

ЧАСТИНА II.
ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЕМП У СТОХАСТИЧНИХ НЕПЕРЕРВНИХ
ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ

5. СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ НЕПЕРЕРВНИХ ЕМП З
ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВІ
СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

5.1. Основні характеристики стаціонарних випадкових процесів

Суворо математична модель неперервного випадкового процесу припускає, що він протікає у часі від мінус нескінченності до плюс нескінченності, тобто $t \in (-\infty, \infty)$. А ту його частину $x^*(t)$, яку вдалося у якийсь спосіб зафіксувати, називають *реалізацією* випадкового процесу $x(t)$.

Для будь-якої реалізації $x^*(t)$ неперервного випадкового процесу $x(t)$ характерним є те, що вона містить у собі нескінченну кількість щільно розміщених поряд у часі значень $x(t)$ на будь-якому скінченному відрізку часу $[t_n, t_k]$, обмеженому моментами початку t_n та кінця t_k реєстрації, тобто для $x^*(t)$ справедливим є те, що $t \in [t_n, t_k]$.

Зрозуміло, що якщо випадковий процес є дискретним у часі $x(t_i)$, то його реалізація $x^*(t_i)$ є скінченною послідовністю випадкових чисел x_i , $i = \overline{1, N}$, зафіксованих на відрізку часу $[t_n, t_k]$, що можна віддзеркалити у такий спосіб:

$$x^*(t_i) = x_i; \quad i = \overline{1, N}; \quad t_i \in [t_n, t_k]. \quad (5.1)$$

У зв'язку з накладенням людьми на неперервний плин часу t циклічної системи його відліку (секунда, хвилина, доба, рік), що пов'язано із циклічністю обертання Землі навколо Сонця, зручно початок t кожної ре-

алізації $x^*(t)$ відносити до початку відповідного циклу відліку часу. Це дає змогу, накладаючи реалізації на їх графіку одна на одну, вивчати їх у сукупності, оскільки лише за такого підходу вдається встановити певні закономірності випадкових процесів і визначити цілий ряд цікавих їх числових і функціональних характеристик.

Як приклад на рис. 5.1 показані три добові реалізації споживання електричної потужності $P_{ел}$ містом Вінниця, наближеним за розмірами та промисловими характеристиками до середнього для України.

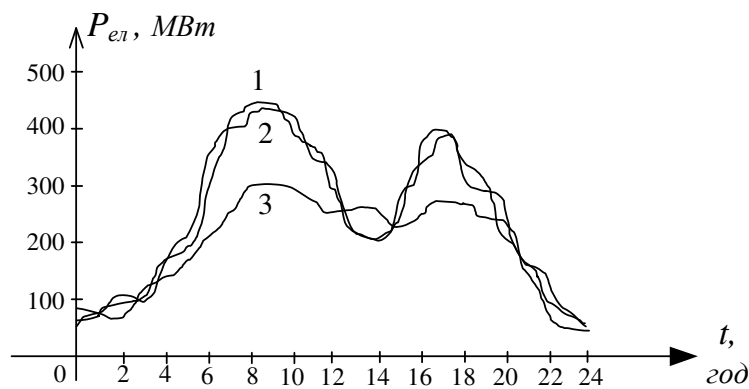


Рис. 5.1. Графік трьох добових реалізацій процесу споживання електричної потужності містом середніх, для України, розмірів

Перша та друга реалізації характеризують добове споживання електричної потужності у середині тижня, а третя — у вихідний день, коли більшість підприємств не працюють, а побутові витрати стають більшими навіть у години обідньої перерви.

Для подальших викладок нам потрібні будуть деякі елементарні положення із теорії імовірностей — нагадаємо їх.

Однією з основних характеристик випадкової величини X є її функція розподілу $F(x)$, яка задає імовірність $P(X \leq x)$ отримання випадковою величиною X конкретного значення, не більшого від значення x , тобто

$$F(x) = P(X \leq x). \quad (5.2)$$

Графік функції розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини X має вигляд, наведений на рис. 5.2.

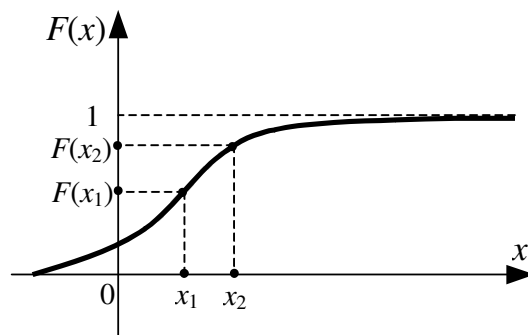


Рис. 5.2. Графік функції $F(x)$ розподілу неперервної випадкової величини X

Нагадаємо властивості функції $F(x)$ розподілу неперервної випадкової величини X :

- 1) якщо $x_2 \geq x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$;
- 2) якщо $x = -\infty$, то $F(-\infty) = 0$;
- 3) якщо $x = +\infty$, то $F(+\infty) = 1$;
- 4) якщо $x_1 \leq X < x_2$, то:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (5.3)$$

Перша із цих властивостей означає, що графік функції розподілу неперервної випадкової величини X є неперервною наростаючою з ростом аргументу x кривою.

Друга властивість означає, що випадкова величина X не може мати значень, менших від мінус нескінченності.

Третя властивість означає, що випадкова величина X не може мати значень, більших від плюс нескінченності.

А четверта властивість означає, що для знаходження імовірності потрапляння випадкової величини X у проміжок значень $[x_1, x_2)$ достатньо взяти різницю значень її функції розподілу $F(x)$ на границях цього проміжку.

Всі ці властивості є справедливими і для дискретної випадкової величини, але слід пам'ятати, що графік її функції розподілу має східчасту форму (рис. 5.3).

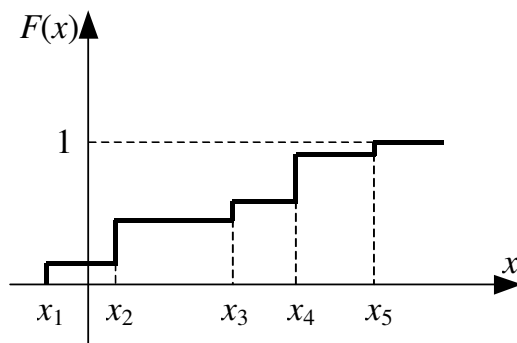


Рис. 5.3. Графік функції $F(x)$ розподілу дискретної випадкової величини X за умови, що величина X здатна набувати лише одне із п'яти значень x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

Похідна $\frac{dF}{dx}$ від функції розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини X задає густину $f(x)$ імовірностей значень цієї величини, тобто

$$f(x) = \frac{dF}{dx}. \quad (5.4)$$

Нагадаємо властивості густини $f(x)$ імовірностей неперервної випадкової величини X :

- 1) за будь-яких значень x : $f(x) \geq 0$;
- 2) якщо $x = -\infty$, то $f(-\infty) = 0$;
- 3) якщо $x = +\infty$, то $f(+\infty) = 0$;
- 4) якщо $x_1 \leq X < x_2$, то

$$P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F(x_2) - F(x_1), \quad (5.5)$$

причому:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (5.6)$$

Інтерпретація перших трьох властивостей густини імовірностей $P(x)$ неперервної випадкової величини X така ж, як і та, що була дана для перших трьох властивостей її функції розподілу $F(x)$, а четверта властивість вказує на те, що імовірність потрапляння випадкової величини X у проміжок значень $[x_1, x_2)$ чисельно дорівнює площі фігури під кривою $f(x)$, відсіченої ординатами при $x = x_1$ та $x = x_2$. П'ята властивість є наслідком попередніх відносно $f(x)$ та $F(x)$.

Здійснюючи графічне диференціювання кривої $F(x)$, зображеної на рис. 5.2, неважко переконатись у тому, що графік густини імовірностей $f(x)$ має вигляд, наведений на рис. 5.4. В інших випадках графік функції $f(x)$ може бути дещо іншим — він може бути зсунутим вліво чи вправо, але незмінними є дві обставини. По-перше, для всіх значень x повинна виконуватись нерівність $f(x) \geq 0$, а по-друге, площа під кривою $f(x)$ завжди повинна дорівнювати одиниці.

Зазначимо, що для дискретної випадкової величини поняття густини імовірностей не існує, оскільки похідна від її функції розподілу має розриви 2-го роду на початку кожної сходинки, що робить її принципово невизначеною.

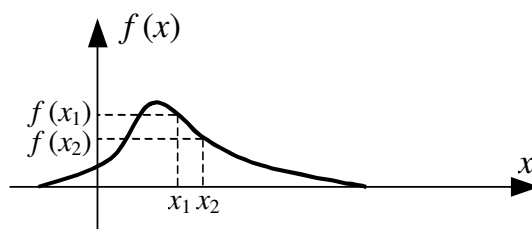


Рис. 5.4. Графік густини імовірностей $f(x)$ неперервної випадкової величини X , отриманий графічним диференціюванням кривої $F(x)$, зображеної на рис. 5.2

Однак для аналізу дискретних випадкових процесів поняття густини нам і не потрібне.

Дуже важливими характеристиками як неперервної, так і дискретної випадкової величини X є її математичне очікування m_x та дисперсія D_x або позитивне значення кореня квадратного з неї, яке називають *середньо-квадратичним відхиленням* σ_x . Перша з цих характеристик — m_x — задає теоретичне середнє значення випадкової величини X , а друга — D_x чи σ_x — характеризує розкид значень випадкової величини X відносно її середнього значення m_x .

Для неперервної випадкової величини X :

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (5.7)$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx, \quad (5.8)$$

а для дискретної:

$$m_x = \sum_{i=1}^N x_i p_i, \quad (5.9)$$

$$D_x = \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2 p_i, \quad (5.10)$$

де p_i — імовірність того, що випадкова величина X набуде значення x_i :

$$p_i = P(X = x_i). \quad (5.11)$$

Звертаємо увагу на те, що у термінах теоретичної механіки формула (5.7) задає перший початковий момент, а формула (5.8) — другий центральний момент густини розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини X . А тому математичне очікування m_x випадкової величини X , незалежно від того, є вона неперервною чи дискретною, часто називають *першим початковим моментом* цієї випадкової величини, не пов'язуючи це з тим, визначена чи ні для неї густина імовірностей. За аналогією D_x називають *другим центральним моментом* випадкової величини X .

Узагальнюючи, можна зазначити, що j -ий початковий момент $m_j(x)$ випадкової величини X можна визначити як математичне очікування j -го ступеня цієї величини, тобто

$$m_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^j f(x) dx \quad (5.12)$$

для неперервного випадку або

$$m_j(x) = \sum_{i=1}^N x^j p_i \quad (5.13)$$

для дискретного.

За аналогією j -ий центральний момент випадкової величини X можна визначити як математичне очікування j -го ступеня відхилення цієї величини від її середнього значення, тобто

$$M_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^j f(x) dx \quad (5.14)$$

для неперервного випадку або

$$M_j(x) = \sum_{i=1}^N (x - m_x)^j p_i \quad (5.15)$$

для дискретного.

Очевидно, що

$$\begin{cases} m_1(x) = m_x, \\ M_2(x) = D_x. \end{cases} \quad (5.16)$$

Очевидно і те, що

$$M_1(x) = 0. \quad (5.17)$$

Для кого тотожність (5.17) не очевидна, доведіть її справедливість самостійно, скориставшись формулами (5.14), (5.7) та (5.6).

Нагадавши вищевикладені елементи теорії імовірностей відносно випадкових величин X , повернемося знову до випадкових процесів $X(t)$, які є теж випадковими величинами, але прив'язаними до плину часу.

Якщо розглядати час як параметр, який можна “зупинити”, зафіксувавши на конкретному значенні t^* , то будь-яку сукупність реалізацій $x^*(t)$ випадкового процесу $X(t)$ можна “порізати” прямими, паралельними осі X , встановивши перпендикуляри із кожного цікавого для нас значення t^* .

Випадкову величину $X(t^*)$, яка формується в кожному “перерізі” t^* сукупністю реалізацій $x^*(t)$ випадкового процесу $X(t)$, можна характеризувати густиною імовірностей $f(x, t^*)$, а для всього процесу можна, “відпустивши” t^* , сформуувати густину імовірностей $f(x, t)$, в якій, нагадаємо, t є неперервним параметром із детерміновано визначеними нами чи кимось іншим значеннями.

Очевидно, що формули (5.7), (5.8) для неперервного випадкового процесу $X(t)$ перетворюються на:

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)f(x, t)dx, \quad (5.18)$$

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m_x(t))^2 f(x, t)dx, \quad (5.19)$$

а математичне очікування $m_x(t)$ та дисперсія $D_x(t)$ у загальному випадку стають функціями часу t , як це видно на рис. 5.1, з якого легко бачити, що середнє значення електричної потужності $P_{ел}$, яка споживається містом у 2 години ночі і у 9 годин ранку, суттєво відрізняються; як суттєво відрізняється і розкид відхилення цієї потужності у ці ж години від її середнього значення.

Тепер уявимо собі, що дві реалізації $x^*(t)$ деякого випадкового процесу $X(t)$ мають вигляд, наведений на рис. 5.5.

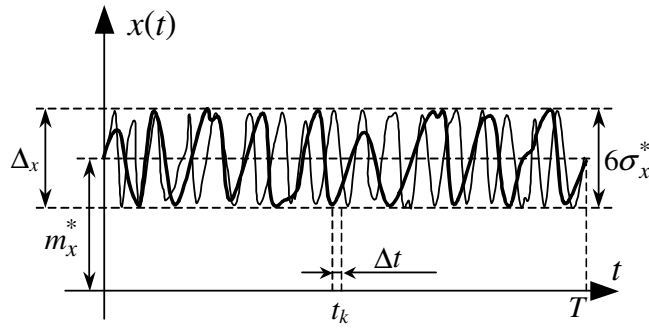


Рис. 5.5. Графік двох реалізацій деякого випадкового процесу $X(t)$

Навіть “неозброєним” оком видно, що і середнє значення цього процесу, і його дисперсія є не функціями часу, а константами, тобто

$$\begin{cases} m_x(t) = \text{const}_1 = m_x, \\ D_x(t) = \text{const}_2 = D_x. \end{cases} \quad (5.20)$$

Однак, згідно з формулами (5.18), (5.19), такий результат можна отримати лише в одному випадку, коли

$$f(x, t) = f(x). \quad (5.21)$$

А це, у свою чергу, справедливо лише для неперервного випадкового процесу $X(t)$, густина імовірностей у кожному “перерізі” t сукупності реалізацій $x^*(t)$ якого описується одним і тим же законом $f(x)$, тобто не залежить від t .

Випадкові процеси, для яких виконується умова (5.21) і, як наслідок, умова (5.20), відносять до класу стаціонарних випадкових процесів.

Відзначимо, що математики розрізняють стаціонарність у широкому та у вузькому розумінні, пов’язуючи це з багатовимірними функціями розподілу випадкових процесів, котрі відносяться до моделей красивих, але практично не придатних для розв’язання конкретних задач. В інженерних задачах електромеханіки стаціонарність випадкових процесів і у широкому, і у вузькому розумінні збігається, а тому ми не будемо ускладнювати матеріал введенням багатовимірних функцій розподілу цих процесів.

У класі стаціонарних випадкових процесів $X(t)$ виділяють підклас

ергодичних, для яких усереднення на множині значень x дає той же результат, що й усереднення в часі t .

Це означає, що математичне очікування m_x та дисперсію D_x ергодичного випадкового процесу $X(t)$ можна отримати не лише за допомогою формул (5.18), (5.19), але і за допомогою формул, набагато простіших за структурою обчислень:

$$m_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt, \quad (5.22)$$

$$D_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (x(t) - m_x)^2 dt. \quad (5.23)$$

Одразу ж зазначимо, що всі стаціонарні випадкові процеси, з якими під час розв'язання практичних професійних задач мають справу інженери-електромеханіки, є ергодичними, а тому формули (5.22), (5.23) для обчислення очікуваного середнього значення процесу m_x та характеристики його відхилень від середнього значення очікуваної дисперсії D_x є основними у теоретичному плані.

Але у практиці розрахунків використовуються дещо інші формули:

$$m_x^* = \frac{1}{T} \int_0^T x^*(t) dt, \quad (5.24)$$

$$D_x^* = \frac{1}{T} \int_0^T (x^*(t) - m_x)^2 dt, \quad (5.25)$$

за якими знаходяться статистична оцінка m_x^* математичного очікування m_x ергодичного випадкового процесу $X(t)$ та статистична оцінка D_x^* дисперсії D_x цього процесу з використанням однієї, але достатньо інформативної реалізації $x^*(t)$ випадкового процесу $X(t)$, зафіксованої на відрізку часу T .

Очевидно, що оцінки m_x^* та D_x^* теж є випадковими величинами, залежними від довжини T реалізації $x^*(t)$, але, зрозуміло, що дисперсія цих оцінок є набагато меншою у порівнянні із дисперсією процесу $X(t)$ і з ростом T наближається до нуля.

Нагадаємо, що до статистичних оцінок числових характеристик випадкових величин математична статистика висуває три вимоги: по-перше, вони повинні бути незміщеними, по-друге, ефективними, а по-третє, переконливими.

Вимога незміщеності означає, що з ростом T рано чи пізно значення оцінки точно збіжиться зі значенням відповідної числової характеристики.

Вимога ефективності означає, що із множини різноманітних формул, які можуть бути запропоновані для отримання числового значення оцінки, необхідно вибирати ту, за допомогою якої оцінка визначається з найменшою власною дисперсією.

Вимога переконливості (російською мовою — “состоятельности”) означає, що оцінка з ростом T повинна неперервно наближатись до числової характеристики, що дає право зупиняти обчислення варіантів оцінки, як тільки вони перестають відрізнятись один від одного у заданих межах.

Більш детально ознайомитись із вимогами до статистичних оцінок числових характеристик випадкових величин можна у будь-якому з посібників із теорії імовірностей та математичної статистики. А у нашому посібнику згадаємо ще лише про те, що мало знайти числове значення статистичної оцінки m_x^* чи D_x^* . Треба обов'язково це значення доповнити визначенням довірчого інтервалу, в який із деякою наперед заданою довірчою імовірністю потрапляє отримане значення статистичної оцінки. Оскільки, ще раз підкреслимо, статистичні оцінки є теж випадковими величинами, то дуже важливо знати, за які межі вони не вийдуть, якщо ми будемо нарощувати масиви інформації, що використовуються у розрахунках.

За тим, як розраховуються довірчі інтервали для оцінок числових ха-

рактик випадкових величин, відсилаємо до навчальних посібників з математичної статистики.

Декілька корисних порад.

Порада перша. Якщо, зафіксувавши реалізацію неперервного випадкового процесу $x(t)$, ви бачите (див. рис. 5.5), що вона не виходить за межі деякої смуги, границі якої проходять паралельно осі часу, і досить часто наближається до обох границь, то можете не сумніватись у тому, що процес $X(t)$ є не лише стаціонарним, але й ергодичним.

Порада друга. Для грубої оцінки середнього значення m_x^* ергодичного процесу $X(t)$ за зафіксованою на відрізку часу T його реалізацією $x(t)$ досить “на око” провести паралельно осі t вісь “квасисиметрії” цієї реалізації (див. рис. 5.5), відстань від якої до осі t і дасть значення оцінки m_x^* з похибкою не більше 5%.

Порада третя. Для грубої оцінки середньоквадратичного відхилення $\sigma_x^* = \sqrt{D_x^*}$ процесу $X(t)$ від середнього значення m_x необхідно ширину смуги Δ_x , за межі якої не виходить реалізація $x(t)$ за умови, що лінія m_x^* проходить центром смуги, розділити на шість, тобто

$$\sigma_x^* = \frac{\Delta_x}{6}. \quad (5.26)$$

Формула (5.26) є наслідком відомого у математичній статистиці “правила трьох сигм”, згідно з яким всі значення нормально-розподіленої величини X з імовірністю 0,997 знаходяться у смузі значень $(m_x - 3\sigma_x, m_x + 3\sigma_x)$.

Нагадаємо, що *нормально-розподіленою* (гауссівською) називається така випадкова величина, густина імовірностей якої задається законом:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - m_x}{\sigma_x} \right)^2}. \quad (5.27)$$

Порада четверта. Якщо для подальших розрахунків потрібне якомога точніше значення оцінки m_x^* , то, вибравши по можливості якомога менший інтервал квантування часу Δ_t (див. рис. 5.5), сформууйте з реалізації $x(t)$ решітчасту функцію $x(k \cdot \Delta_t) = x_k$, середнє значення якої знаходиться за допомогою виразу, що є дискретним аналогом (5.24), а саме:

$$m_x^* = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k, \quad (5.28)$$

де $N = \frac{T}{\Delta_t}$, або

$$m_x^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k. \quad (5.29)$$

Оцінка m_x^* за допомогою формули (5.28) чи (5.29) є незміщеною, ефективною і переконливою.

Порада п'ята. Під час використання решітчастого аналогу x_k ергодичного випадкового процесу $X(t)$ для обчислення оцінки дисперсії за дискретним аналогом формула (5.25) набуває вигляду:

$$D_x^* = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - m_x)^2. \quad (5.30)$$

Оскільки в формулі (5.30) доводиться використовувати не математичне очікування m_x випадкового процесу $X(t)$, якого ми не знаємо, а його статистичну оцінку m_x^* , знайдену за формулою (5.27) чи (5.28), то оцінка дисперсії буде незміщеною, ефективною і переконливою лише тоді, коли вона знаходиться за формулою:

$$D_x^* = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - m_x^*)^2. \quad (5.31)$$

Звичайно, якщо число N є значним, то формули (5.30) та (5.31), у разі використання в обох m_x^* , будуть давати практично один і той же резуль-

тат, але вже при $N = 20$ результати різнитимуться на 5%, а з подальшим зменшенням N ця різниця зростатиме.

5.2. Кореляційні функції та спектральні густини стаціонарних випадкових процесів

Нехай ми маємо сукупність добових реалізацій такого випадкового процесу, як зміна температури зони обмотки статора електричного двигуна конвеєра, яка є функцією струму, що протікає у цій обмотці. Випадковість значень цього процесу залежить від рівномірності подачі та гранулометричного складу того сипучого чи кускового матеріалу, який транспортується цим конвеєром.

Якщо струм зростає, то і температура зони теж зростає. Якщо струм спадає, то з деяким запізненням спадає і температура зони. Очевидно, що від значення температури у зоні у даний момент часу суттєво залежить те її значення, яке вона набуде через одну хвилину. Через 10 хвилин ця залежність уже буде менш помітною. Ще меншим температурний вплив буде через 100 хвилин. А через 1000 хвилин навряд чи є сенс його взагалі оцінювати.

Оскільки, як було зазначено, температурний процес, що розглядається, є випадковим, то безпосередньо оцінити вплив одного його значення на інше неможливо.

Для оцінювання лінійного зв'язку між двома значеннями x_1 , x_2 випадкового процесу $X(t)$ у момент часу t_1 та t_2 математики ввели таку характеристику, як кореляційна функція $K_x(t_1, t_2)$, яку визначають за формулою

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (5.32)$$

де: $f(x_1, x_2, t_1, t_2)$ – двовимірна густина імовірностей випадкового процесу

$X(t)$, котра визначається у моменти часу t_1, t_2 , відносно яких випадковий процес $X(t)$ можна розглядати як систему двох випадкових величин X_1 та X_2 , значеннями x_1 та x_2 яких є значення $x(t_1), x(t_2)$ реалізацій випадкового процесу, зафіксовані у моменти часу t_1, t_2 :

$$f(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (5.33)$$

$F(x_1, x_2, t_1, t_2)$ – двовимірна функція розподілу імовірностей випадкового процесу $X(t)$, яка задає значення імовірності того, що у момент t_1 виконується нерівність $X_1 \leq x_1$, а у момент t_2 виконується нерівність $X_2 \leq x_2$, тобто

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2). \quad (5.34)$$

Слід зазначити, що формула (5.32) грає не стільки практичну, скільки загальнотеоретичну роль, оскільки на практиці ніхто не виконує оцінювання функцій $f(x_1, x_2, t_1, t_2)$ та $F(x_1, x_2, t_1, t_2)$ за експериментальними даними.

Формула (5.32) навіть у теоретичному плані спрощується для стаціонарного випадкового процесу $X(t)$, для якого двовимірна густина $f(\bullet)$ та функція розподілу $F(\bullet)$ імовірностей залежать не від конкретних значень t_1, t_2 моментів часу t , а лише від їх різниці $\tau = t_1 - t_2$, тобто

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, t_1, t_2) = f(x_1, x_2, \tau), \\ F(x_1, x_2, t_1, t_2) = F(x_1, x_2, \tau). \end{cases} \quad (5.35)$$

З урахуванням (5.35), формула для кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ набуває вигляду:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \quad (5.36)$$

Але і формулу (5.36) у практичних розрахунках теж не використовують, оскільки оцінку двовимірної густини імовірностей $f(x_1, x_2, \tau)$ за

експериментальними даними визначати непросто. Набагато простішим є визначення кореляційної функції $K_x(\tau)$ стаціонарного випадкового процесу $X(t)$ з використанням властивості ергодичності, згідно з якою оцінка кореляційної функції $K_x^*(\tau)$ може бути визначена за допомогою формули

$$K_x^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x^*(t) \cdot x^*(t+\tau) dt, \quad (5.37)$$

де T – відрізок часу, протягом якого фіксується реалізація $x^*(t)$ випадкового процесу $X(t)$.

Математиками доведено, що для ергодичного випадкового процесу

$$K_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} K_x^*(\tau), \quad (5.38)$$

що дає право за оцінку $K_x^*(\tau)$ кореляційної функції $K_x(\tau)$ брати будь-яку функцію, отриману за допомогою формули (5.37).

Очевидно, що чим більшим є значення T , тим точніше оцінка $K_x^*(\tau)$ відображає кореляційну функцію $K_x(\tau)$.

Аналізуючи формулу (5.37), бачимо, що для отримання значення оцінки $K_x^*(\tau)$ кореляційної функції $K_x(\tau)$ ергодичного випадкового процесу $X(t)$ для значення τ_1 параметра τ при реалізації $x^*(t)$ цього процесу (рис. 5.6, а) необхідно, зсунувши цю реалізацію на відрізок часу $t = \tau_1$ (рис. 5.6, б), перемножити одна на одну на відрізку $[\tau_1, T]$ основну та “зсунуту” реалізації $x^*(t)$, знайти площу під кривою, яка є результатом цього перемноження, і поділити отриману площу на довжину відрізка інтегрування $T - \tau_1$.

Зрозуміло, що з ростом τ точність визначення значень $K_x^*(\tau)$ зменшується, оскільки зменшується інтервал “перекриття” основної та “зсунутої” на відрізок τ реалізації $x^*(t)$, що у разі використання чисельних мето-

дів приводить до зменшення кількості значень випадкового процесу $X(t)$, які беруть участь у формуванні підінтегрального виразу у формулі (5.37).

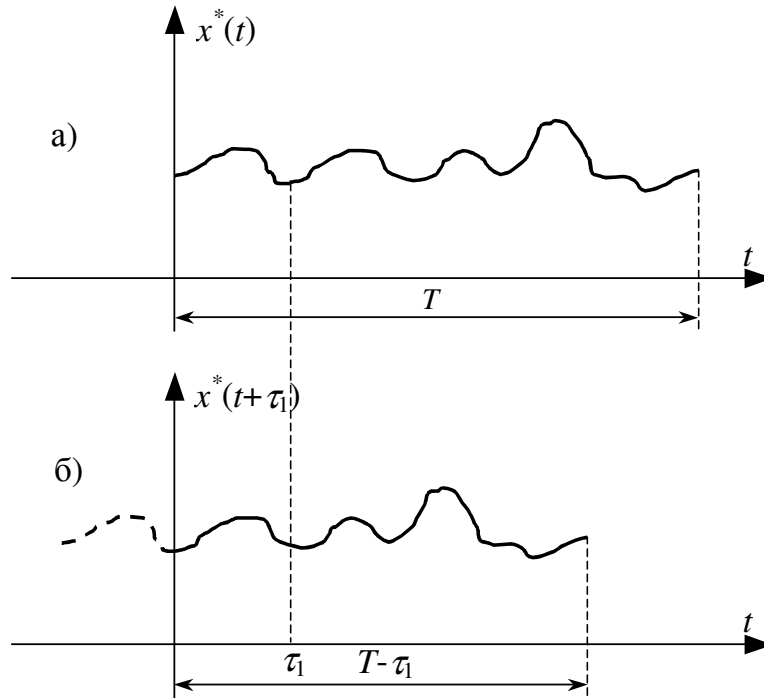


Рис. 5.6. Геометрична інтерпретація формування підінтегрального виразу у формулі (5.37)

Оскільки результати інтегрування у формулі (5.37) не залежать від того, вправо чи вліво на τ “зсувається” реалізація $x^*(t)$, то справедливим є вираз

$$K_x(\tau) = K_x(-\tau), \quad (5.39)$$

який констатує той факт, що кореляційна функція випадкового процесу є симетричною відносно ординати.

Підставивши у формулу (5.37) $\tau = 0$, отримаємо:

$$K_x^*(0) = \frac{1}{T} \int_0^T (x^*(t))^2 dt. \quad (5.40)$$

Порівнюючи вираз (5.40) з виразом (5.25), бачимо, що при $m_x = 0$ в (5.25) вони дають один і той же результат, тобто

$$K_x^*(0) = D_x^* \quad (5.41)$$

Результатові (5.41) можна дати таку інтерпретацію — значення $K_x(0)$ кореляційної функції $K_x(\tau)$ центрованого ергодичного випадкового процесу $X(t)$ за нульового зсуву $\tau = 0$ дорівнює дисперсії D_x або, що одне і те ж, σ_x^2 .

Нагадаємо, що *центрованим* називається довільний випадковий процес $X(t)$, від усіх значень $x(t)$ якого віднімається його середнє значення $m_x(t)$ (рис. 5.7).

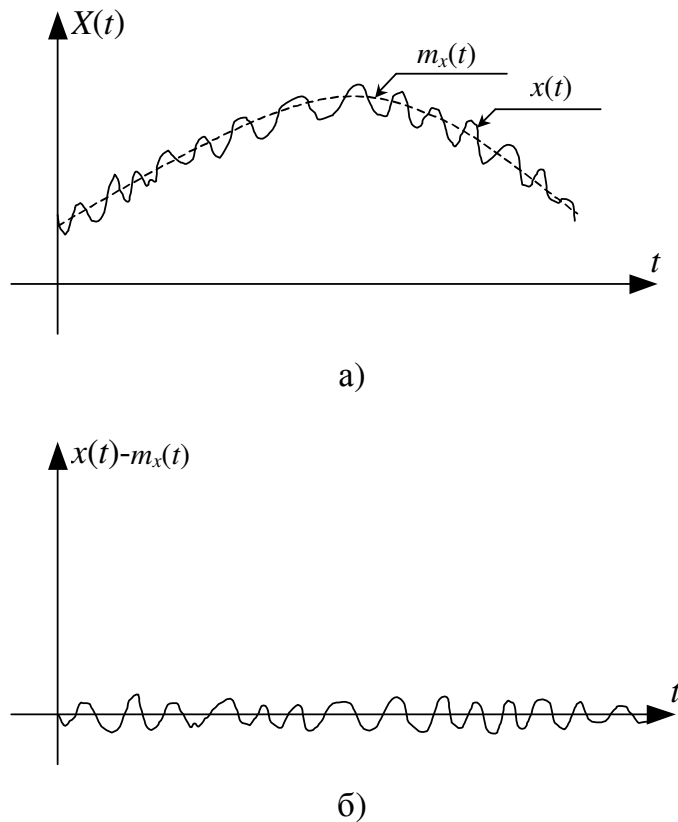


Рис. 5.7. Графічна інтерпретація центрування випадкового процесу

З рис. 5.7 видно, що навіть нестационарний випадковий процес (рис. 5.7, а) у разі його центрування може стати не лише стаціонарним (рис. 5.7, б), але й ергодичним.

Зазначимо, що, як правило, під час розв'язання практичних інженерних задач, оцінки кореляційних функцій визначаються саме для центрова-

них випадкових процесів, для яких у такому випадку майже завжди присутня ергодичність.

При виконанні практичного аналізу центрованих ергодичних випадкових процесів, які мають місце при розв’язанні інженерних задач, найбільше розповсюдження знайшли чотири моделі кореляційних функцій цих процесів, а саме:

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad (5.42)$$

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|), \quad (5.43)$$

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos \beta\tau, \quad (5.44)$$

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \cdot \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau \right). \quad (5.45)$$

Приклади графіків кореляційних функцій, заданих моделями (5.42) та (5.44), показані на рис. 5.8.

Зазначимо, що моделі (5.43) та (5.45) можна інтерпретувати як “розтягувальні” по осі τ для моделей (5.42) та (5.44).

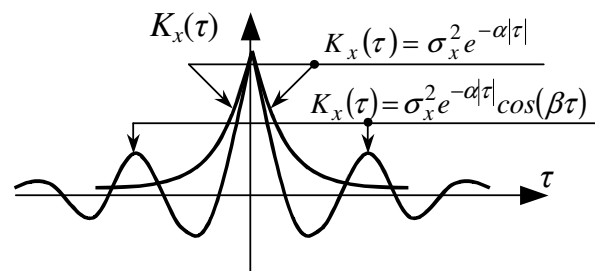


Рис. 5.8. Приклади графіків кореляційних функцій ергодичних випадкових процесів

А тепер розглянемо такий специфічний технологічний об’єкт, як кульовий млин, який використовується для тонкого помолу залізної руди перед подальшим збагаченням її у флотаційній машині.

Кульовим млином є циліндр, на третину заповнений металевими кулями, який має вхідний отвір для подачі подрібненої залізної руди та вихідний отвір для відбору тієї ж залізної руди, але перетертої на пил металевих куль.

вими кулями під час їх хаотичного переміщення разом із залізною рудою внаслідок обертання циліндра навколо повздовжньої осі за допомогою потужного електропривода.

Очевидно, що зміна в часі і гранулометричного складу $X(t)$ подрібненої залізної руди на вході млина, і струму якоря його приводного електродвигуна $Y(t)$ є випадковими процесами, які в усталеному режимі роботи млина можна вважати не лише стаціонарними, але й ергодичними.

Очевидним є і те, що лише середнє значення струму $Y(t)$ функціонально залежить від середнього значення гранулометричного складу $X(t)$, а кожне конкретне значення процесу $Y(t)$ функціонально зв'язати з конкретними значеннями процесу $X(t)$ не можна, оскільки на випадковість значень $Y(t)$ суттєво впливає не лише процес $X(t)$, але і внутрішній процес постійних змін самої структури кульового млина, викликаний як переміщенням металевих куль одна відносно одної та стінок циліндричного барабана, так і переміщенням шматочків руди між кулями та між собою.

Тож для характеристики усередненого лінійного зв'язку між значеннями випадкового процесу $X(t)$ у часовому перерізі t_1 та випадкового процесу $Y(t)$ у часовому перерізі t_2 (рис. 5.9) математики вводять таку характеристику, як взаємна кореляційна функція $K_{yx}(t_1, t_2)$, для якої справедливим є вираз

$$K_{yx}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot y_2 \cdot f(x_1, y_2, t_1, t_2) dx_1 dy_2, \quad (5.46)$$

де

$$f(x_1, y_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, y_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial y_2}, \quad (5.47)$$

$$F(x_1, y_2, t_1, t_2) = P(X(t_1) \leq x_1, Y(t_2) \leq y_2) \quad (5.48)$$

— відповідно, двовимірні взаємні густина $f(\bullet)$ та функція розподілу $F(\bullet)$ імовірностей процесів $X(t)$ та $Y(t)$.

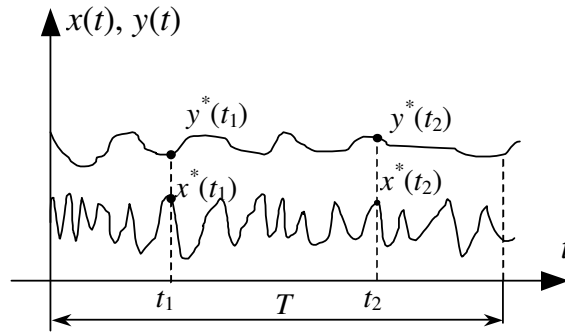


Рис. 5.9. Графіки реалізацій $x^*(t)$, $y^*(t)$ взаємопов'язаних випадкових процесів $X(t)$, $Y(t)$, зафіксованих на проміжку часу T

Для стаціонарних випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$ за аналогією з (5.34) – (5.36) маємо:

$$\begin{cases} f(x_1, y_2, t_1, t_2) = f(x_1, y_2, \tau), \\ F(x_1, y_2, t_1, t_2) = F(x_1, y_2, \tau), \end{cases} \quad (5.49)$$

$$K_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot y_2 \cdot f(x_1, y_2, \tau) dx_1 dy_2, \quad (5.50)$$

а для ергодичних випадкових процесів за аналогією з (5.37), (5.38):

$$K_{yx}^*(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} y^*(t) \cdot x^*(t + \tau) dt, \quad (5.51)$$

$$K_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} K_{yx}^*(\tau). \quad (5.52)$$

Приклади графіків можливих взаємних кореляційних функцій центрованих ергодичних процесів $X(t)$, $Y(t)$ наведені на рис. 5.10.

Зсув максимуму взаємної кореляційної функції $K_{yx}(\tau)$ на відрізок τ^* вправо від осі ординат характеризує той відрізок часу, на який запізнюється поява на виході системи процесу $Y(t)$ відносно процесу $X(t)$, котрий його викликав, оскільки значення реакції системи найкраще корелюється саме з тим значенням вхідного процесу, яке його викликало.

