемо безрозмірні величини зміщень та зазора  $H = h/h_0$ ;  $\varepsilon_Z = e_Z/h_0$ ;  $\varepsilon_R = e_R/h_0$ ;  $\varepsilon_\theta = \theta R_0/h_0$

безрозмірну координату (рис. 3)

$$\xi = s/s_2$$

та параметри макро- та мікрогеометрії газового масляного шару опори (рис. 3):

$$\lambda = L/(2R_0); \quad \sigma = (R_0 - R_2)/R_0; \quad \lambda_0 = (4\lambda^2 + \sigma^2)^{0.5};$$

$$\xi_{01} = s_{01}/s_2; \quad \xi_{01} = s_1/s_2; \quad \xi_{12} = s_{12}/s_2.$$

$$\gamma_{01} = \delta_{01}/h_0; \quad \gamma_1 = \delta_1/h_0; \quad \gamma_{12} = \delta_{12}/h_0; \quad \kappa = \varphi_\kappa / (\varphi_\kappa + \varphi_\sigma).$$

Диференціальне рівняння розподілу тиску  $p$  в змащувальному шарі газу між конічними поверхнями після осереднення [8, 9] набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\lambda_0}{1 - \sigma \xi} A(\varphi, \xi) \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1 - \sigma \xi}{\lambda_0} B(\varphi, \xi) \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) = 0, \quad (3)$$

де

$$A(\varphi, \xi) = \frac{H^3(H + \gamma)^3}{\kappa H^3 + (1 - \kappa)(H + \gamma)^3}; \quad B(\varphi, \xi) = \kappa(H + \gamma)^3 + (1 - \kappa)H^3,$$

$U = P^2$ ,  $P = p/p_a$ ,  $p_a$  — атмосферний тиск.

Для нього справджуються крайові умови

$$U(\varphi, 0) = U(\varphi, 1) = 1; \quad U(\varphi, \xi) = U(\varphi + 2\pi, \xi), \quad U(\varphi, \xi_1) = P_n^2, \quad (4)$$

де  $P_n = p_n/p_a$ ,  $p_n$  — тиск нагнітання.

Маючи на меті визначення коефіцієнтів жорсткості (1), для розв'язування задачі (3), (4) доцільно застосувати метод збурення. При цьому параметром збурення  $\varepsilon$  можна вважати мале відхилення внутрішнього конуса від номінального співвісного положення. Таким чином, задача перетворюється в послідовність задач: незбуреної та сукупності збурених задач. Це дає можливість зменшити розмірність кожної задачі зокрема та відповідно їх спростити.

Для номінального (незбуреного) положення, яке відповідає  $H = 1$ , крайова задача має вигляд

$$\frac{d}{d\xi} \left( B_0^*(\xi) \frac{dU_0}{d\xi} \right) = 0, \quad U_0(0) = U_0(1) = 1, \quad U_0(\xi_1) = P_n^2, \quad (5)$$

де  $B_0^* = (1 - \sigma \xi)[\kappa(1 + \gamma)^3 + (1 - \kappa)]/\lambda_0$ .

Задача стає повністю визначеною, коли визначені залежності  $\gamma(\xi)$ ,  $\kappa(\xi)$ . Для непрофільованих ділянок підвіски можна покласти

$$\kappa = 0, \quad \gamma = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_{01}, \quad \xi_{12} \leq \xi \leq 1.$$

В межах профільованих ділянок параметри  $\gamma$  та  $\kappa$  змінюються, наприклад, за лінійним законом

$$\begin{aligned} \gamma(\xi) &= |\gamma_{01}(\xi_1 - \xi) + \gamma_1(\xi - \xi_{01})| / (\xi_1 - \xi_{01}), \\ \kappa(\xi) &= |\kappa_{01}(\xi_1 - \xi) + \kappa_1(\xi - \xi_{01})| / (\xi_1 - \xi_{01}); \end{aligned} \quad \text{при} \quad \xi_{01} \leq \xi \leq \xi_1;$$

$$\begin{aligned} \gamma(\xi) &= |\gamma_1(\xi_{12} - \xi) + \gamma_{12}(\xi - \xi_1)| / (\xi_{12} - \xi_1), \\ \kappa(\xi) &= |\kappa_1(\xi_{12} - \xi) + \kappa_{12}(\xi - \xi_1)| / (\xi_{12} - \xi_1). \end{aligned} \quad \text{при } \xi_1 \leq \xi \leq \xi_{12}.$$

