УДК 681.5.01

Ю. І. Дорофєєв[1]

ОЦІНЮВАННЯ МНОЖИН ДОСЯЖНОСТІ І ТЯЖІННЯ МЕРЕЖ ПОСТАВОК ЗІ СТРУКТУРНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНВАРІАНТНИХ ЕЛІПСОЇДІВ

[1] Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Досліджено задачу оцінювання множин досяжності і тяжіння мережі поставок зі структурними обмеженнями, задану у вигляді дискретної моделі із запізненням в просторі станів. Розглянуто управління у вигляді зворотного зв'язку за сигналом неузгодженості між готівковим і страховим рівнями запасу ресурсів із заданими несиметричними обмеженнями. Множини досяжності і тяжіння таких систем описуються в термінах інваріантних еліпсоїдів із застосуванням техніки лінійних матричних нерівностей і задач напіввизначеного програмування.

Ключові слова: мережа поставок, множина досяжності, множина тяжіння, інваріантний еліпсоїд, лінійна матрична нерівність, задача напіввизначеного програмування.

Вступ

Мережа поставок являє собою систему, яка складається із сукупності взаємопов'язаних об'єктів, що здійснюють видобуток сировини, виробництво, зберігання, транспортування і розподіл деякої продукції з метою задоволення споживчого попиту [1]. Зазвичай модель мережі поставок представляють у вигляді орієнтованого графа, вершини якого відповідають вузлам мережі та визначають види і обсяги керованих запасів, а дуги представляють керовані і некеровані потоки в мережі. Керовані потоки описують процеси переробки і перерозподілу ресурсів між вузлами мережі і процеси поставок сировини ззовні. Некеровані потоки описують попит на ресурси, який формується зовнішніми споживачами.

Метою функціонування мережі поставок є повне і своєчасне задоволення зовнішнього попиту за умови мінімізації власних витрат. Витрати пов'язані з необхідністю створення та зберігання у вузлах мережі запасів матеріальних ресурсів.

Керування запасами полягає у визначенні моментів часу та обсягів замовлень на їх поповнення. Серед моделей керування запасами можна виділити два основних типи [1]: модель оптимального розміру замовлення і модель періодичної перевірки. У першому випадку передбачається безперервний контроль за станом запасів і розміщення замовлень фіксованого розміру в моменти часу, які визначаються відповідно до обраної стратегії. Другий тип моделі передбачає перевірку рівня запасів через рівні проміжки часу і розміщення замовлення, розмір якого визначається відповідно до обраної стратегії. Сукупність правил, за якими приймаються подібні рішення, називається стратегією управління запасами. У статті розглядається модель періодичної перевірки.

Вибір моделі керування запасами визначається характером попиту з боку зовнішніх споживачів. З точки зору теорії керування обсяги попиту, що надходять із зовнішнього середовища, доцільно розглядати в якості зовнішніх збурюючих впливів. На сьогодні для синтезу стратегії керування запасами із заданою моделлю попиту широко застосовується метод прогнозуючого керування [2].

Однак, на практиці, як правило, відсутня інформація для побудови адекватної моделі зовнішнього попиту, яка необхідна для синтезу прогнозуючого керування. Одним з підходів до вирішення задачі керування запасами в умовах невизначеності попиту є концепція «невідомих, але обмежених» впливів [3]. При цьому відповідна модель попиту характеризується інтервальною невизначеністю.

Для опису невизначеності в стані системи, яка накопичується за рахунок дії зовнішніх збурень, використовується множина досяжності. Також становить інтерес «множина досяжності для зворотного часу», яку називають множиною тяжіння системи [4].

Необхідність опису областей досяжності і тяжіння виникає у багатьох практичних задачах, зокрема при аналізі та синтезі керування динамічними системами. Дуже часто в подібних задачах ресурси керування є обмеженими, а на об'єкт керування діють неконтрольовані зовнішні збурення. Загальний підхід до розв'язання деяких типів таких задач для лінійних систем вперше був описаний в роботі [5].