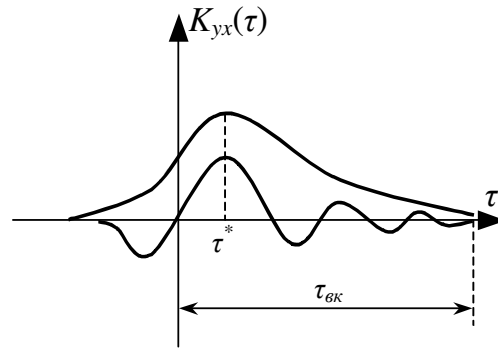


Рис. 5.10. Приклади графіків взаємних кореляційних функцій центрованих ергодичних процесів

Тобто, τ^* можна використовувати як одну з характеристик інерційних властивостей системи, що продукує процес $Y(t)$ у відповідь на вхідний для неї процес $X(t)$. Якщо застосувати до кореляційної функції $K_x(\tau)$ перетворення Фур'є, тобто взяти інтеграл

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (5.53)$$

тоді отримаємо іншу характеристику стаціонарного випадкового процесу, яку називають його *спектральною густиною* $S_x(\omega)$, оскільки вона характеризує ширину спектра частот гармонічних складових з випадковими значеннями амплітуди і фази, сукупністю яких можна задати даний процес.

Для прикладу отримаємо спектральну густину стаціонарного випадкового процесу $X(t)$, який має кореляційну функцію (5.42).

Підставивши (5.42) у (5.43), отримаємо:

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 \sigma_x^2 e^{\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \sigma_x^2 \int_{-\infty}^0 e^{\tau(\alpha-j\omega)} d\tau + \sigma_x^2 \int_0^{\infty} e^{-\tau(\alpha+j\omega)} d\tau = \frac{\sigma_x^2}{\alpha-j\omega} e^{\tau(\alpha-j\omega)} \Big|_{-\infty}^0 + \\ &+ \frac{\sigma_x^2}{-(\alpha+j\omega)} e^{-\tau(\alpha+j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{\sigma_x^2}{\alpha-j\omega} + \frac{\sigma_x^2}{\alpha+j\omega} = \frac{2\sigma_x^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Аналізуючи вирази (5.42) та (5.54) разом, бачимо, що чим більшим є

значення α , тим швидше “загасає” кореляційна функція $K_x(\tau)$ і тим повільніше “загасає” спектральна густина $S_x(\omega)$, тобто, чим менше значень випадкового процесу $X(t)$ корелюються між собою, тим більше необхідно гармонічних складових для адекватного віддзеркалення цього процесу у частотній області. На рис. 5.11 показані два графіки кореляційних функцій $K_x(\tau)$ при $\sigma_x^2 = 1$ та $\alpha = 1$ і $\alpha = 2$ (рис. 5.11, а), а також два графіки спектральних густин $S_x(\omega)$ для цих же значень σ_x^2 і τ (рис. 5.11, б).

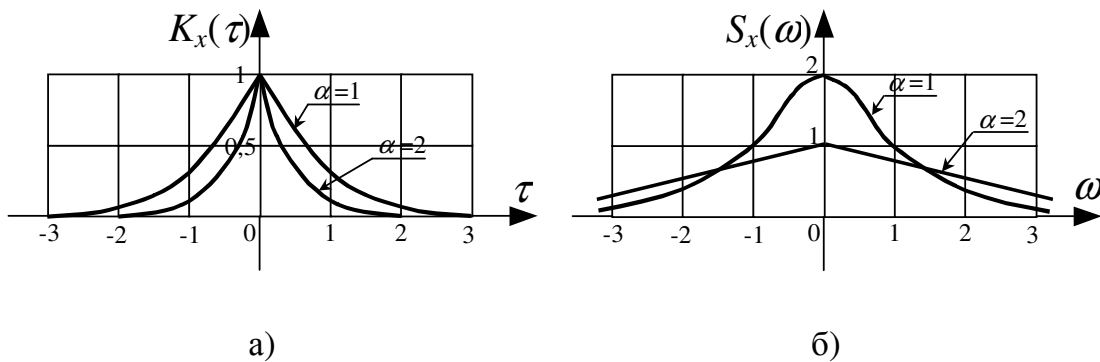


Рис. 5.11. Приклади графіків кореляційних функцій $K_x(\tau)$ стаціонарних випадкових процесів та їх спектральних густин $S_x(\omega)$

Очевидно, що, перетворюючи за Фур'є взаємну кореляційну функцію $K_{yx}(\tau)$ стаціонарних випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$, ми отримаємо взаємну спектральну густину $S_{yx}(j\omega)$ цих процесів, тобто

$$S_{yx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{yx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (5.55)$$

яка, на жаль, вже буде комплексною функцією, оскільки підінтегральна функція у (5.55) $K_{yx}(\tau)$ не є симетричною відносно осі ординат.

Особливу роль під час аналізу випадкових процесів має стаціонарний процес $X(t)$ з нульовим середнім $m_x = 0$, жодна із гармонічних складових якого не корелюється ні з якою іншою складовою, крім самої себе.

Кореляційну функцію такого процесу можна задати у вигляді

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 \delta(\tau), \quad (5.56)$$

де $\delta(t)$ – дельта-функція Дірака, яка має такі властивості:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{якщо } t = 0, \\ 0, & \text{якщо } t \neq 0, \end{cases} \quad (5.57)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (5.58)$$

Якщо підставити (5.56) у (5.53), то отримаємо:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x^2 \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \sigma_x^2 e^{-j\omega \cdot 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = \sigma_x^2. \quad (5.59)$$

Із (5.59) випливає, що спектр цього процесу є рівномірним від $-\infty$ до $+\infty$, тобто у сигналі присутні всі частоти з амплітудами випадковими, але такими, які забезпечують дисперсію процесу в усіх часових перерізах на рівні σ_x^2 .

Процес із визначеними у такий спосіб властивостями називають *білим шумом*.

Пропускаючи білий шум через фільтр із заданими параметрами, що формують глибину кореляції складових, ми можемо сформуванати випадковий процес з будь-якими наперед заданими властивостями, тобто із білого шуму за допомогою частотного фільтра виділяти будь-який “колір”.

Як це зробити практично, буде показано у наступному розділі.

5.3. Ідентифікація лінійних неперервних стохастичних ЕМП з зосередженими параметрами за допомогою рівняння Вінера – Хопфа

Нехай в лінійній неперервній системі з невідомими, але зосередженими параметрами має місце стохастичний електромеханічний процес, обумовлений дією на її вході ергодичного стаціонарного випадкового сигналу $X(t)$ (рис. 5.12).



Рис. 5.12. Зображення електромеханічної системи у вигляді “чорного ящика”

Зрозуміло, що вихідний сигнал $Y(t)$ системи теж буде ергодичним стаціонарним процесом.

Припустимо, що нам вдалося зафіксувати реалізації $x^*(t)$ $y^*(t)$ випадкових процесів $X(t)$, $Y(t)$ на одному і тому ж проміжку часу T (див. рис. 5.9). Незалежно від характеру сигналів $x(t)$, $y(t)$, для реалізацій $x^*(t)$, $y^*(t)$ є справедливою згортка

$$y^*(t) = \int_0^{\infty} x^*(t-\theta)g(\theta)d\theta, \quad (5.60)$$

де $g(t)$ – вагова (імпульсна перехідна) функція лінійної неперервної системи з зосередженими параметрами, для якої $x(t)$ є вхідним, а $y(t)$ – вихідним сигналами.

Якщо рівняння (5.60) є справедливим для довільного моменту часу t , то воно залишається справедливим і для моменту часу $t + \tau$, тобто

$$y^*(t + \tau) = \int_0^{\infty} x^*(t + \tau - \theta)g(\theta)d\theta. \quad (5.61)$$

Помножимо обидві частини рівняння (5.61) на $x^*(t)$ і проінтегруємо їх у межах від нуля до $T - \tau$, розділивши результат інтегрування на $T - \tau$. Внаслідок цих дій отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} y^*(t + \tau) \cdot x^*(t) dt = \\ & = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} \left(\int_0^{\infty} x^*(t + \tau - \theta)g(\theta)d\theta \right) \cdot x^*(t) dt. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Порівнюючи ліву частину рівняння (5.62) з виразом (5.51), бачимо, що це є оцінка $K_{yx}^*(\tau)$ взаємної кореляційної функції ергодичних випадкових процесів $X(t)$, $Y(t)$.

Як відомо з курсу математики, порядок інтегрування у подвійних інтегралах можна міняти місцями, оскільки ця операція є лінійною.

З урахуванням цих двох зауважень перепишемо рівняння (5.62) таким чином:

$$K_{yx}^*(\tau) = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x^*(t+\tau-\theta) \cdot x^*(t) dt \right] g(\theta) d\theta. \quad (5.63)$$

Порівнюючи вираз, що стоїть у квадратних дужках у правій частині (5.63), з рівнянням (5.37), бачимо, що це є оцінка $K_x^*(\tau-\theta)$ кореляційної функції ергодичного випадкового процесу $X(t)$. З урахуванням цього зауваження перепишемо рівняння (5.63) таким чином:

$$K_{yx}^*(\tau) = \int_0^{\infty} K_x^*(\tau-\theta) g(\theta) d\theta. \quad (5.64)$$

У правій частині рівняння (5.64), як і у правій частині рівняння (5.60), теж маємо згортку, але на відміну від стохастичної згортки в (5.60), в (5.64), ми маємо вже детерміновану згортку, оскільки у теоретичному плані кореляційна функція випадкового процесу є, на відміну від нього самого, функцією детермінованою. Рівняння (5.64), яке у різний час незалежно один від одного і різними способами вивели відомі математики Вінер і Хопф, так і називають *рівнянням Вінера – Хопфа*.

Оскільки Вінер прийшов до цього рівняння, розв'язуючи задачу оптимальної фільтрації “зашумленого” сигналу $x(t)$ фільтром із ваговою характеристикою $g(t)$ шляхом мінімізації квадратичного критерію якості J , який має вигляд

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T \left(y^*(t) - \int_0^\infty x^*(t-\theta)g(\theta)d\theta \right)^2 dt, \quad (5.65)$$

то можна стверджувати, що функція $g(t)$, якщо вона знайдена шляхом розв'язання рівняння Вінера – Хопфа (5.64), є не просто одним із розв'язків цього рівняння, а розв'язком оптимальним за квадратичним критерієм якості (5.65).

У першій частині цього посібника показано, що вагова характеристика $g(t)$ неперервної лінійної системи з зосередженими параметрами є однією із форм подання математичної моделі цієї системи, а тому, визначаючи цю характеристику шляхом розв'язання рівняння Вінера – Хопфа (5.64), ми тим самим розв'язуємо задачу ідентифікації неперервної лінійної динамічної системи з зосередженими параметрами, в якій протікає стохастичний процес.

Способів розв'язання рівняння (5.64), яке відноситься до класу некоректних, існує дуже багато.

Найпростішим є спосіб розв'язання системи алгебраїчних рівнянь відносно числових значень $g(\theta_0), g(\theta_1), g(\theta_2), \dots, g(\theta_{n-1})$, які формуються з інтегрального рівняння (5.64) переходом від неперервного інтегрування у нескінченних границях до знаходження скінченних сум відносно фіксованих зсувів $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}$, тобто

$$K_{yx}^*(\tau_i) = \sum_{j=0}^{n-1} K_x^*(\tau_i - \theta_j)g(\theta_j)\Delta\theta_j, \quad i = \overline{0, n-1} \quad (5.66)$$

Слід запам'ятати, що для збіжності розв'язку систем рівнянь (5.66) необхідно квантувати час θ і зсув τ рівними відрізками, тобто

$$\Delta\tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i = \Delta\theta_j = \theta_{j+1} - \theta_j, \quad (5.67)$$

$$i = \overline{0, n-1}; \quad j = \overline{0, n-1}.$$

Слід пам'ятати також і про те, що згідно з (5.39)

$$K_x^*(\tau_i - \theta_j) = K_x^*(\theta_j - \tau_i). \quad (5.68)$$

Для того, щоб розв'язати рівняння Вінера – Хопфа (5.64) у частотній області, помножимо його ліву і праву частину на $e^{-j\omega\tau}$ і проінтегруємо у нескінченних границях. Виконавши це, маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{yx}^*(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} K_x^*(\tau - \theta) g(\theta) d\theta \right) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (5.69)$$

Порівнюючи ліву частину рівняння (5.69) з виразом (5.55), бачимо, що це є оцінка взаємної спектральної густини $S_{yx}^*(j\omega)$ випадкових процесів $X(t)$ та $Y(t)$.

У правій частині рівняння (5.69) здійснимо заміну змінних. Покладемо, що

$$\tau - \theta = \lambda. \quad (5.70)$$

Тоді матимемо:

$$\begin{cases} \tau = \lambda + \theta, \\ d\tau = d\lambda. \end{cases} \quad (5.71)$$

З урахуванням цієї заміни перепишемо рівняння (5.69) таким чином:

$$S_{yx}^*(j\omega) = \int_0^{\infty} g(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda. \quad (5.72)$$

Оскільки

$$\int_0^{\infty} g(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta = W(j\omega) \quad (5.73)$$

— це амплітудно-фазова частотна характеристика (АФЧХ) системи, визначення якої здійснено у першій частині посібника, то, з урахуванням виразу (5.53), рівняння (5.72) можна переписати у вигляді

$$S_{yx}^*(j\omega) = W(j\omega) S_x^*(\omega). \quad (5.74)$$

Легко бачити, що розв'язком рівняння Вінера – Хопфа (5.64) у частотній області є вираз

$$W(j\omega) = \frac{S_{yx}^*(j\omega)}{S_x^*(\omega)}, \quad (5.75)$$

який визначає АФЧХ $W(j\omega)$ системи через оцінки спектральних густин $S_x^*(\omega)$, $S_{yx}^*(j\omega)$ випадкових процесів $X(t)$, $Y(t)$, що мають місце на вході та виході цієї системи.

Слід зазначити, що простий за зовнішніми ознаками розв'язок рівняння Вінера – Хопфа у вигляді (5.75) досить серйозні труднощі свого отримання переносить на знаходження аналітичного виразу для оцінки взаємної спектральної густини $S_{yx}^*(j\omega)$ по несиметричній кривій $K_{yx}^*(\tau)$, для якої дуже непросто здійснити зручну для інтегрування при перетворенні за Фур'є аналітичну апроксимацію.

Як буде показано у наступному розділі, найзручнішим способом розв'язання рівняння Вінера – Хопфа є Фур'є-інтегральний метод ідентифікації (ФІМІ), основи якого для детермінованих сигналів систем викладені у першій частині посібника.

5.4. Завдання для самоперевірки

1. Які системи називають стохастичними та чому?
2. Дайте означення випадкового процесу та його реалізації.
3. Що і як задає функція розподілу імовірностей випадкової величини? Які її властивості ви знаєте?
4. Що і як задає густина імовірностей випадкової величини? Які її властивості ви знаєте?
5. Чим відрізняються функції розподілу та густини імовірностей неперервних та дискретних випадкових величин?
6. Що таке математичне очікування випадкової величини? Як знайти його статистичну оцінку?

7. Що характеризує дисперсія випадкової величини? Як знайти її статистичну оцінку? Як пов'язані між собою дисперсія та середнє квадратичне відхилення випадкової величини?

8. Як визначаються математичне очікування та дисперсія випадкового процесу?

9. Який випадковий процес можна вважати стаціонарним?

10. У чому сутність ергодичності стаціонарного випадкового процесу?

11. Як знайти оцінки математичного очікування та дисперсії ергодичного випадкового процесу?

12. Яким вимогам повинні відповідати математичні моделі, які використовуються для визначення числових характеристик випадкових величин? Наведіть формули для визначення оцінки математичного очікування та дисперсії стаціонарного випадкового процесу, які задовольняють ці вимоги.

13. Що характеризує кореляційна функція випадкового процесу? Як вона визначається у загальному вигляді?

14. Як визначити кореляційну функцію стаціонарного випадкового процесу? Як визначити оцінку кореляційної функції ергодичного випадкового процесу?

15. Які ви знаєте найбільш поширені в інженерному аналізі моделі кореляційних функцій ергодичних випадкових процесів?

16. Який зв'язок існує між кореляційною функцією та дисперсією випадкового процесу?

17. Що собою являє операція “центрування” випадкового процесу? Чому дорівнює математичне очікування центрованого процесу?

18. Як визначається взаємна кореляційна функція двох випадкових процесів? Як визначити її статистичну оцінку, якщо процеси ергодичні?

19. Чому максимум взаємної кореляційної функції двох випадкових

процесів має зсув вправо і що можна оцінити, знаючи числове значення цього зсуву?

20. Що характеризує спектральна густина випадкового процесу, і як вона визначається?

21. Що характеризує взаємна спектральна густина двох випадкових процесів, і як вона визначається?

22. Що собою являє “білий” шум, і які його характеристики ви знаєте?

23. Який вигляд має рівняння Вінера – Хопфа? Який спосіб його отримання ви знаєте?

24. Як за допомогою рівняння Вінера – Хопфа здійснити ідентифікацію стохастичної системи у часовому просторі?

25. Що собою являє дельта-функція і які її характеристики ви знаєте?

26. Як за допомогою рівняння Вінера – Хопфа здійснити ідентифікацію стохастичної системи у частотній області? Що ускладнює алгоритм ідентифікації у цій області?

6. ФУР'Є-ІНТЕГРАЛЬНИЙ МЕТОД ІДЕНТИФІКАЦІЇ СТОХАСТИЧНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ЕМП З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

6.1. Вихідні передумови

Вихідних передумов для можливості застосування Фур'є-інтегрального методу ідентифікації (ФІМІ) під час синтезу математичної моделі стохастичного ЕМП повинно виконуватись лише дві, а саме:

1) стохастичний ЕМП повинен відноситись до класу ергодичних, що дає право на використання рівняння Вінера – Хопфа (5.64);

2) кореляційна функція $K_x(\tau)$ вхідного сигналу $x(t)$ та взаємна кореляційна функція $K_{yx}(\tau)$ сигналів $x(t)$ та $y(t)$, де $y(t)$ — реакція ЕМС на вхідний сигнал $x(t)$, повинні забезпечувати можливість подання їх рядами Фур'є.

6.2. Основні розрахункові співвідношення ФІМІ та побудова алгоритму ідентифікації

Нехай τ_{ex} — час взаємної кореляції вхідного $x(t)$ і вихідного $y(t)$ стохастичних сигналів (див. рис. 5.10, 5.12) ЕМС. І нехай виконуються передумови, визначені у підрозд. 2.1.

Тоді на відрізку $[-\tau_{ex}, \tau_{ex}]$ обидві кореляційні функції $K_x(\tau)$ і $K_{yx}(\tau)$ можна розкласти у ряди Фур'є у вигляді:

$$K_x(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\omega_1\tau, \quad (6.1)$$

$$K_{yx}(\tau) = \frac{m_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} m_i \cos i\omega_1\tau + \sum_{i=1}^{\infty} n_i \sin i\omega_1\tau, \quad (6.2)$$

де

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\tau_{\text{ex}}}; \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\begin{cases} a_i \\ m_i \end{cases} = \frac{1}{\tau_{\text{ex}} - \tau_{\text{ex}}} \int_{\tau_{\text{ex}}}^{\tau_{\text{ex}}} \begin{cases} K_x(\tau) \\ K_{yx}(\tau) \end{cases} \cos i\omega_1\tau \, d\tau; \quad (6.3)$$

$$n_i = \frac{1}{\tau_{\text{ex}} - \tau_{\text{ex}}} \int_{\tau_{\text{ex}}}^{\tau_{\text{ex}}} K_{yx}(\tau) \sin i\omega_1\tau \, d\tau. \quad (6.4)$$

Функція $K_x(\tau)$ є парною (див. рис. 5.8), тому її розкладання у ряд Фур'є не містить синусоїд.

Підставляючи ряди (6.1), (6.2) у рівняння Вінера – Хопфа (5.64), після тривіальних перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{m_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} m_i \cos i\omega_1\tau + \sum_{i=1}^{\infty} n_i \sin i\omega_1\tau = \\ & = \frac{a_0}{2} R(0) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i R(i\omega_1) \cos i\omega_1\tau - \sum_{i=1}^{\infty} a_i Q(i\omega_1) \sin i\omega_1\tau, \end{aligned} \quad (6.5)$$

де $R(i\omega_1)$ та $Q(i\omega_1)$ – значення, відповідно, дійсної та уявної характеристик ЕМС, взятих при значеннях частоти ω_1 :

$$\begin{cases} R(i\omega_1) = R(\omega) \Big|_{\omega=i\omega_1}, \\ Q(i\omega_1) = Q(\omega) \Big|_{\omega=i\omega_1}. \end{cases} \quad (6.6)$$

З тотожності (6.5), як наслідок, маємо:

$$\begin{cases} m_i = a_i R(i\omega_1); \quad i = 0, 1, 2, \dots; \\ n_i = -a_i Q(i\omega_1); \quad i = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (6.7)$$

$$\begin{cases} R(i\omega_1) = \frac{m_i}{a_i}; \quad i = 0, 1, 2, \dots; \\ Q(i\omega_1) = -\frac{n_i}{a_i}; \quad i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6.8)$$

Отриманням формул (6.8) закінчується перший етап побудови алгоритму параметричної ідентифікації стохастичних ЕМП за допомогою ФІМІ.

Другий етап побудови алгоритму у цій задачі є ідентичним другому етапу розв'язання задачі, описаної у розд. 4.3 першої частини посібника. Відмінність полягає лише у тому, що $R(i\omega_1)$, $Q(i\omega_1)$ у нашому випадку визначаються за формулами (6.8) цього підрозділу, а не за формулами (4.23), (4.28) першої частини посібника — всі інші формули і дії збігаються, тому немає потреби їх знову наводити.

6.3. Обґрунтування регуляризованих властивостей ФІМІ

Рівняння (5.64) Вінера – Хопфа належить до класу некоректних, тобто таких, в яких малі зміни значень коефіцієнтів можуть призводити до суттєвих змін у значеннях розв'язків.

Для отримання розв'язків таких рівнянь із прийнятною для практичних задач точністю А. Н. Тихонов, а також А. М. Дмитрієв і В. В. Солодовніков запропонували регуляризований та квазірегуляризований алгоритми.

Регуляризація за Тихоновим є швидше математичним мистецтвом, аніж чітким алгоритмом. Отже, використовується вона на практиці в інженерних задачах рідко, хоча дає найбільш точні результати.

Квазірегуляризований алгоритм Дмитрієва – Солодовнікова, оснований на ортогональному методі моментів, застосовується частіше, оскільки, маючи досить просту обчислювальну схему, дає прийнятні для цілей практики результати.

Регуляризована властивість ортогонального методу моментів полягає у процедурі обчислення моментів непарного порядку. Під час їх визначення за допомогою інтегральних формул одночасно здійснюється і фільтрація даних від завад із нульовим середнім. І якби під час розв'язання задач ідентифікації використовувались лише моменти непарного порядку, то ефективність алгоритму, оснований на ортогональному методі момен-

тів, була б не гіршою регуляризувального алгоритму Тихонова за суттєво простішої структури і менших затратах часу на розв'язання задачі. Зниження ж ефективності цього алгоритму пояснюється тим, що разом із моментами непарного порядку він використовує також і моменти парного порядку, для яких характерним є те, що навіть у разі незалежної адитивної завади вони є сумою відповідних моментів сигналу і завади. Тож, тригонометричні ряди Фур'є, під час визначення коефіцієнтів яких завжди здійснюється фільтрація адитивної завади з нульовим середнім, задають більший ступінь регуляризації, ніж будь-яка інша ортогональна система функцій.

Регуляризувальна властивість ФІМІ, який використовує ряди Фур'є, підсилюється додатково ще й тим, що за допомогою критеріальних співвідношень (4.27), (4.28) (підрозд. 4.3 першої частини посібника) під час розв'язання задачі ідентифікації паралельно здійснюється як параметрична оптимізація математичної моделі, так і оптимізація її структури.

Тож можна стверджувати, що для ФІМІ характерна властивість саморегуляризації, завдяки якій цей метод дозволяє отримувати робастні моделі, тобто такі, які дають цілком прийнятні для цілей практики результати за умов використання суттєво “зашумлених” вхідних даних.

6.4. Завдання для самоперевірки

1. У чому полягає основна ідея ФІМІ?
2. Що собою являє рівняння Вінера – Хопфа?
3. Як визначити оцінки кореляційної та взаємної кореляційної функцій стохастичних процесів?
4. Чому ФІМІ можна застосовувати лише у стохастичних системах, яким притаманна властивість ергодичності?
5. Як розкласти кореляційну функцію у ряд Фур'є?

6. Чому кореляційна функція стохастичного процесу розкладається у ряд Фур'є, котрий містить лише косинуси?
7. На якому проміжку часу розкладається у ряд Фур'є взаємна кореляційна функція у разі застосування ФІМІ?
8. Як отримати основні розрахункові співвідношення ФІМІ стохастичних ЕМП?
9. В якому класі моделей динамічних систем необхідно шукати розв'язок за допомогою ФІМІ?
10. Як використати квадратичний критерій у ФІМІ для пошуку оптимальних значень коефіцієнтів моделі?
11. Як у ФІМІ оптимізується структура моделі?
12. Для чого потрібна регуляризація алгоритму ідентифікації?
13. Чому ортогональний метод моментів Дмитрієва – Солодовнікова дає оцінки моделі, які є близькими до оптимальних?
14. У чому полягає регуляризувальна сутність рядів Фур'є?
15. Чому ФІМІ належить до методів ідентифікації, для яких властива саморегуляризація алгоритму?
16. У чому сутність робастних моделей?

7. МОДЕЛІ ТЕХНІЧНОЇ ДІАГНОСТИКИ НА ОСНОВІ СТАТИСТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

7.1. Характеристика задач технічної діагностики

Термін “діагностика” походить від грецького слова “діагносис”, яке перекладається як “визначення” або “розпізнавання”. Тож, “технічна діагностика” — це наука про розпізнавання стану технічної системи.

Мета технічної діагностики — підвищення надійності та ресурсу роботи технічної системи.

Відомо, що найбільш важливим показником надійності системи є відсутність відмов під час її функціонування. Технічна діагностика, завдяки ранньому виявленню дефектів та несправностей, дозволяє усунути причини можливих відмов у процесі технічного обслуговування, що підвищує надійність та ефективність експлуатації, а також дозволяє здійснювати експлуатацію технічної системи за її станом, а не згідно із попередньо складеним графіком ремонтів та заміन складових частин.

Під час експлуатації кожний об’єкт експлуатується згідно з рекомендаціями систем технічної діагностики до певного гранично допустимого для нього робочого стану. За самими обережними прогнозами така експлуатація може принести вигоду, яка еквівалентна вартості приблизно 30% обладнання.

Основна задача технічної діагностики — розпізнавання стану системи, що діагностується, за умов неповної інформації. Її теоретичним фундаментом є загальна теорія розпізнавання образів, яка, у свою чергу, є гілкою кібернетики.

В основу переважної більшості алгоритмів розпізнавання покладені математичні моделі, які встановлюють зв’язок між станами системи і їх відображеннями у простір діагностичних ознак або сигналів, які однозначно характеризують ці ознаки.

Для прийняття обґрунтованих рішень за умов неповної інформації найчастіше використовуються методи статистичної теорії прийняття рішень, які вперше розроблені у теорії радіолокації.

Розв'язання задач технічної діагностики завжди пов'язано із прогнозом надійності на найближчий період експлуатації. Для цієї мети придатні моделі відмов, які вивчаються у теорії надійності.

Слід відзначити, що автори деяких монографій та посібників розглядають технічну діагностику як таку, що складається із двох частин: теорії розпізнавання та теорії контролездатності, розуміючи під останньою властивість об'єкта забезпечити достовірну оцінку його технічного стану і раннє виявлення можливих несправностей на стадії, коли вони ще не проявляють себе як несправності. Ми не будемо дотримуватись такого поділу технічної діагностики на дві частини із двох причин. По-перше, щоб зберегти єдність технічної діагностики як дисципліни, а по-друге, у зв'язку з тим, що інженери спеціальності 7.092203 — “Електромеханічні системи автоматизації та електропривод” займаються експлуатацією та проектуванням систем автоматизації, а не розробкою типів електричних апаратів та електричних машин, що входять до автоматичних систем. Тож вони ніяк не можуть вплинути на контролездатність цього електрообладнання у вказаному розумінні. А тому такі задачі, як розробка засобів та методів отримання діагностичної інформації, до синтезу систем автоматичного контролю включно, ми також віднесемо до задач технічної діагностики.

7.2. Загальна характеристика методів статистичної теорії прийняття рішень

Основна перевага статистичних методів розпізнавання полягає у можливості одночасного врахування ознак різної природи, оскільки вони характеризуються безрозмірними величинами — статистичними оцінками імовірностей появи цих ознак у різних станах системи.

Традиційно вивчення статистичних методів починають з розгляду методу Байєса, який вважається найбільш ефективним за наявності великого обсягу попередньої інформації. Але ми від цієї традиції відійдемо і взагалі не будемо розглядати метод Байєса у зв'язку із суттєвим обмеженням на його застосування для розв'язання задач діагностики силового електрообладнання систем автоматизації.

Це обмеження обумовлено перш за все тим, що чим більшою є потужність електричного двигуна чи силового перетворювача системи, тим менша кількість таких апаратів знаходиться в експлуатації в однакових умовах і тим меншою, як наслідок, є статистика їх аварійних станів.

Другою обмежувальною особливістю методу Байєса є пригнічення або ігнорування діагнозів, які зустрічаються рідко, що неприйнятно для силового електрообладнання великої потужності у зв'язку з можливими наслідками постановки неправильного діагнозу.

А третя особливість методу Байєса, яка дозволяє його не розглядати, полягає у тому, що у найбільш розповсюдженішому випадку, коли через мізерність апріорних даних приймається умова рівності апріорних імовірностей всіх діагнозів, цей метод вироджується у метод максимальної правдоподібності, моделі і алгоритми якого набагато простіші як для розуміння, так і для програмування.

Тож будемо розглядати моделі процесів діагностики лише у множині таких відомих методів статистичної теорії прийняття рішень:

1. Методу мінімального ризику (ММР).
2. Методу максимальної правдоподібності (ММП).
3. Методу мінімальної кількості помилкових рішень (ММКПР).
4. Методу мінімаксу (МММ).

Слід зазначити, що, як правило, у статистичній теорії прийняття рішень, крім вищеперерахованих методів, розглядають ще один метод — метод Неймана – Пірсона. Ми його опускаємо з трьох причин: по-перше, він

є найбільш “радіолокаційним” у порівнянні з наведеними чотирма. По-друге, автори методу рекомендують використовувати його у разі відсутності інформації про ціни помилок у прийнятті рішень, що не є характерним для задач технічної діагностики електрообладнання. А по-третє, цей метод не базується на використанні такого базового поняття статистичної теорії прийняття рішень, як “середній ризик”, що ставить його осторонь від інших методів у методологічному плані.

7.3. Три “кити”, на яких тримається статистична теорія прийняття рішень

Термінологія цієї теорії сформувалась при розв’язанні задач радіолокації, з якої і запозичені три найважливіші поняття, котрі в українському перекладі з російської мови можна інтерпретувати як: “Безпідставна стурбованість”, “Пропуск цілі” і “Правило рішення”.

Демо означення цих понять.

“*Безпідставною стурбованістю*” називають випадок, коли приймається рішення про наявність “цілі”, дефекту чи якоїсь ознаки, а в дійсності нічого цього немає. Цю помилку прийнято називати також помилкою 1-го роду.

“*Пропуском цілі*” називають випадок, коли приймається рішення, що “цілі” немає, у той час, як вона є.

У задачах технічної діагностики замість поняття “ціль” використовують інше поняття — “дефект”, тобто замість “Пропуску цілі” вживають “Пропуск дефекту”. Цю помилку називають помилкою 2-го роду.

Ціни “Безпідставної стурбованості” та “Пропуску дефекту” можуть бути як однаковими, так і різними, в залежності від наслідків.

Зрозуміло, що ціна “Пропуску дефекту” під час діагностики силового електрообладнання великої потужності набагато вища від ціни “Безпідста-

вної стурбованості”, оскільки у першому випадку вона визначається витратами на ліквідацію аварії, а у другому — витратами на проведення зайвої профілактики. Але під час діагностики обладнання малої потужності ціни обох видів помилок можуть бути і однаковими.

“Правило рішення” — це правило, за яким приймається рішення про діагноз. Для кращого розуміння “Правила рішення” розглянемо такий приклад. Нехай здійснюється діагностика стану трансформатора силового перетворювача системи електропривода за концентрацією газів у маслі. Позначимо цей параметр X . Нехай D_1 — справний стан трансформатора, а D_2 — несправний. Для визначення того, в якому стані перебуває трансформатор, застосуємо правило:

$$\begin{cases} X \leq X_0 \Rightarrow X \in D_1, \\ X > X_0 \Rightarrow X \in D_2. \end{cases} \quad (7.1)$$

Читається це так: “якщо виміряна кількість X газів в одиниці об’єму масла трансформатора є меншою від деякого порогового значення її концентрації X_0 , то вважаємо, що значення X визначає справний стан D_1 ; якщо ж $X > X_0$, то вважаємо, що трансформатор знаходиться у несправному стані D_2 ”.

Оскільки стан трансформатора характеризується одним параметром X , то кажуть, що у даному випадку він має одновимірний простір діагностичних ознак, у якому виділяються лише два класи станів — це диференційна діагностика або дихотомія.

Концентрація газів у маслі неоднозначно характеризує стан трансформатора, оскільки немає чітко визначеної межі між станами D_1 і D_2 .

На рис. 7.1 зображені графіки густин імовірностей діагностичного параметра X , позначені $f(X/D_i)$, $i = 1, 2$ для справного D_1 та дефектного D_2 станів, побудова яких здійснюється за відомими методиками, викладеними у посібниках з математичної статистики.

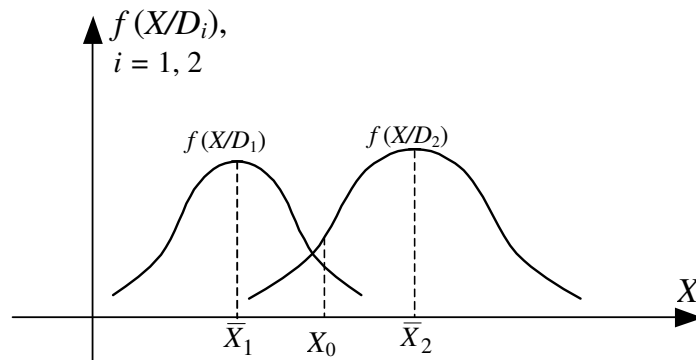


Рис. 7.1. Графіки густин імовірностей $f(X/D_1)$, $f(X/D_2)$ для справного D_1 та несправного D_2 станів трансформатора

Із рис. 7.1 легко бачити, що області станів D_1 і D_2 перетинаються, а тому принципово неможливо вибрати таке значення X_0 , за якого правило (7.1) не давало б помилкових рішень.

Задача полягає у тому, щоб вибір значення X_0 був би в якомусь сенсі найкращим. Саме у цьому виборі значення X_0 , а точніше, у критеріях вибору X_0 , і полягає головна відміна перерахованих вище статистичних методів розпізнавання.

7.4. Математична модель середнього ризику

Позначимо H_{ij} ($i, j = 1, 2$) можливі рішення за правилом (7.1), де перший індекс i відповідає поставленому діагнозу, а другий j — дійсному стану. Тоді:

H_{12} – це “Пропуск дефекту”,

H_{21} – “Безпідставна стурбованість”,

H_{11} , H_{22} – правильні рішення.

Визначимо імовірність “Безпідставної стурбованості” $P(H_{21})$, використавши правило (7.1) і рис. 7.1, тобто розглянемо випадок, коли при

$X > X_0$ об'єкт є справним, але за правилом (7.1) розглядається як дефектний.

Зрозуміло, що умовна імовірність ситуації $X > X_0$ для справних об'єктів буде дорівнювати площі під кривою $f(X/D_1)$ для $X > X_0$, тобто

$$P(X > X_0/D_1) = \int_{X_0}^{\infty} f(X/D_1) dx. \quad (7.2)$$

За принципом перемноження імовірностей імовірність “Безпідставної стурбованості” дорівнює імовірності перетину двох подій, одна з яких полягає в існуванні справного стану D_1 , а друга — у тому, що $X > X_0$, тобто

$$\begin{aligned} P(H_{21}) &= P(D_1 \cap (X > X_0)) = \\ &= P(D_1) \cdot P(X > X_0/D_1) = P_1 \int_{X_0}^{\infty} f(X/D_1) dx, \end{aligned} \quad (7.3)$$

де $P_1 = P(D_1)$ – апіорна імовірність діагнозу D_1 , розрахована за статистичними даними.

Нагадаємо, що якщо раніше під час обстеження N трансформаторів одного типу у N_1 із них спостерігався справний стан D_1 , то як статистичну оцінку $P^*(D_1)$ імовірності $P(D_1)$ можна брати

$$P_1^* = P^*(D_1) = \frac{N_1}{N}. \quad (7.4)$$

За аналогією імовірність “Пропуску дефекту” матиме вигляд:

$$\begin{aligned} P(H_{12}) &= P(D_2 \cap (X < X_0)) = \\ &= P(D_2) \cdot P(X < X_0/D_2) = P_2 \int_{-\infty}^{X_0} f(X/D_2) dx, \end{aligned} \quad (7.5)$$

де $P_2 = P(D_2)$ – апіорна імовірність несправного стану, оцінка якої розраховується за статистичними даними за формулою

$$P_2^* = P^*(D_2) = \frac{N_2}{N}, \quad (7.6)$$

де N_2 – кількість однотипних об’єктів, які виявились несправними під час попереднього обстеження.