Вказані залежності дають можливість вивчати характеристики підшипників із змінною глибиною та шириною канавок в рамках запропонованої моделі

Розв'язок  $U_0(\xi)$  незбуреної задачі (5) дозволяє визначити номінальну осьову силу та витрати стиснутого газу

$$F_{Z0} = \pi p_a R_0^2 F_{Z0}^*, \quad F_{Z0}^* = 2 \lambda_0 \sin \alpha \int_0^1 \sqrt{U_0(\xi)} (1 - \sigma \xi) d\xi. \quad (6)$$

$$Q = \pi \rho_a p_a h_0^3 Q^* / (12 \mu); \quad Q^* = \frac{1 - \sigma}{\lambda_0} \left( \frac{dU_0}{d\xi} \right)_{\xi=1} - \frac{1}{\lambda_0} \left( \frac{dU_0}{d\xi} \right)_{\xi=0}, \quad (7)$$

де  $\rho_a$  — густина газу при нормальних умовах,  $\mu$  — динамічний коефіцієнт в'язкості газу.

При осьовому збуренні  $\varepsilon = \varepsilon_Z$  маємо осесиметричний розподіл тиску, розкладання по параметру збурення набуде вигляду

Крайова задача для збуреного рівняння набуде вигляду

$$\frac{d}{d\xi} \left( B_0^*(\xi) \frac{dU_1}{d\xi} \right) = - \frac{d}{d\xi} \left( B_{1Z}^*(\xi) \frac{dU_0}{d\xi} \right), \quad U_1(0) = U_1(\xi_1) = U_1(1) = 0, \quad (8)$$

$$B_{1Z}^* = 3(1 - \sigma\xi) [\kappa(1 + \gamma)^2 + (1 - \kappa)] / \lambda_0.$$

Розв'язок  $U_1(\xi)$  задачі (8) служить для обчислення коефіцієнта осьової жорсткості

$$C_{FZ} = \pi p_a R_0^2 C_{FZ}^* / h_0; \quad C_{FZ}^* = - \lambda_0 \sin \alpha \int_0^1 \frac{U_1(\xi)}{\sqrt{U_0(\xi)}} (1 - \sigma\xi) d\xi. \quad (9)$$

При радіальному збуренні  $\varepsilon = \varepsilon_R$  безрозмірна товщина шару мастила виразиться так

$$H = 1 - \varepsilon_R \cos \alpha \cos \varphi,$$

осьова симетрія задачі порушується і розкладання для  $U(\varphi, \xi)$ ,  $A(\varphi, \xi)$ ,  $B(\varphi, \xi)$  набудуть вигляду

$$U(\varphi, \xi) = U_0(\xi) + \varepsilon Z_{1R} \cos \varphi + \dots,$$

$$A(\varphi, \xi) = A_0(\xi) + \varepsilon A_{1R} \cos \varphi + \dots, \quad B(\varphi, \xi) = B_0(\xi) + \varepsilon B_{1R} \cos \varphi + \dots \quad (10)$$

Крайова задача для радіального збурення має вигляд

$$\frac{d}{d\xi} \left( B_0^* \frac{dZ_{1R}}{d\xi} \right) - A_0^* Z_{1R} = - \frac{d}{d\xi} \left( B_{1R}^* \frac{dU_0}{d\xi} \right), \quad Z_{1R}(0) = Z_{1R}(\xi_1) = Z_{1R}(1) = 0, \quad (11)$$

$$A_0^* = \frac{\lambda_0(1 + \gamma)^3}{[\kappa + (1 - \kappa)(1 + \gamma)^3] (1 - \sigma\xi)}; \quad B_{1R}^* = B_{1Z}^* \cos \alpha.$$

