УДК 62-838

О. Б. Мокін, д. т. н., проф.; Б. І. Мокін, д. т. н., проф., акад. НАПН України;
В. А. Лобатюк

ОПТИМІЗАЦІЯ РУХУ ГІБРИДНОГО АВТОМОБІЛЯ ІЗ СИСТЕМОЮ ЕЛЕКТРОПРИВОДА, ЯКА НЕПРАЦЮЄ

Розв'язана задача оптимізації руху транспортного засобу з комбінованим приводом від двигуна внутрішнього згорання та від електричного двигуна постійного струму дорогою, яка, крім горизонтальних ділянок, містить спуски та підйоми, а рух здійснюється за умови, що систему електропривода вимкнено.

Ключові слова: *оптимізація руху, гібридний автомобіль, двигун внутрішнього згоряння, двигун постійного струму.*

Вихідні передумови та постановка завдання

У роботі [1] нами здійснена трансформація математичних моделей транспортних засобів із комбінованим приводом від двигуна внутрішнього згорання та від електричного двигуна постійного струму до задачі оптимізації їх руху дорогою, яка, крім горизонтальних ділянок, містить спуски та підйоми, вибрані критерії оптимізації та обмеження й запропонована схема декомпозиції задачі для випадків, коли один із приводів з якоїсь причини не працює та коли вони створюють тягове зусилля на валу одночасно.

У цій роботі ми покажемо, як розв'язують цю задачу оптимізації, коли через розряд акумуляторної батареї чи через несправність в електричній системі гібридного автомобіля вимкнено його електропривод і автомобіль рухається лише за допомогою двигуна внутрішнього згорання.

У цьому випадку, як показано в роботі [1], математична модель динаміки автомобіля матиме вигляд:

$$\frac{d\nu}{d\tau}=\frac{q}{\nu}-f_0-f_1\nu-f_2\nu^2 \tag{1}$$

– у разі, якщо автомобіль рухається горизонтальною ділянкою дороги;

$$\frac{d\nu}{d\tau}=\frac{q}{\nu}+f_0^*\sin\beta-f_0\cos\beta-f_1\nu-f_2\nu^2 \tag{2}$$

– у разі, якщо автомобіль рухається на спуск;

$$\frac{d\nu}{d\tau}=\frac{q}{\nu}-f_0^*\sin\beta-f_0\cos\beta-f_1\nu-f_2\nu^2 \tag{3}$$

– у разі, якщо автомобіль рухається на підйом.

У якості критерію оптимізації матимемо функціонал

$$e_q=\int_0^{\tau_q} q\,d\tau, \tag{4}$$

а в якості ізопериметричного обмеження матимемо функціонал

$$l_q=\int_0^{\tau_q} \nu\,d\tau. \tag{5}$$

Зауважимо, що у виразах (1)-(5) ν,τ,q,e_q,l_q відповідно – відносна швидкість руху автомобіля, відносний час, відносні витрати палива, відносні витрати енергії та відносний шлях; $f_0, f_0^*, f_1, f_2, \tau_q$ – відносні параметри, а β – кут нахилу полотна дороги до горизонтальної площини – усі ці відносні величини визначені через відповідні іменовані одиниці в роботі [1], ознайомлення з якою є обов'язковим перед ознайомленням з результатами, отриманими в цій статті, тому на їх визначенні в нашій статті ми зупинятися не будемо.

А в цій статті синтезуємо залежності $\nu(\tau), q(\tau)$, які доставляють мінімум критерію (4), задовольняючи водночас обмеження (5) та одне з обмежень (1), (2) або (3), тобто синтезуємо закони оптимального руху гібридного автомобіля, коли він рухається лише за допомогою двигуна внутрішнього згорання за вимкненої системи електропривода. Ця задача в роботі [1] визначена першою в запропонованій декомпозиційній множині.

Розв'язання поставленої задачі

Поставлену задачу розв'яжемо спочатку для випадку, коли гібридний автомобіль рухається по дорозі, прокладеній на горизонтальній площині.