Припишемо ціни C_{21} та C_{12} помилкам 1-го та 2-го роду і сконструюємо таку математичну модель:

$$\begin{aligned} R &= C_{21} \cdot P(H_{21}) + C_{12} \cdot P(H_{12}) = \\ &= C_{21} \cdot P_1 \int_{X_0}^{\infty} f(X/D_1) dx + C_{12} \cdot P_2 \int_{-\infty}^{X_0} f(X/D_2) dx. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Вираз (7.7) називають середнім ризиком прийняття рішення — він характеризує очікувані втрати, які можуть виникнути внаслідок прийняття саме цього рішення.

Ціни помилок C_{21} і C_{12} повинні враховувати наслідки “Пропуску дефекту” і “Безпідставної стурбованості”.

7.5. Метод мінімального ризику (ММР)

У цьому методі параметр X_0 правила рішення (7.1) знаходять з умови мінімуму середнього ризику R , тобто з умови

$$\frac{dR}{dX_0} = 0. \quad (7.8)$$

Підставляючи значення R із (7.7) у рівняння (7.8), отримаємо:

$$-C_{21}P_1f(X_0/D_1) + C_{12}P_2f(X_0/D_2) = 0. \quad (7.9)$$

Для отримання (7.9) використано, по-перше, те, що похідна від інтеграла зі змінною верхньою границею дорівнює підінтегральній функції, в якій замість змінної інтегрування підставляється верхня границя інтеграла, а по-друге, те, що за попарної зміни місця границь інтегрування, інтеграл змінює знак на протилежний.

З рівняння (7.9) маємо:

$$\frac{f(X_0/D_1)}{f(X_0/D_2)} = \frac{C_{12}P_2}{C_{21}P_1}. \quad (7.10)$$

За визначених за формулами (7.4), (7.6) значеннях імовірностей P_1 , P_2 , розрахованих за статистичними даними, та оцінками функцій $f(X/D_1)$, $f(X/D_2)$, назначеними цінами C_{21} , C_{12} , шляхом розв'язання рівняння (7.10) відносно X_0 знаходимо таке його значення, яке, якщо його підставити у правило (7.1), дозволяє приймати рішення про стан об'єкта (D_1 або D_2), виходячи з критерію (7.8) мінімуму середнього ризику.

Про те, що це саме мінімум, можна переконатись з відомої умови

$$\frac{d^2R}{dX_0^2} > 0, \quad (7.11)$$

яка для середнього ризику у формі (7.7) тотожна умові

$$\frac{f'(X_0/D_1)}{f'(X_0/D_2)} < \frac{C_{12}P_2}{C_{21}P_1}. \quad (7.12)$$

7.6. Функція правдоподібності як базова математична модель для методу максимальної правдоподібності (ММП) та методу мінімальної кількості помилкових рішень (ММКПР)

Відношення $\lambda(X)$ умовних густин імовірностей $f(X/D_1)$, $f(X/D_2)$ розподілу випадкової величини X при двох гіпотезах про неї D_1 і D_2 , тобто

$$\lambda(X) = \frac{f(X/D_1)}{f(X/D_2)} \quad (7.13)$$

називають функцією правдоподібності.

Зрозуміло, що

$$\lambda(X_0) = \frac{f(X_0/D_1)}{f(X_0/D_2)} = \lambda_0. \quad (7.14)$$

Порівнюючи (7.10) та (7.14), бачимо, що

$$\lambda_0 = \frac{C_{12}P_2}{C_{21}P_1} > 0. \quad (7.15)$$

У залежності від виду функцій $f(X/D_1)$, $f(X/D_2)$ функція $\lambda(X)$ може мати дві і більше точок екстремуму. За умови одномодальних кривих (див. рис. 7.1) точок екстремуму дві, а значення X_0 лежить у діапазоні

$$\bar{X}_1 < X_0 < \bar{X}_2, \quad (7.16)$$

де \bar{X}_1 , \bar{X}_2 – координати точок максимуму функцій $f(X/D_1)$, $f(X/D_2)$.

З урахуванням виразів, які визначають функцію правдоподібності $\lambda(X)$ та її значення $\lambda(X_0)$ у точці X_0 , правило рішення (7.1) для ММР можна трансформувати до вигляду

$$\begin{cases} \lambda(X) \geq \lambda_0 \Rightarrow X \in D_1, \\ \lambda(X) < \lambda_0 \Rightarrow X \in D_2. \end{cases} \quad (7.17)$$

Перевагою запису правила (7.1) у формі (7.17) є те, що для прийняття рішення про стан об'єкта у цьому випадку навіть не потрібно визначати значення X_0 , тобто не потрібно розв'язувати рівняння (7.10), а достатньо лише визначити за формулою (7.15) значення λ_0 , що набагато простіше.

Якщо стосовно об'єкта, що діагностується, виконуються умови

$$\begin{cases} P_2 \ll P_1, \\ C_{12} \gg C_{21}, \end{cases} \quad (7.18)$$

то можна вважати, що

$$\frac{C_{12}P_2}{C_{21}P_1} \approx 1. \quad (7.19)$$

Це дає нам право покласти, що

$$\lambda_0 = 1. \quad (7.20)$$

У цьому випадку правило рішення (7.17) вироджується у більш просту форму

$$\begin{cases} \lambda(X) \geq 1 \Rightarrow X \in D_1, \\ \lambda(X) < 1 \Rightarrow X \in D_2, \end{cases} \quad (7.21)$$

яка залежить лише від значень функції правдоподібності $\lambda(X)$.

Цей вироджений варіант ММР, в якому рішення приймається за пра-

вилом (7.21), називають методом максимальної правдоподібності (ММП). ММП діє ефективно у задачах діагностики силового електрообладнання великої потужності.

Якщо ж стосовно об'єкта, який діагностується, виконується умова

$$C_{12} = C_{21}, \quad (7.22)$$

то правило рішення (7.17) можна трансформувати до вигляду:

$$\begin{cases} \lambda(X) \geq \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow X \in D_1, \\ \lambda(X) < \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow X \in D_2. \end{cases} \quad (7.23)$$

Цей вироджений випадок ММП, в якому рішення приймається за правилом (7.23), називають методом мінімальної кількості помилкових рішень (ММКПР).

Зрозуміло, що ММКПР доцільно використовувати лише під час діагностики обладнання, яке не виконує відповідальні функції та профілактика якого рівноцінна ліквідації аварійних наслідків.

7.7. Математичні моделі методу мінімаксу (МММ)

Цей метод застосовується для постановки діагнозу за умов, коли відсутні попередні статистичні відомості про імовірності діагнозів D_1 та D_2 , тобто коли немає можливості за формулами (7.4), (7.6) визначити оцінки імовірностей P_1 і P_2 .

Далі розглядається “найгірше співвідношення імовірностей P_1, P_2 ”, яке приводить до найбільшого ризику, і будується процедура пошуку оптимального значення X_0 у такий спосіб, щоб з усіх можливих максимумів ризику забезпечити найменший (мінімальний) — звідси і назва методу.

Окрім параметра X_0 , у МММ у ранг параметра піднімається ще й невідома імовірність P_1 справного стану об'єкта.

Очевидно, що імовірність його несправного стану може бути обчислена за формулою

$$P_2 = 1 - P_1. \quad (7.24)$$

Підставляючи (7.24) у вираз для середнього ризику (7.7), отримуємо:

$$R(X_0, P_1) = C_{21} \cdot P_1 \int_{X_0}^{\infty} f(X/D_1) dx + C_{12} \cdot (1 - P_1) \int_{-\infty}^{X_0} f(X/D_2) dx. \quad (7.25)$$

Щоб знайти так звану “сідлову точку”, тобто точку з координатами (X_0^*, P_1^*) , яка відповідає вимогам мінімаксу, необхідно взяти частинні похідні від ризику (7.25) по X_0 та P_1 , прирівняти їх нулю

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial X_0} = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial P_1} = 0 \end{cases} \quad (7.26)$$

і розв’язати цю систему, попередньо привівши її до вигляду

$$\begin{cases} \frac{f(X_0/D_1)}{f(X_0/D_2)} = \frac{C_{12}(1 - P_1)}{C_{21}P_1}, \\ C_{21} \int_{X_0}^{\infty} f(X/D_1) dx = C_{12} \int_{-\infty}^{X_0} f(X/D_2) dx \end{cases} \quad (7.27)$$

відносно X_0 та P_1 .

Покажемо, як із системи (7.27) знайти координати X_0^*, P_1^* , які забезпечують умову мінімаксу ризику R . Це означає, що буде знайдено таке значення X_0 , яке для найменш сприятливого значення P_1 , котре дорівнює P_1^* , забезпечить мінімальні втрати розпізнавання, тобто найменше значення ризику R .

Оскільки друге рівняння системи (7.27) не залежить від P_1 , то зрозуміло, що процедуру розв’язання системи (7.27) необхідно починати з розв’язання цього рівняння відносно X_0 . Для цього подамо його у вигляді

$$Y(X_0) = 0, \quad (7.28)$$

де

$$Y(X_0) = C_{21} \int_{X_0}^{\infty} f(X/D_1) dx - C_{12} \int_{-\infty}^{X_0} f(X/D_2) dx. \quad (7.29)$$

Функцію $Y(X_0)$ зручно подати у вигляді

$$Y(X_0) = C_{21}(1 - F(X_0/D_1)) - C_{12}F(X_0/D_2), \quad (7.30)$$

де $F(X_0/D_1)$, $F(X_0/D_2)$ – функції розподілу випадкової величини X_0 для справного D_1 та несправного D_2 станів об'єкта, котрі пов'язані із густинами імовірностей цієї величини відомими співвідношеннями

$$F(X_0/D_i) = \int_{-\infty}^{X_0} f(X_0/D_i) dx; \quad i = 1, 2. \quad (7.31)$$

Рівняння (7.28) можна розв'язати різними способами. Якщо використувати метод Ньютона, то наступне наближення $X_{0(n)}$ розраховується за відомим попереднім наближенням $X_{0(n-1)}$ за допомогою співвідношення

$$X_{0(n)} = X_{0(n-1)} - \frac{Y(X_{0(n-1)})}{\frac{dY}{dX_0}(X_{0(n-1)})}, \quad (7.32)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

в якому

$$\frac{dY}{dX_0}(X_{0(n-1)}) = -C_{21}f(X_{0(n-1)}/D_1) - C_{12}f(X_{0(n-1)}/D_2). \quad (7.33)$$

За перше наближення $X_{0(0)}$ доцільно взяти

$$X_{0(0)} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2}, \quad (7.34)$$

де \bar{X}_1 , \bar{X}_2 – координати максимумів густин розподілу $f(X/D_1)$, $f(X/D_2)$ (див. рис. 7.1).

Якщо після підстановки $X_{0(n)}$ у рівняння (7.28), його нев'язка $Y(X_{0(n)})$ стає меншою за абсолютною величиною заданої похибки ε , тобто

$$|Y(X_{0(n)})| \leq \varepsilon, \quad (7.35)$$

тоді процес наближень за формулою (7.32) зупиняємо і приймаємо

$$X_0^* = X_{0(n)}. \quad (7.36)$$

Підставляючи значення X_0^* з (7.36) у перше рівняння системи (7.27), знайдемо найменш сприятливе значення P_1^* імовірності справного стану об'єкта:

$$P_1^* = \frac{C_{12} f(X_0^*/D_2)}{C_{21} f(X_0^*/D_1) + C_{12} f(X_0^*/D_2)}. \quad (7.37)$$

Ризик від прийняття такого рішення визначаємо за формулою (7.25), підставляючи у неї знайдені значення X_0^* та P_1^* .

7.8. Приклад розв'язання однієї і тієї ж задачі технічної діагностики різними статистичними методами

Для оцінювання ефективності розглянутих статистичних методів розв'яжемо з використанням їх математичних моделей задачу діагностики стану трансмісії газової турбіни електростанції за вмістом металів у певному об'ємі масла її підшипникових вузлів, який позначимо символом "X".

Відомо, що для справного стану D_1 турбіни середнє значення цього параметра (в грамах на тонну) становить п'ять одиниць, тобто

$$\bar{X}_1 = m_x^{(1)} = 5, \quad (7.38)$$

а середньоквадратичне відхилення від m_x становить дві одиниці, тобто

$$\sigma_x^{(1)} = 2. \quad (7.39)$$

Для несправного стану D_2 підшипникових вузлів турбіни ці параметри становлять, відповідно,

$$\begin{cases} \bar{X}_2 = m_x^{(2)} = 12, \\ \sigma_x^{(2)} = 3. \end{cases} \quad (7.40)$$

Статистика по турбінах цього класу показує, що розподіл випадкової величини X підпорядковується нормальному закону:

$$F(X_0/D_i) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{X_0 - m_x^{(i)}}{\sigma_x^{(i)}}\right), \quad i = 1, 2, \quad (7.41)$$

де $\Phi(X)$ – інтеграл імовірностей:

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^X e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (7.42)$$

Відомо також, що несправний стан трансмісії спостерігався в 10% оглянутих турбін. З постановки задачі випливає, що:

$$P_1 = 0,9; \quad P_2 = 0,1. \quad (7.43)$$

З досвіду відомо, що вартість ремонту турбіни після аварії разом з вартістю збитків від недовипуску електроенергії за час ліквідації аварії є приблизно в 20 разів більшою від вартості її профілактики разом з вартістю збитків від недовипуску електроенергії за час профілактики, тому приймаємо, що

$$\frac{C_{12}}{C_{21}} = 20. \quad (7.44)$$

Тепер у нас є всі дані, необхідні для розв'язання задачі діагностики за допомогою кожного з чотирьох перерахованих вище методів статистичної теорії прийняття рішень.

7.8.1. Розв'язання задачі за допомогою ММР

Визначимо λ_0 :

$$\lambda_0 = \frac{C_{12} \cdot P_2}{C_{21} \cdot P_1} = 20 \cdot \frac{0,1}{0,9} = 2,22. \quad (7.45)$$

З умови задачі:

$$\begin{cases} f(X_0/D_1) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(X_0-5)^2}{2 \cdot 2^2}\right] \\ f(X_0/D_2) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(X_0-12)^2}{2 \cdot 3^2}\right] \end{cases} \quad (7.46)$$

Підставляючи (7.45) і (7.46) у (7.10), отримаємо:

$$\frac{\exp\left[-\frac{(X_0-5)^2}{8}\right]}{\exp\left[-\frac{(X_0-12)^2}{18}\right]} = \frac{2 \cdot 2,22}{3}. \quad (7.47)$$

Після логарифмування виразу (7.47), матимемо:

$$-\frac{(X_0-5)^2}{8} + \frac{(X_0-12)^2}{18} = \ln \frac{2 \cdot 2,22}{3}. \quad (7.48)$$

Це рівняння має один додатний дійсний корінь:

$$X_0 = 7,456. \quad (7.49)$$

Тож, якщо, вимірявши параметр X у процесі експлуатації турбіни, ми отримаємо його значення меншим за 7,456, то будемо вважати стан її трансмісії справним. Якщо ж це значення буде більшим 7,456, тоді стан трансмісії турбіни за критерієм ММР слід відносити до несправного, навіть якщо турбіна продовжує нормально обертатись у своїх підшипникових вузлах.

7.8.2. Розв'язання задачі за допомогою ММП

Оскільки для ММП є справедливою умова (7.20), то рівняння для знаходження X_0 за цим методом отримаємо із (7.48) заміною коефіцієнта 2,22 на 1. Тобто із рівняння

$$-\frac{(X_0-5)^2}{8} + \frac{(X_0-12)^2}{18} = \ln \frac{2}{3} \quad (7.50)$$

для ММП матимемо:

$$X_0 = 8,14. \quad (7.51)$$

7.8.3. Розв'язання задачі за допомогою ММКПР

Оскільки для ММКПР є справедливою умова (7.22), то основне рівняння для знаходження X_0 буде мати вигляд:

$$-\frac{(X_0 - 5)^2}{8} + \frac{(X_0 - 12)^2}{18} = \ln \frac{2 \cdot 0,1}{3 \cdot 0,9}. \quad (7.52)$$

Із цього рівняння маємо:

$$X_0 = 9,79. \quad (7.53)$$

7.8.4. Розв'язання задачі за допомогою МММ

Інтерпретуємо умову (7.44) як:

$$C_{21} = 1, \quad C_{12} = 20. \quad (7.54)$$

Визначимо початкове значення $X_{0(0)}$, виходячи з умови (7.34) та відповідних даних (7.38), (7.40):

$$X_{0(0)} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2} = \frac{5 + 12}{2} = 8,5. \quad (7.55)$$

Використовуючи співвідношення (7.46), (7.55), за допомогою алгоритму (7.32), (7.33) отримаємо:

$$\begin{cases} X_{0(1)} = 6,79; & X_{0(2)} = 5,91; \\ X_{0(3)} = 5,72; & X_{0(4)} = 5,71; \\ X_{0(5)} = 5,707. \end{cases} \quad (7.56)$$

Якщо задатись нев'язкою рівняння (7.28) на рівні $\varepsilon = 0,01$, то вже на четвертому кроці процес наближень можна зупиняти і за X_0^* брати значення $X_{0(4)}$, тобто:

$$X_0^* = 5,71, \quad (7.57)$$

Значення P_1^* знайдемо з виразу (7.37). Підставляючи у цей вираз всі необхідні дані, маємо:

$$P_1^* = 0,61. \quad (7.58)$$

Інтерпретувати результати (7.57), (7.58) можна у такий спосіб — ми отримаємо з усіх максимумів ризику найменший у тому випадку, якщо вважатимемо кожну турбіну, для якої параметр X буде більшим 5,71, несправною і зніматимемо її з експлуатації. Зрозуміло, що у цьому випадку з кожних 100 турбін нам доведеться виводити 39, що, звісно, буде суттєвою перестраховкою.

7.8.5. Узагальнення результатів розв’язання задачі

Результати розв’язання задачі діагностики турбіни всіма чотирма методами зведені до табл. 7.1.

Таблиця 7.1

Результати розв’язання задачі діагностики турбіни

Метод	X_0	$P(H_{21})$	$P(H_{12})$	R
ММР	7,46	0,0984	0,0065	0,229
ММКПР	9,79	0,0074	0,0229	0,467
ММП	8,14	0,0524	0,0098	0,249
МММ	5,71	0,3235	0,0018	0,360

Зазначимо, що імовірності “Безпідставної стурбованості” $P(H_{21})$ та “Пропуску дефекту” $P(H_{12})$ під час складання табл. 7.1 обраховувались за формулами:

$$\begin{cases} P(H_{21}) = P_1 \int_{X_0}^{\infty} f(X/D_1) dx, \\ P(H_{12}) = P_2 \int_{-\infty}^{X_0} f(X/D_2) dx, \end{cases} \quad (7.59)$$

а середній ризик — за формулою (7.7).

Із порівняння результатів бачимо, що ММКПР дає неприйнятне рішення, оскільки і ризик найбільший, і імовірність пропуску дефекту — найбільша. МММ вимагає занадто великого обсягу зняття з експлуатації турбін (порядку 39%). Застосування цього методу виправдане лише у тому випадку, коли відсутні навіть приблизні оцінки апріорної імовірності несправного стану турбін.

А найкращі результати ми отримали за допомогою ММР — і ризик найменший, і прийнятне значення імовірності пропуску дефекту.

7.9. Завдання для самоперевірки

1. Дайте загальну характеристику задач технічної діагностики.
2. У чому перевага статистичних методів розпізнавання?
3. Які методи статистичної теорії прийняття рішень ви знаєте?
4. Що таке “Безпідставна стурбованість”?
5. Дайте означення “Пропуску дефекту”.
6. Чим визначаються ціни “Безпідставної стурбованості” та “Пропуску дефекту”?
7. Сформулюйте “Правило рішення” та дайте його графічну інтерпретацію.
8. Знайдіть імовірність “Безпідставної стурбованості”.
9. Знайдіть імовірність “Пропуску дефекту”.
10. Побудуйте математичну модель середнього ризику.
11. У чому полягає основна ідея методу мінімального ризику? Як виглядає основна математична модель ММР?
12. Запишіть функцію правдоподібності для задачі диференціальної діагностики.
13. Як виглядає “Правило рішення” у разі застосування функції правдоподібності?

14. Як із ММР отримати ММП?
15. За якої умови ММР трансформується у ММКПР?
16. Сутність методу мінімаксу. У чому відміна моделі середнього ризику у МММ від ММР?
17. Як отримати, і який вигляд має основна математична модель у МММ?
18. Побудуйте алгоритм розв'язання задачі технічної діагностики на основі МММ.
19. Продемонструйте процес розв'язання задачі технічної діагностики стану турбіни за допомогою:
 - а) ММР;
 - б) ММП;
 - в) ММКПР;
 - г) МММ.
20. Обґрунтуйте на прикладі розв'язаної задачі переваги та недоліки використаних статистичних методів прийняття рішень.

8. СТОХАСТИЧНІ МОДЕЛІ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВІ ЧАСОВИХ РЯДІВ

8.1. Часові ряди та їх основні характеристики

У першій частині цього посібника та у попередніх розділах другої частини викладені методи побудови математичних моделей ЕМП, придатних для дослідження характеристик цих процесів та синтезу систем автоматичного керування ними.

Але не менш важливою є задача прогнозування розвитку процесу у майбутньому, для розв'язання якої ті математичні моделі, що нами вже розглянуті, непридатні.

На сьогоднішній день найбільш ефективними математичними моделями, за допомогою яких можна прогнозувати розвиток процесів, є ті, під час побудови яких використовуються часові ряди.

Нагадаємо, що часовий ряд — це сукупність значень випадкового процесу, взятих через рівні проміжки часу t . Позначимо цю сукупність символом z_t .

Фактично z_t — це є дискретний у часі випадковий процес.

Задача прогнозу полягає у тому, що, знаючи значення процесу у момент t , ми повинні спрогнозувати його значення у момент $t+l$, де l — час упередження. Щоб відрізнити прогнозне значення процесу від дійсного, дійсне значення часового ряду у момент $t+l$ позначають символом z_{t+l} , а прогнозне значення — символом $z_t(l)$.

Зрозуміло, що точно спрогнозувати значення випадкового процесу, яким є часовий ряд, неможливо у принципі, а тому прогноз здійснюють, домагаючись мінімуму якогось критерію адекватності прогнозової моделі.

Якщо значення t є малим (1, 2 кроки), то одним із таких критеріїв

може бути дисперсія відхилення $z_t(l)$ від z_{t+l} , яка повинна бути для оптимальної моделі прогнозу мінімальною, тобто

$$E\{(z_{t+l} - z_t(l))^2\} \rightarrow \min, \quad (8.1)$$

де E – знак операції математичного очікування.

Як і будь-який інший випадковий процес, часовий ряд z_t може бути стаціонарним (рис. 8.1, а) або нестаціонарним (рис.8.1, б).

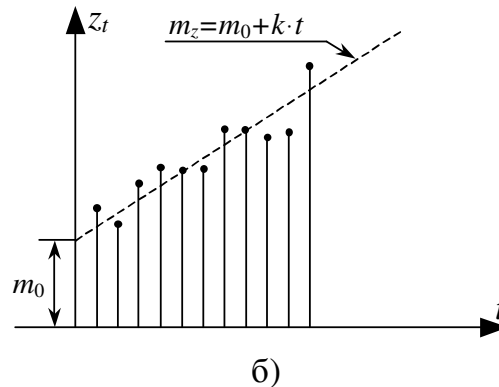
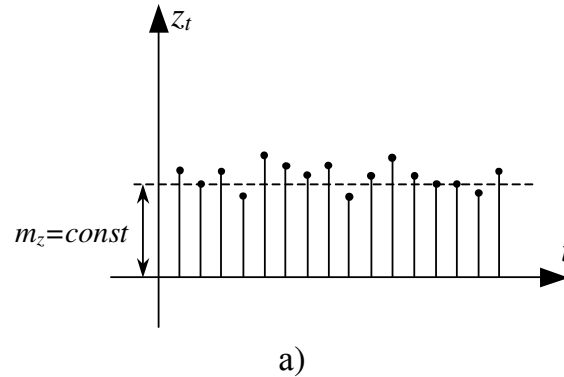


Рис. 8.1. Графіки реалізації стаціонарного (а) та нестаціонарного (б) часових рядів

Для стаціонарного часового ряду характерною є рівновага його значень z_t біля середнього значення m_z , яке є константою.

Для нестаціонарного часового ряду ковшне середнє значення $m_z(t)$ процесу є функцією часу t , як показано на рис. 8.1б.

Введемо ряд корисних операторів, які нам будуть потрібними у подальшому.

1. Оператор B зсуву назад на одну одиницю часу. Цей оператор формує рівняння

$$z_{t-1} = Bz_t. \quad (8.2)$$

Зрозуміло, що згідно з (8.2) справедливим є і рівняння

$$z_{t-2} = Bz_{t-1}. \quad (8.3)$$

Підставляючи значення z_{t-1} із (8.2) в (8.3), отримаємо:

$$z_{t-2} = B(Bz_t) = B^2 z_t. \quad (8.4)$$

Узагальнюючи (8.4), маємо:

$$z_{t-m} = B^m z_t. \quad (8.5)$$

2. Оператор F зсуву вперед на одну одиницю часу. Цей оператор формує рівняння

$$z_{t+1} = Fz_t. \quad (8.6)$$

Зрозуміло, що згідно з (8.6) справедливим є і рівняння

$$z_{t+2} = Fz_{t+1}. \quad (8.7)$$

Підставляючи значення z_{t+1} із (8.6) в (8.7), отримаємо:

$$z_{t+2} = F(Fz_t) = F^2 z_t. \quad (8.8)$$

Узагальнюючи (8.8), маємо:

$$z_{t+m} = F^m z_t. \quad (8.9)$$

3. Різницевий оператор ∇ із зсувом назад на одну одиницю часу. Цей оператор формує рівняння

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1}. \quad (8.10)$$

Підставляючи значення z_{t-1} із (8.2) в (8.10), отримаємо:

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1} = z_t - Bz_t = (1 - B)z_t. \quad (8.11)$$

Із (8.11) бачимо, що

$$\nabla = 1 - B. \quad (8.12)$$

4. Різницевий оператор Δ із зсувом вперед на одну одиницю часу. Цей оператор формує рівняння

$$\Delta z_t = z_{t+1} - z_t. \quad (8.13)$$

Підставляючи значення z_{t+1} із (8.6) в (8.13), отримаємо:

$$\Delta z_t = Fz_t - z_t = (F - 1)z_t. \quad (8.14)$$

Із (8.14) видно, що

$$\Delta = F - 1. \quad (8.15)$$

5. Оператор суми S . Цей оператор формує рівняння

$$Sz_t = z_t + z_{t-1} + z_{t-2} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} z_{t-j}. \quad (8.16)$$

Підставляючи значення z_{t-m} із (8.5) в (8.16), отримаємо:

$$Sz_t = (1 + B + B^2 + \dots)z_t = \frac{1}{1 - B} z_t = (1 - B)^{-1} z_t. \quad (8.17)$$

Примітка 1. Під час виведення співвідношення (8.17) було використано формулу суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії зі знаменником B .

Із співвідношень (8.12) та (8.17) випливає, що

$$Sz_t = \nabla^{-1} z_t \quad (8.18)$$

або

$$S = \nabla^{-1}. \quad (8.19)$$

Таким чином, оператор суми є оберненим різницевому оператору із зсувом назад.

Примітка 2. Для оператора зсуву B справедливим є те, що в алгебраїчних операціях з ним як з числом він за модулем не може перевищувати одиницю.

8.2. Синтез моделі стаціонарного часового ряду на основі лінійного фільтра

Послідовність випадкових імпульсів a_t з нульовим середнім значенням і дисперсією

$$\sigma_a^2 = const, \quad (8.20)$$

розподіленою за нормальним законом, називають дискретним білим шумом.

Спробуємо використати імпульси білого шуму a_t для побудови моделі часового ряду z_t у такий спосіб

$$z_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots, \quad (8.21)$$

де μ – рівень відліку (середнє значення) часового ряду z_t ;

ψ_k , $k = 1, 2, \dots$ – коефіцієнти ваги імпульсів білого шуму, з яким вони входять до суми (8.21).

Здійснимо операцію центрування часового ряду z_t , віднявши від z_t середнє значення μ . Для центрованого часового ряду

$$\tilde{z}_t = z_t - \mu. \quad (8.22)$$

Із (8.21) отримаємо:

$$\tilde{z}_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots. \quad (8.23)$$

Використовуючи для імпульсів a_{t-m} співвідношення (8.5), із (8.23) маємо:

$$\tilde{z}_t = a_t + \psi_1 B a_t + \psi_2 B^2 a_t + \dots = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) a_t. \quad (8.24)$$

Позначимо

$$\Psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots. \quad (8.25)$$

З урахуванням (8.25) співвідношення (8.24) можна записати таким чином:

$$\tilde{z}_t = \Psi(B) a_t. \quad (8.26)$$

Функцію $\Psi(B)$ називають передаточною функцією фільтра, який перетворює послідовність імпульсів білого шуму a_t у часовий ряд з заданими властивостями (рис. 8.2).

Коефіцієнти фільтра ψ_k , $k = 1, 2, \dots$ підбираються у процедурі мінімізації критерію (8.1) при $l = 0$.

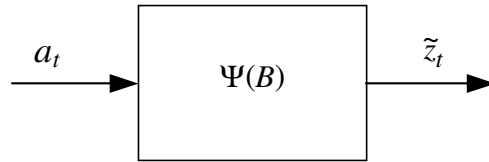


Рис. 8.2. Структурна схема лінійного фільтра

8.3. Модель стаціонарного часового ряду на основі авторегресії

З філософської точки зору модель регресії — це модель “з оглядкою назад, у бік, звідки прийшов” — тобто це модель, яка встановлює значення якоїсь координати процесу у даний момент часу за її незалежними складовими, визначеними у попередній момент. Кількість врахованих складових визначає порядок регресії.

Виходячи з даного трактування, модель авторегресії — це модель, яка встановлює значення якоїсь координати процесу у даний момент часу на основі своїх попередніх значень. Кількість попередніх значень визначається порядком авторегресії.

Для центрованого часового ряду \tilde{z}_t модель авторегресії порядку p (скорочено: $AR(p)$) можна записати у вигляді:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t, \quad (8.27)$$

де a_t — імпульс білого шуму, означення якому дано вище.

З урахуванням співвідношення (8.5) вираз (8.27) можна переписати таким чином:

$$\tilde{z}_t - \phi_1 B \tilde{z}_t - \phi_2 B^2 \tilde{z}_t - \dots - \phi_p B^p \tilde{z}_t = a_t$$

або

$$\Phi(B) \tilde{z}_t = a_t, \quad (8.28)$$

де $\Phi(B)$ — оператор авторегресії порядку p :

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p. \quad (8.29)$$

Визначимо за допомогою тотожності

$$\Phi(B)\Phi^{-1}(B) = \Phi^{-1}(B)\Phi(B) = I, \quad (8.30)$$

в якій I – одиничний оператор; оператор $\Phi^{-1}(B)$ – обернений до оператора $\Phi(B)$.

Помноживши на $\Phi^{-1}(B)$ зліва рівняння (8.28), отримаємо:

$$\Phi^{-1}(B)\Phi(B)\tilde{z}_t = \Phi^{-1}(B)a_t, \quad (8.31)$$

або (з врахуванням (8.30)):

$$I\tilde{z}_t = \Phi^{-1}(B)a_t. \quad (8.32)$$

Оскільки перемноження на одиничний оператор результату не змінює, то (8.32) можна записати і так:

$$\tilde{z}_t = \Phi^{-1}(B)a_t. \quad (8.33)$$

Порівнюючи (8.33) з (8.25), можна стверджувати, що

$$\Psi(B) = \Phi^{-1}(B). \quad (8.34)$$

Отже, отримавши за реалізацією досліджуваного часового ряду z_t оператор авторегресії $\Phi(B)$, що зробити, як буде показано далі, нескладно, та визначивши оператор $\Phi^{-1}(B)$, обернений до $\Phi(B)$, що теж досить просто, ми тим самим одночасно визначаємо і передаточну функцію $\Psi(B)$ лінійного фільтра, який із білого шуму a_t формує потрібний нам часовий ряд z_t .

Звертаємо увагу на те, що у цьому випадку $\Psi(B)$ знаходиться без мінімізації критерію (8.1) при $l = 0$, про що йшла мова в кінці попереднього підрозділу.

Під час розв'язання задачі ідентифікації моделі часового ряду z_t на основі авторегресії порядку p необхідно визначити $p + 2$ невідомих, якими є коефіцієнти $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ оператора $\Phi(B)$, середнє значення μ процесу z_t та дисперсія σ_a^2 білого шуму a_t .

Про те, як розв'язати цю задачу, мова буде йти у підрозділах 8.8, 8.9.

8.4. Модель стаціонарного часового ряду на основі ковзного середнього

В моделі лінійного фільтра (8.22) значення часового ряду z_t визначається через зважену суму поточного та попередніх імпульсів білого шуму a_t .

Характерною особливістю передаточної функції $\Psi(B)$ (8.24) фільтра є те, що теоретично вона має нескінченну кількість членів, що створює певні незручності у разі використання цієї моделі.

Тому цікавою виявилась пропозиція будувати модель часового ряду z_t на основі скінченної множини потужністю q зважених імпульсів білого шуму a_t у вигляді

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}. \quad (8.35)$$

Оскільки у співвідношенні (8.35) використовується q попередніх значень білого шуму a_{t-i} , $i = \overline{1, q}$, які зважено віднімаються від поточного імпульсу a_t , то це співвідношення фактично задає “ковзне середнє”, яке “зміщується” вздовж послідовності a_t з ростом t , утримуючи у собі при “зміщенні” одну і ту ж кількість членів.

Застосовуючи до імпульсів a_{t-m} ідеологію співвідношення (8.5), із (8.35) отримуємо:

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta_1 B a_t - \theta_2 B^2 a_t - \dots - \theta_q B^q a_t, \quad (8.36)$$

або

$$\tilde{z}_t = \Theta(B) a_t, \quad (8.37)$$

де $\Theta(B)$ – оператор ковзного середнього

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \quad (8.38)$$

порядку q .

Співвідношення (8.37), (8.38) задають модель стаціонарного часового ряду z_t у вигляді моделі ковзного середнього порядку q (скорочено: модель КС(q)).

При розв'язанні задачі ідентифікації моделі часового ряду z_t на основі ковзного середнього порядку q необхідно визначити $q + 2$ невідомих, якими є коефіцієнти $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ оператора $\Theta(B)$, середнє значення μ процесу z_t та дисперсія σ_a^2 білого шуму a_t .

8.5. Комбінована модель стаціонарного часового ряду на основі авторегресії – ковзного середнього

В моделі часового ряду z_t на основі авторегресії порядку p у формуванні поточного значення ряду бере участь лише один поточний імпульс білого шуму a_t . Природно допустити, що якщо від цього імпульсу a_t відняти зважену суму q попередніх значень білого шуму, то отримаємо модель, яка буде враховувати більш “тонкі” моменти випадкового процесу і більш адекватно віддзеркалюватиме його властивості, оскільки крім авторегресії ця модель буде враховувати ще й ковзне середнє процесу.

Така модель часового ряду z_t носить назву модель авторегресії – ковзного середнього порядку (p, q) (скорочено: модель АРКС(p, q)) і має вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_t &= \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + \\ &+ a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Перенісши всі члени з \tilde{z}_{t-i} , $i=\overline{1, p}$ у ліву частину рівняння (8.39) та виконавши вже відомі нам перетворення, отримаємо рівняння:

$$\Phi(B)\tilde{z}_t = \Theta(B)a_t, \quad (8.40)$$

в якому оператори $\Phi(B)$ та $\Theta(B)$ визначаються формулами (8.29), (8.38).

Рівняння (8.40) і є основною формою моделі часового ряду z_t на основі АРКС(p, q).

Для ідентифікації цієї моделі необхідно визначити $p + q + 2$ невідомих, якими є коефіцієнти $\phi_i, i = \overline{1, p}$ оператора $\Phi(B)$, коефіцієнти $\theta_j, j = \overline{1, q}$ оператора $\Theta(B)$, середнє значення μ процесу z_t та дисперсія σ_a^2 білого шуму a_t .

8.6. Модель нестационарного часового ряду на основі авторегресії – проінтегрованого ковзного середнього

Всі моделі часових рядів, що побудовані у попередніх підрозділах, базувались на умові стаціонарності цих рядів. Але у повсякденному житті ми постійно стикаємося і з нестационарними випадковими процесами. Наприклад, процес пуску потужного електропривода, який працює на навантаження випадкового характеру (екскавація, конвеєрна доставка кускової руди з шахти, перемелювання рудних матеріалів у дробарках та млинах тощо), має досить суттєві проміжки нестационарності.

Покажемо, що такі нестационарні випадкові процеси, які при їх дискретизації перетворюються на часові ряди, можна досить адекватно описувати за допомогою моделі авторегресії – проінтегрованого ковзного середнього.

Припустимо, що у моделі АРКС(p, q), поданій виразом (8.40), оператор $\Phi(B)$ має d кратних коренів, що дорівнюють одиниці.