За розв'язком  $Z_{1R}(\xi)$  задачі (11) можна визначити радіальні компоненти матриці жорсткості

$$C_{FR} = \pi p_a R_0^2 C_{FR}^* / h_0; \quad C_{FR}^* = \frac{\lambda_0 \cos \alpha}{2} \int_0^1 \frac{Z_{1R}(\xi)}{\sqrt{U_0(\xi)}} (1 - \sigma\xi) d\xi \quad (12)$$

$$C_{MR} = \pi p_a R_0^3 C_{MR}^* / h_0;$$

$$C_{MR}^* = \frac{\lambda_0}{2} \int_0^1 \frac{Z_{1R}(\xi)}{\sqrt{U_0(\xi)}} (1 - \sigma\xi) [2\lambda(0,5 - \xi) \cos \alpha + (1 - \sigma\xi) \sin \alpha] d\xi \quad (13)$$

При кутевому збуренні  $\varepsilon = \varepsilon_\theta$

$$H = 1 + \varepsilon_\theta [2\lambda(0,5 - \xi) \cos \alpha + (1 - \sigma\xi) \sin \alpha] \cos \varphi;$$

розкладання по параметру  $\varepsilon_\theta$  мають вигляд, подібний до (10), і розв'язок  $Z_{1\theta}$  крайової задачі

$$\frac{d}{d\xi} \left( B_0^* \frac{dZ_{1\theta}}{d\xi} \right) - A_0^* Z_{1\theta} = - \frac{d}{d\xi} \left( B_{1\theta}^* \frac{dU_0}{d\xi} \right), \quad Z_{1\theta}(0) = Z_{1\theta}(\xi_1) = Z_{1\theta}(1) = 0, \quad (14)$$

$$B_{1\theta}^* = B_{1Z}^* [2\lambda(0,5 - \xi) \cos \alpha + (1 - \sigma\xi) \sin \alpha] .$$

дозволяє обчислити кутові коефіцієнти матриці жорсткості (1)

$$C_{F\theta} = \pi p_a R_0^3 C_{F\theta}^* / h_0; \quad C_{F\theta}^* = \frac{\lambda_0 \cos \alpha}{2} \int_0^1 \frac{Z_{1\theta}(\xi)}{\sqrt{U_0(\xi)}} (1 - \sigma\xi) d\xi; \quad (15)$$

$$C_{M\theta} = \pi p_a R_0^4 C_{M\theta}^* / h_0;$$

$$C_{M\theta}^* = \frac{\lambda_0}{2} \int_0^1 \frac{Z_{1\theta}(\xi)}{\sqrt{U_0(\xi)}} (1 - \sigma\xi) [2\lambda(0,5 - \xi) \cos \alpha + (1 - \sigma\xi) \sin \alpha] d\xi . \quad (16)$$

Крайові задачі (5), (9), (11), (14) доцільно розв'язувати прямими чисельними методами, оскільки при залежностях  $\gamma(\xi)$ ,  $\kappa(\xi)$ , які справджуються для практичних потреб, отримати аналітичні розв'язки не вдається. Для цього ідеально підходять «найкращі» кінцево-різницеві схеми (за означенням роботи [10]), які одночасно є точними для задач (5), (9). Слід зауважити, що подібні задачі для циліндричних та плоских опор, які, в свою чергу, можна одержати з описаної теорії при  $\alpha = 0$ ,  $\sigma = 0$  або  $\alpha = \pi/2$ ,  $\lambda = 0$ , піддаються в багатьох випадках аналітичному розв'язуванню і детально розроблені в [8—9, 11—12].

Викладений тут алгоритм знаходження характеристик подібний до запропонованого в роботі [13], хоча сам автор вказаної роботи обмежився суто аналітичними побудовами.

Очевидною перевагою лінійного аналізу є те, що вдалося описати поведінку газової опори з допомогою небагаточисленних характеристик, які мають ясний фізичний зміст. Однак залишається відкритим питання про межі застосовності лінійного аналізу. Звичайно, це питання може бути розв'язане за допомогою, наприклад, прямих чисельних методів для задач (3), (4). Попередні дослідження для непрофільованих конічних підвісок [6,7] вказують на те, що діапазон лінійності статичних силових характеристик по величині збурень  $e_R$ ,  $\theta$  є досить протяжним. В усякому випадку, такий спосіб аналізу охоплює переважну частину задач практики. Прямі чисельні методи потребують значних ресурсів ЕОМ.