Розв'язання почнемо з визначення функції Лагранжа, яка згідно з рекомендаціями, приведеними, наприклад, у роботах [2], [3], для нашої оптимізаційної задачі матиме вигляд:

$$H^{(q)}(\nu,\nu',q,q',\psi,\psi',\tau) = q + \lambda_1(\nu' - \frac{q}{\nu} + f_0 + f_1\nu + f_2\nu^2) + \lambda_2(\psi' - \nu). \quad (6)$$

Як бачимо, складниками функції Лагранжа є підінтегральний вираз q критерію оптимізації (4), домножене на невизначений множник Лагранжа λ_1 рівняння динаміки (1) і домножене на невизначений множник Лагранжа λ_2 рівняння, яке отримаємо з функціоналу (5), відпустивши верхню границю, увівши новий символ ψ для позначення цього функціоналу після відпущення його верхньої границі та продиференціювавши цей функціонал.

Як відомо з теорії варіаційного числення [2], [3], для того щоб залежності $\nu(\tau), q(\tau)$ доставляли мінімум критерію (4), вони повинні бути знайдені шляхом розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} H_\nu^{(q)} - \dfrac{d}{d\tau}H_{\nu'}^{(q)} = 0, \\ H_q^{(q)} - \dfrac{d}{d\tau}H_{q'}^{(q)} = 0, \\ H_\psi^{(q)} - \dfrac{d}{d\tau}H_{\psi'}^{(q)} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

де:

$$\begin{aligned} H_\nu^{(q)} &= \frac{\partial H^{(q)}}{\partial \nu}, H_{\nu'}^{(q)} = \frac{\partial H^{(q)}}{\partial \nu'}, \\ H_q^{(q)} &= \frac{\partial H^{(q)}}{\partial q}, H_{q'}^{(q)} = \frac{\partial H^{(q)}}{\partial q'}, \\ H_\psi^{(q)} &= \frac{\partial H^{(q)}}{\partial \psi}, H_{\psi'}^{(q)} = \frac{\partial H^{(q)}}{\partial \psi'}. \end{aligned} \quad (8)$$

Підставляючи частинні похідні (8), узяті від виразу (6), у систему рівнянь (7), отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \lambda_1(\frac{q}{\nu^2} + f_1 + 2f_2\nu) - \lambda_2 - \frac{d\lambda_1}{d\tau} = 0, \\ 1 - \frac{\lambda_1}{\nu} = 0, \\ -\frac{d\lambda_2}{d\tau} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Із третього рівняння системи (9) маємо –

$$\lambda_2 = -C_2, \tag{10}$$

де C_2 – невідома константа.

Із другого рівняння системи (9) маємо –

$$\lambda_1 = \nu\,. \tag{11}$$

Підставляючи вирази (10), (11) у перше рівняння системи (9), отримаємо рівняння –

$$\nu(\frac{q}{\nu^2} + f_1 + 2f_2\nu) + C_2 - \frac{d\nu}{d\tau} = 0, \tag{12}$$

яке легко привести до вигляду, придатного для інтегрування –

$$\frac{\nu}{2f_2\nu^3 + f_1\nu^2 + C_2\nu + q}d\nu = d\tau, \tag{13}$$

або

$$\varphi(\nu)d\nu = d\tau, \tag{14}$$

де

$$\varphi(\nu) = \frac{\nu}{2f_2\nu^3 + f_1\nu^2 + C_2\nu + q} \tag{15}$$

Інтегруючи вираз (14), матимемо –

$$\int \varphi(\nu)d\nu = \tau + C_1, \tag{16}$$

де C_1 – невідома константа.

Отриманий інтеграл (16) точного аналітичного виразу не має, тому візьмемо його наближено, скориставшись розкладом функції (15) у степеневий ряд Тейлора в околі точки $\nu = 0$, із якого (аби врахувати нелінійний характер цієї функції) використаємо перших три члени, тобто представимо цю функцію у вигляді –

$$\varphi(\nu) \approx \varphi(0) + \varphi'(0)\nu + \frac{\varphi''(0)}{2}\nu^2. \tag{17}$$