У цьому випадку, згідно з теоремою Вієта, оператор $\Phi(B)$ можна записати у вигляді

$$\Phi(B) = (1 - B)^d \cdot (1 - \phi_1^* B - \phi_2^* B^2 - \dots - \phi_l^* B^l), \quad (8.41)$$

де

$$d + l = p. \quad (8.42)$$

Позначимо

$$\Phi^*(B) = 1 - \phi_1^* B - \phi_2^* B^2 - \dots - \phi_l^* B^l. \quad (8.43)$$

З урахуванням (8.41) та (8.43) рівняння (8.40) можна переписати так:

$$\Phi^*(B) \cdot (1 - B)^d \tilde{z}_t = \Theta(B) a_t. \quad (8.44)$$

Оскільки згідно з (8.12)

$$(1 - B)^d = \nabla^d, \quad (8.45)$$

тобто $(1 - B)^d$ є різницевим оператором із зсувом назад порядку d , то рівняння

$$(1 - B)^d z_t = \nabla^d z_t \quad (8.46)$$

задає нову змінну w_t , яка пов'язана з z_t співвідношенням

$$w_t = \nabla^d z_t. \quad (8.47)$$

Підставляючи (8.47) у рівняння (8.44), отримуємо:

$$\Phi^*(B) w_t = \Theta(B) a_t. \quad (8.48)$$

Очевидно, що (8.48) задає модель АРКС(l, q) відносно w_t , яке можна переписати і так

$$\begin{aligned} w_t = & \phi_1^* w_{t-1} + \phi_2^* w_{t-2} + \dots + \phi_l^* w_{t-l} + \\ & + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}. \end{aligned} \quad (8.49)$$

Рівняння (8.47), (8.48) задають модель нестационарного часового ряду z_t у вигляді авторегресії – проінтегрованого ковзного середнього порядку (l, q, d). Скорочено: модель АРПКС(l, q, d).

Звертаємо увагу на те, що вже перша різниця ∇z_t значень будь-якого нестационарного часового ряду z_t має менший ступінь нестационарності, ніж сам часовий ряд z_t . Ще менший ступінь нестационарності матиме друга різниця $\nabla^2 z_t$, яка є різницею перших різниць $\nabla(\nabla z_t)$ цього часового ряду z_t .

Підвищуючи порядок d різниці $\nabla^d z_t$, ми рано чи пізно дійдемо до

такого її значення w_t , яке вже являтиме собою стаціонарний часовий ряд відносно w_t . На рис. 8.3 дана графічна інтерпретація цього факту.

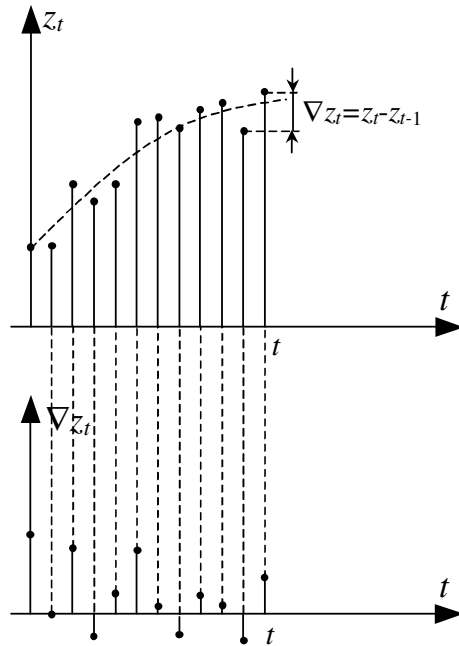


Рис. 8.3. Графічна інтерпретація перетворення нестационарного часового ряду z_t у стаціонарний часовий ряд для його різниці ∇z_t

Зрозуміло, що із моделі АРПКС(l, q, d) (8.47), (8.48) при $d = 0$ отримаємо модель АРКС(p, q).

Дамо пояснення чому у назві моделі АРПКС(l, q, d) має місце слово “проінтегроване” стосовно ковзного середнього.

Нагадаємо, що оберненим оператором для ∇ є оператор суми (або інтегрування) S (8.19). Тому, отримавши w_t із рівняння (8.48), для переходу до часового ряду z_t необхідно координату w_t проінтегрувати d разів, оскільки, домножуючи рівняння (8.47) зліва на ∇^{-d} , маємо:

$$\nabla^{-d} w_t = \nabla^{-d} \nabla^d z_t, \quad (8.50)$$

або

$$\nabla^{-d} w_t = I \cdot z_t, \quad (8.51)$$

звідки, з урахуванням (8.19), матимемо:

$$z_t = \nabla^{-d} w_t = S^d w_t. \quad (8.52)$$

Зрозуміло, що найскладнішим завданням під час використання моделі АРПКС(l, q, d) є визначення чисельного значення параметра інтегрування d або, в інших термінах — визначення кількості різниць, які треба послідовно взяти від нестационарного часового ряду z_t , щоб перетворити його у стаціонарний ряд відносно якоїсь різниці цього ряду.

8.7. Автоковаріація та автокореляція часового ряду

Автоковаріацією γ_k часового ряду z_t з затримкою k називають вираз

$$\gamma_k = \text{cov}\{z_t, z_{t+k}\} = E\{(z_t - \mu) \cdot (z_{t+k} - \mu)\}, \quad (8.53)$$

в якому E – символ взяття математичного очікування від виразу, що стоїть у фігурних дужках.

Зрозуміло, що

$$\gamma_0 = E\{(z_t - \mu)^2\} = \sigma_z^2 \quad (8.54)$$

— дисперсія часового ряду z_t .

Для отримання статистичної оцінки γ_k^* автоковаріації γ_k використовують вираз

$$\gamma_k^* = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} (z_t - \mu) \cdot (z_{t+k} - \mu). \quad (8.55)$$

Автоковаріація γ_k характеризує ступінь лінійного зв'язку між значеннями часового ряду z_t та z_{t+k} .

Зрозуміло, що

$$\begin{cases} |\gamma_k| \leq \gamma_0, \\ \gamma_k = \gamma_{-k}. \end{cases} \quad (8.56)$$

Автокореляцією ρ_k часового ряду z_t із затримкою k називають вираз

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{E\{(z_t - \mu) \cdot (z_{t+k} - \mu)\}}{E\{(z_t - \mu)^2\}}. \quad (8.57)$$

Для довільної автокореляції ρ_k справедливими є такі співвідношення:

$$\begin{cases} |\rho_k| \leq \rho_0, \\ \rho_0 = 1, \\ \rho_k = \rho_{-k}. \end{cases} \quad (8.58)$$

Вся можлива сукупність γ_k є автоковаріаційною функцією часового ряду z_t . Вона відноситься до класу решітчастих функцій. Аналогічно сукупність всіх значень ρ_k задає автокореляційну функцію часового ряду z_t .

Приклад графіка автокореляційної функції ρ_k наведено на рис. 8.4.

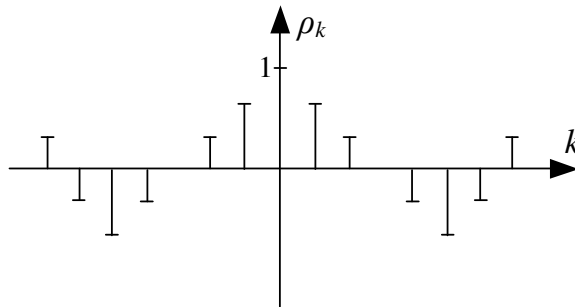


Рис. 8.4. Один із можливих графіків автокореляційної функції ρ_k , $k = \overline{-N, N}$

8.8. Рівняння Юла – Уокера

Рівняння Юла – Уокера дають відповідь на запитання: “А як же визначити, скажімо, коефіцієнти авторегресії у моделі часового ряду у формі $AR(p)$?”

Для їх синтезу спочатку помножимо вираз (8.26) на \tilde{z}_{t-k} . У результаті цього отримаємо:

$$\tilde{z}_{t-k}\tilde{z}_t = \phi_1\tilde{z}_{t-k}\tilde{z}_{t-1} + \phi_2\tilde{z}_{t-k}\tilde{z}_{t-2} + \dots + \phi_p\tilde{z}_{t-k}\tilde{z}_{t-p} + \tilde{z}_{t-k}a_t. \quad (8.59)$$

Зробимо у (8.59) заміну дискретної змінної, поклавши

$$t - k = \lambda. \quad (8.60)$$

Отримаємо:

$$\tilde{z}_\lambda\tilde{z}_{\lambda+k} = \phi_1\tilde{z}_\lambda\tilde{z}_{\lambda+k-1} + \phi_2\tilde{z}_\lambda\tilde{z}_{\lambda+k-2} + \dots + \phi_p\tilde{z}_\lambda\tilde{z}_{\lambda+k-p} + \tilde{z}_\lambda a_{\lambda+k}. \quad (8.61)$$

Візьмемо математичне очікування E від обох частин рівняння (8.61).

Отримаємо:

$$E\{\tilde{z}_\lambda\tilde{z}_{\lambda+k}\} = \phi_1 E\{\tilde{z}_\lambda\tilde{z}_{\lambda+k-1}\} + \phi_2 E\{\tilde{z}_\lambda\tilde{z}_{\lambda+k-2}\} + \dots + \phi_p E\{\tilde{z}_\lambda\tilde{z}_{\lambda+k-p}\} + E\{\tilde{z}_\lambda a_{\lambda+k}\}. \quad (8.62)$$

Враховуючи (8.22) та (8.53), із (8.62) маємо:

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \dots + \phi_p\gamma_{k-p} \quad (8.63)$$

для всіх k від 1 до p .

Але при $k = 0$ з урахуванням (8.56) отримаємо ще одне рівняння:

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \dots + \phi_p\gamma_p + \sigma_a^2. \quad (8.64)$$

Відсутність результатів взяття математичного очікування $E\{\tilde{z}_\lambda \cdot a_{\lambda+k}\}$ у рівняннях (8.63) та їх присутність у рівнянні (8.64) у вигляді дисперсії білого шуму σ_a^2 пояснюється тим, що згідно із властивостями білого шуму кожний його імпульс корелюється (взаємопов'язується) лише сам із собою і зовсім не корелюється ні з яким іншим, навіть розміщеним у часі поряд. Тож

$$E\{\tilde{z}_\lambda \cdot a_{\lambda+k}\} = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq 0 \\ \sigma_a^2, & \text{при } k = 0 \end{cases}. \quad (8.65)$$

З рівняння (8.64), з урахуванням (8.54), маємо:

$$\sigma_a^2 = \sigma_z^2 - \phi_1\gamma_1 - \phi_2\gamma_2 - \dots - \phi_p\gamma_p. \quad (8.66)$$

Тож, якщо для реалізації стаціонарного часового ряду z_t довжиною N вже обчислені оціночне середнє значення μ і дисперсія σ_z^2 за відомими формулами

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}.$$

У рівняннях (8.70) невідомими є значення коефіцієнтів $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$.

Для розв'язання системи (8.70) спочатку визначаємо матрицю M^{-1} , яка є оберненою матриці M . Потім множимо матричне рівняння (8.70) зліва на M^{-1} . У результаті цього отримуємо:

$$M^{-1}M \cdot \Phi = M^{-1}\rho, \quad (8.71)$$

або

$$I \cdot \Phi = M^{-1}\rho, \quad (8.72)$$

і остаточно

$$\Phi = M^{-1}\rho. \quad (8.73)$$

Рівняння (8.69), (8.70) носять назву *рівнянь Юла – Уокера*. Їх розв'язок у вигляді (8.73) дозволяє за попередньо обрахованими автокореляціями ρ_k , $k = \overline{1, p}$ часового ряду z_t визначити вектор $\Phi(p \times 1)$ коефіцієнтів $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ оператора регресії у моделі $AR(p)$.

8.9. Ідентифікація лінійних дискретних ЕМП із зосередженими параметрами на основі моделей часових рядів

Розглянемо процес $z(t)$ формування струму якоря електродвигуна системи електропривода конвеєра, на який з бункера надходить вугілля кусками різного об'єму та форми для транспортування його до дробарки.

У зв'язку з тим, що кількість вугілля, яка надходить з бункера на конвеєр у кожний момент часу, є величиною випадковою, то і момент навантаження на валу електродвигуна теж буде величиною випадковою, від-

повідною масі вугілля, яка в даний момент часу знаходиться на конвеєрі. У свою чергу такий же випадковий характер буде мати як обертальний момент електродвигуна, так і струм якоря електродвигуна, пропорційний його обертальному моменту (всі співвідношення між цими величинами наведені у першій частині посібника).

Якщо вимірювати струм якоря електродвигуна лише через рівні відрізки часу t , то матимемо реалізацію часового ряду z_t , наведену у табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Реалізація часового ряду z_t струму якоря електродвигуна системи електропривода конвеєра

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_t	20	50	40	20	30	50	10	40	50	20

Побудуємо математичні моделі цього часового ряду z_t на основі авторегресії 1-го, 2-го та 3-го порядків, що мають вигляд:

$$\tilde{z}_t^{(1)} = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + a_t, \quad (8.74)$$

$$\tilde{z}_t^{(2)} = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + a_t, \quad (8.75)$$

$$\tilde{z}_t^{(3)} = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \phi_3 \tilde{z}_{t-3} + a_t. \quad (8.76)$$

Почнемо розв'язання задачі ідентифікації часового ряду z_t зі знаходження його середнього значення μ , дисперсії σ_a^2 та автоковаріацій γ_1 , γ_2 , γ_3 .

$$\mu = \frac{1}{10} \sum_{t=1}^{10} z_t = \frac{1}{10} (20 + 50 + 40 + 20 + 30 + 50 + 10 + 40 + 50 + 20) = 33. \quad (8.77)$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{10} \sum_{t=1}^{10} (z_t - \mu)^2 = \frac{1}{10} [(-13)^2 + (17)^2 + (7)^2 + (-13)^2 + (-3)^2 + (17)^2 + (-23)^2 + (7)^2 + (17)^2 + (-13)^2] = 201. \quad (8.78)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{9} \sum_{t=1}^9 (z_t - \mu)(z_{t+1} - \mu) = \frac{1}{9} [(-13) \cdot 17 + 17 \cdot 7 + 7 \cdot (-13) + (-13) \cdot (-3) + (-3) \cdot 17 + 17 \cdot (-23) + (-23) \cdot 7 + 7 \cdot 17 + 17 \cdot (-13)] = -95,4. \quad (8.79)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{8} \sum_{t=1}^8 (z_t - \mu)(z_{t+2} - \mu) = \frac{1}{8} [(-13) \cdot 7 + 17 \cdot (-13) + 7 \cdot (-3) + (-13) \cdot 17 + (-3) \cdot (-23) + 17 \cdot 7 + (-23) \cdot 17 + 7 \cdot (-13)] = -106. \quad (8.80)$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{7} \sum_{t=1}^7 (z_t - \mu)(z_{t+3} - \mu) = \frac{1}{7} [(-13) \cdot (-13) + 17 \cdot (-3) + 7 \cdot 17 + (-13) \cdot (-23) + (-3) \cdot 7 + 17 \cdot 17 + (-23) \cdot (-13)] = -157,6. \quad (8.81)$$

Тепер підрахуємо автокореляції ρ_1, ρ_2, ρ_3 .

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\gamma_1}{\sigma_z^2} = -\frac{95,4}{201} = -0,475. \quad (8.82)$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\gamma_2}{\sigma_z^2} = -\frac{106}{201} = -0,527. \quad (8.83)$$

$$\rho_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma_0} = \frac{\gamma_3}{\sigma_z^2} = -\frac{157,6}{201} = -0,784. \quad (8.84)$$

Запишемо рівняння Юла – Уокера для моделі AP(1) (8.74):

$$\rho_1 = \phi_1 \rho_0 = \phi_1. \quad (8.85)$$

Підставляючи значення ρ_1 із (8.82) в (8.85), отримаємо:

$$\phi_1 = -0,475. \quad (8.86)$$

Тож модель AP(1) для часового ряду z_t , заданого табл. 8.1, буде мати вигляд

$$\tilde{z}_t^{(1)} = -0,475 \tilde{z}_{t-1} + a_t, \quad (8.87)$$

де a_t – імпульс білого шуму з дисперсією (згідно з виразом (8.66))

$$\sigma_a^2 = \sigma_z^2 - \phi_1 \gamma_1 = 201 - (-0,475) \cdot (-95,4) = 155,69. \quad (8.88)$$

Таким чином, якщо ми бажаємо за допомогою моделі (8.87) спрогнозувати одинадцять значення часового ряду z_t , заданого табл. 8.1, то повинні його десять значення перемножити на $(-0,475)$ і до цього результату додати значення імпульсу білого шуму a_t , генерованого комп'ютером за стандартною програмою, в яку треба лише задати значення дисперсії цього шуму, визначене за формулою (8.88), тобто $\sigma_a^2 = 155,69$.

Тепер запишемо рівняння Юла – Уокера для моделі AP(2) (8.75):

$$\begin{cases} \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_1 = \rho_1, \\ \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 = \rho_2, \end{cases} \quad (8.89)$$

або

$$\begin{cases} \phi_1 - 0,475\phi_2 = -0,475, \\ -0,475\phi_1 + \phi_2 = -0,527. \end{cases} \quad (8.90)$$

Розв'язуючи цю систему двох рівнянь з двома невідомими ϕ_1, ϕ_2 , отримаємо:

$$\begin{cases} \phi_1 = -1,050, \\ \phi_2 = -0,972. \end{cases} \quad (8.91)$$

Тож модель AP(2) для часового ряду z_t , заданого табл. 8.1, буде мати вигляд

$$\tilde{z}_t^{(2)} = -1,050\tilde{z}_{t-1} - 0,972\tilde{z}_{t-2} + a_t, \quad (8.92)$$

де a_t – імпульс білого шуму з дисперсією (згідно з виразом (8.66))

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 = \sigma_z^2 - \phi_1 \gamma_1 - \phi_2 \gamma_2 = 201 - (-1,05) \cdot (-95,4) - \\ - (-0,972) \cdot (-106) = -2,2. \end{aligned} \quad (8.93)$$

Але дисперсія σ_a^2 ніколи не може мати від'ємний знак, отже, отримання результату (8.93) свідчить про неадекватність моделі AP(2) для часового ряду z_t , заданого табл. 8.1.

Зрозуміло, що ще гірший результат принесе спроба моделювати цей часовий ряд за допомогою AP(3) (8.76).

Тож зупиняємося на моделі (8.87).

Але, якби σ_a^2 було б більшим за нуль, тоді і друга модель теж мала б право на існування. І для того, щоб здійснити вибір, необхідно було б знайти суму квадратів відхилень, спрогнозованих за допомогою моделі значень часового ряду від отриманих експериментально. Та модель, для якої ця сума відхилень виявиться найкращою, і буде оптимальною для часового ряду, який моделюється.

У цьому підрозділі ми розглянули приклад розв'язання задачі ідентифікації часового ряду лише на основі моделі авторегресії.

Всім, хто забажає використовувати інші моделі, рекомендуємо звернутись до книги Дж. Бокса, Г. Дженкінса “Анализ временных рядов. Прогноз и управление” (Вып. 1) [6], в якій розглянуто приклади використання всіх інших моделей.

8.10. Завдання для самоперевірки

1. Що таке “часовий ряд”? Дайте приклади стаціонарного та нестаціонарного часового ряду в області електромеханіки.
2. Дайте означення операторів зсуву назад та вперед, різницевого оператору та оператору суми.
3. Що собою являє модель часового ряду у формі лінійного фільтра?
4. Що таке білий шум? Які його основні властивості?
5. Що таке регресія і авторегресія?
6. Синтезуйте модель часового ряду у формі авторегресії.
7. Як пов'язані між собою передаточна функція лінійного фільтра та оператор авторегресії для часового ряду?
8. Що собою являє ковзне середнє часового ряду і модель у формі ковзного середнього?

9. Побудуйте модель часового ряду у формі авторегресії – ковзного середнього.

10. Яким чином можна нестационарний часовий ряд трансформувати у стаціонарний?

11. Побудуйте модель нестационарного часового ряду у формі авторегресії – проінтегрованого ковзного середнього.

12. Дайте означення автоковаріації і автокореляції часового ряду. Як знайти їх числові оцінки? Які основні їх властивості ви знаєте?

13. Для чого потрібні і як виводяться рівняння Юла – Уокера?

14. Як розв'язати рівняння Юла – Уокера?

15. За реалізацією часового ряду синтезуйте його модель у формі авторегресії з ідентифікацією цієї моделі.

ЧАСТИНА III.

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЕМП В НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ ТА СИСТЕМАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

9. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

9.1. Математичні моделі нелінійних систем, характеристики яких допускають лінеаризацію

Електромеханічне перетворення енергії здійснюється в системах, обов'язковою складовою яких є електромагнітні підсистеми. Цими складовими можуть бути електродвигуни, електричні генератори, електромагнітні муфти, магнітні підсилювачі, тягові соленоїди та інші елементи, характерною особливістю яких є наявність котушки індуктивності, намотаної на сталеве осердя.

Спільним для усіх цих елементів електромеханічної системи є те, що їх характеристики намагнічування, які є залежністю магнітного потоку Φ в осерді від струму I в обмотці, мають вигляд, наведений на рис. 9.1.

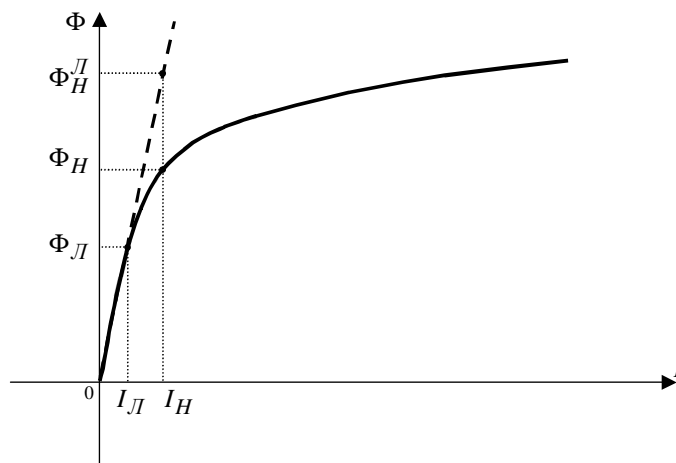


Рис. 9.1. Графік характеристики намагнічування $\Phi = f(I)$
електромагнітної системи

Із цього рисунка видно, що лінійною характеристикою намагнічування $\Phi = f(I)$ можна вважати лише при значеннях струму I в обмотці, які не перевищують $I_{\mathcal{L}}$. А при $I > I_{\mathcal{L}}$ магнітна система починає насичуватись, і магнітний потік Φ в сталевому осерді хоча й збільшується з ростом струму I , але не пропорційно значенням струму.

Тож, якщо елемент ЕМС з характеристикою намагнічування $\Phi = f(I)$, приведеною на рис. 9.1, працює при значеннях струму в обмотці $I < I_{\mathcal{L}}$, то система з таким елементом буде відноситись до класу лінійних, і для математичного моделювання процесів в ній можна використовувати весь той математичний апарат, який наведено в попередніх двох частинах даного навчального посібника.

Але, якщо цей же елемент працює при значеннях $I > I_{\mathcal{L}}$, наприклад, при $I = I_H$, то лінійною його характеристику намагнічування уже вважати не можна, оскільки, якщо її вважати лінійною, це означатиме, що при $I = I_H$ магнітний потік Φ в осерді повинен бути рівним $\Phi_H^{\mathcal{L}}$, в той час як насправді він дорівнює Φ_H (див. рис. 9.1).

Оскільки аналіз процесів в лінійних системах є найбільш простим і узагальненим, то плавні нелінійності типу “насичення” намагаються “покрити” відрізками прямих так, щоб цих відрізків було найменше при допустимих значеннях похибок заміни реальної нелінійної кривої ламаною, складеною із відрізків прямих.

Приклад такого “покриття” наведено на рис. 9.2, на якому крива $0-a-b-c-d$ замінюється ламаною $0-a^*-b-c^*-d$, тобто вона “покривається” трьома відрізками $0-a^*$, a^*-c^* , c^*-d прямих.

У цьому випадку під час аналізу процесів, що протікають в даному елементі ЕМС, при значеннях струму $I < I_{\mathcal{L}}$ ми як характеристику намагнічування $\Phi = f(I)$ будемо використовувати відрізок прямої $0-a^*$, при

значеннях струму $I_L \leq I < I_B^P$ — відрізок прямої $a^* - c^*$, а при значеннях струму $I_B^P \leq I$ — відрізок прямої $c^* - d$.

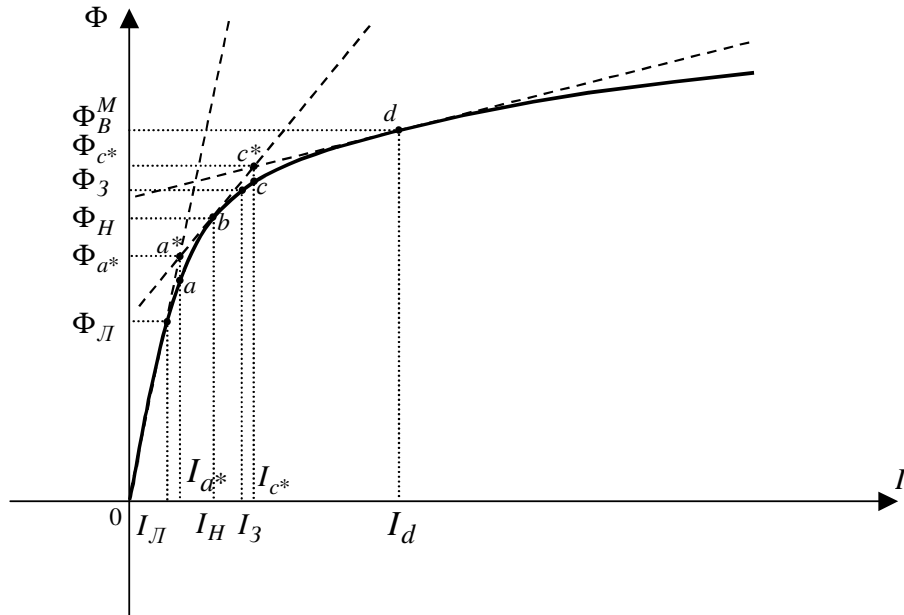


Рис. 9.2. Варіант “покриття” кривої намагнічування $\Phi = f(I)$ відрізками прямих

Очевидно, що такою заміною кривої намагнічування ламаною лінією ми будемо мати певну похибку моделювання, найбільші значення якої досягатимуться в точках (I_{a^*}, Φ_{a^*}) , (I_{c^*}, Φ_{c^*}) .

Але якщо в усталеному режимі роботи елемент працює в точці (I_H, Φ_H) , то з рис. 9.2 легко побачити, що у цій точці похибка моделювання дорівнюватиме нулю.

Тож, виходить, що кускова лінеаризація плавної нелінійної характеристики елемента ЕМС, допускаючи певну похибку при моделюванні перехідних процесів, дозволяє звести цю похибку до нуля при математичному моделюванні усталеного режиму.

Якщо елемент ЕМС працює здебільшого не в номінальному

(I_H, Φ_H) , а в якомусь іншому режимі, наприклад, (I_3, Φ_3) , то підхід залишається тим же, однак в цьому випадку точку “ b ” ламаної суміщаємо з точкою (I_3, Φ_3) кривої.

Три важливих зауваження:

1). Під час аналізу ЕМП в ЕМС з елементами, що мають плавні нелінійні характеристики типу наведених на рис. 9.1 та рис. 9.2, необхідно не забувати “зшивати” перехідні процеси в моменти часу, коли ЕМП входить в точки стику ламаних, якими лінеаризується нелінійна характеристика.

2). Якщо ЕМП протікає в ЕМС з регулятором, що не допускає суттєвих відхилень процесу від заданого режиму роботи, то при моделюванні усталеного режиму такої системи та близьких до нього перехідних режимів завжди достатньо враховувати лише один лінійний відрізок ламаної, що “покриває” нелінійність в області, для якої точка заданого режиму є внутрішньою. При цьому чим більшим є коефіцієнт підсилення регулятором вхідного сигналу, тим меншою буде похибка моделювання, оскільки з ростом коефіцієнта підсилення регулятора звужується область відхилення робочої точки на нелінійній характеристиці елемента системи від точки заданого режиму.

3). Кусково-лінійна апроксимація нелінійної характеристики елемента системи в загальному вигляді $y = f(x)$ непридатна для використання в задачах оптимізації цієї системи аналітичними методами, оскільки в точках стику ламаної перша похідна $\frac{dy}{dx}$ має розрив 1-го роду, а другої похідної $\frac{d^2y}{dx^2}$ не існує взагалі, в той час як аналітичні методи оптимізації вимагають існування як 1-ої, так і 2-ої похідних нелінійної характеристики перетворення в усіх точках області оптимізації.

9.2. Математичні моделі релейних елементів з симетричними характеристиками

Практично жодна ЕМС не обходиться без релейних елементів, характеристики “вхід – вихід” яких мають вигляд, наведений на рис. 9.3. Надалі релейні елементи з такими (рис. 9.3) характеристиками будемо називати *симетричними*.

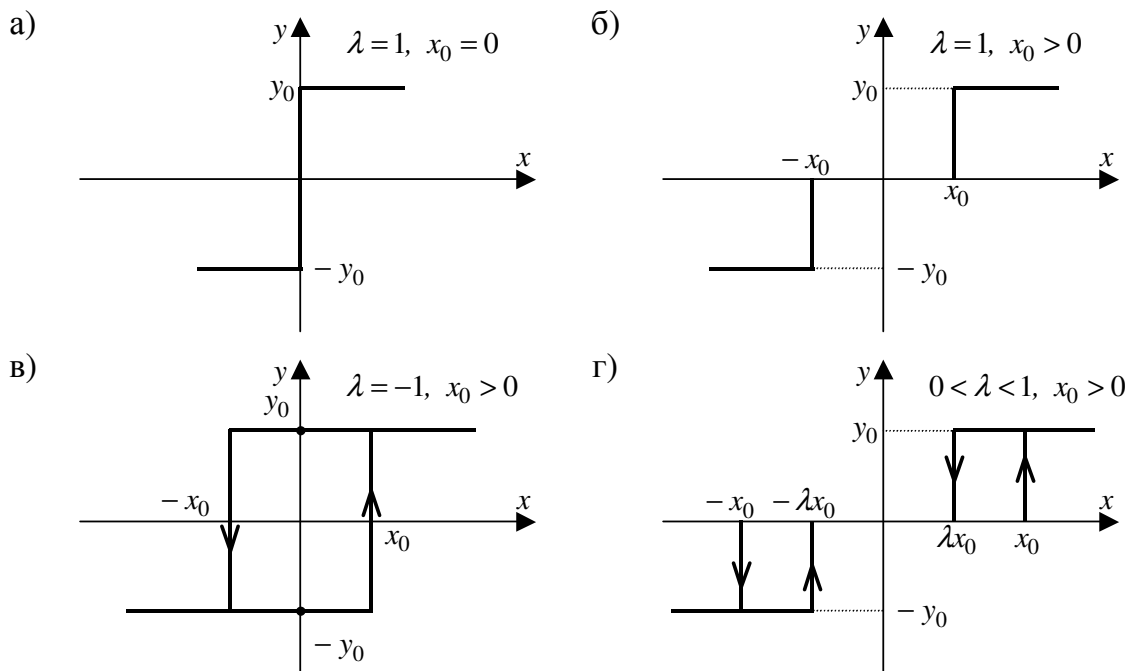


Рис. 9.3. Характеристики “вхід – вихід” симетричних релейних елементів:

- а) без зони нечутливості і гістерезису;
- б) з зоною нечутливості, але без гістерезису;
- в) без зони нечутливості, але з гістерезисом;
- г) з зоною нечутливості і гістерезисом.

Фізично найпростіше реалізувати симетричний релейний елемент з характеристикою, наведеною на рис. 9.3, б. Він являє собою (рис. 9.4) котушку 1 з рухомим осердям 2, з’єднаним з рухомими контактами 3 чотирьох пар контактів, нерухомі контакти 4 яких з’єднані з джерелом, наприклад, постійного струму 5.

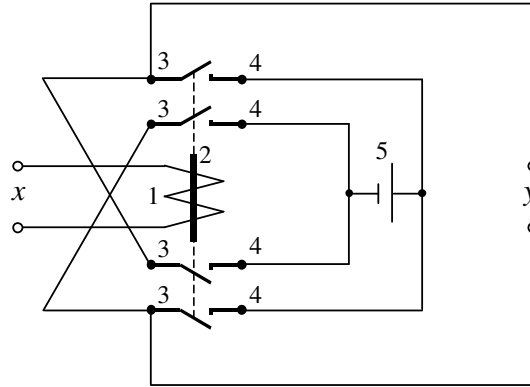


Рис. 9.4. Принципова схема релейного елемента з характеристикою, наведеною на рис. 9.3, б

При подачі на вхід цього елемента сигналу x у вигляді напруги, прикладеної до котушки 1, вихідний сигнал y у вигляді напруги джерела постійного струму з'явиться лише тоді, коли вхідна напруга стане більшою x_0 і створить такий струм, магніторушійна сила від якого стане достатньою для втягування осердя 2 і замикання верхньої пари контактів 3-4 при одній полярності вхідного сигналу x , або нижньої — при протилежній полярності.

Якщо магнітна характеристика осердя релейного елемента має практично помітну петлю гістерезису, то цей релейний елемент матиме характеристику “вхід – вихід”, наведену на рис. 9.3, г.

Що стосується характеристик, приведених на рис. 9.3, а та рис. 9.3, в, то для їх реалізації потрібні вже спеціальні схеми виконання і включення котушки і осердя.

Схемними і конструктивними способами можна отримати й інший характер релейних характеристик, в тому числі і несиметричний уздовж однієї або обох осей координат.

В загальному вигляді математичну модель релейної характеристики без гістерезису можна записати як

$$y = \Phi(x), \quad (9.1)$$

а з гістерезисом — як

$$y(t) = \Phi^* \left(x(t) \Big|_0^t, \sigma \right). \quad (9.2)$$

Покажемо, який вигляд мають оператори Φ , Φ^* для характеристик, наведених на рис. 9.3.

Якщо ввести знакову функцію

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & \forall x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & \forall x < 0, \end{cases} \quad (9.3)$$

де символ \forall читається як “для будь-якого”, то оператор Φ моделі релейної характеристики без гістерезису і без зони нечутливості (див. рис. 9.3, а) матиме вигляд:

$$\Phi_1(x) = y_0 \cdot \text{sign}(x), \quad (9.4)$$

а оператор Φ моделі релейної характеристики без гістерезису, але з зоною нечутливості:

$$\Phi_2(x) = \frac{y_0}{2} [\text{sign}(x - x_0) + \text{sign}(x + x_0)]. \quad (9.5)$$

Для релейного елемента з гістерезисом (див. рис. 9.3, в та рис. 9.3, г) характерним є те, що його характеристика має зони неоднозначності, перебування в яких залежить не лише від поточних значень x , а й від значень x в попередні моменти часу. Крім того, цей оператор залежить від параметра σ , який для релейної характеристики без зони нечутливості має значення:

$$\sigma_t = \{y_0, -y_0\}, \quad (9.6)$$

а для релейної характеристики з зоною нечутливості:

$$\sigma_t = \{y_0, 0, -y_0\}. \quad (9.7)$$

З урахуванням викладених зауважень оператор Φ^* моделі релейної характеристики з гістерезисом (див. рис. 9.3) має вигляд:

$$\Phi^*(x(t), \beta_{t_+}^{(i)}(\sigma_{t_-})) = y_0 \cdot \text{sign}(\beta_{t_+}^{(i)}(\sigma_{t_-})), \quad (9.8)$$

$$i = 1, 2,$$

де для характеристики без зони нечутливості (див. рис. 9.3, в)

$$\beta_{t_+}^{(1)}(\sigma_{t_-}) = \begin{cases} (x(t_+) > x_0) \vee (x_0 \geq x(t_+) > -x_0) \wedge (\sigma_{t_-} = y_0) = +1, \\ (x(t_+) < -x_0) \vee (-x_0 \leq x(t_+) < x_0) \wedge (\sigma_{t_-} = -y_0) = -1, \end{cases} \quad (9.9)$$

та

$$\beta_{t_+}^{(2)}(\sigma_{t_-}) = \begin{cases} (x(t_+) > x_0) \vee (x_0 \geq x(t_+) > \lambda x_0) \wedge (\sigma_{t_-} = y_0) = +1, \\ (\lambda x_0 \leq x(t_+) < x_0) \vee (-\lambda x_0 < x(t_+) < \lambda x_0) \wedge (\sigma_{t_-} = 0) = 0, \\ (-x_0 \leq x(t_+) < \lambda x_0) \vee (x(t_+) < -x_0) \wedge (\sigma_{t_-} = -y_0) = -1 \end{cases} \quad (9.10)$$

— для характеристики з зоною нечутливості (див. рис. 9.3, г).

Символами t_+ , t_- позначено значення моменту часу t за мить після його досягнення (t_+) і за мить до нього (t_-).

В подальшому, пам'ятаючи про те, що значення β_t розглядається при $t = t_+$, а значення σ_t розглядається при $t = t_-$, в загальному вигляді оператор моделі релейної характеристики з гістерезисом будемо записувати у вигляді

$$\Phi^*(x(t_+), \beta_{t_+}^{(i)}(\sigma_{t_-})) = \Phi^*(x, \beta(\sigma)). \quad (9.11)$$

Додаючи в рівняння (9.11) параметр $\pm x_0^*$ — зміщення вправо або вліво по осі x , або додаючи в рівняння (9.1) параметр $\pm y_0^*$ — зміщення вниз або вгору по осі y , можна сформувати модель несиметричної релейної характеристики як з гістерезисом, так і без нього, як з зоною нечутливості, так і без неї.

Ми в цьому навчальному посібнику будемо розглядати моделі лише симетричних релейних характеристик.

Звертаємо увагу на те, що якщо вхідний сигнал x релейного елемента може змінюватись неперервно в заданому діапазоні значень, то вихідний сигнал y може мати лише два ($y_0, -y_0$) або три ($y_0, 0, -y_0$) значення,

які з'являються на виході релейного елемента стрибком при досягненні його входним сигналом x порогового значення 0 , x_0 чи $-x_0$.

Ще однією характерною особливістю релейного елемента, яка впливає з попередньої, є те, що при подачі знакозмінного сигналу x на його вхід на виході цього елемента матимемо послідовність імпульсів однакової висоти, але різного знаку, різної ширини і з різними проміжками між ними.