Одним з найефективніших підходів до розв'язання зазначених задач є підхід, заснований на концепції інваріантних множин [6]. Серед різних форм інваріантних множин особливо виділяються еліпсоїди внаслідок їх простої структури і прямого зв'язку з квадратичними функціями Ляпунова. Дослідження еліпсоїдів, за допомогою яких апроксимуються множини досяжності керованих систем, проведено у роботі [7]. Еліпсоїдальні апроксимації інваріантних множин при синтезі керування в лінійних системах великої розмірності використовувалися в роботі [8].

В останнє десятиліття для побудови еліпсоїдальних апроксимацій множин досяжності і тяжіння динамічних систем успішно застосовуються методи теорії лінійних матричних нерівностей (ЛМН) [9]. Переваги цього підходу полягають у тому, що він охоплює різноманітні постановки задач аналізу та синтезу, може бути застосований до систем великих розмірностей і використовує прості та зручні обчислювальні алгоритми, які реалізовані в вільно розповсюджуваних пакетах програм, сумісних із середовищем MATLAB.

Однак у більшості робіт щодо зазначеної тематики, техніка ЛМН застосовується за наявності обмежень на значення станів, керувань та (або) збурень, заданих у вигляді нерівностей щодо будь-якої з норм зазначених сигналів. Тоді як специфікою задач керування запасами є невід'ємність значень змінних, що приводить до необхідності врахування несиметричних структурних обмежень як на значення зовнішнього попиту, так і значення станів і керувальних впливів.

Постановка задачі

Для математичного опису керованої мережі поставок використовується дискретна модель у просторі станів, оскільки передбачається, що отримання інформації про стан мережі і формування керуючих впливів відбувається в дискретні моменти часу із заданим періодом дискретизації. Змінними станів є готівкові рівні запасу ресурсів у вузлах мережі. В якості керуючих впливів розглядаються обсяги заявок на поповнення ресурсів, які формуються вузлами мережі в поточному періоді, а збуреннями є обсяги попиту на ресурси, які надходять ззовні.

Розглянемо математичну модель мережі поставок, яка описує зміну рівня запасів кожного виду ресурсів. Передбачається, що структура мережі є відомою, а значення станів є доступними для безпосереднього виміру. Тоді мережа поставок описується різницевим рівнянням із запізненням

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \textstyle\sum_{t=0}^{\Lambda_m} \mathbf{B}_t \mathbf{u}(k-t) + \mathbf{E}\mathbf{d}(k), \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{1}$$

де $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ — вектор станів; $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{R}^m$ — вектор керуючих дій; $\mathbf{d}(k) \in \mathbf{R}^q$ — вектор зовнішніх збурень; $\mathbf{B}_t \in \mathbf{R}^{n\times m}, t = \overline{0, \Lambda_m}$ — матриці впливу керувань, $\mathbf{E} \in \mathbf{R}^{n\times q}$ — матриця впливу збурень; $\Lambda_i \in \mathbf{N}$ — цілочисельна змінна, яка є кратною періоду дискретизації та визначає величину запізнення керованих потоків i-го вузла; Λ_m — максимальне значення величин запізнення керованих потоків між усіма парами пов'язаних вузлів мережі. Очевидно, що структура мережі визначається матрицями $\mathbf{B}_t$, $\mathbf{E}$, методика побудови яких викладена в роботі [10].

У процесі функціонування системи мають виконуватися такі обмеження:

$$\mathbf{x}(k) \in X = \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : 0 \le \mathbf{x} \le \mathbf{x}^{\max}\right\}; \quad \mathbf{u}(k) \in U = \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m : 0 \le \mathbf{u} \le \mathbf{u}^{\max}\right\}, \tag{2}$$

де $\mathbf{x}^{\max}$, $\mathbf{u}^{\max}$ — вектори, які визначають максимальні місткості сховищ вузлів мережі і максимальні обсяги транспортувань та вважаються заданими.