Оскільки $\varphi(0) = 0,$ то вираз (17) спрощуємо до виразу –

$$\varphi(\nu) \approx \varphi'(0)\nu + \frac{\varphi''(0)}{2}\nu^2, \tag{18}$$

або (з урахуванням значень першої і другої похідних від функції (15) у нулі) до виразу –

$$\varphi(\nu) \approx \frac{1}{q}\nu - \frac{C_2}{q^2}\nu^2. \tag{19}$$

Підставляючи вираз (19) у (16) і беручи інтеграли від степеневих функцій, отримаємо –

$$\frac{1}{2q}\nu^2 - \frac{C_2}{3q^2}\nu^3 = \tau + C_1, \tag{20}$$

або –

$$\nu^3 - \frac{3q}{2C_2}\nu^2 + \frac{3q^2}{C_2}(\tau + C_1) = 0. \tag{21}$$

Це рівняння заміною

$$y = \nu - \frac{q}{2C_2} \tag{22}$$

приводять до вигляду –

$$y^3 + 3py + 2a = 0, \tag{23}$$

де:

$$\begin{aligned} 3p &= -\frac{3q^2}{4C_2^2}, \\ 2a &= -\frac{q^3}{4C_2^3} + \frac{3q^2}{C_2}(\tau + C_1). \end{aligned} \tag{24}$$

Рівняння (23), як показано в роботі [4], належить до класу тих рівнянь, дійсний додатний корінь яких знаходять із виразу –

$$y_+ = (-a + (a^2 + p^3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} + (-a - (a^2 + p^3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}. \tag{25}$$

Підставляючи вирази (24) у (25), а результат цієї підстановки у вираз (22), отримаємо –

$$\begin{aligned} \nu = {} & (\frac{q^3}{8C_2^3} - \frac{3q^2}{2C_2}(\tau + C_1) + ((-\frac{q^3}{8C_2^3} + \frac{3q^2}{2C_2}(\tau + C_1))^2 + (-\frac{q^2}{4C_2^2})^3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} + \\ & + (\frac{q^3}{8C_2^3} - \frac{3q^2}{2C_2}(\tau + C_1) - ((-\frac{q^3}{8C_2^3} + \frac{3q^2}{2C_2}(\tau + C_1))^2 + (-\frac{q^2}{4C_2^2})^3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} + \frac{q}{2C_2}, \end{aligned} \tag{26}$$

це й буде математична модель швидкості руху гібридного автомобіля з вимкненою системою електропривода, оптимальна за критерієм (4) мінімуму витрат пального двигуна внутрішнього згорання.

Цю модель у загальному вигляді можна представити й так –

$$\nu = F_\nu(q, C_1, C_2, \tau), \tag{27}$$

пам'ятаючи, що витрати пального q необхідно підставляти, виходячи з рівняння (1) динаміки руху автомобіля, тобто у вигляді –

$$q = \nu\frac{d\nu}{d\tau} + f_0\nu + f_1\nu^2 + f_2\nu^3, \tag{28}$$

У свою чергу, вираз (28) у загальному вигляді може бути представлений так

$$q = F_q(\nu, \nu', \tau). \tag{29}$$

Підставляючи вираз (29) у вираз (27), матимемо –

$$\nu = F_\nu(F_q(\nu, \nu', \tau), C_1, C_2, \tau). \tag{30}$$

Параметричний за τ вираз (30) являє собою параметричне рівняння з одним невідомим ν, для розв'язання якого необхідно попередньо визначити константи C_1-C_2. Для цього необхідно, скориставшись лівою (л) та правою (п) граничними умовами –

$$v\big|_{\tau=0} = v_л, \quad v\big|_{\tau=\tau_q} = v_п \tag{31}$$

і виразом (30), скласти два рівняння:

$$v_л = F_v(F_q(v_л, v'_л, 0), C_1, C_2, 0), \tag{32}$$

$$v_п = F_v(F_q(v_п, v'_п, \tau_q), C_1, C_2, \tau_q), \tag{33}$$

розв'язавши які відносно C_1, C_2, знайдемо числові значення C_1^*, C_2^* цих констант. Підставляючи ці числові значення у вираз (30), отримаємо параметричне рівняння –

$$v = F_v(F_q(v, v', \tau), C_1^*, C_2^*, \tau), \tag{34}$$

яке являє собою математичну модель оптимальної швидкості руху гібридного автомобіля за вимкненої системи електропривода протягом часу τ_q під час його руху за рахунок лише двигуна внутрішнього згорання в межах від лівої до правої границі горизонтальної ділянки дороги.