Відзначимо, що якщо вхідний сигнал x не є випадковим процесом, то цілком визначеною буде і вихідна послідовність імпульсів релейного елемента, для якої завжди можна записати математичну модель.

9.3. Математичні моделі динаміки суттєво нелінійних систем з релейними елементами

Оскільки для електромеханічних систем найбільш поширеними суттєво нелінійними системами є релейні, то зосередимо нашу увагу саме на їх ідентифікації.

Структуру будь-якої замкненої нелінійної динамічної системи з одним релейним елементом і з негативним зворотним зв'язком завжди можна привести до вигляду, наведеному на рис. 9.5, де РЕ — релейний елемент, а ЛЧ — сукупність усіх елементів з лінійними характеристиками “вхід – вихід”.

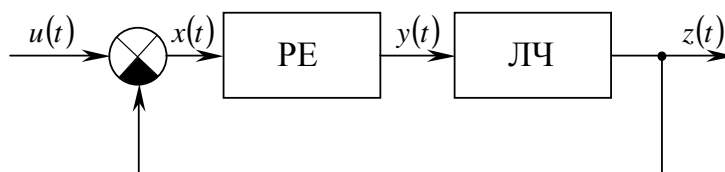


Рис. 9.5. Структурна схема замкненої нелінійної динамічної системи з одним релейним елементом і з негативним зворотним зв'язком

Якщо перетворити за Лапласом сигнали $u(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ та алгебраїчні і диференціальні чи інтегральні рівняння, що описують лінійну ча-

стину ЛЧ, тобто перевести процес створення математичної моделі на комплексну площину, то структурну схему, наведену на рис. 9.5, можна привести до вигляду, наведеному на рис. 9.6, де $W(p)$ – передаточна функція ЛЧ.

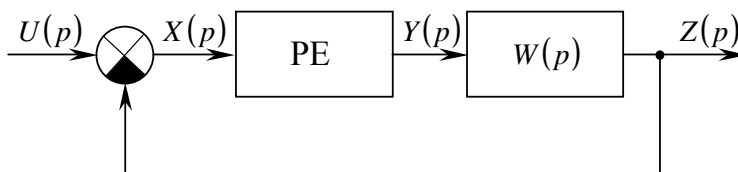


Рис. 9.6. Структурна схема замкненої нелінійної динамічної системи з одним релейним елементом і з негативним зворотним зв'язком на комплексній площині

Для схеми на рис. 9.6 цілком очевидними є такі співвідношення:

$$Z(p) = W(p) \cdot Y(p), \quad (9.12)$$

$$X(p) = U(p) - Z(p). \quad (9.13)$$

Що ж до зв'язку між сигналами x , y та характеристикою PE на комплексній площині, то формально ми його можемо записати як:

$$Y(p) = L\{\Phi(x(t))\}, \quad (9.14)$$

— у випадку математичної моделі PE у вигляді (9.1), де $L\{\bullet\}$ – оператор Лапласа;

$$Y(p) = L\{\Phi^*(x(t), \sigma)\} \quad (9.15)$$

— у випадку математичної моделі PE у вигляді (9.2);

$$Y(p) = L\{\Phi^*(x(t), \beta(\sigma))\} \quad (9.16)$$

— у випадку математичної моделі PE у вигляді (9.11).

Зв'язуючи між собою співвідношення (9.12), (9.13) і (9.14) або (9.15) чи (9.16), матимемо для сигналу $X(p)$ на вході PE:

$$X(p) = U(p) - W(p) \cdot L\{\Phi(x(t))\}, \quad (9.17)$$

або

$$X(p) = U(p) - W(p) \cdot L\{\Phi^*(x(t), \sigma)\}, \quad (9.18)$$

або

$$X(p) = U(p) - W(p) \cdot L\{\Phi^*(x(t), \beta(\sigma))\}. \quad (9.19)$$

Якщо ж нас цікавить вихідний сигнал $Z(p)$ лінійної частини нелінійної системи, то, пам'ятаючи, що

$$x(t) = u(t) - z(t), \quad (9.20)$$

із співвідношень (9.12) – (9.16) та (9.20) матимемо:

$$Z(p) = W(p) \cdot L\{\Phi[u(t) - z(t)]\}, \quad (9.21)$$

або

$$Z(p) = W(p) \cdot L\{\Phi^*[u(t) - z(t), \sigma]\}, \quad (9.22)$$

або

$$Z(p) = W(p) \cdot L\{\Phi^*[u(t) - z(t), \beta(\sigma)]\}. \quad (9.23)$$

Розглянемо процес отримання вищенаведених співвідношень на двох прикладах.

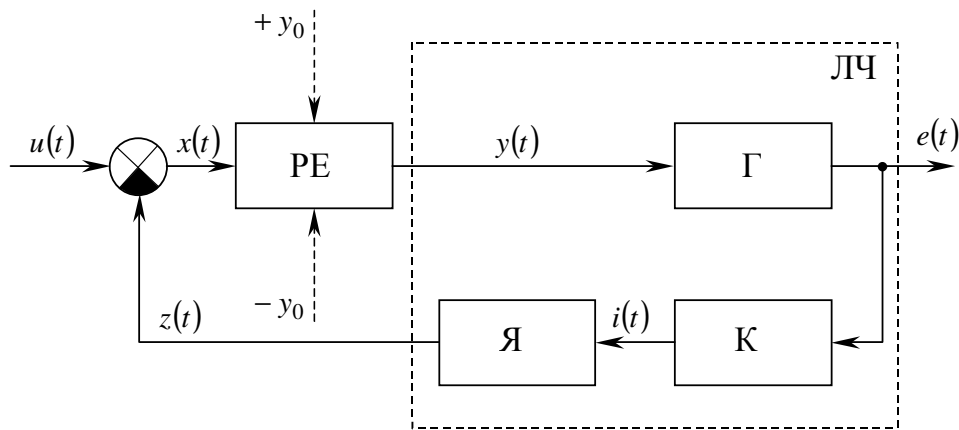


Рис. 9.7. Функціональна схема системи регулювання ЕРС генератора за допомогою вібраційного регулятора на основі релейного елемента

Приклад 1. Нехай електромеханічною системою, процеси в якій ми хочемо описати, є система регулювання електрорушійної сили $e(t)$ генера-

тора за допомогою вібраційного регулятора на основі релейного елемента.

Функціональна схема такої ЕМС матиме вигляд, наведений на рис. 9.7.

На схемі рис. 9.7:

Г – генератор,

К – котушка електромагніта реле,

Я – якорь електромагніта реле,

РЕ – контакти реле,

ЛЧ – лінійна частина системи.

Як бачите, ми котушку і якорь реле віднесли до лінійної частини системи, а контакти — до релейного елемента, поданого на рис. 9.3, б, що формує релейну характеристику, наприклад, виду (9.1).

Фізично сигнал $u(t)$ являє собою переміщення рухомої контактної групи реле під дією пружини, натяг якої можна змінювати, а сигнал $z(t)$ — це переміщення тієї ж рухомої контактної групи реле під дією якоря реле, котрий, втягуючись у котушку, переборює дію пружини.

Якщо $z(t) = 0$, то $x(t) = u(t) > x_0$ і одна група контактів реле, яку називають *нормально замкнутою*, замикається, подаючи напругу $+y_0$ на обмотку збудження генератора, викликаючи цим появу $e(t)$.

Коли $x(t) = u(t) - z(t)$ стає меншим x_0 , нормально замкнута контактна група реле розмикається і обнуляє напругу на обмотці збудження генератора, викликаючи зменшення $e(t)$. Зменшення $e(t)$ приводить до зменшення $z(t)$ і настає момент, коли $x(t) = u(t) - z(t)$ стає більшим x_0 , що приводить до замикання нормально замкнутої групи контактів реле.

Оскільки інерційність як механічної, так і електромагнітної частини реле незначна, то частота перемикань контактів реле є високою і різниця $u(t) - z(t)$ стабілізується біля x_0 , а напруга збудження генератора $y(t)$ стабілізується біля $+y_0$.

Перейдемо до математичної моделі описаного вище процесу.

Зв'язок між ЕРС $e(t)$ генератора, яка подається на вхід котушки електромагніта реле, та струмом в котушці, як відомо з теоретичних основ електротехніки, задається диференціальним рівнянням 1-го порядку, що має вигляд

$$T_K \frac{di}{dt} + i = k_K e, \quad (9.24)$$

де $T_K = \frac{L_K}{r_K}$ – електромагнітна стала часу електромагніта, L_K – індуктив-

ність котушки, а r_K – активний опір цієї котушки, $k_K = \frac{1}{r_K}$ – коефіцієнт

передачі котушки від вхідної напруги до струму в ній.

Зв'язок між струмом $i(t)$ в котушці електромагніта і лінійним переміщенням $z(t)$ якоря електромагніта, як відомо з фізики, задається диференціальним рівнянням 2-го порядку, що має вигляд

$$\ddot{z} + 2\xi \cdot \dot{z} + \omega_0^2 \cdot z = k_M \cdot i, \quad (9.25)$$

де ξ – коефіцієнт затухання коливань якоря електромагніта, ω_0 – частота власних коливань цього якоря, а k_M – коефіцієнт передачі від струму $i(t)$ в котушці електромагніта до лінійного переміщення $z(t)$ його якоря.

Зв'язок між напругою $u(t)$, що подається на вхід обмотки збудження генератора, та ЕРС $e(t)$ його якоря, як відомо з першої частини цього навчального посібника, задається диференціальним рівнянням 1-го порядку, що має вигляд

$$T_\Gamma \frac{de}{dt} + e = k_\Gamma u, \quad (9.26)$$

де $T_\Gamma = \frac{L_{O3\Gamma}}{r_{O3\Gamma}}$ – електромагнітна стала часу обмотки збудження генератора,

$L_{O3\Gamma}$ – індуктивність обмотки збудження, $r_{O3\Gamma}$ – активний опір цієї обмо-

тки, $k_{\Gamma} = \frac{k_{\Gamma}^*}{r_{O3\Gamma}}$ – коефіцієнт передачі від напруги, що подається на вхід

обмотки збудження генератора, а k_{Γ}^* – коефіцієнт передачі від струму в обмотці збудження до ЕРС якоря генератора, який визначається з характеристики холостого ходу генератора.

Для замикання системи рівнянь, що описують систему вібраційного регулювання ЕРС генератора, функціональна схема якої наведена на рис. 9.7, залишилось лише зв'язати вхідний $x(t)$ та вихідний $y(t)$ сигнали релейного елемента РЕ рівнянням виду

$$y = \Phi^*(x(t), \sigma), \quad (9.27)$$

конкретний вигляд якого залежить від наявності чи відсутності зони нечутливості та гістерезису.

Перетворюючи рівняння (9.24), (9.25) та (9.26) за Лапласом і переходячи до передаточних функцій, отримаємо на комплексній площині структурну схему системи вібраційного регулювання ЕРС генератора у вигляді, показаному на рис. 9.8, де

$$W_{\Gamma}(p) = \frac{k_{\Gamma}}{T_{\Gamma}p + 1} \quad (9.28)$$

— передаточна функція генератора,

$$W_K = \frac{k_K}{T_K p + 1} \quad (9.29)$$

— передаточна функція котушки електромагніта реле,

$$W_{\text{Я}}(p) = \frac{k_M}{p^2 + 2\zeta \cdot p + \omega_0^2} \quad (9.30)$$

— передаточна функція якоря електромагніта реле.

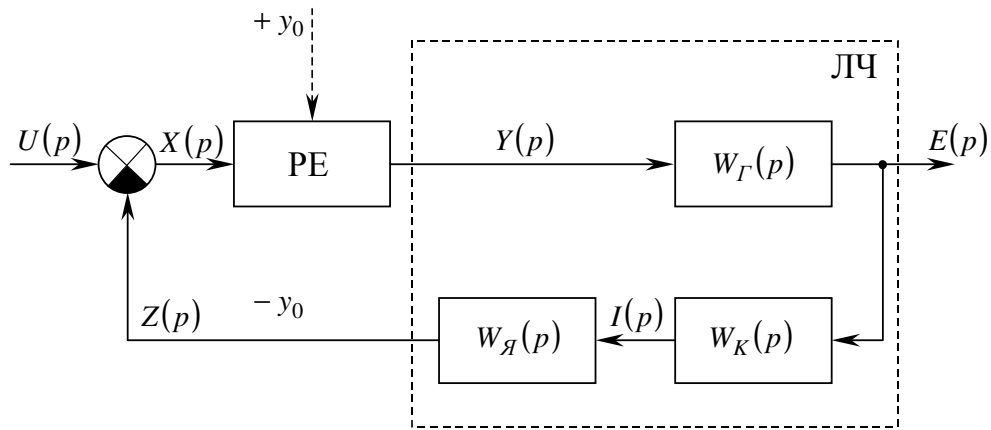


Рис. 9.8. Структурна схема системи вібраційного регулювання ЕРС генератора

Структурна схема, що наведена на рис. 9.8, легко приводиться до загального вигляду, показаного на рис. 9.9,

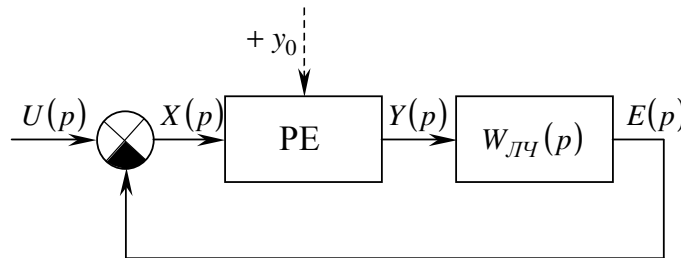


Рис. 9.9. Узагальнена структурна схема системи вібраційного регулювання ЕРС генератора

де

$$W_{ЛЧ}(p) = W_{Г}(p) \cdot W_{К}(p) \cdot W_{Я}(p) \quad (9.31)$$

— передаточна функція лінійної частини системи, яка після підстановки у (9.31) виразів (9.28), (9.29), (9.30) набуває вигляду

$$W_{ЛЧ}(p) = \frac{k_{Г} \cdot k_{К} \cdot k_{М}}{(T_{Г}p + 1) \cdot (T_{К}p + 1) \cdot (p^2 + 2\xi \cdot p + \omega_0^2)}. \quad (9.32)$$

З врахуванням викладеного вище для системи вібраційного регулювання ЕРС генератора матимемо такі математичні моделі:

- для сигналу $X(p)$ на вході РЕ:

$$X(p) = U(p) - \frac{k_{\Gamma} \cdot k_K \cdot k_M}{(T_{\Gamma} p + 1) \cdot (T_K p + 1) \cdot (p^2 + 2\xi \cdot p + \omega_0^2)} L\{\Phi^*[x(t), \sigma]\}, \quad (9.33)$$

- для вихідного сигналу $Z(p)$ лінійної частини системи:

$$Z(p) = \frac{k_{\Gamma} \cdot k_K \cdot k_M}{(T_{\Gamma} p + 1) \cdot (T_K p + 1) \cdot (p^2 + 2\xi \cdot p + \omega_0^2)} L\{\Phi^*[(u(t) - z(t)), \sigma]\}. \quad (9.34)$$

Приклад 2. Нехай електромеханічною системою, процеси в якій ми хочемо описати, є система стабілізації кутової швидкості $\omega(t)$ електродвигуна ЕД при змінах у часі моменту технологічного навантаження $M_{TH}(t)$ електропривода, функціональна схема якої має вигляд, наведений на рис. 9.10, на якій $M_D(t)$ — обертальний момент якоря електродвигуна.

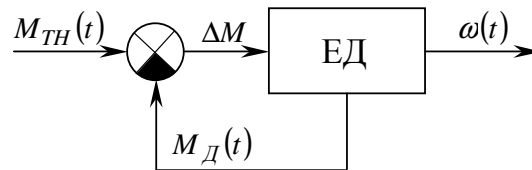


Рис. 9.10. Функціональна схема системи стабілізації кутової швидкості електродвигуна при змінах у часі моменту технологічного навантаження електропривода

У цій системі регулювання немає релейного елемента в явному вигляді, але він неявно формується у зв'язку з наявністю так званого сухого тертя, за рахунок якого створюється момент $\Phi(\omega)$, котрий не дозволяє почати рух в системі до тих пір, поки M_D не стане більшим за $\Phi(\omega)$, і завжди має знак, протилежний знаку M_D . Тобто у цьому випадку, за рахунок ефекту сухого тертя, ми маємо замість функціональної схеми, наведеної на рис. 9.10, функціональну схему, наведену на рис. 9.11, на якій момент $\Phi^*(\omega, \sigma)$, що виникає за рахунок сухого тертя, описується співвідношенням, що має вигляд

$$\Phi^*(\omega, \sigma) = \phi_0 \cdot \text{sign}(\omega). \quad (9.35)$$

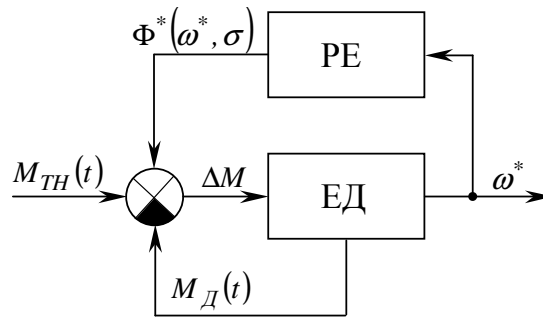


Рис. 9.11. Функціональна схема системи стабілізації кутової швидкості електродвигуна при змінах у часі моменту технологічного навантаження та врахуванні сухого тертя

Якби не було сухого тертя і в'язкого демпферування, то модель руху електричного двигуна, як відомо, мала б вигляд

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_D - M_{TH}, \quad (9.36)$$

де ω – кутова швидкість обертання вала ротора електродвигуна, а J – приведений до цього вала момент інерції махових мас, з ним з'єднаних.

Але при наявності гальмівних складових, обумовлених в'язким демпферуванням та сухим тертям, для моделювання руху електродвигуна замість лінійного рівняння (9.36) необхідно використовувати більш складне нелінійне рівняння

$$J \cdot \dot{\omega}_{CT} + k_{ВД} \cdot \omega_{CT} + \Phi(\omega_{CT}, \sigma) = M_D - M_{TH}, \quad (9.37)$$

в якому $k_{ВД}$ – коефіцієнт в'язкого демпферування, а нижній індекс “СТ” біля кутової швидкості ω означає, що розглядається її значення, яке враховує вплив сухого тертя.

Рівняння (9.37) легко приводиться до виду

$$T_M \cdot \dot{\omega}_{CT} + \omega_{CT} = k_{Дв} [M_D - M_{TH} - \Phi(\omega_{CT}, \sigma)], \quad (9.38)$$

де $T_M = \frac{J}{k_{ВД}}$ – електромеханічна стала часу електродвигуна, а

$k_{Дв} = \frac{1}{k_{ВД}}$ – коефіцієнт передачі електродвигуна від моменту до кутової

швидкості з врахуванням в'язкого демпферування.

Легко бачити, що графічний образ рівняння (9.38) має вигляд, наведений на рис. 9.12,

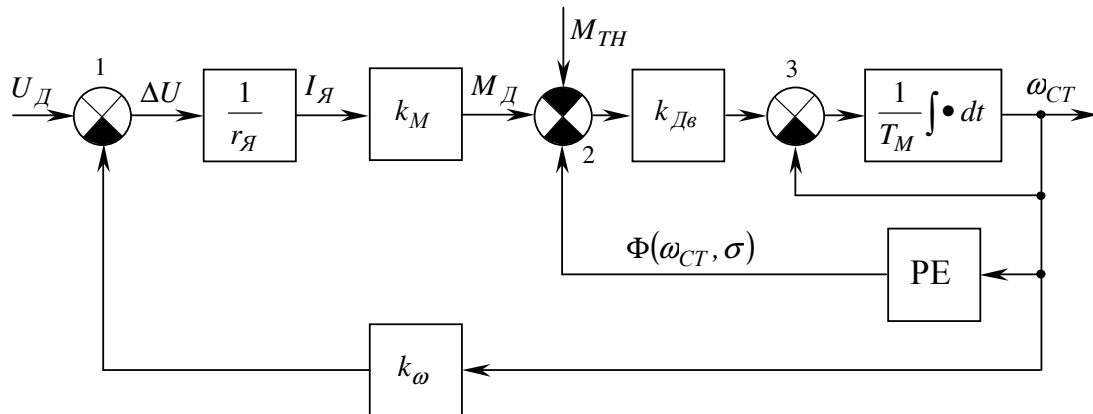


Рис. 9.12. Структурна схема в часовій області електричного двигуна, навантаженого моментом $M_{ТН}$, модель якого враховує в'язке демпферування і сухе тертя

в якому враховано те, що

$$M_{Д} = k_{М} \cdot I_{Я}, \quad (9.39)$$

$$I_{Я} = \frac{u_{Д} - e_{Д}}{r_{Я}}, \quad (9.40)$$

$$e_{Д} = k_{\omega} \cdot \omega, \quad (9.41)$$

де $I_{Я}$ – струм якоря, $e_{Д}$ – ЕРС його обертання, $u_{Д}$ – напруга, що прикладена до його обмотки, $r_{Я}$ – активний опір цієї обмотки, а $k_{М}$ і k_{ω} – коефіцієнти, суть яких розкрита в першій частині навчального посібника.

Суміщаючи на схемі рис. 9.12 1-ий суматор з 2-им і позбавляючись від 3-го суматора та переходячи на комплексну площину, матимемо схему, що зображена на рис. 9.13.

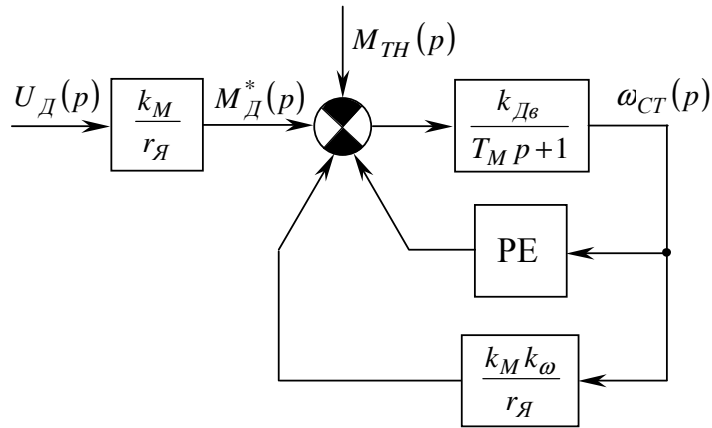


Рис. 9.13. Структурна схема на комплексній площині електричного двигуна, навантаженого моментом M_{TH} , модель якого враховує в'язке демпферування і сухе тертя

В свою чергу, пам'ятаючи, що на схемі (рис. 9.13) ланка з передаточною функцією

$$W_{33}(p) = \frac{k_M \cdot k_\omega}{r_Я} \quad (9.42)$$

задає негативний зворотний зв'язок для ланки з передаточною функцією

$$W_{Дв}(p) = \frac{k_{Дв}}{T_M p + 1}, \quad (9.43)$$

цю схему можна легко привести до схеми, зображеної на рис. 9.14, на якій

$$W_1(p) = \frac{k_M}{r_Я}, \quad (9.44)$$

а

$$W_2(p) = \frac{\frac{k_{Дв}}{T_M p + 1}}{1 + \frac{k_M k_\omega}{r_Я} \cdot \frac{k_{Дв}}{T_M p + 1}} = \frac{k_2}{T_2 p + 1}, \quad (9.45)$$

де

$$T_2 = T_M \cdot \frac{r_Я}{r_Я + k_M k_\omega k_{Дв}}, \quad (9.46)$$

$$k_2 = \frac{r_Я}{r_Я + k_M k_\omega k_{Дв}} \cdot k_{Дв}. \quad (9.47)$$

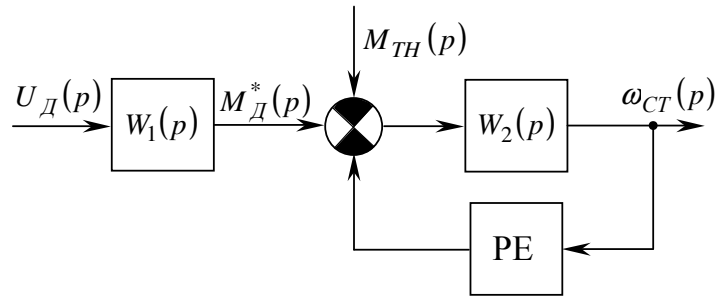


Рис. 9.14. Узагальнена структурна схема на комплексній площині електричного двигуна, навантаженого моментом M_{TH} , модель якого враховує в'язке демпферування і сухе тертя

А далі вчинимо так.

Спочатку запишемо чому дорівнюватиме різниця $M_D^* - M_{TH}$. Зі схеми (рис. 9.14) видно, що

$$\Delta M(p) = M_D^*(p) - M_{TH}(p) = W_1(p) \cdot U_D(p) - M_{TH}(p). \quad (9.48)$$

Очевидно, що аналогом рівняння (9.48) є рівняння

$$\Delta M(p) = L\{\Delta M(t)\}, \quad (9.49)$$

в якому

$$\Delta M(t) = L^{-1}\{W_1(p) \cdot U_D(p) - M_{TH}(p)\} \quad (9.50)$$

є оберненим перетворенням Лапласа виразу, який стоїть в правій частині рівняння (9.48).

Враховуючи співвідношення (9.49) і (9.50), ми маємо право структурну схему рис. 9.14 подати у вигляді, зображеному на рис. 9.15.

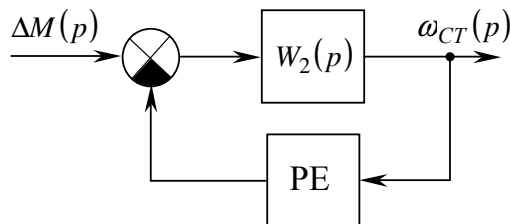


Рис. 9.15. Еквівалентна структурна схема на комплексній площині електричного двигуна, навантаженого моментом M_{TH} , модель якого враховує в'язке демпферування і сухе тертя

Із схеми рис. 9.15 видно, що ми вже звели початкову структуру електромеханічної системи, графічно заданої на рис. 9.12, до структури, що складається лише з лінійної частини і релейного елемента.

Але для аналізу релейних систем зручніше, щоб суматор був на вході релейного елемента. Тож ми здійснимо ще одне структурне перетворення схеми, показаної на рис. 9.15, — перенесемо суматор з входу ланки з передаточною функцією $W_2(p)$ на її вихід. В результаті цього переносу отримаємо схему, зображену на рис. 9.16.

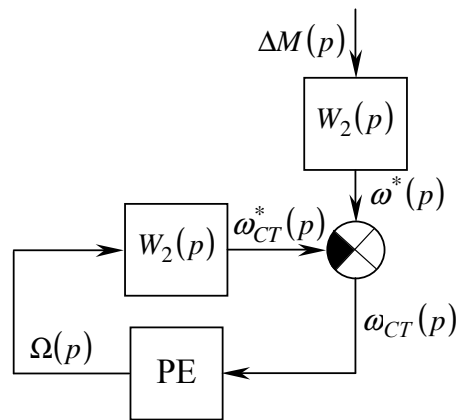


Рис. 9.16. Структурна схема, яка є еквівалентною схемі, показаній на рис. 9.15, але з перенесенням на вхід релейного елемента суматором

На рис. 9.16 ми уже маємо, як і в схемі на рис. 9.5, класичне для аналізу з'єднання релейного елемента та лінійної частини.

Для цієї схеми є справедливим:

$$\begin{cases} \omega_{CT}(p) = \omega^*(p) - \omega_{CT}^*(p), \\ \omega^*(p) = W_2(p) \cdot \Delta M(p) = W_2(p) \cdot (W_1(p) \cdot U_D(p) - M_{TH}(p)), \\ \omega^*(t) = L^{-1}\{\omega^*(p)\}, \\ \omega_{CT}^*(p) = W_2(p) \cdot \Omega(p), \\ \omega_{CT}^*(t) = L^{-1}\{\omega_{CT}^*(p)\}, \\ \Omega(p) = L\{\Phi[\omega^*(t) - \omega_{CT}^*(t)]\}. \end{cases} \quad (9.51)$$

Система рівнянь (9.51) і є математичною моделлю електричного двигуна, навантаженого моментом M_{TH} , моментом від в'язкого демпферування $k_{ВД} \cdot \omega$ та моментом від сухого тертя $\Phi(\omega, \sigma)$, з приведеним до входу релейного елемента суматором.

Як бачимо, синтез цієї моделі зводиться до визначення передаточної функції лінійної частини електромеханічної системи і перерахунку її зовнішніх сигналів до входу релейного елемента.

9.4. Аналіз динаміки суттєво нелінійних систем з релейними елементами

Нехай релейний елемент РЕ (рис. 9.17, а) має характеристику, що зображена на рис. 9.3, а, яка для зручності повторена на рис. 9.17, б.

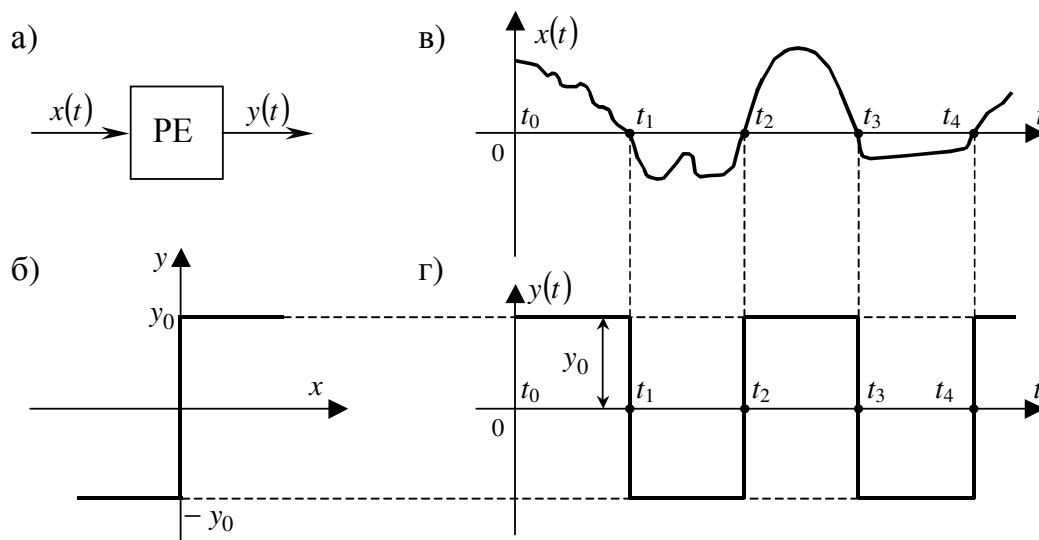


Рис. 9.17. Графічна інтерпретація формування вихідного сигналу релейного елемента без зони нечутливості і гістерезису

На рис. 9.17 легко бачити, що яким би не був вхідний сигнал $x(t)$ (рис. 9.17, в) релейного елемента, його вихідний сигнал $y(t)$ завжди являтиме собою послідовність імпульсів однієї і тієї ж висоти y_0 , знак кожного

із яких визначатиметься знаком функції $x(t)$ між двома сусідніми значеннями t_k і t_{k+1} аргументу t , в яких ця функція перетинає вісь абсцис, а протяжність

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (9.52)$$

дорівнюватиме відрізку часу між цими сусідніми його значеннями t_k і t_{k+1} .

Якщо ж релейний елемент РЕ (рис. 9.18, а) має характеристику, що зображена на рис. 9.3, б, яка для зручності повторена на рис. 9.18, б, то, очевидно, що його реакцією на вхідний сигнал $x(t)$ (рис. 9.18, в) буде вихідний сигнал $y(t)$, зображений на рис. 9.18, г.

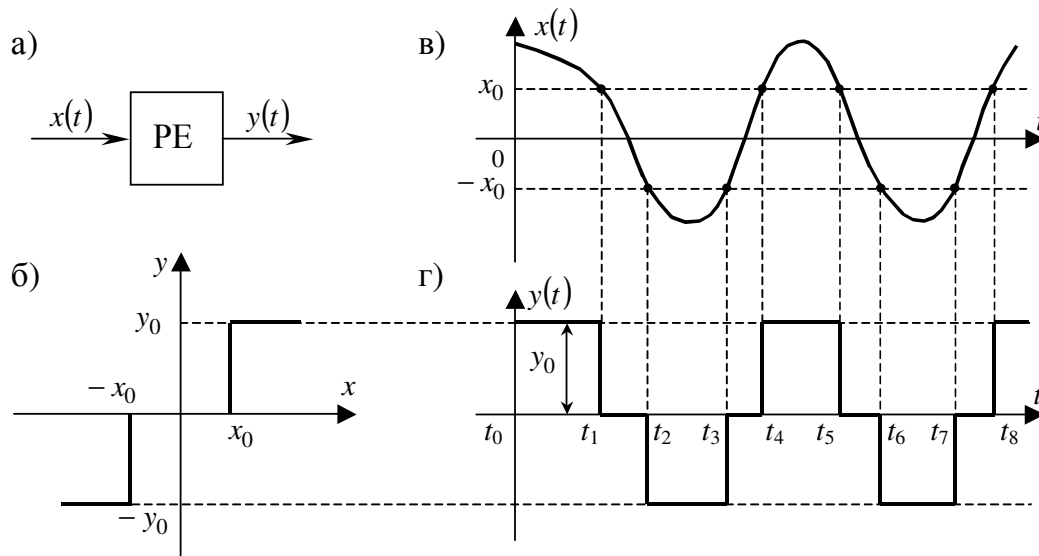


Рис. 9.18. Графічна інтерпретація формування вихідного сигналу релейного елемента з зоною нечутливості, але без гістерезису

Ми знову маємо знакозмінну послідовність імпульсів однакової висоти y_0 , але протяжність кожного з них буде меншою від значення, що задається формулою (9.52). А між кожною парою сусідніх імпульсів з'являється проміжок часу, в який вихідний сигнал $y(t)$ релейного елемента дорівнює нулю.

Тепер розглянемо випадок, коли релейний елемент РЕ (рис. 9.19, а)

має характеристику, що зображена на рис. 9.3, в, яка для зручності повтoрена на рис. 9.19, б.

Очевидно, що у цьому випадку реакцією релейного елемента РЕ на вхідний сигнал $x(t)$ (рис. 9.19, в) буде вихідний сигнал $y(t)$, зображений на рис. 9.19, г.

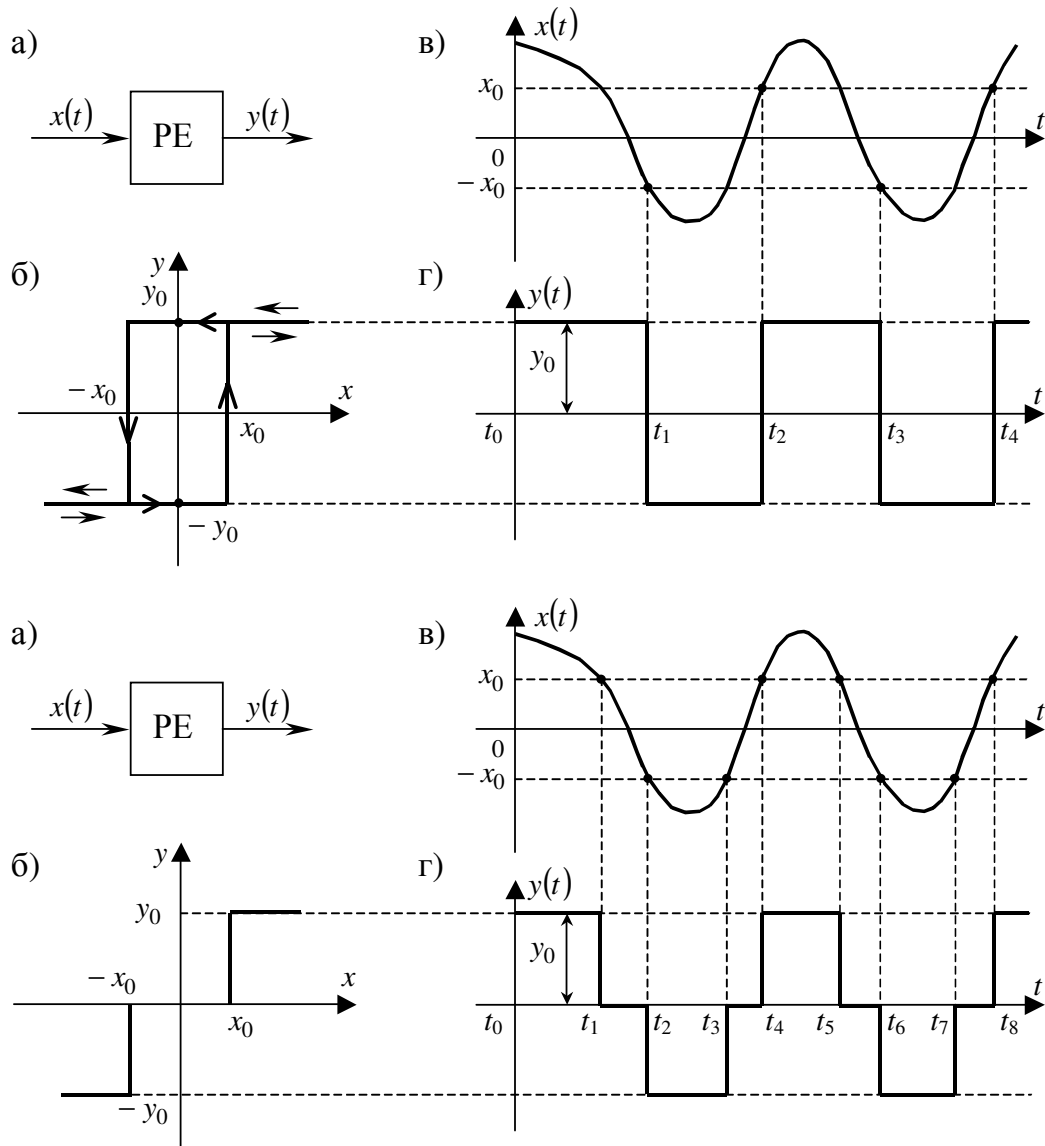


Рис. 9.19. Графічна інтерпретація формування вихідного сигналу релейного елемента з гістерезисом, але без зони нечутливості

На відміну від попереднього, у цьому випадку не буде нульових значень вихідного сигналу $y(t)$, але на відміну від випадку, який ми розгляну-

ли найпершим, кожний наступний імпульс буде з'являтися не в момент переходу сигналу $x(t)$ через нуль, а з запізненням, величина якого залежатиме як від форми сигналу $x(t)$, так і від ширини $2x_0$ гістерезисної петлі.