Будемо припускати, що вектори зовнішніх збурень задовольняють обмеженням

$$\mathbf{d}(k) \in D = \left\{\mathbf{d} \in \mathbf{R}^q : \ 0 \le \mathbf{d}^{\min} \le \mathbf{d} \le \mathbf{d}^{\max}\right\}, \tag{3}$$

де $\mathbf{d}^{\min}$, $\mathbf{d}^{\max}$ — вектори, які визначають граничні значення попиту і вважаються відомими.

Множини допустимих значень станів X, керувань U та попиту D є обмеженими багатогранниками, які визначаються перетинанням кінцевого числа замкнутих напівпросторів, тобто є компактними опуклими множинами, при цьому початок координат не є всередині цих множин: $0 \notin \operatorname{int}(X)$, $0 \notin \operatorname{int}(U)$, $0 \notin \operatorname{int}(D)$.

Позначимо через D_T множину допустимих збурень, визначених на інтервалі $\left[0, T\right]$ з деяким кінцевим $T > 0$.

Множина досяжності в момент часу T для системи (1) являє собою сукупність кінців траєкторій системи, яка розглядається на інтервалі часу $\left[0, T\right]$, у разі дії допустимого збурення $\mathbf{d} \in D_T$. Множина досяжності має такі властивості [4]: замкнутість, обмеженість (для стійких систем за наявності обмежень (2)), опуклість, центральна симетрія, інваріантність.

Множина тяжіння в момент часу T для системи (1) являє собою сукупність точок фазового простору, з яких система може бути приведена в задану точку $\mathbf{x}^*$ в момент T за допомогою допустимих керувань $\mathbf{u} \in U$. Множина тяжіння має властивості, які є аналогічними властивостям множини досяжності. Надалі будемо розглядати граничні множини досяжності і тяжіння для випадку $T \to \infty$.

Для наближеного опису множин досяжності і тяжіння будемо використовувати інваріантні еліпсоїди, оскільки визначення еліпсоїда вимагає завдання мінімального набору параметрів: симетричної додатної визначеної матриці $\mathbf{Q}_x = \mathbf{Q}_x^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{Q}_x \succ 0$ і вектора $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^n$, який визначає координати центра еліпсоїда:

$$E\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{Q}_x\right) = \left\{\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n : \ \left(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_x^{-1} \left(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*\right) \le 1\right\}. \tag{4}$$

Зручність використання еліпсоїдів полягає в їх прямому зв'язку з квадратичними функціями Ляпунова та можливості використання техніки ЛМН для побудови еліпсоїдальних оцінок розглянутих множин.

Метою роботи є синтез обмеженого стабілізуючого керування запасами в системі (1), яке мінімізує граничну множину досяжності і максимізує граничну множину тяжіння замкнутої системи в умовах дії невідомого, але обмеженого зовнішнього попиту (3) з урахуванням заданих структурних обмежень на стани та керування (2) . При цьому оптимізація виконується не для самих граничних множин, а для їх апроксимацій у формі інваріантних еліпсоїдів.

Синтез обмеженого стабілізуючого керування

Першим етапом розв'язання задачі синтезу керування є перетворення моделі (1) до стандартного вигляду без запізнення на основі розширення вектора станів [11]:

$$\xi(k) = \left[\mathbf{x}^{\mathbf{T}}(k), \mathbf{u}^{\mathbf{T}}(k-1), \mathbf{u}^{\mathbf{T}}(k-2), ..., \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\left(k - \Lambda_m\right)\right]^{\mathbf{T}}.$$

Тоді рівняння розширеної моделі мережі поставок набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \mathbf{A}\xi(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{G}\mathbf{d}(k); \\ \mathbf{x}(k) &= \mathbf{C}\xi(k), \end{aligned} \tag{5}$$

де матриці $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{N \times N}$; $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{N \times m}$; $\mathbf{G} \in \mathbf{R}^{N \times q}$; $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n \times N}$; $N = n + m\Lambda_m$ мають відповідну блокову структуру [10].