І в силу того, що вираз (34) являє собою математичну модель оптимальної швидкості руху гібридного автомобіля, то й похідний від нього вираз (29) являтиме собою математичну модель оптимальних витрат пального у двигуні внутрішнього згорання цього автомобіля під час його руху горизонтальною ділянкою дороги.

А тепер з'ясуємо, що зміниться, якщо гібридний автомобіль за цих же умов рухатиметься на спуск чи на підйом.

Спочатку звертаємо увагу на те, що в рівняннях (1), (2), (3) динаміки руху автомобіля, коли цей автомобіль рухається горизонтальною ділянкою, має місце параметр f_0, а у випадку руху на спуск чи на підйом мають місце параметри $f_0 \cos\beta, f_0^* \sin\beta$ з відповідними знаками. А після цього звертаємо увагу, що в рівнянні (12), з якого ми отримали математичну модель (26) оптимальної швидкості руху автомобіля горизонтальною ділянкою дороги, параметр f_0 в явному вигляді відсутній. А це означає, що в явному вигляді будуть відсутніми в рівнянні, з якого ми отримуватимемо математичні моделі оптимальної швидкості руху автомобіля на спуск та на підйом, і параметри $f_0 \cos\beta, f_0^* \sin\beta$, тобто структура математичної моделі оптимальної швидкості руху автомобіля не залежить від того, рухається він горизонтальною ділянкою дороги чи рухається він на спуск або підйом. Але математична модель оптимальних витрат пального у двигуні внутрішнього згорання, яка для руху горизонтальною ділянкою дороги мала вигляд (28), для руху на спуск матиме вигляд –

$$q = v\frac{dv}{d\tau} - f_0^* v \sin\beta + f_0 v \cos\beta + f_1 v^2 + f_2 v^3, \tag{35}$$

що витікає з рівняння (2), а для руху на підйом вона матиме вигляд –

$$q = v\frac{dv}{d\tau} + f_0^* v \sin\beta + f_0 v \cos\beta + f_1 v^2 + f_2 v^3, \tag{36}$$

що витікає з рівняння (3).

Із виразів (35), (36) видно, що специфіка руху автомобіля (по горизонталі, на спуск чи на підйом) у моделях витрат пального врахована, і саме через ці моделі, які є мультиплікативними складниками швидкісних моделей, її враховують і в математичних моделях оптимальної швидкості руху автомобіля.

Матеріал, присвячений обчислювальним методам реалізації синтезованих моделей, а також присвячений врахуванню варіацій відрізку часу τ_q, протягом якого автомобіль проїжджає відрізок дороги довжиною l_q, буде викладений нами в одній із наступних публікацій.

Висновки

1. Синтезовані математичні моделі оптимального руху гібридного автомобіля за вимкненої системи електропривода під час його руху за допомогою двигуна внутрішнього згорання відрізком дороги, прокладеної на горизонтальній площині.

2. Показано, як трансформуються синтезовані моделі до умов руху гібридного автомобіля за допомогою двигуна внутрішнього згорання на спуск і на підйом.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Декомпозиція задачі оптимізації руху транспортного засобу з комбінованим приводом [Електронний ресурс] / О. Б. Мокин, Б. І. Мокин, В. А. Лобатюк, О. П. Кубрак // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2015. – № 3. – Режим доступу до журн.: http://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/9/9.

2. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю. П. Петров // Москва-Ленинград: Энергия, 1965. – 220 с.

3. Мокін Б. І. Теорія автоматичного керування, методологія та практика оптимізації / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вінниця: ВНТУ, 2013. – 210 с.

4. Бронштейн И. Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев // Москва: Наука, 1967. – 608 с.

Мокін Олександр Борисович – д. т. н., проф., завідувач кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів (ВЕТЕСК), e-mail: abmokin@gmail.com.

Мокін Борис Іванович – акад. НАПН України, д. т. н., проф., професор кафедри ВЕТЕСК, e-mail: borys.mokin@gmail.com.

Лобатюк Віталій Анатолійович – аспірант кафедри ВЕТЕСК, e-mail: vitalik.htc@gmail.com.

Вінницький національний технічний університет.