Останнім розглянемо випадок, коли релейний елемент має характеристику, що зображена на рис. 9.3, г, яка для зручності повторена на рис. 9.20, б.

Очевидно, що і в цьому випадку вихідний сигнал $y(t)$ релейного елемента матиме вигляд знаковмінної послідовності імпульсів однакової висоти, але як і у випадку, розглянутому нами другим, тут матимуть місце проміжки часу з нульовим значенням вихідного сигналу $y(t)$ між сусідніми імпульсами, і, одночасно, як і у випадку, розглянутому нами третім, тут матиме місце запізнення появи кожного наступного імпульсу.

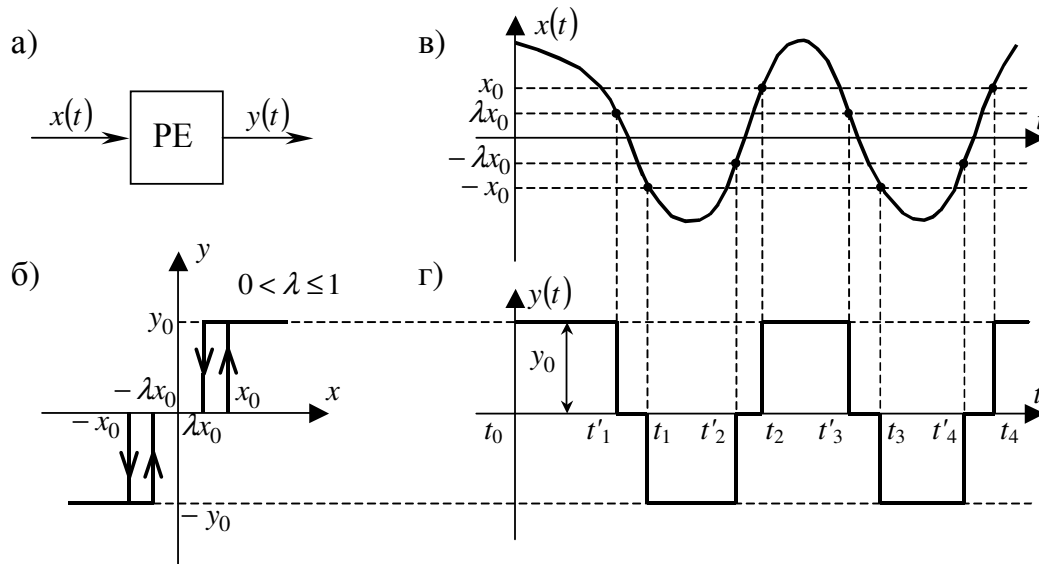


Рис. 9.20. Графічна інтерпретація формування вихідного сигналу релейного елемента з зоною нечутливості і гістерезисом

Усі розглянуті випадки об'єднує одне — релейний елемент створює на вході лінійної частини нелінійної динамічної системи знаковмінну послідовність імпульсів однакової висоти. А це, в свою чергу, означає, що вихідний сигнал лінійної частини нелінійної системи, який одночасно є і

складовою вхідного сигналу релейного елемента (рис. 9.5), можна знайти як суму реакцій лінійної частини нелінійної динамічної системи на кожний із імпульсів вхідної імпульсної знакозмінної послідовності.

Тож, як бачимо, задача аналізу суттєво нелінійної динамічної системи з релейним елементом зводиться до:

1) пошуку моментів t_k , $k = 0, 1, \dots$ переключення релейного елемента під дією вхідного сигналу $x(t)$;

2) перетворення за Лапласом суми імпульсів знакозмінної послідовності, яка з виходу РЕ надходить на вхід лінійної частини системи;

3) оберненого перетворення за Лапласом вихідного сигналу лінійної частини системи, заданого в залежності від форми характеристики релейного елемента одним із співвідношень (9.21), (9.22) або (9.23).

Для конкретизації цього поки що загального алгоритму розв'язання задачі аналізу суттєво нелінійних динамічних систем з релейним елементом припустимо спочатку, що нам уже відомі моменти t_k , $k = 0, 1, \dots$ переключення релейного елемента, що має характеристику $y = \Phi(x)$, показану рис. 9.17, б.

Тоді модель імпульсу висотою $(-1)^k \cdot y_0$ і протяжністю Δt_k (9.52) у часовій області матиме вигляд:

$$y(t^{(k)}) = (-1)^k \cdot y_0 \cdot \left(1(t^{(k)} - t_k) - 1(t^{(k)} - t_{k+1}) \right), \quad (9.53)$$

$$t_k < t^{(k)} \leq t_{k+1},$$

де $1(t)$ – це функція одиничного стрибка, для якої справедливо:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (9.54)$$

Перетворюючи за Лапласом вираз (9.53), отримаємо:

$$\begin{aligned}
L\{y(t^{(k)})\} &= \int_0^{\infty} [(-1)^k \cdot y_0 \cdot (1(t^{(k)} - t_k) - 1(t^{(k)} - t_{k+1}))] \cdot e^{-pt^{(k)}} dt^{(k)} = \\
&= (-1)^k \cdot y_0 \cdot \left[\int_0^{\infty} 1(t^{(k)} - t_k) e^{-pt^{(k)}} dt^{(k)} - \int_0^{\infty} 1(t^{(k)} - t_{k+1}) e^{-pt^{(k)}} dt^{(k)} \right], \quad (9.55) \\
& \quad t_k < t \leq t_{k+1}.
\end{aligned}$$

Роблячи заміну змінних у першому інтегралі $\theta = t^{(k)} - t_k$, а у другому інтегралі $\tau = t^{(k)} - t_{k+1}$, із (9.55) отримаємо:

$$\begin{aligned}
L\{y(t^{(k)})\} &= (-1)^k \cdot y_0 \cdot \left[\int_{-t_k}^{\infty} 1(\theta) \cdot e^{-p(\theta+t_k)} d\theta - \int_{-t_{k+1}}^{\infty} 1(\tau) \cdot e^{-p(\tau+t_{k+1})} d\tau \right] = \\
&= (-1)^k \cdot y_0 \cdot \left[e^{-pt_k} \cdot \int_0^{\infty} 1(\theta) \cdot e^{-p\theta} d\theta - e^{-pt_{k+1}} \cdot \int_0^{\infty} 1(\tau) \cdot e^{-p\tau} d\tau \right] = \\
&= \frac{(-1)^k \cdot y_0}{p} [e^{-pt_k} - e^{-pt_{k+1}}], \quad (9.56) \\
& \quad t_k < t \leq t_{k+1}.
\end{aligned}$$

Узагальнюючи результат (9.56) на суму із n імпульсів, що слідують один за одним щільно, тобто без проміжків, матимемо:

$$\begin{aligned}
L\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} y(t^{(k)}) \right\} &= \frac{y_0}{p} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot [e^{-pt_k} - e^{-pt_{k+1}}], \quad (9.57) \\
& \quad t_k < t \leq t_{k+1}.
\end{aligned}$$

Співвідношення, очевидно, буде справедливим для зображення за Лапласом вихідного сигналу релейного елемента з характеристикою, показаною на рис. 9.17, б. Тобто справедливою є тотожність

$$L\{\Phi(x(t))\} = \frac{y_0}{p} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot [e^{-pt_k} - e^{-pt_{k+1}}]. \quad (9.58)$$

Пам'ятаючи, що

$$x(t) = u(t) - z(t), \quad (9.59)$$

що впливає із структурної схеми рис. 9.5, із співвідношень (9.21) і (9.58) матимемо:

$$Z(p) = W(p) \cdot \frac{y_0}{p} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot [e^{-pt_k} - e^{-pt_{k+1}}], \quad (9.60)$$

або

$$Z(p) = y_0 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \left[\frac{W(p)}{p} e^{-pt_k} - \frac{W(p)}{p} e^{-pt_{k+1}} \right]. \quad (9.61)$$

В другому розділі цього навчального посібника було показано, що зображення за Лапласом перехідної характеристики $h(t)$ системи має вигляд:

$$L\{h(t)\} = \int_0^{\infty} h(t) \cdot e^{-pt} dt = \frac{W(p)}{p}. \quad (9.62)$$

Знайдемо, чому дорівнюватиме зображення за Лапласом зміщеної на час t_k перехідної характеристики цієї ж системи.

З означення

$$L\{h(t - t_k)\} = \int_0^{\infty} h(t - t_k) \cdot e^{-pt} dt. \quad (9.63)$$

Здійснимо у (9.63) заміну змінної. Нехай

$$t - t_k = \theta, \quad (9.64)$$

тоді

$$\begin{cases} dt = d\theta, \\ t = 0 \rightarrow \theta = -t_k. \end{cases} \quad (9.65)$$

З врахуванням (9.64) і (9.65) з (9.63) отримаємо:

$$\begin{aligned} L\{h(t - t_k)\} &= \int_{-t_k}^{\infty} h(\theta) \cdot e^{-p(\theta+t_k)} d\theta = \\ &= e^{-pt_k} \cdot \int_0^{\infty} h(\theta) \cdot e^{-p\theta} d\theta = \frac{W(p)}{p} e^{-pt_k}. \end{aligned} \quad (9.66)$$

Отримавши співвідношення (9.66), ми отримуємо водночас і право записати його з використанням оберненого перетворення Лапласа у такому вигляді:

$$h(t-t_k) = L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} e^{-pt_k} \right\}. \quad (9.67)$$

Якщо ми маємо зображення за Лапласом вихідного сигналу $Z(p)$, то, за означенням, його оригіналом у часовій області буде

$$z(t) = L^{-1} \{ Z(p) \}. \quad (9.68)$$

Підставляючи у (9.68) вираз (9.61), матимемо:

$$\begin{aligned} z(t) &= L^{-1} \left\{ y_0 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \left[\frac{W(p)}{p} e^{-pt_k} - \frac{W(p)}{p} e^{-pt_{k+1}} \right] \right\} = \\ &= y_0 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \left[L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} e^{-pt_k} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} e^{-pt_{k+1}} \right\} \right], \quad (9.69) \\ &\quad t_k < t \leq t_{k+1}. \end{aligned}$$

З врахуванням (9.67), співвідношення (9.69) можна переписати так:

$$\begin{aligned} z(t) &= y_0 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot [h(t-t_k) - h(t-t_{k+1})], \quad (9.70) \\ &\quad \text{для } t_k < t \leq t_{k+1}, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} z(t) &= y_0 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot [h(t-t_k) - h(t-t_{k+1})] + \\ &\quad + y_0 \cdot (-1)^n \cdot [h(t-t_n) - h(t-t_{n+1})] = \\ &= y_0 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot [h(t-t_k) - h(t-t_{k+1})] + y_0 \cdot (-1)^n \cdot h(t-t_n), \quad (9.71) \\ &\quad \text{для } t_n < t \leq t_{n+1}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$t_0 = 0 \quad (9.72)$$

(це впливає з рис. 9.17), рівняння (9.71) можна переписати і так:

$$\begin{aligned} z(t) &= y_0 \cdot \left[h(t) + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot h(t-t_k) \right], \quad (9.73) \\ &\quad \text{для } t_n < t \leq t_{n+1}. \end{aligned}$$

Для наочності розпишемо вираз (9.73) для трьох значень n .

Нехай $n = 0$, тоді

$$\begin{aligned} z(t) &= y_0 \cdot h(t), \\ t_0 &< t \leq t_1. \end{aligned} \quad (9.74)$$

Нехай $n = 1$, тоді:

$$\begin{aligned} z(t) &= y_0 \cdot h(t) - 2y_0 \cdot h(t - t_1), \\ t_1 &< t \leq t_2. \end{aligned} \quad (9.75)$$

Нехай $n = 2$, тоді:

$$\begin{aligned} z(t) &= y_0 \cdot h(t) - 2y_0 \cdot h(t - t_1) + 2y_0 \cdot h(t - t_2), \\ t_2 &< t \leq t_3. \end{aligned} \quad (9.76)$$

А знаючи вихідний сигнал лінійної частини системи $z(t)$, при заданому керувальному сигналі $u(t)$, за допомогою виразу (9.59) легко знаходимо значення $x(t)$ сигналу на вході релейного елемента РЕ (рис. 9.5) для будь-якого моменту часу t .

Усі викладки, що присвячені отриманню математичних моделей, необхідних для аналізу суттєво нелінійних систем з релейними елементами, зроблені нами за умови, що відомими є моменти переключення $t_k, k = 0, 1, \dots$ релейного елемента.

Тож, для побудови замкненого алгоритму аналізу даного класу систем, необхідно цей алгоритм доповнити способом визначення моментів переключення релейного елемента.

Із рис. 9.17 легко бачити, що моменти переключення $t_k, k = 0, 1, \dots$ релейного елемента, на вхід якого надходить сигнал $x(t)$, є коренями рівняння

$$x(t_k) = 0, \quad (9.77)$$

яке після підстановки в (9.77) виразу (9.59) набуває вигляду

$$u(t_k) = z(t_k). \quad (9.78)$$

В рівнянні (9.78), нагадаємо, $u(t)$ – керувальний сигнал, що подається на вхід системи, а $z(t)$ – вихідний сигнал її лінійної частини.

Із виразів (9.78) і (9.74) легко бачити, що момент t_1 першого переключення РЕ після включення системи в роботу шляхом подачі керувального сигналу $u(t)$, знаходиться з рівняння

$$u(t_1) = y_0 \cdot h(t_1), \quad (9.79)$$

в якому $h(t)$ – попередньо знайдена експериментально чи оберненим перетворенням Лапласа виразу (9.62) перехідна характеристика лінійної частини системи, що аналізується.

Оскільки в проміжку часу $t_1 < t \leq t_2$ для сигналу $z(t)$ справедливим є рівняння (9.75), то момент переключення t_2 можна знайти з рівняння

$$u(t_2) = y_0 \cdot h(t_2) - 2y_0 \cdot h(t_2 - t_1), \quad (9.80)$$

яке отримуємо підстановкою (9.75) у (9.78).

Аналогічно, момент переключення t_3 знайдемо з рівняння

$$u(t_3) = y_0 \cdot h(t_3) - 2y_0 \cdot h(t_3 - t_1) + 2y_0 \cdot h(t_3 - t_2), \quad (9.81)$$

яке отримуємо підстановкою виразу (9.76) у (9.78).

Узагальнюючи, можна стверджувати, що будь-який $(n+1)$ -ий момент переключення РЕ може бути знайдений з рівняння

$$u(t_{n+1}) = y_0 \cdot \left[h(t_{n+1}) + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot h(t_{n+1} - t_k) \right], \quad (9.82)$$

$$n = 0, 1, \dots,$$

яке отримуємо, підставляючи вираз (9.73) у (9.78).

Із рис. 9.17 видно, що вхідний сигнал $x(t)$ релейного елемента в момент t_1 першого переключення має похідну $\dot{x}(t_1)$ з від'ємним знаком, а в момент t_2 другого переключення з додатним знаком. І далі знаки у похідній чергуються.

В загальному вигляді це чергування знаку похідної $\dot{x}(t_k)$ сигналу $x(t)$ в точках переключення можна задати умовою

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_k) \cdot (-1)^k > 0, \\ k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (9.83)$$

або (з врахуванням виразу (9.59)) умовою

$$\begin{aligned} [\dot{u}(t_k) - \dot{z}(t_k)] \cdot (-1)^k > 0, \\ k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (9.84)$$

яку називають *умовою належних напрямків переключень*.

Важливе зауваження: аби не пропустити якийсь момент переключення, рівняння (9.82) необхідно розв'язувати методом послідовних наближень з достатньо малим кроком ітерації.

Тепер розглянемо питання стосовно того, яких змін зазнає алгоритм аналізу релейних динамічних систем, якщо релейний елемент матиме характеристику, відмінну від показаної на рис. 9.17, б.

Почнемо розгляд з систем з релейною характеристикою, наведеною на рис. 9.19, б.

Легко бачити, що у цьому випадку знакозмінна імпульсна послідовність $y(t)$ на виході релейного елемента РЕ має такий самий характер, як і у вже розглянутому випадку. Відмінність лише в рівнянні, за допомогою якого знаходяться моменти переключень $t_k, k = 1, 2, \dots$

Із рис. 9.19, в видно, що рівняння для визначення моментів переключень $t_k, k = 1, 2, \dots$ у цьому випадку матиме вигляд

$$\begin{aligned} x(t_k) = (-1)^k \cdot x_0, \\ k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (9.85)$$

або (з врахуванням (9.59))

$$u(t_k) - z(t_k) = (-1)^k \cdot x_0, \quad (9.86)$$

що еквівалентно

$$\begin{aligned} u(t_k) - (-1)^k \cdot x_0 = z(t_k), \\ k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.87)$$

Із того ж рис. 9.19, в видно, що умова належних напрямків переклю-

чень залишається такою ж, як і в попередньому випадку і задається тими ж виразами (9.83), (9.84).

Що ж стосується сигналу $z(t)$ на виході лінійної частини релейної нелінійної системи даного класу, то для нього є справедливими ті ж вирази (9.73) – (9.76), що і для того випадку, для якого ці вирази отримані і які зображено на рис. 9.17.

Тепер перейдемо до аналізу релейних динамічних систем з релейними характеристиками, показаними на рис. 9.18, б і рис. 9.20, б.

Легко бачити, що знакозмінна імпульсна послідовність $y(t)$ на виході релейного елемента в обох цих випадках має один і той же характер, що не дивно, оскільки релейну характеристику, яка наведена на рис. 9.18, б, можна отримати з релейної характеристики, що наведена на рис. 9.20, б, при $\lambda = 1$.

Тож достатньо розглянути випадок, показаний на рис. 9.20. До здійснення цього ми і приступимо.

Нехай t_1, t_2, t_3, \dots — це моменти переключення, які виникають у моменти переходу сигналу $x(t)$ через пороги $\pm x_0$, а t'_1, t'_2, t'_3, \dots — через пороги $\pm \lambda x_0$.

Із рис. 9.20, в можна бачити, що усі ці моменти є коренями рівнянь:

$$x(t_k) = (-1)^k \cdot x_0, \quad (9.88)$$

$$x(t'_k) = (-1)^{k+1} \cdot \lambda x_0, \quad (9.89)$$

$$k = 1, 2, \dots,$$

які за допомогою виразу (9.59) трансформуються у рівняння:

$$u(t_k) - (-1)^k \cdot x_0 = z(t_k), \quad (9.90)$$

$$u(t'_k) + (-1)^k \cdot \lambda x_0 = z(t'_k), \quad (9.91)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Очевидно (див. рис. 9.20, в), що умова належних напрямків переключень для обох цих випадків буде задаватись однаковими за структурою виразами, аналогічними (9.83) і (9.84), а саме:

$$\dot{x}(t_k) \cdot (-1)^k > 0, \quad (9.92)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t'_k) \cdot (-1)^k > 0, \\ k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (9.93)$$

або (з врахуванням виразу (9.59)):

$$[\dot{u}(t_k) - \dot{z}(t_k)] \cdot (-1)^k > 0, \quad (9.94)$$

$$\begin{aligned} [\dot{u}(t'_k) - \dot{z}(t'_k)] \cdot (-1)^k > 0, \\ k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.95)$$

Дивлячись на рівняння (9.90), (9.91), бачимо, що при заданих $u(t)$, x_0 , λ для їх розв'язання відносно t_k і t'_k , $k = 1, 2, \dots$ необхідно знати вихідний сигнал $z(t)$ лінійної частини ЛЧ релейної динамічної системи.

Перш ніж перейти до виведення розрахункових співвідношень для сигналу $z(t)$ звертаємо увагу на те, що він формується лише за рахунок впливу імпульсів висотою $(-1)^k \cdot y_0$ між моментами t_k і t'_{k+1} , оскільки між моментами t'_{k+1} і t_{k+1} вхідний сигнал $y(t)$ дорівнює нулю.

Як знайти реалізацію $z(t)$ ЛЧ системи на таку послідовність імпульсів ми уже знаємо (див. вирази (9.53) – (9.71), в яких скрізь t_{k+1} необхідно замінити на t'_{k+1}). Тобто маємо право записати:

$$z(t) = y_0 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot [h(t - t_k) - h(t - t'_{k+1})] + y_0 \cdot (-1)^n \cdot h(t - t_n), \quad (9.96)$$

$$t_n < t \leq t'_{n+1}.$$

А для проміжку часу $t'_{n+1} < t \leq t_{n+1}$ рівняння (9.96) набуває вигляду

$$z(t) = y_0 \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot [h(t - t_k) - h(t - t'_{k+1})], \quad (9.97)$$

$$t'_{n+1} < t \leq t_{n+1}.$$

Пам'ятаючи, що $t_0 = 0$, розкриваємо (9.96), (9.97) для трьох значень

n .

Нехай $n = 0$, тоді:

для $t_0 < t \leq t'_1$:

$$z(t) = y_0 \cdot h(t), \quad (9.98)$$

для $t'_1 < t \leq t_1$:

$$z(t) = y_0 \cdot h(t) - y_0 \cdot h(t - t'_1). \quad (9.99)$$

Нехай $n = 1$, тоді:

для $t_1 < t \leq t'_2$:

$$z(t) = y_0 \cdot h(t) - y_0 \cdot h(t - t'_1) - y_0 \cdot h(t - t_1), \quad (9.100)$$

для $t'_2 < t \leq t_2$:

$$z(t) = y_0 \cdot h(t) - y_0 \cdot h(t - t'_1) - y_0 \cdot h(t - t_1) + y_0 \cdot h(t - t'_2). \quad (9.101)$$

Нехай $n = 2$, тоді:

для $t_2 < t \leq t'_3$:

$$\begin{aligned} z(t) = & y_0 \cdot h(t) - y_0 \cdot h(t - t'_1) - y_0 \cdot h(t - t_1) + \\ & + y_0 \cdot h(t - t'_2) + y_0 \cdot h(t - t_2), \end{aligned} \quad (9.102)$$

для $t'_3 < t \leq t_3$:

$$\begin{aligned} z(t) = & y_0 \cdot h(t) - y_0 \cdot h(t - t'_1) - y_0 \cdot h(t - t_1) + \\ & + y_0 \cdot h(t - t'_2) + y_0 \cdot h(t - t_2) - y_0 \cdot h(t - t'_3). \end{aligned} \quad (9.103)$$

Для знаходження моменту переключення t'_1 необхідно у вираз (9.91) підставити значення $z(t)$ із (9.98) і розв'язати відносно t'_1 отримане рівняння

$$u(t'_1) - \lambda_0 x_0 = y_0 \cdot h(t'_1). \quad (9.104)$$

Аналогічно, для знаходження моменту переключення t_1 необхідно у вираз (9.90) підставити значення $z(t)$ із (9.99) і розв'язати відносно t_1 отримане рівняння

$$u(t_1) - x_0 = y_0 \cdot h(t_1) - y_0 \cdot h(t_1 - t'_1). \quad (9.105)$$

Для знаходження наступних моментів переключень необхідно реку-

рентно продовжити цей процес отримання і розв'язання рівнянь спочатку стосовно t'_k , а потім стосовно t_k , починаючи з $k = 2$.

Очевидно, що всі отримані в цьому випадку співвідношення будуть справедливими і при $\lambda = 1$. А саме при такому значення λ релейний елемент, зображений на рис. 9.20, а, з релейною характеристикою, наведеною на рис. 9.20, б, перетворюється на релейний елемент, зображений на рис. 9.18, а, з релейною характеристикою, наведеною на рис. 9.18, б.

Тож, для аналізу релейних динамічних систем з релейною характеристикою, зображеною на рис. 9.18, б, необхідно використовувати усі отримані вище математичні моделі, починаючи з (9.88), поклавши $\lambda = 1$ в тих із них, які цей параметр мають у своїй структурі.

На завершення розділу зауважимо, що аналіз релейних динамічних систем з несиметричними релейними характеристиками, наприклад, такими, як показано на рис. 9.21, майже нічим не відрізняється від вищевикладеного.

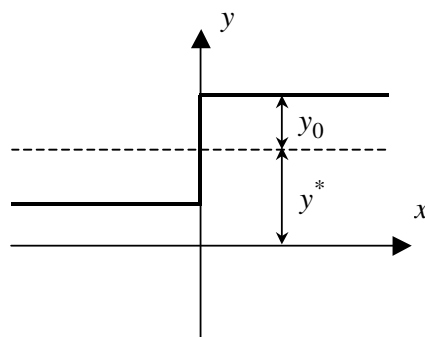


Рис. 9.21. Приклад несиметричної релейної характеристики

Єдине, чим доповнюється алгоритм аналізу таких систем, є те, що у вихідному сигналі $z(t)$ лінійної частини системи з'являється додатковий член

$$z_{\partial}(t) = y_0 \cdot y^* \cdot h(t), \quad (9.106)$$

який характеризує реакцію лінійної частини системи з перехідною характеристикою $h(t)$ на усталений вплив y^* релейного елемента, характе-

тика якого центрована цим значенням. Тобто у цьому випадку для сигналу $z(t)$ замість моделей (9.70) і (9.71) необхідно використовувати моделі, відповідно:

$$z(t) = y_0 \cdot \left\{ y^* \cdot h(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot [h(t-t_k) - h(t-t_{k+1})] \right\}, \quad (9.107)$$

$$t_k < t \leq t_{k+1};$$

$$z(t) = y_0 \cdot \left\{ y^* \cdot h(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot [h(t-t_k) - h(t-t_{k+1})] + (-1)^n \cdot h(t-t_n) \right\}, \quad (9.108)$$

$$t_n < t \leq t_{n+1}.$$

Аналогічні поправки до отриманих моделей сигналу $z(t)$ будуть мати місце і при несиметризації інших із розглянутих нами симетричних релейних характеристик.

9.5. Завдання для самоперевірки

1. В чому полягає суть лінеаризації нелінійних характеристик динамічних систем?
2. Про що не слід забувати при лінеаризації нелінійностей?
3. Що собою являють релейні динамічні системи і де вони знаходять застосування? Наведіть приклади.
4. Який вигляд має релейна характеристика без зони нечутливості і гістерезису? Як виглядає її математична модель?
5. Який вигляд має релейна характеристика з зоною нечутливості, але без гістерезису? Як виглядає її математична модель?
6. Який вигляд має релейна характеристика без зони нечутливості, але з гістерезисом? Як виглядає її математична модель?
7. Який вигляд має релейна характеристика з зоною нечутливості і гістерезисом? Як виглядає її математична модель?
8. Які дві характерні особливості релейних динамічних систем, пов'язані з вихідним сигналом їхнього релейного елемента, ви знаєте?

9. Як виглядають функціональна і структурна схеми релейної динамічної системи, придатні для аналізу процесів в ній?

10. Отримайте в загальному вигляді математичну модель вхідного сигналу релейного елемента релейної динамічної системи.

11. Отримайте в загальному вигляді математичну модель сигналу на виході лінійної частини релейної динамічної системи.

12. Продемонструйте процес отримання математичної моделі релейної динамічної системи на прикладі системи вібраційного регулювання електрорушійної сили генератора.

13. Продемонструйте процес отримання математичної моделі релейної динамічної системи на прикладі системи стабілізації кутової швидкості електродвигуна електропривода.

14. Що привносить в роботу електропривода “в’язке демпферування” та “сухе тертя”?

15. Побудуйте графіки вхідного та вихідного сигналів релейного елемента:

- a. без зони нечутливості і гістерезису;
- b. з зоною нечутливості, але без гістерезису;
- c. з гістерезисом, але без зони нечутливості;
- d. з зоною нечутливості і гістерезисом.

16. В чому суть аналізу релейної динамічної системи? Що треба знати?

17. Виведіть математичні співвідношення, за допомогою яких можна здійснити аналіз релейної динамічної системи, що має релейну характеристику без зони нечутливості і без гістерезису.

18. Із яких рівнянь знаходяться моменти переключень релейного елемента?

19. Що собою являє умова належних напрямків переключень?

20. В чому відмінність аналізу релейних динамічних систем з релей-

ними елементами без зони нечутливості і без гістерезису та без зони нечутливості, але з гістерезисом?

21. Яка особливість аналізу релейних динамічних систем з релейним елементом, що має і зону нечутливості, і гістерезис?

22. Як можна використати математичні моделі, що розроблені для випадку релейної характеристики з зоною нечутливості і гістерезисом, для аналізу релейних динамічних систем, що мають релейну характеристику з зоною нечутливості, але без гістерезису?

23. Продемонструйте знання алгоритму визначення моментів переключень релейного елемента, визначивши декілька перших моментів.

24. Як аналізувати релейні динамічні системи з несиметричними релейними характеристиками? Наведіть приклад.

10. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СИСТЕМ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

10.1. Загальна характеристика систем з розподіленими параметрами

В усіх попередніх розділах здійснювалась побудова математичних моделей електромеханічних систем за умови, що їх параметри є зосередженими в просторі.

Але існує досить багато фізичних процесів, що протікають в динамічних об'єктах, параметри яких не можна вважати зосередженими в одній точці простору.

Більше того, деякі об'єкти при моделюванні за одними ознаками мають зосереджені параметри, а при використанні інших ознак переходять в клас об'єктів з розподіленими параметрами.

Нагадаємо, що будь-яку динамічну систему відносять до класу систем з розподіленими параметрами, якщо в її структурі є хоча б один елемент, реакція на вхідний сигнал у якому суттєво запізнюється у порівнянні з реакціями усіх інших елементів цієї системи.

У класі електронних систем — це системи, в структурі яких використовуються лінії затримки сигналу. У класі електричних систем — це системи з довгими лініями електропередачі. У класі електромеханічних систем — це електроприводні системи з тросами, довгими штангами, конвеєрами і трубопроводами. У класі систем автоматичного керування технологічними процесами — це системи з хімічними реакціями, з плавильними печами, з термоустановками для випалювання, сушки чи випарювання та з іншими об'єктами, процеси в яких через особливості динаміки чи протяжність у просторі протікають суттєво повільніше, ніж в контурах управління ними. У класі автоматизованих систем управління — це системи з

комп'ютерною обробкою інформації за алгоритмами, що характеризуються суттєво більшими затратами часу на їх реалізацію у порівнянні з часом обробки інформації і прийняття рішень в інших контурах автоматизованої системи.

Які ж особливості є характерними саме для систем з розподіленими параметрами?

Спробуємо дати відповідь на це запитання в загальних рисах на конкретних прикладах.

В підйомних кранах вантажі піднімаються і опускаються з використанням тросів. Оскільки трос сплітається з великої кількості тонких сталевих дротів, то він має властивість витягуватись чи скорочуватись в залежності від ваги вантажу, прикріпленого до одного з його кінців.

При підніманні вантажу трос спочатку витягується в “струну”, але потім, навіть при постійній швидкості обертання вала електродвигуна, який намотує трос на катушку, завдяки взаємодії сил, обумовлених вагою вантажу і інерцією, в тросі виникають небажані повздовжні коливання, котрі розгойдують вантаж у вертикальній площині, заважаючи точно встановити його на нове місце і завдаючи цьому місцю та вантажу шкідливі удари.

Як ще один приклад електромеханічних систем з тросами розглянемо систему електропривода конуса, яким закривається кругле завантажувальне вікно доменної печі на її вершині. Через це вікно у доменну піч до початку плавлення завантажується шихта. При завантаженні шихти металевий конус, призначенням якого є відкривання і закривання завантажувального вікна і який є підвішеним на тросі, знаходиться в своєму нижньому положенні, відкриваючи широку щілину між конусом і місцем його посадки у завантажувальному вікні, і створюючи можливість шихті через цю щілину висипатись у доменну піч.

Після завантаження шихти за допомогою троса, інший кінець якого

прикріплено до котушки, з'єднаної з валом електродвигуна, металевий конус підтягується, закриваючи завантажувальне вікно.

Висота деяких доменних печей сягає 70 метрів. Відстань від вертикальної осі доменної печі до місця встановлення електропривода конуса біля її підніжжя має аналогічний порядок. Тож довжина троса, яким передається рух від вала електродвигуна до конуса, може сягати 150 метрів.

За рахунок повздовжніх коливань троса при підтягуванні конуса він завдає таку кількість ударів по своєму ложу у завантажувальному вікні доменної печі і такої сили, що кожна доменна піч не менше одного разу на рік вимагає ремонтних робіт для відновлення щільного прилягання в системі “конус – вікно”.

За допомогою електроприводів приводять у рух насоси перекачувальних станцій нафтопроводів і компресори перекачувальних станцій газопроводів, котрих в Україні багато тисяч кілометрів.

Основним результуючим параметром, яким регулюється продуктивність нафто- і газопроводів, є тиск в рідині чи газі, котрий створюється дією насосів та компресорів і який передається вздовж трубопроводу зі швидкістю звуку, яка залежить від складу рідини чи газу.

Через невисоку швидкість розповсюдження звукових хвиль, запізнення в їх появі на виході відрізка трубопроводу від однієї перекачувальної станції до іншої можуть сягти суттєвих значень, без врахування яких ефективної системи стабілізації тиску в трубопроводі побудувати не можна, оскільки сигнал з виходу об'єкта регулювання надходить по каналу зворотного зв'язку на регулятор, встановлений на вході об'єкта, зі значним запізненням і може слугувати причиною появи коливань тиску зі значною амплітудою.

Для ряду конвеєрних транспортних систем, які є складовими в більш складних системах, наприклад, в системах випалювання залізородних когунів, чи системах сушіння сипких матеріалів, важливим є дотримання

однакової товщини шару матеріалу на конвеєрній стрічці. При нерівномірній подачі матеріалу на стрічку на вході конвеєра стабілізувати товщину шару матеріалу на цій стрічці можна лише змінюючи швидкість обертання приводних електродвигунів. І додаткові складнощі у побудові такої системи стабілізації створюються саме тим, що має місце запізнення появи вихідного сигналу об'єкта регулювання. І, звичайно ж, чим довшим є конвеєр, тим більшим буде запізнення появи сигналу на його виході.

В теорії автоматичного керування розроблено багато способів управління об'єктами з розподіленими параметрами, але кожен з них базується на тому, що відомою є математична модель об'єкта.

Тож, в наступних параграфах цього розділу ми покажемо, як отримати математичну модель того чи іншого процесу, який протікає в об'єктах з розподіленими параметрами.

10.2. Рівняння математичної фізики як моделі елементів систем з розподіленими параметрами

Почнемо з побудови математичної моделі довгої лінії електропередачі ЛЕП (рис. 10.1), за допомогою якої електроенергія від генератора G електростанції з електрорушійною силою E через підвищувальний трансформатор ПТ з приведеним повним опором Z_{II} та знижувальний трансформатор Т з приведеним повним опором Z_T передається до навантаження Н з повним опором Z_H .

Об'єднаємо опір Z_T знижувального трансформатора Т з опором Z_H навантаження в сумарний опір Z_K , підключений до кінця лінії електропередачі.

Тоді функціональну схему (рис. 10.1) можна замінити принциповою схемою, наведеною на рис. 10.2, на якій довга лінія електропередачі ЛЕП подається як послідовний ланцюг G -подібних чотирьохполюсників з параме-

трами R_j, L_j, G_j, C_j (на рис. 10.2 показано лише один з них: j -ий), де R_j – питомий активний опір j -ої ділянки фази ЛЕП, а L_j, G_j, C_j – відповідно, питома індуктивність, питома активна провідність і питома ємність цієї ділянки.