Виконаємо апроксимацію множини D значень зовнішнього попиту еліпсоїдом найменшого об'єму

$$E\left(\mathbf{d}_c, \mathbf{Q}_d\right) = \left\{\mathbf{d}(k) \in \mathbf{R}^q : \ \left(\mathbf{d}(k) - \mathbf{d}_c\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_d^{\ -1} \left(\mathbf{d}(k) - \mathbf{d}_c\right) \le 1\right\}, \tag{6}$$

параметри якого $\mathbf{P}_d$ і $\mathbf{d}_c$ визначаються шляхом розв'язання задачі опуклої оптимізації:

$$-\log\det \mathbf{W} \to \min \tag{7}$$

з обмеженнями на матричну $\mathbf{W} = \mathbf{W}^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{q \times q}$ і векторну $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^q$ змінні:

$$\mathbf{W} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & \left(\mathbf{W}\mathbf{d}_i - \mathbf{z}\right)^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{W}\mathbf{d}_i - \mathbf{z} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = \overline{1, q^2},$$

де $\mathbf{d}_i$ — вектори, елементи яких містять всі можливі комбінації значень векторів $\mathbf{d}^{\min}$ і $\mathbf{d}^{\max}$.

Розв'язок задачі (7) $\hat{\mathbf{W}}, \hat{\mathbf{z}}$ визначає параметри еліпсоїда (6):

$$\mathbf{Q}_d = \hat{\mathbf{W}}^{-2}, \quad \mathbf{d}_c = \hat{\mathbf{W}}^{-1}\hat{\mathbf{z}}.$$

Побудуємо закон керування у вигляді лінійного зворотного зв'язку за сигналом неузгодженості між готівковим і страховим рівнями запасу ресурсів:

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}\left(\xi(k) - \xi^*\right), \tag{8}$$

де $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{m\times N}$ — матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку; $\xi^* = \underbrace{\left[\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}, ..., \mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\right]}_{\Lambda_m+1}^{\mathrm{T}}$ — складовий вектор, де елементи вектора $\mathbf{x}^*$ визначають розміри страхових запасів ресурсів у вузлах мережі і обчислюються на підставі верхніх граничних значень зовнішнього попиту з урахуванням величин запізнення керованих потоків і продуктивної моделі Леонтьєва:

$$\mathbf{x}^* = \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{d}^*, \quad \mathbf{d}_i^* = \begin{cases} \Lambda_m \mathbf{d}_i^{\max}, \ i = \overline{1, q}; \\ 0, \quad i = \overline{q+1, n}, \end{cases} \tag{9}$$

де $\mathbf{\Phi} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ — технологічна матриця, значення елемента $\mathbf{\Phi}_{ij}$ якої дорівнює кількості одиниць ресурсу i, необхідного для виробництва одиниці ресурсу j; $\mathbf{I}_n$ — одинична матриця.

Тоді розширену модель замкнутої системи для керування (8) представимо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} &\xi(k+1) = \mathbf{A}_f\left(\xi(k) - \xi^*\right) + \mathbf{A}\xi^* + \mathbf{G}\left(\mathbf{d}(k) - \mathbf{d}_c\right) + \mathbf{G}\mathbf{d}_c; \\ &\mathbf{x}(k) = \mathbf{C}\xi(k); \quad \mathbf{A}_f = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}. \end{aligned} \tag{10}$$

Визначимо критерій якості в разі нескінченного часового горизонту

$$J_\infty(k) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_\xi\left(\xi(k) - \xi^*\right) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{R}_u\mathbf{u}(k)\right), \tag{11}$$

де $\mathbf{R}_\xi \succ 0, \mathbf{R}_u \succ 0$ — діагональні вагові матриці відповідних розмірностей.

Визначимо квадратичну функцію Ляпунова, побудовану на рішеннях системи (10)

$$V\left(\xi(k) - \xi^*\right) = \left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\left(\xi(k) - \xi^*\right), \tag{12}$$

де $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{N\times N}, \mathbf{P} \succ 0$ — симетрична додатно визначена матриця.