Метою описаного аналізу роботи конічних підвісок є, звичайно, не простота сама по собі, а розробка практично цінних критеріїв оптимізації та одержання оптимальних параметрів, які можна рекомендувати для запровадження в конкретні конструкції. Очевидним є також те, що подібній розробці повинні передувати дослідження впливу конструктивних параметрів на характеристики конічних підвісок. Так, на рис. 4 зображені результати обчислень у вигляді залежності коефіцієнтів жорсткості (1 —  $C_{FZ}^*$ , 2 —  $C_{FR}^*$ , 3 —  $C_{MR}^*$ , 4 —  $C_{F\theta}^*$ , 5 —  $C_{M\theta}^*$ ), та параметру витрат  $Q^*$  від кута  $\alpha$ , де покладено  $P_H = 4$ ;  $\sigma = 0,8$ ;  $\xi_{01} = 0,15$ ;  $\xi_1 = 0,4$ ;  $\xi_{12} = 0,85$ ;  $\gamma_{01} = \gamma_1 = \gamma_{12} = 1,2$ ;  $\kappa_{01} = \kappa_1 = \kappa_{01} = 0,5$ .

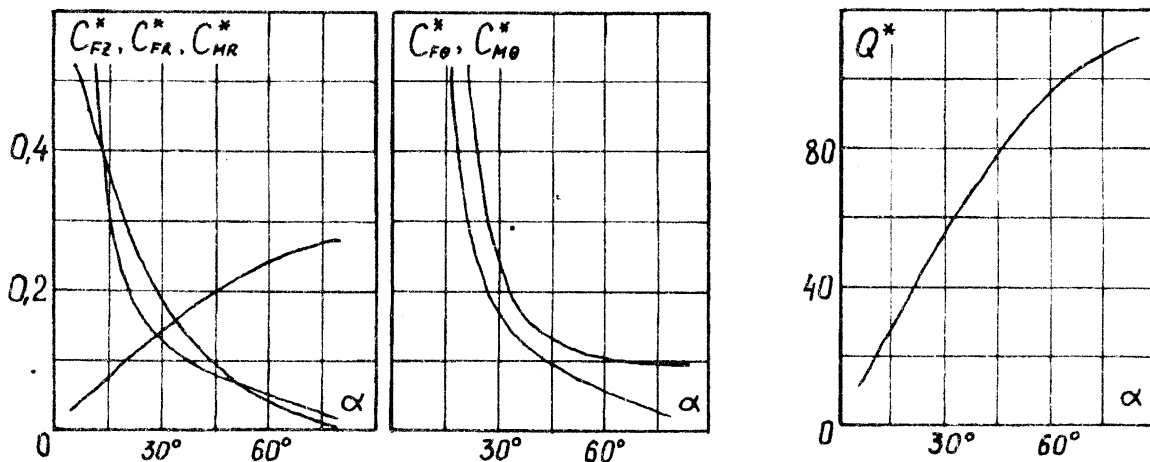


Рис. 4

Задачі повної статичної оптимізації конічних опор є набагато більш трудомісткими, ніж розв'язані в [8—9, 11—12], тому що для опису статичної конічної опори потрібно в поданій інтерпретації задати дванадцять параметрів:  $P_H$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda_0$ ,  $\xi_{01}$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_{12}$ ,  $\gamma_{01}$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_{12}$ ,  $\kappa_{01}$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_{12}$ , одинадцять з яких (усі, крім  $P_H$ ), в принципі, можуть підлягати оптимізації. Кількість інтегральних жорсткісних характеристик також зросла у порівнянні з симетричними циліндричними та плоскими

опорами.

Попередньо проведена безумовна оптимізація за критерієм  $\max(C_{FR}^*/Q^*)$  при заданих сталих  $P_H, \alpha, \lambda, \sigma$ , показала досить цікаві результати, частина яких наведена в таблиці

$P_H = 4,$ $\alpha = 10^\circ,$ $\lambda = 2,$ $\sigma = 0,705$	$\xi_{01},$ $\xi_1 = \xi_{12}$	$\gamma_{01},$ $\gamma_1 = \gamma_{12}$	$\kappa_{01},$ $\kappa_1 = \kappa_{12}$	$F_{Z0}^*,$ $C_{FZ}^*$	$C_{FR}^*,$ $C_{MR}^*$	$C_{F\theta}^*,$ $C_{M\theta}^*$	$Q^*$	$C_{FR}^*/Q^*$
	0,125 0,757	1,44 1,44	0,5 0,5	1,915 0,081	0,712 0,845	2,523 3,146	20,25	0,0351
	0,134 0,752	1,02 1,62	0,5 0,5	1,930 0,074	0,670 0,797	2,301 3,003	18,95	0,0354
	0,147 0,758	2,47 1,43	0 0,5	1,929 0,071	0,729 0,866	2,546 3,213	17,04	0,0428