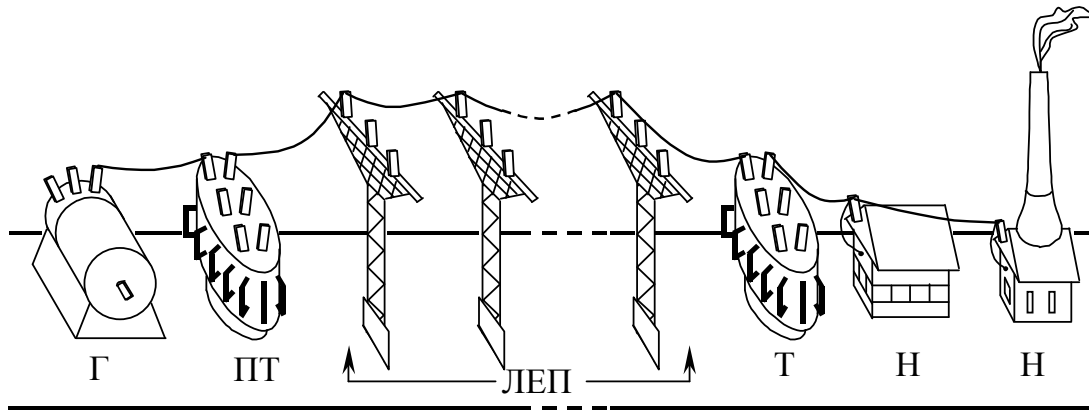


Рис. 10.1. Функціональна схема однієї фази електричної системи, до складу якої входить генератор Г електростанції, підвищувальний трансформатор ПТ, довга лінія електропередачі ЛЕП, знижувальний трансформатор Т та навантаження Н

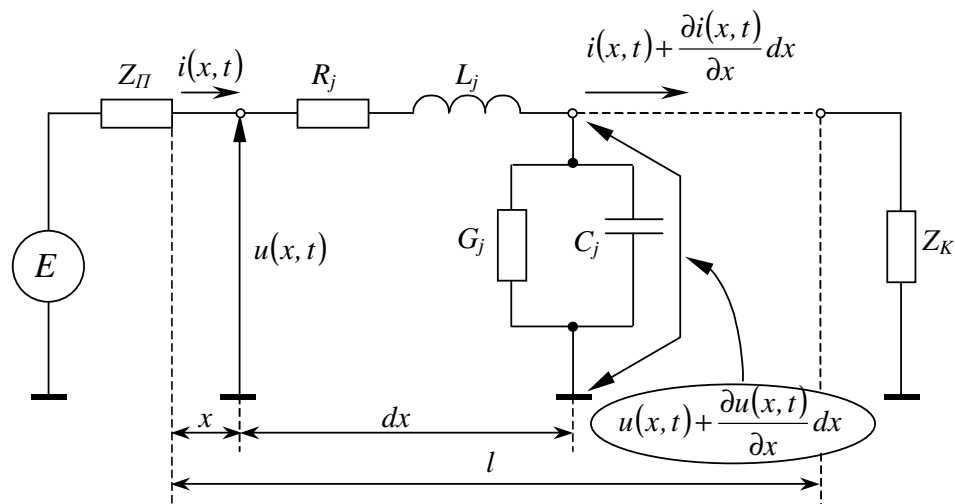


Рис. 10.2. Принципова схема однієї фази електричної системи

Позначимо $u(x, t), i(x, t)$, відповідно, напругу і струм на вході j -го

елемента схеми фази ЛЕП. Тоді на виході j -го елемента довжиною dx матимемо напругу і струм, що дорівнюють:

$$\begin{cases} u(x, t) + \Delta u = u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx, \\ i(x, t) + \Delta i = i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} dx. \end{cases} \quad (10.1)$$

Запишемо перший та другий закони Кірхгофа для j -го елемента схеми фази ЛЕП. Матимемо:

$$u(x, t) - \left[u(x, t) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx \right] = (R_j dx) \cdot i(x, t) + (L_j dx) \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}, \quad (10.2)$$

$$i(x, t) - \left[i(x, t) + \frac{\partial i(x, t)}{\partial x} dx \right] = (G_j dx) \cdot u(x, t) + (C_j dx) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (10.3)$$

Розкриваючи квадратні дужки в лівій частині рівнянь (10.2), (10.3) і ділячи ці рівняння на dx , отримаємо:

$$-\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = R_j \cdot i(x, t) + L_j \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}, \quad (10.4)$$

$$-\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = G_j \cdot u(x, t) + C_j \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \quad (10.5)$$

Приймаючи умову, що параметри R_j , L_j , G_j , C_j є величинами сталими і однаковими для всіх ділянок схеми фази ЛЕП, рівняння (10.4), (10.5) можна записати так:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = R \cdot i(x, t) + L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = G \cdot u(x, t) + C \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \end{cases} \quad (10.6)$$

Диференціальні рівняння (10.6) в частинних похідних і задають математичну модель довгої лінії електропередачі. Для отримання їх однозначного розв'язку необхідно задати початкові $i(x, 0)$, $u(x, 0)$ та граничні $i(0, 0)$, $u(0, 0)$ або $i(l, t_k)$, $u(l, t_k)$ умови.

Замість системи двох диференціальних рівнянь в частинних похідних

1-го порядку (10.6) відносно функцій $u(x, t)$, $i(x, t)$ як модель довгої ЛЕП можна використовувати і одне диференціальне рівняння в частинних похідних 2-го порядку відносно лише однієї функції $u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (RC + GL) \frac{\partial u}{\partial t} - GRu = 0, \quad (10.7)$$

або лише однієї функції $i(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (RC + GL) \frac{\partial i}{\partial t} - GRi = 0, \quad (10.8)$$

які легко отримати із рівняння (10.6) шляхом додаткового диференціювання і підстановки одного рівняння в інше.

Покажемо це на прикладі отримання рівняння (10.8).

Перший крок: продиференціюємо за x друге рівняння системи (10.6), в результаті чого отримаємо:

$$-\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = G \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + C \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t \partial x}. \quad (10.9)$$

Другий крок: підставимо замість першого члена в правій частині рівняння (10.9) його значення із першого рівняння системи (10.6), в результаті чого отримаємо:

$$-\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = G \left[-R \cdot i(x, t) - L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \right] + C \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t \partial x}. \quad (10.10)$$

Третій крок: продиференціюємо перше рівняння системи (10.6) за t , в результаті чого отримаємо:

$$-\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} = R \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + L \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2}. \quad (10.11)$$

Четвертий крок: пам'ятаючи про те, що при незалежних змінних черговість диференціювання функції від них для отримання змішаної частинної похідної 2-го порядку ролі не грає, підставимо замість останнього члена в правій частині рівняння (10.10) його значення із рівняння (10.11), в результаті чого отримаємо:

$$-\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = -GR \cdot i(x, t) - GL \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + C \left[-R \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - L \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} \right]. \quad (10.12)$$

П'ятий крок: переносимо усі члени рівняння (10.12) в одну сторону і зводимо подібні члени, в результаті чого отримаємо рівняння (10.8).

Аналогічним способом шляхом виключення функції $i(x, t)$ та її похідних із системи (10.6) виводиться і рівняння (10.7).

Легко бачити, що обидва вони мають однакову структуру.

В теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних рівняння (10.7), (10.8) відносять до рівнянь математичної фізики гіперболічного типу. Із цих рівнянь шляхом прирівнювання до нуля окремих параметрів можна отримати математичні моделі трубопроводних ліній і тросів.

Очевидно, що в трубопроводах витік газу чи рідини через стінку відсутній, тому для них справедливою буде умова

$$G = 0. \quad (10.13)$$

З фізики відомо, що для гідравлічних і пневматичних систем аналогом електричної напруги $u(x, t)$ є тиск $p(x, t)$, а аналогом електричного струму $i(x, t)$ є об'ємна витрата $Q(x, t)$, тобто для трубопроводів є справедливим

$$\begin{cases} u(x, t) = p(x, t), \\ i(x, t) = Q(x, t). \end{cases} \quad (10.14)$$

З врахуванням умов (10.13), (10.14) з (10.7), (10.8) знайдемо, що математичні моделі гідравлічних або пневматичних трубопроводів мають вигляд:

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} - RC \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (10.15)$$

$$\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} - RC \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (10.16)$$

В рівняннях (10.15), (10.16):

$$R = \frac{8\pi\mu_D}{f^2}, \quad (10.17)$$

$$L = \frac{\rho}{f}, \quad (10.18)$$

$$C = \frac{f}{\rho a^2}, \quad (10.19)$$

де f – площа поперечного перерізу труби, μ_D – динамічний коефіцієнт в'язкості газу чи рідини, ρ – густина газу чи рідини, a – швидкість розповсюдження звуку в газі чи рідині.

Рівняння (10.15), (10.16) залишаються в класі гіперболічних рівнянь математичної фізики.

Якщо нас цікавить передача тепла вздовж довгого ізольованого стержня, то, враховуючи умови

$$u(x, t) = \theta(x, t), \quad (10.20)$$

$$\begin{cases} G = 0, \\ L = 0, \end{cases} \quad (10.21)$$

для опису процесу зміни температури $\theta(x, t)$ в часі і вздовж стержня, із рівняння (10.7) отримаємо модель:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} - RC \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (10.22)$$

яку називають *рівнянням теплопровідності* і відносять до класу параболічних рівнянь математичної фізики.

В рівнянні (10.22)

$$RC = \frac{\rho c}{\lambda}, \quad (10.23)$$

де ρ – густина матеріалу стержня, c – питома теплоємність цього матеріалу, а λ – коефіцієнт його теплопровідності.

Аналогічну модель за умови (10.21) та умови

$$i(x, t) = q(x, t) \quad (10.24)$$

із рівняння (10.8) можна отримати для опису процесу розповсюдження теплового потоку $q(x, t)$ в часі та вздовж стержня, а саме:

$$\frac{\partial^2 q(x, t)}{\partial x^2} - RC \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (10.25)$$

для якої є також справедливою умова (10.23).

Слід зазначити, що рівняннями параболічного типу описуються також процеси передачі низькочастотних сигналів в телеграфних і телефонних кабелях, для яких також в достатньому для практичних розрахунків наближенні виконується умова (10.21).

Тож процес розповсюдження напруги $u(x, t)$ в такому кабелі досить точно описується рівнянням

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - RC \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (10.26)$$

а процес розповсюдження струму — рівнянням

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} - RC \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (10.27)$$

З теорії подібності відомо, що аналогом електричної напруги $u(x, t)$ для механічних систем є швидкість руху тіла $v(x, t)$, аналогом електричного струму $i(x, t)$ є сила $F(x, t)$, яка діє на тіло, а аналогами індуктивності L , активного опору R та ємності C , відповідно, є податливість n , механічна провідність тертя h та маса m .

Виходячи з указаних аналогій, а також з того, що для тросів, як і для трубопроводів, справедливою є умова (10.13), із рівнянь (10.7), (10.8) можна записати математичні моделі для троса у вигляді:

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - n \cdot m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} - h \cdot m \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (10.28)$$

$$\frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2} - n \cdot m \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial t^2} - h \cdot m \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (10.29)$$

Ці моделі суттєво спрощуються, не вносячи суттєвих похибок, якщо не враховувати механічну провідність тертя в тросі, тобто за умови, що

$$h = 0. \quad (10.30)$$

У цьому випадку з рівнянь (10.28), (10.30) матимемо:

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - n \cdot m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (10.31)$$

$$\frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2} - n \cdot m \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (10.32)$$

Рівняння (10.31), (10.32) в математичній фізиці носять назву рівнянь коливання струни.

Завершимо розгляд математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами моделлю широко розповсюдженого теплообмінника типу “труба в трубі” (рис. 10.3).

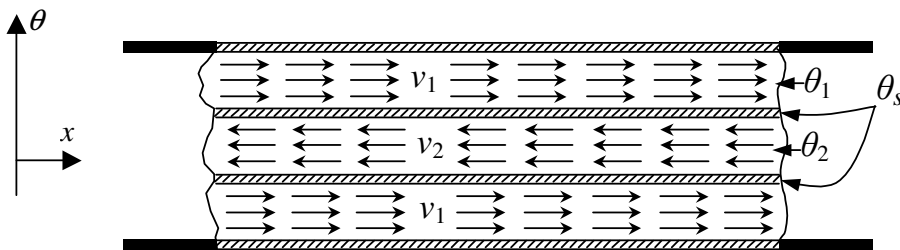


Рис. 10.3. Повздовжній розріз секції теплообмінника типу “труба в трубі”

Цю модель запишемо лише для процесу зміни в часі та вздовж труби температури в рідких середовищах θ_1 , θ_2 та у розділяючій їх стінці θ_s .

При розробці цієї моделі використано дуже розповсюджений і практично підтверджений принцип, що швидкість зміни температури θ рідини, що переміщується зі швидкістю v в часі та вздовж труби, яка характеризу-

ється відповідними похідними, пропорційна різниці температур цієї рідини та стінки, від якої надходить потік тепла, тобто

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \chi_{s1}(\theta_s - \theta_1), \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = \chi_{s2}(\theta_s - \theta_2), \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \chi_{1s}(\theta_1 - \theta_s) + \chi_{2s}(\theta_2 - \theta_s), \end{cases} \quad (10.33)$$

де θ_1 – температура рідини в зовнішній трубі, θ_2 – температура рідини у внутрішній трубі, θ_s – температура тонкої стінки внутрішньої труби, яка розділяє рідини, χ_{s1} , χ_{s2} , χ_{1s} , χ_{2s} – коефіцієнти теплопровідності між стінкою внутрішньої труби і рідинами, λ_1 , λ_2 – коефіцієнти, які характеризують режими роботи теплообмінника і визначаються через швидкість рідин, тобто:

– в режимі току (коли обидві рідини рухаються по трубах в одному напрямку):

$$\lambda_1 = v_1, \quad \lambda_2 = v_2, \quad (10.34)$$

– в режимі протитоку (коли обидві рідини рухаються по трубах назустріч одна одній):

$$\lambda_1 = v_1, \quad \lambda_2 = -v_2. \quad (10.35)$$

Моделлю (10.33) ми і завершимо розгляд моделей елементів систем з розподіленими параметрами, що базуються на рівняннях математичної фізики.

Очевидно, що у випадках, коли необхідно проаналізувати лише процеси, які протікають в конкретних об'єктах з розподіленими параметрами, достатньо задати початкові та граничні умови і розв'язати відповідні рівняння математичної фізики, що описують процеси в цих об'єктах. Якщо ж об'єкт з розподіленими параметрами є складовою ланкою системи, то аналіз процесу в ньому буде не таким простим.

10.3. Аналіз математичних моделей систем з розподіленими параметрами

В найбільш загальному вигляді математична модель об'єкта з розподіленими параметрами на основі диференціальних рівнянь в частинних похідних отримана нами у вигляді (10.6).

Як показано в попередньому параграфі, із системи рівнянь (10.6) можна отримати усі інші важливі для практики моделі об'єктів з розподіленими параметрами як в класі диференціальних рівнянь математичної фізики гіперболічного типу, так і параболічного.

Тож немає потреби аналізувати усі отримані нами в попередньому параграфі моделі. Достатньо провести аналіз найбільш загальної моделі у вигляді (10.6) і показати як розповсюдити отримані результати на усі інші випадки.

Вважаючи початкові умови нульовими, перетворимо за Лапласом рівняння системи (10.6), вважаючи незалежною змінною час t , а x розглядаючи як параметр.

В результаті перетворення отримаємо:

$$-\frac{dU(x, p)}{dx} = (R + pL) \cdot I(x, p), \quad (10.36)$$

$$-\frac{dI(x, p)}{dx} = (G + pC) \cdot U(x, p). \quad (10.37)$$

Звертаємо увагу, що після перетворення за Лапласом, тобто взяття інтегралів Лапласа за змінною t , функції $U(x, p)$, $I(x, p)$ стають функціями лише однієї незалежної змінної x з параметром p , тож в рівняннях (10.36), (10.37) ми маємо право розглядати не частинні похідні від функцій, як було в (10.6), а звичайні.

Продиференціювавши за x рівняння (10.36), отримаємо:

$$-\frac{d^2U(x, p)}{dx^2} = (R + pL) \frac{dI(x, p)}{dx}. \quad (10.38)$$

Підставивши в рівняння (10.38) значення похідної струму з рівняння (10.37) і перенісши всі члени в одну сторону, матимемо:

$$\frac{d^2U(x, p)}{dx^2} - (R + pL) \cdot (G + pC) \cdot U(x, p) = 0. \quad (10.39)$$

Рівняння (10.39) є диференціальним рівнянням 2-го порядку відносно $U(x, p)$ за змінною x , характеристичне рівняння якого має вигляд:

$$\gamma^2 - (R + pL) \cdot (G + pC) = 0. \quad (10.40)$$

Коренями рівняння (10.40), очевидно, є

$$\gamma_{1,2} = \pm \sqrt{(R + pL) \cdot (G + pC)}. \quad (10.41)$$

Зауважимо, що корінь γ_1 , як правило, називають *коефіцієнтом розповсюдження хвилі*, або *хвильовою сталою*, і позначають як

$$\gamma(p) = \sqrt{(R + pL) \cdot (G + pC)}. \quad (10.42)$$

Введення (10.42) дає нам право стверджувати, що

$$\gamma_1(p) = \gamma(p), \quad \gamma_2(p) = -\gamma(p). \quad (10.43)$$

З теорії диференціальних рівнянь відомо, що загальний розв'язок диференціального рівняння 2-го порядку (10.39) можна записати у вигляді:

$$U(x, p) = a_1(p) \cdot e^{\gamma_1(p)x} + a_2(p) \cdot e^{\gamma_2(p)x}, \quad (10.44)$$

або, враховуючи (10.42), (10.43), у вигляді:

$$U(x, p) = a_1(p) \cdot e^{\gamma(p)x} + a_2(p) \cdot e^{-\gamma(p)x}. \quad (10.45)$$

Для визначення $a_1(p)$, $a_2(p)$ використаємо граничні умови, які, як видно з рис. 10.2, мають вигляд:

$$U(0, p) = E(p) - I(0, p) \cdot Z_{II}(p) \quad \text{для } x = 0, \quad (10.46)$$

$$U(l, p) = I(l, p) \cdot Z_K(p) \quad \text{для } x = l. \quad (10.47)$$

Підставляючи $x = 0$ в рівняння (10.44), отримаємо:

$$U(0, p) = a_1(p) + a_2(p), \quad (10.48)$$

або, з врахуванням (10.46):

$$a_1(p) + a_2(p) = E(p) - I(0, p) \cdot Z_{II}(p). \quad (10.49)$$

Продиференціювавши (10.45) за x , отримаємо:

$$\frac{dU(x, p)}{dx} = \gamma(p) \cdot a_1(p) \cdot e^{\gamma(p)x} - \gamma(p) \cdot a_2(p) \cdot e^{-\gamma(p)x}. \quad (10.50)$$

Зіставлення рівнянь (10.36) та (10.50) дає нам право записати, що

$$-(R + pL) \cdot I(x, p) = \gamma(p) \cdot a_1(p) \cdot e^{\gamma(p)x} - \gamma(p) \cdot a_2(p) \cdot e^{-\gamma(p)x}, \quad (10.51)$$

або

$$I(x, p) = \frac{\gamma(p) \cdot a_2(p)}{R + pL} e^{-\gamma(p)x} - \frac{\gamma(p) \cdot a_1(p)}{R + pL} e^{\gamma(p)x}. \quad (10.52)$$

При $x = 0$ із рівняння (10.52) матимемо:

$$I(0, p) = \frac{\gamma(p) \cdot a_2(p)}{R + pL} - \frac{\gamma(p) \cdot a_1(p)}{R + pL}, \quad (10.53)$$

При $x = l$ із рівняння (10.52) матимемо:

$$I(l, p) = \frac{\gamma(p) \cdot a_2(p)}{R + pL} e^{-\gamma(p)l} - \frac{\gamma(p) \cdot a_1(p)}{R + pL} e^{\gamma(p)l}, \quad (10.54)$$

а із рівняння (10.45):

$$U(l, p) = a_1(p) \cdot e^{\gamma(p)l} + a_2(p) \cdot e^{-\gamma(p)l}. \quad (10.55)$$

Підставляючи (10.53) в (10.49), а (10.54) і (10.55) в (10.47), отримаємо два рівняння з двома невідомими $a_1(p)$, $a_2(p)$, а саме:

$$\begin{cases} a_1(p) + a_2(p) = E(p) - \frac{\gamma(p)a_2(p)Z_{II}(p)}{R + pL} + \frac{\gamma(p)a_1(p)Z_{II}(p)}{R + pL}, \\ a_1(p)e^{\gamma(p)l} + a_2(p)e^{-\gamma(p)l} = \frac{\gamma(p)a_2(p)Z_K(p)}{R + pL} e^{-\gamma(p)l} - \\ - \frac{\gamma(p)a_1(p)Z_K(p)}{R + pL} e^{\gamma(p)l}, \end{cases} \quad (10.56)$$

або

$$\begin{cases} a_1(p) \left(1 - \frac{\gamma(p)Z_{II}(p)}{R + pL} \right) + a_2(p) \left(1 + \frac{\gamma(p)Z_{II}(p)}{R + pL} \right) = E(p), \\ a_1(p)e^{\gamma(p)l} \left(1 + \frac{\gamma(p)Z_K(p)}{R + pL} \right) + a_2(p)e^{-\gamma(p)l} \left(1 - \frac{\gamma(p)Z_k(p)}{R + pL} \right) = 0. \end{cases} \quad (10.57)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (10.57), знайдемо, що

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2(p) = \frac{(R + pL + \gamma(p)Z_K(p)) \cdot (R + pL) \cdot e^{\gamma(p)l} \cdot E(p)}{(R + pL + \gamma(p)Z_{II}(p)) \cdot (R + pL + \gamma(p)Z_K(p))e^{\gamma(p)l} - \dots} \dots \\ \dots \\ - (R + pL - \gamma(p)Z_K(p)) \cdot (R + pL - \gamma(p)Z_{II}(p))e^{-\gamma(p)l}, \\ a_1(p) = - \frac{(R + pL - \gamma(p)Z_K(p)) \cdot (R + pL) \cdot e^{-\gamma(p)l} \cdot E(p)}{(R + pL + \gamma(p)Z_{II}(p)) \cdot (R + pL + \gamma(p)Z_K(p))e^{\gamma(p)l} - \dots} \dots \\ \dots \\ - (R + pL - \gamma(p)Z_K(p)) \cdot (R + pL - \gamma(p)Z_{II}(p))e^{-\gamma(p)l}. \end{array} \right. \quad (10.58)$$

Нехай

$$\begin{aligned} A(R, L, \gamma, Z_{II}, Z_K, p) &= (R + pL + \gamma(p)Z_{II}(p)) \times \\ &\times (R + pL + \gamma(p)Z_K(p)) \cdot e^{\gamma(p)l} - (R + pL - \gamma(p)Z_K(p)) \times \\ &\times (R + pL - \gamma(p)Z_{II}(p)) \cdot e^{-\gamma(p)l}. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Підставляючи значення $a_1(p)$, $a_2(p)$ із (10.58) у (10.45) з врахуванням (10.59), отримаємо:

$$\begin{aligned} U(x, p) &= \left[(R + pL + \gamma(p)Z_K(p)) \cdot e^{-\gamma(p)(x-l)} - \right. \\ &\left. - (R + pL - \gamma(p)Z_K(p)) \cdot e^{\gamma(p)(x-l)} \right] \cdot \frac{E(p) \cdot (R + pL)}{A(R, L, \gamma, Z_{II}, Z_K, p)}. \end{aligned} \quad (10.60)$$

Оскільки передаточна функція об'єкта $W(x, p)$ — це відношення перетворених за Лапласом вихідного сигналу $U(x, p)$ до вхідного $E(p)$, то

$$\begin{aligned} W(x, p) &= \frac{R + pL}{A(R, L, \gamma, Z_{II}, Z_K, p)} \times \\ &\times \left[(R + pL + \gamma(p)Z_K(p)) \cdot e^{-\gamma(p)(x-l)} - \right. \\ &\left. - (R + pL - \gamma(p)Z_K(p)) \cdot e^{\gamma(p)(x-l)} \right], \end{aligned} \quad (10.61)$$

а рівняння (10.60) можна записати і так:

$$U(x, p) = W(x, p) \cdot E(p). \quad (10.62)$$

Якщо довга лінія є об'єктом управління, а тому нас цікавлять процеси, що в ній протікають, як у часі, так і в просторі, тобто вздовж обох ко-

ординат t , x , то в структурній схемі такої системи цю лінію слід враховувати передаточною функцією (10.61).

Якщо ж довга лінія є елементом зв'язку між регулятором та об'єктом управління, то нас не цікавитимуть процеси, які протікають у самій лінії вздовж координати x , а цікавитиме лише передавальна властивість лінії, і тому у структурній схемі її слід враховувати передаточною функцією $W(l, p)$, яку отримаємо із (10.61) підстановкою $x = l$, тобто функцією

$$W(l, p) = \frac{2(R + pL)\gamma(p)Z_K(p)}{A(R, L, \gamma, Z_{II}, Z_K, p)}. \quad (10.63)$$

Для трубопроводів структура передаточних функцій (10.61), (10.63) зберігається, але в зв'язку з виконанням для них умови (10.13) змінюється вираз, за допомогою якого визначається параметр $\gamma(p)$, тобто замість (10.42) будемо використовувати

$$\gamma^*(p) = \sqrt{pC(R + pL)}. \quad (10.64)$$

А для процесу передачі тепла в довгому ізольованому середовищі у зв'язку з виконанням умови (10.21) змінюється як параметр $\gamma(p)$, тобто замість (10.42) слід використовувати

$$*\gamma(p) = \sqrt{pRC}, \quad (10.65)$$

так і структура передаточних функцій (10.61), (10.63), тобто замість них слід використовувати

$$*W(x, p) = \frac{R}{*A(R, *\gamma, Z_{II}, Z_K, p)} \times \left[(R + *\gamma(p)Z_K(p)) \cdot e^{-*\gamma(p)(x-l)} - (R - *\gamma(p)Z_K(p)) \cdot e^{*\gamma(p)(x-l)} \right], \quad (10.66)$$

$$*W(l, p) = \frac{2R \cdot *\gamma(p) \cdot Z_K(p)}{*A(R, *\gamma, Z_{II}, Z_K, p)}, \quad (10.67)$$

де

$$*A(R, *\gamma, Z_{II}, Z_K, p) = (R + *\gamma(p)Z_{II}(p))(R + *\gamma(p)Z_K(p))e^{*\gamma(p)l} - (R - *\gamma(p)Z_K(p))(R - *\gamma(p)Z_{II}(p))e^{-*\gamma(p)l}. \quad (10.68)$$

Нагадаємо, що рівнянням математичної фізики параболічного типу описується не лише процес передачі тепла, а і процес передачі низькочастотних сигналів в телефонних і телеграфних лініях. А тому для передаточних функцій телефонних і телеграфних довгих ліній теж будуть справедливими співвідношення (10.65) – (10.68).

Ще більш простими є вирази для $\gamma(p)$, $W(x, p)$, $W(l, p)$, за допомогою яких в системах управління описуються троси, оскільки для них виконується не лише умова (10.13), але й умова (10.30). Для тросів замість (10.42), (10.61) та (10.63) матимемо:

$$*\gamma^*(p) = p\sqrt{LC} = p\sqrt{n \cdot m}, \quad (10.69)$$

$$*W^*(x, p) = \frac{2p \cdot n \cdot *\gamma^*(p) \cdot Z_K(p)}{*A^*(n, *\gamma^*, Z_{II}, Z_K, p)} \times \\ \times \left[(p \cdot n + *\gamma^*(p) Z_K(p)) \cdot e^{-*\gamma^*(p)(x-l)} - \right. \\ \left. - (p \cdot n - *\gamma^*(p) Z_K(p)) \cdot e^{*\gamma^*(p)(x-l)} \right], \quad (10.70)$$

$$*W^*(l, p) = \frac{2p \cdot n \cdot *\gamma^*(p) \cdot Z_K(p)}{*A^*(n, *\gamma^*, Z_{II}, Z_K, p)}, \quad (10.71)$$

$$*A^*(n, *\gamma^*, Z_{II}, Z_K, p) = (p \cdot n + *\gamma^*(p) Z_{II}(p)) \times \\ \times (p \cdot n + *\gamma^*(p) Z_K(p)) \cdot e^{*\gamma^*(p)l} - (p \cdot n - *\gamma^*(p) Z_K(p)) \times \\ \times (p \cdot n - *\gamma^*(p) Z_{II}(p)) \cdot e^{-*\gamma^*(p)l}. \quad (10.72)$$

Тепер розглянемо більш детально модель теплообмінника “труба в трубі” (10.33).

Перетворюючи за Лапласом третє рівняння системи (10.33), отримаємо:

$$\theta_s(x, p) = \frac{\chi_{1s}}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}} \theta_1(x, p) + \frac{\chi_{2s}}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}} \theta_2(x, p) + \\ + \frac{\theta_s(x, 0)}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}}, \quad (10.73)$$

де

$$\theta_s(x, 0) = \theta_s(x, t)|_{t=0} \quad (10.74)$$

— початкова умова вздовж стінки, що розділяє рідини з температурами θ_1 і θ_2 .

Аналогічно, перетворюючи за Лапласом перше і друге рівняння системи (10.33), матимемо:

$$\begin{cases} (p + \chi_{s1})\theta_1(x, p) + \lambda_1 \frac{d\theta_1(x, p)}{dx} = \chi_{s1}\theta_s(x, p) + \theta_1(x, 0), \\ (p + \chi_{s2})\theta_2(x, p) + \lambda_2 \frac{d\theta_2(x, p)}{dx} = \chi_{s2}\theta_s(x, p) + \theta_2(x, 0), \end{cases} \quad (10.75)$$

де

$$\begin{cases} \theta_1(x, 0) = \theta_1(x, t)|_{t=0}, \\ \theta_2(x, 0) = \theta_2(x, t)|_{t=0} \end{cases} \quad (10.76)$$

— початкові умови для температури в обох рідинах вздовж труби.

Підставляючи в рівняння (10.75) значення $\theta_s(x, p)$ із (10.73), отримаємо:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \frac{d\theta_1(x, p)}{dx} + \left(p + \chi_{s1} - \frac{\chi_{1s}\chi_{s1}}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}} \right) \theta_1(x, p) = \\ & = \frac{\chi_{2s}\chi_{s1}}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}} \theta_2(x, p) + \theta_1(x, 0) + \frac{\chi_{s1}\theta_s(x, 0)}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}}, \end{aligned} \quad (10.77)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_2 \frac{d\theta_2(x, p)}{dx} + \left(p + \chi_{s2} - \frac{\chi_{s2}\chi_{2s}}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}} \right) \theta_2(x, p) = \\ & = \frac{\chi_{1s}\chi_{s2}}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}} \theta_1(x, p) + \theta_2(x, 0) + \frac{\chi_{s2}\theta_s(x, 0)}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}}. \end{aligned} \quad (10.78)$$

Перетворюючи рівняння (10.77), (10.78) за Лапласом за просторовою координатою x , матимемо:

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_1 q + p + \chi_{s1} - \frac{\chi_{s1}\chi_{1s}}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}} \right) \theta_1(q, p) = \\ & = \frac{\chi_{2s}\chi_{s1}}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}} \theta_2(q, p) + \theta_1(q, 0) + \frac{\chi_{s1}\theta_s(q, 0)}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}} + \lambda_1 \theta_1(0, p), \end{aligned} \quad (10.79)$$

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_2 q + p + \chi_{s2} - \frac{\chi_{s2}\chi_{2s}}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}} \right) \theta_2(q, p) = \\ & = \frac{\chi_{1s}\chi_{s2}}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}} \theta_1(q, p) + \theta_2(q, 0) + \frac{\chi_{s2}\theta_s(q, 0)}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}} + \lambda_2 \theta_2(0, p). \end{aligned} \quad (10.80)$$

Позначимо:

$$\begin{cases} B_1(q, p) = \lambda_1 q + p + \chi_{s1} - \frac{\chi_{s1}\chi_{1s}}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}}, \\ B_2(q, p) = \lambda_2 q + p + \chi_{s2} - \frac{\chi_{s2}\chi_{2s}}{p + \chi_{1s} + \chi_{2s}}. \end{cases} \quad (10.81)$$

З врахуванням (10.81), рівняння (10.79), (10.80) можна переписати так:

$$\begin{aligned} \theta_1(q, p) &= \frac{\chi_{2s}\chi_{s1}}{B_1(q, p)(p + \chi_{1s} + \chi_{2s})} \theta_2(q, p) + \\ &+ \frac{\chi_{s1}\theta_s(q, 0)}{B_1(q, p)(p + \chi_{1s} + \chi_{2s})} + \frac{\theta_1(q, 0) + \lambda_1 \theta_1(0, p)}{B_1(q, p)}, \end{aligned} \quad (10.82)$$

$$\begin{aligned} \theta_2(q, p) &= \frac{\chi_{1s}\chi_{s2}}{B_2(q, p)(p + \chi_{1s} + \chi_{2s})} \theta_1(q, p) + \\ &+ \frac{\chi_{s2}\theta_s(q, 0)}{B_2(q, p)(p + \chi_{1s} + \chi_{2s})} + \frac{\theta_2(q, 0) + \lambda_2 \theta_2(0, p)}{B_2(q, p)}. \end{aligned} \quad (10.83)$$

Підставляючи рівняння (10.82) в (10.83), ми отримаємо рівняння відносно $\theta_2(q, p)$ та початкових $\theta_1(q, 0)$, $\theta_s(q, 0)$, $\theta_2(q, 0)$ і граничних $\theta_1(0, p)$, $\theta_2(0, p)$ умов, розв'язуючи яке отримаємо двовимірне зображення за Лапласом моделі температурного процесу $\theta_2(q, p)$, застосовуючи до нього двовимірне обернене перетворення за Лапласом, знайдемо $\theta_2(x, t)$.

За аналогією, підставляючи рівняння (10.83) у (10.82) і застосовуючи наведений вище алгоритм, знайдемо $\theta_1(x, t)$.

Слід зазначити, що якщо теплообмінник є елементом якоїсь замкнутої системи керування, то в структуру цієї системи він увійде структурною схемою, наведеною на рис. 10.4.

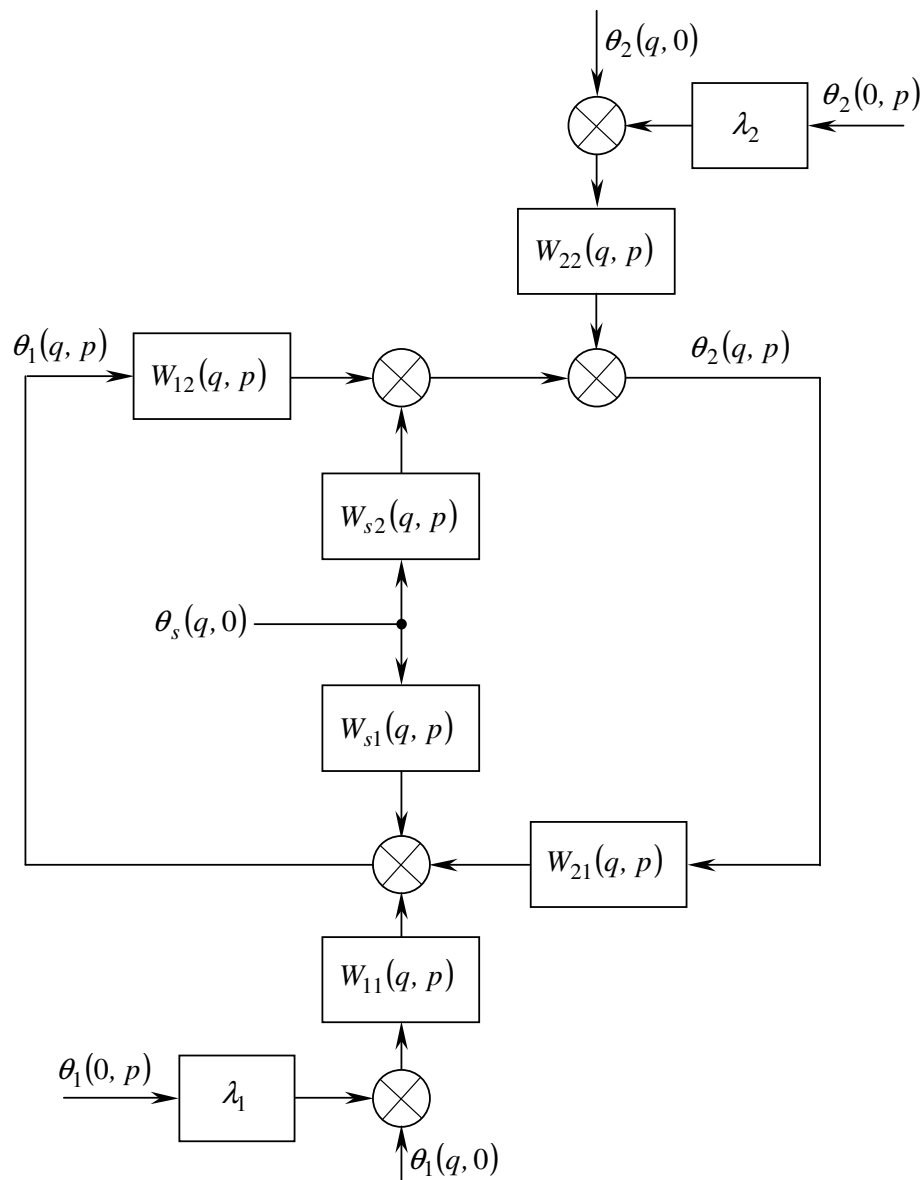


Рис. 10.4. Структурна схема теплообмінника “труба в трубі”

Оскільки передаточні функції окремих ланок на цій схемі легко визначаються її зіставленням з рівняннями (10.82), (10.83), то окремо випи-сувати їх не будемо.

Але, як і в кінці попереднього параграфу, ще раз наголошуємо на то-му, що структурною схемою, наведеною на рис. 10.4, з відповідно визна-ченими двовимірними передаточними функціями, теплообмінник “труба в трубі” слід задавати лише у випадках, коли він є складовою ланкою більш складної системи, наприклад, системи автоматичного керування, і процеси

в ньому нас цікавлять у взаємозв'язку з процесами в інших складових ланках цієї системи.

Якщо ж нас цікавлять лише процеси, що протікають в теплообміннику, який розглядається сам по собі, то простіше такий аналіз здійснювати шляхом безпосереднього розв'язання рівнянь (10.33) чисельними методами за допомогою комп'ютерів, оснащених пакетами Mathcad чи Matlab.

10.4. Математичні моделі систем з чистим запізненням

В класі систем з розподіленими параметрами особливе місце займають системи з чистим запізненням. Це, наприклад, технологічні об'єкти з переміщенням матеріалів за допомогою конвеєрів, пристрої з лініями затримки сигналу або хімічні реактори з конвеєрним або лопатевим переміщенням реагентів.

Їх особливе місце пояснюється тим, що після визначення чистого запізнення проходження сигналу в таких об'єктах процеси в них можна описувати за допомогою звичайних диференціальних рівнянь, а не рівнянь в частинних похідних, що значно простіше.

Почнемо розгляд моделей об'єктів з чистим запізненням з найпростішого з них — лінії затримки (ЛЗ) сигналу (рис. 10.5).