Обчислимо першу по k різницю функції Ляпунова (12), використовуючи систему (10), і вимагатимемо, щоб значення функції з плином часу зменшувалося з деякою гарантованою швидкістю:

$$V\left(\xi(k+1) - \xi^*\right) - V\left(\xi(k) - \xi^*\right) \le -\left(\left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_\xi\left(\xi(k) - \xi^*\right) + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}(k)\mathbf{R}_u\mathbf{u}(k)\right). \tag{13}$$

Для оцінки ступеня впливу збурень $\mathbf{d}(k)$ будемо використовувати інваріантний еліпсоїд

$$E\left(\xi^*, \mathbf{Q}\right) = \left\{\xi(k) \in \mathbf{R}^N : \left(\xi(k) - \xi^*\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{-1}\left(\xi(k) - \xi^*\right) \le 1\right\}, \tag{14}$$

який апроксимує множину досяжності замкнутої системи (10) під дією збурень $\mathbf{d}(k) \in E\left(\mathbf{d}_c, \mathbf{P}_d\right)$. Будемо шукати керування виду (8), яке доставляє мінімум інваріантному еліпсоїду (14). Щоб структура оптимізаційної задачі відповідала структурі задач напіввизначеного програмування (НВП) в якості критерія еліпсоїда виберемо слід його матриці. Відповідний результат представлений теоремою.

Теорема. *Нехай матриці* $\hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{Y}}$ *отримані в результаті розв'язання такої оптимізаційної задачі:*

$$\mathrm{tr}(\mathbf{Q}) \to \min \tag{15}$$

з обмеженнями на матричні змінні $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{N\times N}$, $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^{m\times N}$ *і скалярний параметр* α *:*

$$\alpha > 0, \quad \mathbf{Q} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_x & \mathbf{CQ} \\ \mathbf{QC}^{\mathrm{T}} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succeq 0\,; \tag{16}$$

$$\mathbf{Y}\left(\xi(k)-\xi^*\right) \succeq 0, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\left(\left(\mathbf{u}^{\max}\right)^{+}\right)^{\mathrm{T}}\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\left(\left(\mathbf{u}^{\max}\right)^{+}\right)^{\mathrm{T}}\left(\xi(k)-\xi^*\right)^{\mathrm{T}} \\ \left(\xi(k)-\xi^*\right)\left(\mathbf{u}^{\max}\right)^{+}\mathbf{Y} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succeq 0\,; \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0_{N\times N} & 0_{N\times q} & \left(\mathbf{AQ}+\mathbf{BY}\right)^{\mathrm{T}} & 0_{N\times q} & \mathbf{QR}_{\xi}^{1/2} & \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_u^{1/2} \\ 0_{N\times N} & 0_{N\times N} & 0_{N\times q} & \left(\mathbf{A}-\mathbf{I}_N\right)^{\mathrm{T}} & 0_{N\times q} & 0_{N\times N} & 0_{N\times m} \\ 0_{q\times N} & 0_{q\times N} & 0_{q\times q} & \mathbf{G}^{\mathrm{T}} & 0_{q\times q} & 0_{q\times N} & 0_{q\times m} \\ \mathbf{AQ}+\mathbf{BY} & \mathbf{A}-\mathbf{I}_N & \mathbf{G} & \mathbf{Q} & \mathbf{GQ}_d^{1/2} & 0_{N\times N} & 0_{N\times m} \\ 0_{q\times N} & 0_{q\times N} & 0_{q\times q} & \mathbf{Q}_d^{1/2}\mathbf{G}^{\mathrm{T}} & \alpha\mathbf{I}_q & 0_{q\times N} & 0_{q\times m} \\ \mathbf{R}_{\xi}^{1/2}\mathbf{Q} & 0_{N\times N} & 0_{N\times q} & 0_{N\times N} & 0_{N\times q} & \mathbf{I}_N & 0_{N\times m} \\ \mathbf{R}_u^{1/2}\mathbf{Y} & 0_{m\times N} & 0_{m\times q} & 0_{m\times N} & 0_{m\times q} & 0_{m\times N} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \succeq 0\,, \tag{18}$$

де «+» — псевдообернення Мура–Пенроуза; $0_{m\times n}$ *— нуль-матриця відповідної розмірності.*

Тоді серед усіх керувань виду (8) регулятор з матрицею

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{Y}}\hat{\mathbf{Q}}^{-1} \tag{19}$$

доставляє мінімум інваріантному еліпсоїду (14) для замкнутої системи (10) з обмеженнями (2).