Перша група даних в таблиці відповідає оптимізації при умовах, які відповідають канавкам постійної глибини  $\gamma_{01} = \gamma_1 = \gamma_{12}$  та постійної відносної ширини  $\kappa_{01} = \kappa_1 = \kappa_{12} = 0,5$ . Другий та третій рядки таблиці містять результати оптимізації для канавок змінної глибини при постійній відносній ширині та для канавок змінної глибини та ширини відповідно. Показано, що канавки змінної глибини і ширини можуть, в принципі, привести до збільшення жорсткості та зменшення витрат стиснутого повітря.

Подібний критерій, так само як і запропоновані в [8—9, 11—12], може бути застосований лише для симетричних конструкцій (рис. 1 а, б), тому що умови статичної стійкості одинарної конструкції (2) не виконуються. Це не дає можливості застосувати одержані результати для мотор-підшипників. Взагалі, питання про раціональні критерії оптимізації кінцевих опор залишається відкритим, і дослідження в цьому напрямку будуть продовжені в рамках безумовних та умовних оптимізаційних процедур.

## ВИСНОВКИ

Створений лінійний аналіз статичних характеристик кінцевих опор дає можливість спростити визначення силових характеристик, оцінити вплив різноманітних конструктивних параметрів на інтегральні силові та витратні характеристики кінцевих підвісок та аргументовано пропонувати програми оптимізації таких опор, які будуть виконані в найближчому майбутньому. В рамках описаного підходу найпростіші програми оптимізації стають доступними навіть при використанні ПЕОМ класу IBM PC/AT. Повномасштабні програми оптимізації кінцевих опор все ще залишаються доволі трудомісткими.

## ЛІТЕРАТУРА

1. US Patent № 2711934. Cl. 308—9, 1955.
2. US Patent № 3476451. Cl. 308—122, 1969.
3. Шнайдер А. Г., Сокол В. М. Сравнительные характеристики бесконтактных опор для электромашиностроения // Вестник машиностроения. — 1987. — № 7. — С. 18—22.
4. Пинегин С. В., Табачников Ю. Б., Силенков И. Е. Статические и динамические характеристики газостатических опор. — М.: Наука, 1982. — 265 с.
5. Пинегин С. В., Орлов А. В., Табачников Ю. Б. Прецизионные опоры качения и опоры с газовой смазкой: Справочник. — М.: Машиностроение, 1984. — 216 с.
6. Шнайдер А. Г., Степанчук В. И., Кисель И. Г. Расчет статической реакции газового слоя в радиально-упорных мотор-подшипниках с щелью наддува // Вестник машиностроения. — 1991. — № 12. — С. 27—29.
7. Шнайдер А. Г., Степанчук В. И. Статические характеристики конического газового смазочного слоя радиально-упорных мотор-подшипников и повышение их экономичности по расходу газа // Трение и износ. — Т. 13. — 1992. — № 3. — С. 431—437.
8. Емельянов А. В., Федотов В. А., Приятельчук В. А. Характеристики радиальных газостатических опор с двойным дросселированием газового потока // Машиноведение. — 1977. — № 2. — С. 97—104.
9. Табачников Ю. Б., Шевченко А. В., Степанчук В. И. Исследование и оптимизация радиальных газостатических подшипников с продольными канавками с учетом угловой жесткости // Машиноведение. — 1981. — № 2. — С. 97—104.
10. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1976. — 352 с.
11. Емельянов А. В., Федотов В. А., Дзюбинский Г. Г. Исследование газостатических подпятников и улучшение их характеристик // Машиноведение. — 1976. — № 3. — С. 96—105.
12. Шевченко А. В., Федотов В. А., Багдасарян Г. Н. Комплексный подход к проблеме оптимизации газостатических подпятников // Машиноведение. — 1981. — № 1. — С. 115—121.
13. Kao H. C. A numerical method and higher approximations for a self-acting, gas-lubricated bearing of finite length // Trans. ASME, ser F, J. Lubr. Techn. — V. 93. — 1971. — № 1.