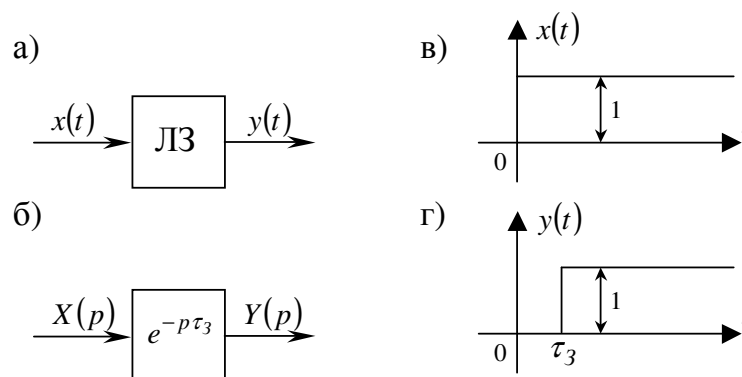


Рис. 10.5. Функціональна і структурна схеми лінії затримки та графіки її вхідного $x(t)$ і вихідного $y(t)$ сигналів

Як видно з рис. 10.5, в та рис. 10.5, г, ЛЗ лише затримує проходження вхідного сигналу, не змінюючи його форми.

Знайдемо передаточну функцію ЛЗ. За визначенням вона дорівнює відношенню перетворених за Лапласом вихідного та вхідного сигналів. Тож

$$\begin{aligned}
 W_{ЛЗ}(p) &= \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\int_0^{\infty} y(t)e^{-pt} dt}{\int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt} = \\
 &= \frac{\int_0^{\infty} 1(t - \tau_3)e^{-pt} dt}{\int_0^{\infty} 1(t)dt} = \frac{1}{p} \frac{e^{-p\tau_3}}{1} = e^{-p\tau_3}. \quad (10.84)
 \end{aligned}$$

Якщо згадати, що АФЧХ об'єкта це —

$$W(j\omega) = W(p)|_{p=j\omega} = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (10.85)$$

де $P(\omega)$, $Q(\omega)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ – відповідно, дійсна, уявна, амплітудна та фазова частотні характеристики, то із (10.84), (10.85) випливає, що:

$$\begin{cases}
 W_{ЛЗ}(j\omega) = e^{-j\omega\tau_3}; \\
 P_{ЛЗ}(\omega) = \cos(\omega\tau_3), \quad Q_{ЛЗ}(\omega) = -\sin(\omega\tau_3); \\
 A_{ЛЗ}(\omega) = 1, \quad \varphi_{ЛЗ}(\omega) = -\omega\tau_3.
 \end{cases} \quad (10.86)$$

На рис. 10.6 наведені усі частотні характеристики ЛЗ, що визначаються співвідношеннями (10.86), які є її математичними моделями в частотній області.

Очевидно, що усі моделі, визначені нами для лінії затримки сигналу, будуть справедливими і для конвеєрних ліній з тією лише різницею, що характеристики $W(p)$, $W(j\omega)$, $P(\omega)$, $Q(\omega)$ і $A(\omega)$ будуть мати множителем коефіцієнт передачі k_K , який буде меншим одиниці в разі, якщо частина

матеріалу, що насипається на конвеєр на його вході, просипаючись, не доходить до його кінця, тобто для конвеєра

$$\begin{cases} W_K(p) = k_K e^{-p\tau_3}, & W_K(j\omega) = k_K e^{-j\omega\tau_3}, \\ P_K(\omega) = k_K \cos(\omega\tau_3), & Q_K(\omega) = -k_K \sin(\omega\tau_3), \\ A_K(\omega) = k_K, & \varphi_K(\omega) = -\omega\tau_3. \end{cases} \quad (10.87)$$

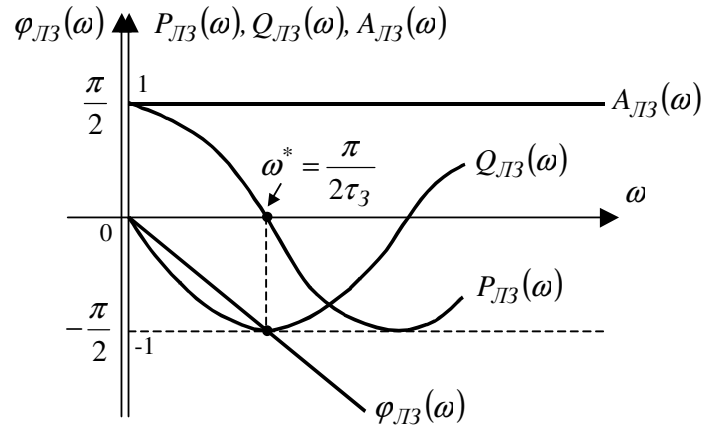


Рис. 10.6. Частотні характеристики лінії затримки сигналу

Перейдемо до розгляду хімічних реакторів.

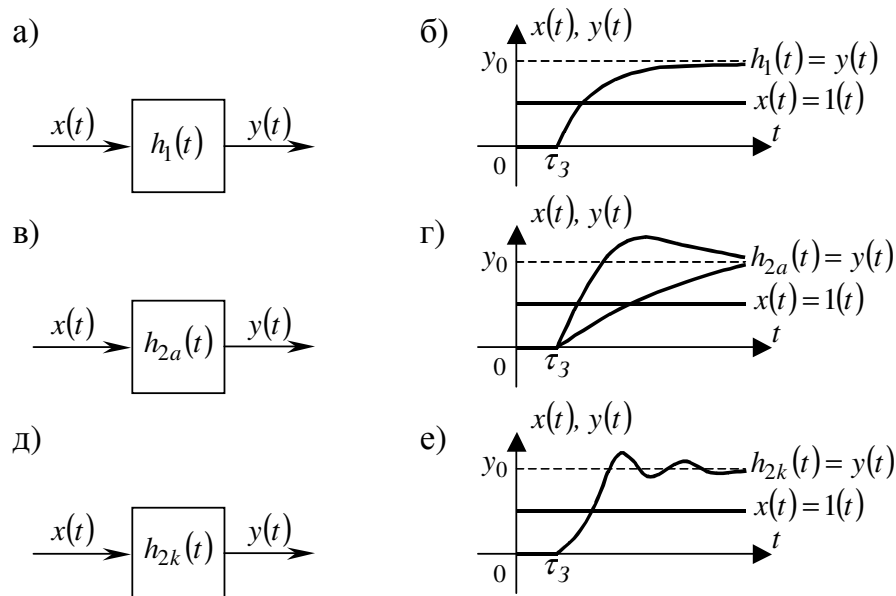


Рис. 10.7. Можливі варіанти перехідних характеристик хімічних реакторів

На рис. 10.7 наведені можливі варіанти перехідних характеристик хімічних реакторів $h_1(t)$, $h_{2a}(t)$, $h_{2k}(t)$, які є їх реакціями на одиничний вхідний сигнал $1(t)$.

Криві $h_1(t)$, $h_{2a}(t)$, $h_{2k}(t)$ (див. рис. 10.7) в першому наближенні можна описати рівняннями:

$$h_1(t, \tau_3) = y_0 \left(1 - e^{-\alpha_1(t-\tau_3)}\right) \cdot 1(t - \tau_3), \quad (10.88)$$

$$h_{2a}(t, \tau_3) = y_0 \left(1 - a_{1a} e^{-\alpha_{1a}(t-\tau_3)} + a_{2a} e^{-\alpha_{2a}(t-\tau_3)}\right) \cdot 1(t - \tau_3), \quad (10.89)$$

$$h_{2k}(t, \tau_3) = y_0 \left[1 - e^{-\alpha_{2k}(t-\tau_3)} \left(\cos(\beta(t-\tau_3)) - \frac{\alpha_{2k}}{\beta} \sin(\beta(t-\tau_3))\right)\right] \times \\ \times 1(t - \tau_3), \quad (10.90)$$

в яких t – незалежна змінна (час), τ_3 – числовий параметр, який характеризує запізнення реакції об'єкта на вхідний сигнал, y_0 , a_{1a} , a_{2a} , α_1 , α_{1a} , α_{2k} , β – числові коефіцієнти.

Зазначимо, що одиничні функції $h(t - \tau_3)$, що дописані як множники в рівняння (10.88) – (10.90), необхідні в структурі цих рівнянь для того, щоб формально “обнуляти” функції $h_1(t, \tau_3)$, $h_{2a}(t, \tau_3)$, $h_{2k}(t, \tau_3)$ при значеннях аргументу t , менших τ_3 . Автори посібників і монографій з інженерною освітою, до речі, про це часто забувають.

Формально, функції (10.88) – (10.90) є розв'язками диференціальних рівнянь, відповідно:

$$T_1 \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x(t - \tau_3) \cdot 1(t - \tau_3), \quad (10.91)$$

при

$$\alpha_1 = \frac{1}{T_1}, \quad y_0 = k; \quad (10.92)$$

$$T_1 T_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x(t - \tau_3) \cdot 1(t - \tau_3), \quad (10.93)$$

при

$$\begin{cases} a_{1a} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}, & a_{2a} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \\ \alpha_{1a} = \frac{1}{T_1}, & \alpha_{2a} = \frac{1}{T_2}, & y_0 = k; \end{cases} \quad (10.94)$$

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x(t - \tau_3) \cdot 1(t - \tau_3), \quad (10.95)$$

при

$$\begin{cases} \beta = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}, \\ \alpha_{2k} = \frac{\xi}{T}, & y_0 = k. \end{cases} \quad (10.96)$$

Подаючи на вхід хімічного реактора вхідний сигнал $x(t)$ у вигляді одиничного стрибка $1(t)$ і фіксуючи за допомогою самописця реакцію $y(t)$ цього хімічного реактора, отримаємо графік його перехідної характеристики $h(t - \tau_3)$, з якого одразу ж визначаються параметри τ_3 та y_0 .

Підставляючи ці параметри τ_3 та y_0 в рівняння (10.88), якщо графік отриманої експериментально перехідної характеристики $h_1(t, \tau_3)$ має вигляд, наведений на рис. 10.7, б, отримаємо рівняння з одним невідомим α_1 , для розв'язання якого відносно α_1 достатньо на графіку характеристики $h_1(t, \tau_3)$ взяти лише одну точку і підставити її координати $t^*, h_1(t^*, \tau_3)$ в рівняння (10.88). Підставивши знайдені значення α_1 і y_0 в співвідношення (10.92), визначимо коефіцієнти моделі (10.91), чим завершимо її ідентифікацію.

Якщо графік експериментально отриманої перехідної характеристики $h_{2a}(t, \tau_3)$ має вигляд, наведений на рис. 10.7, г, то для отримання чотирьох параметрів a_{1a} , a_{2a} , α_{1a} , α_{2a} , які однозначно визначаються згідно зі співвідношеннями (10.94) лише через два параметри T_1 , T_2 , необхідно спочатку підставити співвідношення (10.94) в рівняння (10.89), а потім

взяти дві точки на графіку характеристики $h_{2a}(t, \tau_3)$ і, підставивши їх координати $t^*, h_{2a}(t^*, \tau_3)$ та $t^{**}, h_{2a}(t^{**}, \tau_3)$ в рівняння (10.89), побудувати систему двох рівнянь з двома невідомими T_1, T_2 . Розв'язуючи цю систему двох рівнянь, знайдемо чисельні значення T_1, T_2 , підставляючи які в модель (10.93), здійснимо її ідентифікацію.

Якщо ж графік експериментально отриманої перехідної характеристики $h_{2k}(t, \tau_3)$ має вигляд, наведений на рис. 10.7, е, то для отримання двох невідомих параметрів α_{2k}, β необхідно взяти дві точки на графіку характеристики $h_{2k}(t, \tau_3)$ і, підставивши їх координати $t^*, h_{2k}(t^*, \tau_3)$ та $t^{**}, h_{2k}(t^{**}, \tau_3)$ в рівняння (10.90), побудувати систему двох рівнянь з двома невідомими α_{2k}, β , розв'язавши яку, знайти чисельні значення цих невідомих. Підставивши ці чисельні значення в рівняння (10.96) і розв'язавши їх, знайдемо чисельні значення параметрів T, ξ , підставивши які разом з коефіцієнтом k в модель (10.95), здійснимо її ідентифікацію.

Два важливих зауваження:

1). В книгах, присвячених аналізу систем з розподіленими параметрами, обов'язково фігурують графічні або графоаналітичні методи визначення коефіцієнтів моделей (10.91), (10.93), (10.95). Ми вирішили ці методи не розглядати, оскільки в еру комп'ютерів та пакетів прикладних програм типу Mathcad чи Matlab, за допомогою яких рівняння 2-го порядку з будь-якими коефіцієнтами розв'язуються дуже просто і швидко, на наш погляд, недоцільно "засмічувати" матеріал викладенням методів, розроблених в іншу епоху і розрахованих на ручні розрахунки.

2). В околі точки стаціонарного режиму автоматичної системи в разі використання елемента з розподіленими параметрами типу хімічного реактора як об'єкт регулювання, в силу недопущення регулятором значних відхилень режиму у цій системі від стаціонарного, структуру такого об'єкта регулювання з достатнім для практичних задач ступенем адекватності мо-

жна подати у вигляді послідовного з'єднання ланки чистого запізнення і структурної ланки з передаточною функцією $W_i(p)$, $i = 1, 2, 3$ не вище другого порядку (рис. 10.8), де

$$W_1(p) = \frac{k}{T_1 p + 1} \quad (10.97)$$

— в разі, якщо перехідна характеристика має вигляд, наведений на рис. 10.7, б;

$$W_2(p) = \frac{k}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1} \quad (10.98)$$

— в разі, якщо $h(t, \tau_3)$ має вигляд, наведений на рис. 10.7, г, і

$$W_3(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} \quad (10.99)$$

— в разі, якщо $h(t, \tau_3)$ має вигляд, наведений на рис. 10.7, е.

В наведеному вище легко переконатись, якщо перетворити за Лапласом рівняння (10.91), (10.93), (10.95) і знайти відношення перетвореного за Лапласом вихідного сигналу $Y(p)$ до вхідного $X(p)$.

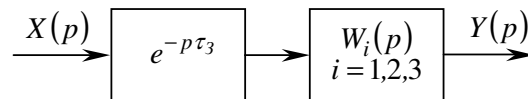


Рис. 10.8. Структурна схема об'єкта з розподіленими параметрами типу хімічного реактора як складової ланки системи автоматичного регулювання процесів в ньому

Виникає запитання: “А що ж робити, якщо процес в об'єкті з розподіленими параметрами типу хімічного реактора необхідно дослідити в усьому діапазоні можливих змін вхідного сигналу $x(t)$?”

Адже у цьому випадку використання наближених моделей у вигляді звичайних диференціальних рівнянь не вище 2-го порядку з аргументом, що запізнюється, типу (10.91), (10.93), (10.95), може привести до суттєвих похибок.

Більш точну ідентифікацію процесів в таких об'єктах можна здійснити, використовуючи їх модель у формі імпульсної перехідної характеристики $g(t)$, заданої у просторі ортонормованих функцій $\{\varphi_i(t)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, тобто у вигляді

$$g(t) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(t), \quad (10.100)$$

де $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ – функції, для яких виконуються умови ортогональності —

$$\langle \varphi_i \varphi_j \rangle = \int_0^{\infty} \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = 0, \quad i \neq j, \quad (10.101)$$

або

$$\langle \sqrt{w(t)} \varphi_i(t) \cdot \sqrt{w(t)} \varphi_j(t) \rangle = \int_0^{\infty} \varphi_i(t) \varphi_j(t) w(t) dt = 0, \quad i \neq j, \quad (10.102)$$

якщо вони ортогональні з вагою $\sqrt{w(t)}$, а також умови нормування —

$$\langle \varphi_i \cdot \varphi_i \rangle = \|\varphi_i\| = \int_0^{\infty} \varphi_i^2(t) dt = 1, \quad (10.103)$$

або

$$\langle \sqrt{w(t)} \varphi_i \cdot \sqrt{w(t)} \varphi_i \rangle = \|\sqrt{w(t)} \varphi_i\| = \int_0^{\infty} \varphi_i^2(t) w(t) dt = 1. \quad (10.104)$$

Найпростішою і добре відомою студентам технічних університетів системою ортогональних функцій є система $\cos(k\omega t)$, $\sin(k\omega t)$, $k = 1, 2, \dots$, в якій (10.100) є розкладом функції $g(t)$ в тригонометричний ряд Фур'є.

Більш складними системами ортогональних функцій є поліноми Ерміта, Ляггера, Чебишова, зі способом отримання яких за методикою Грама – Шмідта можна ознайомитись в будь-якому підручнику з функціонального аналізу.

На рис. 10.9 показана схема ідентифікації імпульсної перехідної характеристики $g(t)$ в просторі ортогональних функцій $\{\varphi_i(t)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

На цій схемі C_i , $i = 1, 2, \dots, n$ – коефіцієнти розкладу (проекції) функції $g(t)$ в просторі $\{\varphi_i(t)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$;

$$\varepsilon(t) = y(t) - y^*(t) \quad (10.105)$$

— похибка апроксимації функції $g(t)$ ортогональним рядом (10.100);

$$J = \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \quad (10.106)$$

— критерій адекватності моделі (10.100), який є функціоналом похибки $\varepsilon(t)$.

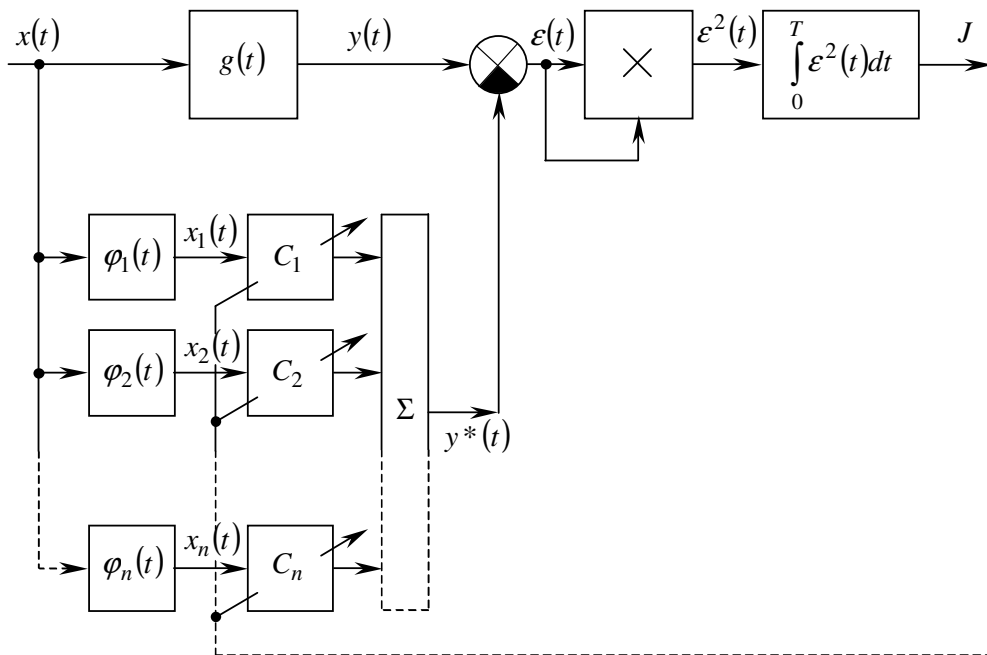


Рис. 10.9. Схема ідентифікації імпульсної перехідної характеристики $g(t)$ динамічного об'єкта в просторі ортогональних функцій $\{\varphi_i(t)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$

Ідентифікація імпульсної перехідної характеристики $g(t)$ ортогональним рядом (10.100) зводиться до такого налаштування коефіцієнтів C_1, \dots, C_n (рис. 10.9), яке приводить до мінімального значення (теоретично нульового) критерію адекватності (10.106).

Маючи значення $g(t)$, завжди можна, перетворивши її за Лапласом, отримати передаточну функцію $W(p)$ об'єкта.

Ідентифікацію у такий спосіб можна здійснювати в процесі нормальної експлуатації об'єкта, але в цьому випадку структурна схема об'єкта не може бути показана у вигляді, зображеному на рис. 10.8, тобто вона не містить в собі ланку запізнення в чистому вигляді.

Але за допомогою аналогової ЕОМ можна здійснити ідентифікацію об'єкта з розподіленими параметрами так, що і ланка чистого запізнення в його структурній схемі зберігається, і коефіцієнти диференціального рівняння високого порядку, які є одночасно і коефіцієнтами передаточної функції, визначаються в процесі нормальної експлуатації цього об'єкта.

В загальному вигляді схема цього способу ідентифікації показана на рис. 10.10, на якому модель об'єкта задається диференціальним рівнянням з аргументом, що запізнюється (ДРАЗ), а критерій адекватності моделі має той же вигляд, що і в попередньому випадку, тобто визначається функціоналом (10.106).

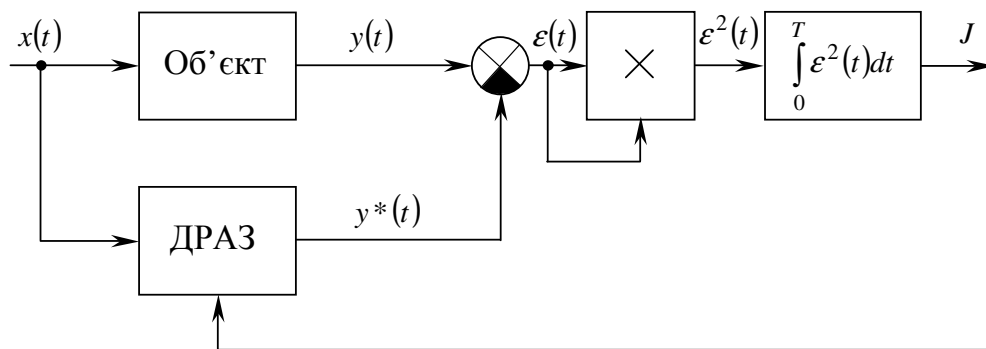


Рис. 10.10. Схема ідентифікації об'єкта з розподіленими параметрами за допомогою моделі у вигляді диференціального рівняння з аргументом, що запізнюється (ДРАЗ)

Для розкриття суті цього способу ідентифікації припустимо, що процес в об'єкті реально описується диференціальним рівнянням

$$\begin{aligned}
& a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + y(t) = \\
& = \left(b_m \frac{d^m x(t - \tau_3)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t - \tau_3)}{dt^{m-1}} + \dots + \right. \\
& \quad \left. + b_1 \frac{dx(t - \tau_3)}{dt} + b_0 x(t - \tau_3) \right) \cdot 1(t - \tau_3), \tag{10.107}
\end{aligned}$$

коефіцієнти якого і значення чистого запізнення τ_3 ми не знаємо, а знаємо лише показники n та m .

Позначимо оператор диференціювання $\frac{d}{dt}$ символом D . Тоді матимемо:

$$\frac{d}{dt} = D, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D^2, \dots, \quad \frac{d^n}{dt^n} = D^n. \tag{10.108}$$

Запізнення аргументу в усіх членах правої частини на τ_3 можна подати як дію оператора $e^{-D\tau_3}$ на відповідну функцію, тобто

$$\left\{ \begin{aligned}
& x(t - \tau_3) = e^{-D\tau_3} \cdot x(t), \\
& \frac{dx(t - \tau_3)}{dt} = e^{-D\tau_3} \frac{dx(t)}{dt}, \\
& \dots \dots \dots \\
& \frac{d^n x(t - \tau_3)}{dt^n} = e^{-D\tau_3} \frac{d^n x(t)}{dt^n}.
\end{aligned} \right. \tag{10.109}$$

З врахуванням співвідношень (10.108), (10.109), ДРАЗ (10.107) можна переписати так:

$$\begin{aligned}
& (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + 1) \cdot y(t) = \\
& = (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0) \cdot e^{-D\tau_3} x(t), \tag{10.110}
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
& (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + 1) \cdot y(t) - \\
& - (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0) \cdot e^{-D\tau_3} x(t) = 0. \tag{10.111}
\end{aligned}$$

Нехай у нас є можливість вхідний сигнал $x(t)$ подати на аналогову ЕОМ, на якій набрано такої ж структури диференціальне рівняння

$$\left(\alpha_n D^n + \alpha_{n-1} D^{n-1} + \dots + \alpha_1 D + 1\right) \cdot y(t) - \left(\beta_m D^m + \beta_{m-1} D^{m-1} + \dots + \beta_1 D + \beta_0\right) \cdot e^{-D\tau_*} x(t) = 0, \quad (10.112)$$

параметри α_i , $i = 1, 2, \dots, n$; β_s , $s = 1, 2, \dots, m$; τ_* якого в процесі моделювання можна змінювати.

Підстроюючи ці параметри, домагаємось виконання умови

$$J = \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (10.113)$$

Ті значення вказаних параметрів α_i^* , β_s^* , τ_*^* , які задовольняють умову (10.113), ми і приймаємо за оцінки відповідних коефіцієнтів a_i , b_s , τ_3 .

Завершимо цей підрозділ навчального посібника тим, як можна знайти математичну модель об'єкта з розподіленими параметрами у вигляді його імпульсної перехідної характеристики $g(t)$ з врахуванням запізнення τ_3 в разі, якщо і вхідний $x(t)$, і вихідний $y(t)$ сигнали цього об'єкта є стаціонарними випадковими процесами. У цьому випадку структурна схема об'єкта матиме вигляд, зображений на рис. 10.11.

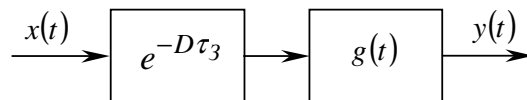


Рис. 10.11. Структурна схема об'єкта з розподіленими параметрами у вигляді послідовного з'єднання ланки чистого запізнення і ланки з імпульсною перехідною характеристикою $g(t)$

Як показано в другій частині цього навчального посібника, стаціонарні випадкові процеси $x(t)$, $y(t)$ у цьому випадку входять до рівняння Вінера – Хопфа кореляційною $R_x(\tau)$ та взаємною кореляційною функціями $R_{yx}(\tau)$.

Користуючись тим же підходом, який використано у другій частині навчального посібника, легко показати, що рівняння Вінера – Хопфа у випадку об'єкта з розподіленими параметрами матиме вигляд:

$$R_{yx}(\tau, \tau_3) = \int_0^{\infty} R_x(\tau - \theta - \tau_3)g(\theta)d\theta, \quad (10.114)$$

в якому τ , θ є змінними, а τ_3 є параметром, який легко знаходиться з графіків $R_x(\tau)$, $R_{yx}(\tau)$ (рис. 10.12).

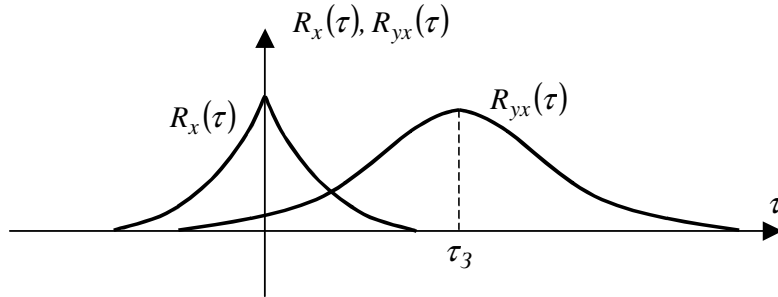


Рис. 10.12. Можливий варіант графіків функцій $R_x(\tau)$, $R_{yx}(\tau)$

Підставляючи значення τ_3 в рівняння (10.114) і розв'язуючи це рівняння одним із методів, наведених в другій частині навчального посібника, ми знайдемо функцію $g(t)$ для подання об'єкта з розподіленими параметрами у вигляді структури, зображеної на рис. 10.11.

10.5. Завдання для самоперевірки

1. В чому суть “розподіленості параметрів” об'єктів? Наведіть приклади об'єктів з розподіленими параметрами.
2. Що таке принципова схема однієї фази електричної системи? Зобразіть її.
3. Виведіть систему диференціальних рівнянь 1-го порядку в частинних похідних, які описують процеси в довгій електричній лінії.
4. Як отримати математичну модель довгої електричної лінії у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних 2-го порядку гіперболічного типу?

5. За яких умов із загального рівняння гіперболічного типу можна отримати рівняння, які описують:

- процеси передачі тиску і об'ємних витрат в гідравлічних і пневматичних трубопроводах;
- процеси передачі температури в довгому ізольованому середовищі;
- коливальні процеси в тросах?

6. Як виглядає модель у часовому просторі теплообмінника типу “труба в трубі”?

7. Отримайте передаточну функцію довгої лінії.

8. Як із загальної передаточної функції довгої лінії отримати передаточні функції трубопроводу, теплопроводу і троса?

9. Як виглядає структурна схема теплообмінника “труба в трубі”, і якими є передаточні функції її структурних ланок?

10. Як виглядають передаточні функції і частотні характеристики ліній затримок і конвекторів?

11. Як виглядають експериментальні перехідні характеристики хімічних реакторів?

12. За яким принципом підбираються математичні моделі хімічних реакторів?

13. Як визначити параметри математичних моделей хімічних реакторів?

14. Який вигляд має структурна схема хімічного реактора як складової частини системи автоматичного регулювання?

15. Запишіть множину можливих передаточних функцій хімічного реактора, що працює в складі системи автоматичного регулювання.

16. Які функції є ортонормованими? Наведіть приклад.

17. Запишіть модель імпульсної перехідної характеристики динамічного об'єкта в ортогональному базисі.

18. Як виглядає схема ідентифікації імпульсної перехідної характеристики динамічного об'єкта в ортогональному базисі? В чому суть ідентифікації?

19. Складіть схему ідентифікації об'єкта з розподіленими параметрами за допомогою моделі у вигляді диференціального рівняння з аргументом, що запізнюється (ДРАЗ).

20. Як визначити параметри моделі у вигляді ДРАЗ в процесі нормальної експлуатації об'єкта?

21. Як виглядає рівняння Вінера – Хопфа для об'єкта з розподіленими параметрами?

22. Як визначити чисте запізнення τ_3 і імпульсну перехідну характеристику $g(t)$ об'єкта з розподіленими параметрами, на вхід якого надходить стаціонарний випадковий процес?

ПІДСУМКИ

У першій частині навчального посібника показано, як можна побудувати математичні моделі електромеханічних процесів, що протікають у лінійних неперервних та дискретних динамічних системах із зосередженими параметрами, виходячи з:

- 1) інформації про структуру та фізику процесів, що мають місце в окремих елементах системи;
- 2) інформації про форму сигналів на вході і виході системи;
- 3) інформації про частотні спектри системи та сигналів у ній.

Розкриті особливості синтезу математичних моделей у часовому просторі, на комплексній площині, у частотній області та у просторі змінних стану.

Моделі синтезуються у класі диференціальних та різницевих рівнянь, передаточних функцій та частотних характеристик із використанням як прямих алгоритмів обробки інформації, так і оптимальних.

У другій частині навчального посібника показано, яким чином можна побудувати математичні моделі електромеханічних процесів, що протікають у лінійних динамічних системах із зосередженими параметрами, в яких має місце високий рівень зовнішніх завад та внутрішніх шумів, що змушує відносити їх до класу стохастичних систем.

Розкрито особливості синтезу математичних моделей лінійних неперервних ЕМП на основі кореляційної теорії стаціонарних випадкових процесів, для яких виконується умова ергодичності.

Показано, як будувати алгоритми ідентифікації стохастичних систем на основі Фур'є-інтегрального методу.

Розглянуто моделі технічної діагностики електрообладнання на основі статистичної теорії прийняття рішень.

Запропоновано моделі часових рядів, за допомогою яких можна здій-

снювати прогнозування розвитку електромеханічних процесів, що відносяться до класу стохастичних.

У третій частині навчального посібника показано, як будувати математичні моделі електромеханічних процесів, що протікають в нелінійних системах взагалі і релейних системах зокрема.

Наведено алгоритми аналізу процесів в релейних динамічних системах з використанням перетворення за Лапласом характеристик їх лінійних частин.

Побудовані також математичні моделі таких об'єктів з розподіленими параметрами, як довгі електричні лінії, кабелі зв'язку, гідравлічні та пневматичні трубопроводи, теплопроводи, троси, лінії затримки, конвеєри і хімічні реактори. Наведено алгоритми їх аналізу і як самодостатніх об'єктів, і як структурних ланок систем автоматичного регулювання, в умовах дії як детермінованих, так і стохастичних вхідних сигналів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Автоматизированный электропривод / Под общ. ред. Н. Ф. Ильинского, М.Г. Юнькова. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 543 с.
2. Автоматическое управление электроприводами / Под ред. А.А. Сиротина. — М.: Высш. шк., 1978. — 176 с.
3. Андреев В.П., Сабинин Ю.А. Основы электропривода. — М.: Госэнергоиздат, 1963. — 772 с.
4. Артамонов Б.И., Бокуняев А.А. Источники электропитания радиоустройств. — М.: Энергоиздат, 1982. — 296 с.
5. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. — М.: Высш. шк., 1978. — 528 с.
6. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1. — М.: Мир, 1974. — 408 с.
7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. — М.: Наука, 1967. — 608 с.
8. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. 3-е изд. — М.: Наука, 1966. — 664 с.
9. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления (для инженеров). — М.: Наука, 1970. — 620 с.
10. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. — М.: Наука, 1971. — 288 с.
11. Изерман Р. Цифровые системы управления. — М.: Мир, 1984. — 541 с.
12. Иродов И.Е. Основные законы механики. — М.: Высш. шк., 1978. — 240 с.
13. Куропаткин П.В. Теория автоматического управления. — М.: Высш. шк., 1973. — 528 с.
14. Ленк А. Электромеханические системы. — М.: Мир, 1978. — 283 с.

15. Математическая статистика / Под ред. А.М. Длина. — М.: Высш. шк., 1975. — 398 с.

16. Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів. Частина I. Ідентифікація електромеханічних процесів в лінійних детермінованих системах з зосередженими параметрами: Навчальний посібник / Б.І. Мокін, В.Б. Мокін. — Вінниця: “УНІВЕРСУМ-Вінниця”, 1998. — 153 с.

17. Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів. Частина II. Ідентифікація електромеханічних процесів в лінійних стохастичних системах із зосередженими параметрами: Навчальний посібник / Б.І. Мокін, В.Б. Мокін. — Вінниця: “УНІВЕРСУМ-Вінниця”, 1999. — 99 с.

18. Михайлов О.П., Стоколов В.Е. Электрические аппараты и средства автоматизации. — М.: Машиностроение, 1982. — 183 с.

19. Мокін Б.І. Нові підходи до врахування нелінійності при моделюванні тиристорних електроприводів // Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика: Вестник ХГПУ. Специальный выпуск. — Харьков: ХГПУ, 1998. — 400 с. — С. 87–88.

20. Мокин Б.И., Корбич Ю. Математические модели контроля и управления в энергетике. — К.: Техніка, 1990; Зелена Гура: Изд-во высш. инженерной шк., 1990. — 192 с.

21. Ордынцев В. М. Математическое описание объектов автоматизации. — М.: Машиностроение, 1965. — 360 с.

22. Перхач В.С. Математичні задачі електроенергетики. — Львів: Вища школа, 1982. — 378 с.

23. Попович Н.Г., Ковальчук А.В., Красовский Е.П. Автоматизация производственных процессов и установок. — К.: Выща шк., 1986. — 311 с.

24. Родштейн Л.А. Электрические аппараты. — Л.: Энергоатомиздат, 1981. — 303 с.

25. Родькин Д.И. Системы динамического нагружения и диагности-

ки электродвигателей при испытаниях. — М.: Недра, 1992. — 236 с.

26. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения (примеры и задачи). — К.: Выща шк., 1984. — 408 с.

27. Соколов М.М. Автоматизированный электропривод общепромышленных механизмов. — М.: Энергия, 1976. — 488 с.

28. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с.

29. Таев И.С. Электрические аппараты. Общая теория. — М.: Энергия, 1977. — 272 с.

30. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Кн. 1. Математическое описание, анализ устойчивости и качества систем автоматического регулирования / Под ред. В.В. Солодовникова. — М.: Машиностроение, 1967. — 770 с.

31. Файнштейн В.Г., Файнштейн Э.Г. Микропроцессорные системы управления тиристорными электроприводами. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 240 с.

32. Чиликин М.Г. и др. Основы автоматизированного электропривода. — М.: Энергия, 1974. — 567 с.

33. Мокин Б.И. Методические указания по изучению курса “Специальные вопросы энергосистем”. — Киев: Межвузовское полиграфическое предприятие, 1982. — 60 с.

34. Биргер И.А. Техническая диагностика. — М.: Машиностроение, 1978. — 420 с.

35. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. — М.: Наука, 1974. — 576 с.

36. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. — М.: Машиностроение, 1974. — 328 с.

37. Дмитриев В.Н., Градецкий В.Г. Основы пневмоавтоматики. — М.: Машиностроение, 1973. — 360 с.

38. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — 296 с.
39. Чермак И., Петерка В., Заворка И. Динамика регулируемых систем в теплоэнергетике и химии. — М.: Мир, 1972. — 624 с.
40. Павловський М.А. Теоретична механіка. — Київ: Техніка, 2002. — 512 с.
41. Догановский С.А., Иванов В.А. Устройства запаздывания и их применение в автоматических системах. — М.: Машиностроение, 1966. — 280 с.
42. Мокін Б.І., Мокін О.Б. Оптимізація електроприводів. — Вінниця: “УНІВЕРСУМ-Вінниця”, 2004. — 250 с.
43. Макаров И.М. Дополнительные главы математического анализа. — М.: Просвещение, 1968. — 288 с.
44. Соболев В.И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. — М.: Наука, 1968. — 288 с.

Навчальне видання

Мокін Борис Іванович
Мокін Віталій Борисович
Мокін Олександр Борисович

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Мокіним О.Б.

Редактор В.О.Дружиніна

Видавництво «УНІВЕРСУМ – Вінниця» ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку _____
Формат 29.7×42¼
Друк різнографічний
Наклад 200 прим.
Зам. № ____

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. _____

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