Доказ теореми є ідентичним доказу теореми 2 в [12] з очевидними технічними змінами.

Зазначимо, що задача (15)—(18) є задачею напіввизначеного програмування. ЛМН (18) отримана на підставі нерівності (13), яка забезпечує спадання значення функції Ляпунова (12) з плином часу, і нерівності (6), та гарантує, що керування (8) є стабілізуючим. ЛМН (16) забезпечує виконання першого з обмежень (2) на значення станів системи, а ЛМН (17) — виконання другого з обмежень (2) на значення керувальних впливів.

Чисельний приклад

Як приклад розглянемо мережу поставок, яка вивчалася в роботі [13]. Модель мережі описується графом $G = \left(\{1,\,2,\,3\},\,\{(2,1),\,(2,3),\,(3,1)\}\right)$.

Подамо керовані потоки u_1 і u_3 у вигляді гіпердуг, а також додамо потік u_2, який описує поставки сировини ззовні (див. рис. 1). Дуги d_1 і d_2, які зображені пунктирними лініями, представляють зовнішній попит. Значення часу транспортування $T_{j,i}$ і кількість одиниць продукції $\mathbf{\Phi}_{ij}$, яка потрібна у відповідності до технологічного процесу, вказані для кожного керованого потоку в круглих і квадратних дужках, відповідно. Біля кожного вузла в круглих дужках вказано значення часу виконання замовлення T_i.

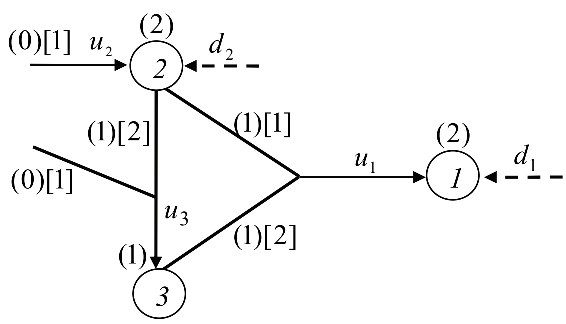

Рис. 1. Графічне зображення моделі мережі поставок

Специфіка цієї мережі поставок в тому, що на вузол 1 діє тільки зовнішній попит; на вузол 2 діє як зовнішній, так і внутрішній попит з боку вузлів 1 і 3; на вузол 3 — тільки внутрішній попит з боку вузла 1.

Задані структурні обмеження $\mathbf{x}^{\max} = \left[400,\,6000,\,1300\right]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{u}^{\max} = \left[180,\,3200,\,600\right]^{\mathrm{T}}$, граничні значення попиту $\mathbf{d}^{\min} = [50, 20]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{d}^{\max} = [90, 60]^{\mathrm{T}}$ та початкові умови $\mathbf{x}(0) = [400, 4000, 1000]^{\mathrm{T}}$.

За формулою $\Lambda_i = \max\{T_{j,i} + T_i, \ i, j = \overline{1,3}, \ j \neq i\}$ визначаємо величини запізнення матеріальних потоків всіх вузлів мережі, в результаті отримуємо $\Lambda_m = 3$. За формулою (9) обчислюємо рівні страхових запасів вузлів мережі $\mathbf{x}^* = [270, 3900, 1080]^{\mathrm{T}}$. В результаті розв'язання задачі (7) визначаємо параметри еліпсоїда, який апроксимує множину значень зовнішнього попиту: $\mathbf{d}_c = [70, 40]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{Q}_d = \mathrm{diag}(800, 800)$.

Діагональні елементи вагових матриць $\mathbf{R}_\xi$, $\mathbf{R}_u$ вибрані рівними $1{,}0 \times 10^{-8}$. Чисельний розв'язок задачі (15)—(18) отримано за допомогою вільно поширюваного пакету CVX [14]. В результаті за формулою (19) обчислюємо матрицю коефіцієнтів зворотного зв'язку:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -0{,}087 & -0{,}021 & 0{,}185 & -0{,}102 & -0{,}010 & -0{,}021 & -0{,}106 & -0{,}043 & 0{,}174 & -0{,}090 & -0{,}017 & -0{,}005 \\ 0{,}349 & -0{,}658 & -0{,}066 & 0{,}624 & -0{,}468 & 0{,}189 & 0{,}532 & -0{,}353 & 0{,}012 & 0{,}317 & -0{,}048 & -0{,}016 \\ -0{,}047 & 0{,}046 & -0{,}192 & -0{,}099 & -0{,}069 & -0{,}070 & -0{,}075 & 0{,}015 & -0{,}208 & -0{,}055 & -0{,}001 & -0{,}002 \end{bmatrix}.$$

Моделювання здійснювалося протягом 15 періодів. Результати моделювання при зовнішньому попиті, який змінюється стрибкоподібно, показані на рис. 2.

Спочатку має місце перехідний процес, зумовлений тим, що канали транспортування ресурсів не були завантажені. Потім спостерігаються коливання рівнів запасу ресурсів навколо визначених значень страхових запасів.

Перевагою отриманої стратегії керування запасами є стабілізація замкнутої системи, яка гарантується застосуванням прямого методу Ляпунова для дискретних систем.

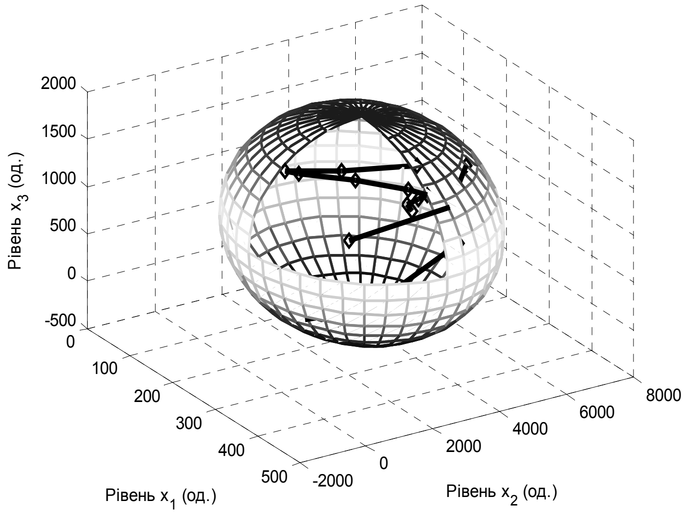

Рис. 2. Фазова траєкторія системи та інваріантний еліпсоїд, який апроксимує множину досяжності

Висновки

Запропоновано метод синтезу стабілізуючого керування запасами в мережах поставок зі структурними обмеженнями в умовах дії невідомого, але обмеженого зовнішнього попиту. Пропонований підхід полягає в побудові оцінок областей досяжності і тяжіння у формі інваріантних еліпсоїдів з використанням техніки ЛМН. Чисельний розв'язок задачі синтезу зведено до задач одновимірної опуклої оптимізації та НВП, і спирається на вільно поширювані програмні реалізації методів розв'язання задач опуклої оптимізації.

Отримані результати ілюструють ефективність, простоту та зручність запропонованого підходу. Надалі планується поширити запропонований підхід на випадок робастного керування, коли значення інтервалів запізнення керованих потоків у процесі функціонування мережі поставок відрізняються від номінальних значень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лотоцкий В. А. Модели и методы управления запасами / В. А. Лотоцкий, А. С. Мандель. — М. : Наука, 1991. — 189 с.

2. Bemporad A. Robust model predictive control : a survey / A. Bemporad, M. Morari // Lecture notes in control and information sciences. — 1999. — V. 245. — P. 207—226.

3. Bertsekas D. P. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty / D. P. Bertsekas, I. Rhodes // IEEE Trans. Automat. Control. — 1971. — Vol. 16. — P. 117—128.

4. Поляк Б. Т. Множества достижимости и притяжения линейных систем с ограниченным управлением: описание с помощью инвариантных эллипсоидов / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков // Стохастическая оптимизация в информатике; ред. О. Н. Граничин. — СПб: С.-Петербургский гос. ун-т. — 2008. — Вып. 4. — С. 3—23.

5. Формальский А. М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами / А. М. Формальский. — М. : Наука, 1974. — 368 с.
6. Blanchini F. Set theoretic methods in control / F. Blanchini, S. Miani. — Boston : Birkhauser, 2008. — 504 p.
7. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов / Ф. Л. Черноусько. — М. : Наука. Физматлит, 1988. — 320 с.
8. Дарьин А. Н. Метод вычисления инвариантных множеств линейных систем большой размерности при неопределённых возмущениях / А. Н. Дарьин, А. Б. Куржанский // Доклады РАН. — 2012. — Т. 446, № 6. — С. 607—611.
9. Баландин Д. В. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д. В. Баландин, М. М. Коган. — М. : Физматлит, 2007. — 280 с.
10. Дорофеев Ю. И. Построение математических моделей управляемых сетей поставок с учетом запаздываний потоков / Ю. И. Дорофеев, А. А. Никульченко // Системні дослідження та інформаційні технології = System Research & Information Technologies. — 2013. — № 1. — С. 16—27.
11. Blanchini F. Feedback control of production-distribution systems with unknown demand and delays / F. Blanchini, R. Pesenti, F. Rinaldi, W. Ukovich // IEEE Trans. on robotics and automation. — 2000. — Vol. 16. — No. 3. — P. 313—317.
12. Дорофеев Ю. И. Робастное стабилизирующее управление запасами в сетях поставок в условиях неопределенности внешнего спроса и интервалов задержки пополнения запасов / Ю. И. Дорофеев, Л. М. Любчик, А. А. Никульченко // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2014. — № 5. — С. 146—160.
13. Blanchini F. Least inventory control of multistorage systems with non-stochastic unknown inputs / F. Blanchini, F. Rinaldi, W. Ukovich // IEEE Trans. on robotics and automation. — 1997. — Vol. 13. — P. 633—645.
14. Grant M. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 1.21 [Електронний ресурс] / M. Grant, S. Boyd // Режим доступу: http://cvxr.com/cvx.

Рекомендована кафедрою комп'ютерних систем управління ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 12.01.2015

Дорофєєв Юрій Іванович — канд. техн. наук, доцент кафедри системного аналізу і управління, e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu.

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків.

Yu. I. Dorofieiev[1]

Estimation of the reachability sets and attraction sets for the supply networks with structural constraints by means of invariant ellipsoids

[1]National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»

The estimation problem of reachability sets and attraction sets for the supply networks with structural constraints, the model of which is given in the form of a discrete model with delay in state space is investigated. The control law as a feedback with respect to signal mismatch between the cash and safety stock levels with given unsymmetrical constraints is considered. The reachability sets and the attraction sets of such systems are described in terms of invariant ellipsoids using the technique of linear matrix inequalities and semidefinite programming.

Keywords: supply network, reachability set, attraction set, invariant ellipsoid, linear matrix inequality, semidefinite programming.

Dorofieiev Yurii I. — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of the Chair of System Analysis and Control, e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu

Ю. И. Дорофеев[1]

Оценка множеств достижимости и притяжения сетей поставок со структурными ограничениями с помощью инвариантных эллипсоидов

[1]Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

Исследуется задача оценивания множеств достижимости и притяжения сети поставок со структурными ограничениями, заданной в виде дискретной модели с запаздыванием в пространстве состояний. Рассматриваются управления в виде обратной связи по сигналу рассогласования между наличным и страховым уровнями запаса ресурсов с заданными несимметричными ограничениями. Множества достижимости и притяжения таких систем описываются в терминах инвариантных эллипсоидов с применением техники линейных матричных неравенств и задач полуопределенного программирования.

Ключевые слова: сеть поставок, множество достижимости, множество притяжения, инвариантный эллипсоид, линейное матричное неравенство, задача полуопределенного программирования.

Дорофеев Юрий Иванович — канд. техн. наук, доцент кафедры системного анализа и управления, e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu