

**О. Б. Мокін, д. т. н., проф.; Б. І. Мокін, д. т. н., проф., акад. НАПН України;
В. А. Лобатюк; О. П. Кубрак**

ДЕКОМПОЗИЦІЯ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ РУХУ ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ З КОМБІНОВАНИМ ПРИВОДОМ

Здійснена декомпозиція задачі оптимізації руху транспортного засобу з комбінованим приводом від двигуна внутрішнього згоряння та від електричного двигуна постійного струму за умови, що транспортний засіб рухається дорогою, яка, крім горизонтальних ділянок, містить також спуски та підйоми.

Ключові слова: транспортний засіб з комбінованим приводом, двигун внутрішнього згоряння, двигун постійного струму, оптимізація руху.

Вихідні передумови та постановка завдання

Нині нарівні з транспортними засобами, рух яких забезпечують двигуни внутрішнього згоряння, та транспортними засобами, рух яких забезпечують електроприводи, що отримують живлення від акумуляторних батарей, набувають поширення також транспортні засоби з комбінованим приводом, що містить у своїй структурі як двигун внутрішнього згоряння, так і електропривод із живленням від акумуляторної батареї.

Оскільки відстань, яку може покрити транспортний засіб із двигуном внутрішнього згоряння, насамперед, залежить від ємності бака з паливом та витрат пального на кілометр шляху, а відстань, яку може покрити транспортний засіб з електроприводом, насамперед, залежить від ємності акумуляторної батареї та витрат електроенергії на кілометр шляху, то за обмежених значень ємностей бака та акумуляторної батареї, заданих заводами, що їх виготовляють, актуальним є завдання визначення такого співвідношення витрат пального та електроенергії, яке дозволяє транспортному засобу з комбінованим приводом покрити найдовшу відстань без дозаправки паливом та підзарядки акумулятора.

Ураховуючи те, що транспортний засіб у реальних умовах здійснює рух не лише на горизонтальних ділянках шляху, але й на спусках та підйомах, бачимо, що розв'язання цього оптимізаційного завдання потрібно починати з її декомпозиції. Саме цьому етапу розв'язання сформульованого вище завдання й присвячена ця стаття.

Розв'язання поставленого завдання

Розв'язувати поставлену задачу почнемо з її прив'язки до відомого з курсу теоретичної механіки [1] рівняння

$$m \frac{dV}{dt} = F_T - F_S, \quad (1)$$

що описує рух у часі t автомобіля масою m зі швидкістю V під дією сили тяги F_T , створюваної двигуном, якій доводиться долати силу опору F_S .

Як відомо з тієї ж теоретичної механіки [1] та аеродинаміки [2], сила опору F_S має три складники перший із яких F_O , зумовлений тертям коліс автомобіля з покриттям дороги, є пропорційним вазі F_G автомобіля; другий F_1 , зумовлений тертям бічної поверхні автомобіля з повітрям, є пропорційним швидкості руху автомобіля, а третій F_2 , зумовлений тиском набігаючого на поперечний переріз автомобіля потоку повітря, є пропорційним квадрату

швидкості автомобіля, тобто

$$F_s = F_o + F_1 + F_2 = k_0 F_G + k_1 V + k_2 V^2, \quad (2)$$

де значення коефіцієнта k_0 є табличним і залежить від матеріалу поверхні дороги, значення коефіцієнта k_1 залежить від площі бічної поверхні автомобіля, а значення коефіцієнта k_2 залежить від площі поперечного перерізу автомобіля.

Підставляючи вираз для F_s із (2) в (1), отримаємо рівняння динаміки автомобіля у вигляді

$$m \frac{dV}{dt} = F_T - k_0 F_G - k_1 V - k_2 V^2, \quad (3)$$

яке загалом є справедливим і для автомобіля, силу тяги F_T якого створює двигун внутрішнього згорання, і для автомобіля, у якого цю силу створює електродвигун. Але якщо згадати, що

$$F_T = \frac{M_T}{R}, \quad (4)$$

де M_T – це тяговий момент двигуна, а R – радіус колеса, а також взяти до уваги те, що для двигуна внутрішнього згорання

$$M_T = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{\frac{V}{2\pi R}} = \frac{2\pi R P}{V}, \quad (5)$$

де P – це потужність двигуна, а ω – кутова швидкість обертання колеса, а також взяти до уваги ще й те, що для тягового електродвигуна постійного струму з послідовним збудженням

$$M_T = k_D I \Phi(I), \quad (6)$$

де k_D – коефіцієнт, який визначають із паспортних даних електродвигуна, I – струм якоря цього електродвигуна, а $\Phi(I)$ – магнітний потік його індуктора, який згідно з кривою намагнічування є функцією струму якоря, то з урахуванням співвідношень (4) – (6) рівняння динаміки автомобіля (3) матиме вигляд

$$m \frac{dV}{dt} = \frac{2\pi P}{V} - k_0 F_G - k_1 V - k_2 V^2 = 2\pi k_p \frac{Q}{V} - k_0 F_G - k_1 V - k_2 V^2, \quad (7)$$

якщо тягову силу створює двигун внутрішнього згорання за рахунок згорання Q одиниць палива за одиницю часу, де k_p – коефіцієнт пропорційності між потоком палива Q та створюваною цим потоком потужністю P , і матиме вигляд

$$m \frac{dV}{dt} = \frac{k_D}{R} I \Phi(I) - k_0 F_G - k_1 V - k_2 V^2, \quad (8)$$

якщо тягову силу створює електродвигун постійного струму з послідовним збудженням. Порівнюючи праві частини рівнянь (7), (8), бачимо, що вони суттєво відрізняються.

Узагальнюючи вищевикладене, можна стверджувати: якщо автомобіль створюватиме тягову силу лише за допомогою двигуна внутрішнього згорання, то його динаміку описуватиме рівняння (7); якщо тягова сила створюватиметься лише за допомогою електродвигуна постійного струму з послідовним збудженням, то динаміку автомобіля описуватиме рівняння (8); а якщо тягова сила створюватиметься паралельно працюючими на один вал і двигуном внутрішнього згорання, і електродвигуном постійного струму з послідовним збудженням, то динаміку автомобіля описуватиме рівняння

$$m \frac{dV}{dt} = 2\pi k_p \frac{Q}{V} + \frac{k_D}{R} I\Phi(I) - k_0 F_G - k_1 V - k_2 V^2, \quad (9)$$

яке отримуємо суперпозицією рівнянь (7) і (8).

Але слід зазначити, що в представленому вигляді рівняння (7) – (9) описують динаміку автомобіля лише під час його руху дорогою, полотно якої прокладене на горизонтальній площині.

Якщо ж автомобіль рухатиметься на спуск, як показано на рис.1а, або на підйом, як показано на рис. 1б, то в рівняння (7) – (9) замість члена $(-k_0 F_G)$ слід увести двочлен $(-k_0 F_G \cos \beta + F_G \sin \beta)$ для спуску або двочлен $(-k_0 F_G \cos \beta - F_G \sin \beta)$ для підйому, тобто ці рівняння стануть такими:

– для спуску

$$m \frac{dV}{dt} = 2\pi k_p \frac{Q}{V} - k_0 F_G \cos \beta + F_G \sin \beta - k_1 V - k_2 V^2, \quad (10)$$

$$m \frac{dV}{dt} = \frac{k_D}{R} I\Phi(I) - k_0 F_G \cos \beta + F_G \sin \beta - k_1 V - k_2 V^2, \quad (11)$$

$$m \frac{dV}{dt} = 2\pi k_p \frac{Q}{V} + \frac{k_D}{R} I\Phi(I) - k_0 F_G \cos \beta + F_G \sin \beta - k_1 V - k_2 V^2; \quad (12)$$

– для підйому

$$m \frac{dV}{dt} = 2\pi k_p \frac{Q}{V} - k_0 F_G \cos \beta - F_G \sin \beta - k_1 V - k_2 V^2, \quad (13)$$

$$m \frac{dV}{dt} = \frac{k_D}{R} I\Phi(I) - k_0 F_G \cos \beta - F_G \sin \beta - k_1 V - k_2 V^2, \quad (14)$$

$$m \frac{dV}{dt} = 2\pi k_p \frac{Q}{V} + \frac{k_D}{R} I\Phi(I) - k_0 F_G \cos \beta - F_G \sin \beta - k_1 V - k_2 V^2. \quad (15)$$

Тепер визначимось із критеріями, мінімізацією значень яких ми розв’язуватимемо задачу оптимізації.

Очевидно, що для задачі оптимізації руху автомобіля за допомогою двигуна внутрішнього згоряння цей критерій матиме вигляд функціонала

$$E_Q = \int_0^{T_Q} k_p Q dt, \quad (16)$$

який характеризує кількість механічної енергії E_Q , витраченої за час T_Q їзди автомобіля з використанням двигуна внутрішнього згоряння.

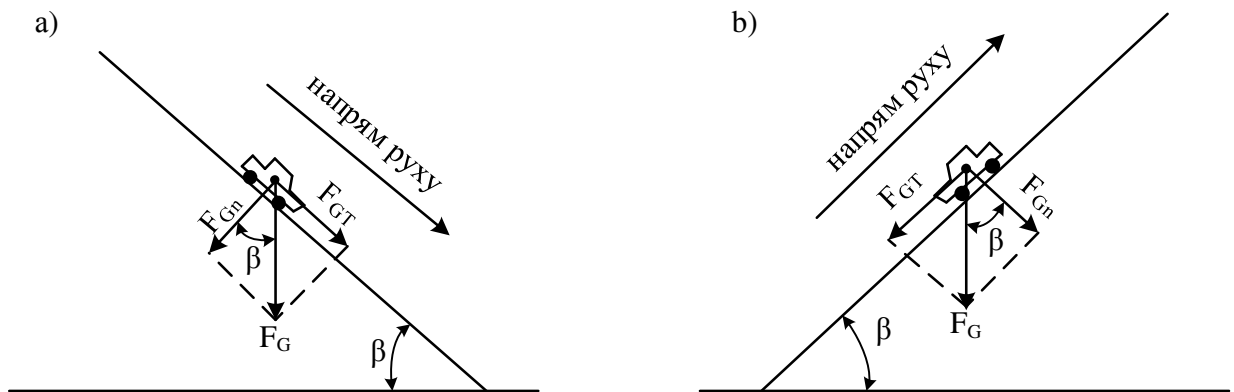


Рис. 1. Векторні діаграми сил, створюваних силою ваги F_G автомобіля під час руху на спуск (а) та на підйом (в)

Для задачі оптимізації руху автомобіля за допомогою електродвигуна постійного струму з послідовним збудженням критерій оптимізації матиме вигляд функціонала

$$E_I = \int_0^{T_I} U I dt, \tag{17}$$

який характеризує кількість електроенергії E_I , витраченої за час T_I їзди автомобіля з використанням електродвигуна постійного струму з послідовним збудженням, у якорі якого тече струм I , створюваний напругою U на його зажимах. Із схеми, наведеної на рис. 2, на якій U_B – напруга акумуляторної батареї B , що має внутрішній опір r_B , видно, що критерій (17) легко привести до вигляду

$$E_I = \int_0^{T_I} U I dt = \int_0^{T_I} (U_B - \Delta U) I dt = \int_0^{T_I} U_B \left(1 - \frac{r_B I}{U_B}\right) I dt. \tag{18}$$

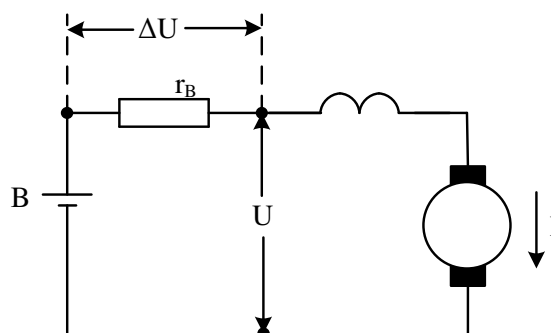


Рис. 2. Схема підключення електродвигуна постійного струму з послідовним збудженням до акумуляторної батареї B , що має внутрішній опір r_B

А для задачі оптимізації руху автомобіля за допомогою паралельно працюючих на один вал двигуна внутрішнього згоряння та електродвигуна постійного струму з послідовним збудженням критерій оптимізації матиме вигляд функціонала

$$E_{QI} = \int_0^{T_{QI}} (UI + k_p Q) dt = \gamma \int_0^{T_{QI}} U_B \left(1 - \frac{r_B}{U_B} I\right) I dt + \int_0^{T_{QI}} k_p Q dt, \quad (19)$$

у якому T_{QI} – час їзди автомобіля з одночасним використанням обох двигунів, а γ – це коефіцієнт приведення електричної енергії до еквівалентної кількості механічної.

Як правило, коли ми їдемо на автомобілі, то нас цікавить не лише кількість палива чи електроенергії, які ми використаємо, рухаючись протягом часу T_Q , T_I чи T_{QI} , але нас цікавить також, яку відстань L_Q , L_I чи L_{QI} ми проїдемо за цей час. Очевидно, що, знаючи швидкість руху автомобіля V , ми можемо ці відстані визначити за допомогою функціоналів:

$$L_Q = \int_0^{T_Q} V dt, \quad (20)$$

$$L_I = \int_0^{T_I} V dt, \quad (21)$$

$$L_{QI} = \int_0^{T_{QI}} V dt. \quad (22)$$

А врахування функціоналів (20) – (22) переводить поставлену нами задачу оптимізації в клас ізопериметричних [3, 4], оскільки нам доведеться шукати такий закон зміни швидкості автомобіля, який мінімізує один із функціоналів – (16), (18) чи (19) – за умови, що динаміку автомобіля описують відповідним рівнянням із множини (7) – (9) чи (10) – (15), а відстань, пройдену автомобілем, задають відповідним функціоналом із множини (20) – (22).

Для того щоб отримані результати могли бути представленими в найбільш узагальненому вигляді, доцільно перейти до відносних величин, використавши в якості основних базових величин: для тягової сили F_T її значення F_H в номінальному режимі; для моменту M на валу його номінальне значення M_H ; для швидкості V руху автомобіля її номінальне значення V_H ; для струму I якоря тягового електродвигуна його номінальне значення I_H ; для магнітного потоку $\Phi(I)$ тягового електродвигуна його значення за номінального струму $\Phi_H = \Phi_H(I_H)$; для напруги U , яку прикладають до зажимів тягового електродвигуна, напругу U_B акумуляторної батареї за її повного заряду; для витрат палива Q їх значення в номінальному режимі Q_H , тобто в режимі, коли двигун внутрішнього згоряння створює потужність P , що дорівнює її значенню P_H в номінальному режимі роботи. А в якості похідних базових величин використаємо: для часу t – електромеханічну сталу T_M , яка зв'язана з основними базовими величинами співвідношенням

$$T_M = \frac{mV_H}{F_H}, \quad (23)$$

для відстані L – величину L_H , зв'язану з основними базовими величинами співвідношенням

$$L_H = V_H T_M, \quad (24)$$

для енергії E постійного струму акумуляторної батареї – величину E_H^I , зв'язану з основними базовими величинами співвідношенням

$$E_H^I = U_B I_H T_M, \quad (25)$$

для механічної енергії E , яку виділяє двигун внутрішнього згорання, – величину E_H^Q , зв'язану з основними базовими величинами співвідношенням

$$E_H^Q = k_P Q_H T_M. \quad (26)$$

З урахуванням основних базових та похідних базових величин у якості еквівалента рівнянню (7) у відносних величинах отримаємо рівняння

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{v} - f_0 - f_1 v - f_2 v^2, \quad (27)$$

де:

$$v = \frac{V}{V_H}, \quad q = \frac{Q}{Q_H}, \quad \tau = \frac{t}{T_M}; \quad (28)$$

$$\frac{2\pi k_P Q_H T_M}{m V_H^2} = 1,; \quad (29)$$

$$f_0 = \frac{k_0 F_G T_M}{m V_H}, \quad f_1 = \frac{k_1 T_M}{m}, \quad f_2 = \frac{k_2 V_H T_M}{m}; \quad (30)$$

у якості еквівалента рівнянню (8) у відносних величинах отримаємо рівняння

$$\frac{dv}{d\tau} = i\phi(i) - f_0 - f_1 v - f_2 v^2, \quad (31)$$

де:

$$i = \frac{I}{I_H}, \quad \phi(i) = \frac{\Phi(I)}{\Phi_H(I_H)}; \quad (32)$$

$$\frac{k_D I_H \Phi_H(I_H) T_M}{R m V_H} = 1, \quad (33)$$

а відносні змінні v , τ та коефіцієнти f_0 , f_1 , f_2 визначають співвідношеннями відповідно (28) і (30);

у якості еквівалента рівнянню (9) у відносних величинах отримаємо рівняння

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{v} + i\phi(i) - f_0 - f_1 v - f_2 v^2; \quad (34)$$

у якості еквівалентів рівнянням (10), (11), (12) у відносних величинах отримаємо відповідно рівняння

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{v} + f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2, \quad (35)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = i\phi(i) + f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2, \quad (36)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{v} + i\phi(i) + f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2, \quad (37)$$

де додатково до уже визначених змінних та коефіцієнтів маємо ще один коефіцієнт

$$f_0^* = \frac{F_G T_M}{m V_H}; \quad (38)$$

у якості еквівалентів рівнянням (13), (14), (15) у відносних величинах отримаємо відповідно рівняння

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{v} - f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2, \quad (39)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = i\phi(i) - f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2, \quad (40)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{q}{v} + i\phi(i) - f_0^* \sin \beta - f_0 \cos \beta - f_1 v - f_2 v^2; \quad (41)$$

у якості еквівалентів критеріїв оптимізації (16), (18), (19) у відносних величинах отримаємо відповідно критеріальні функціонали

$$e_q = \int_0^{\tau_q} q d\tau, \quad (42)$$

$$e_i = \int_0^{\tau_i} (1 - \alpha i) i d\tau, \quad (43)$$

$$e_{qi} = \int_0^{\tau_{qi}} q d\tau + \gamma \int_0^{\tau_{qi}} (1 - \alpha i) i d\tau, \quad (44)$$

де:

$$e_q = \frac{E_Q}{E_H} = \frac{E_Q}{k_q Q_H T_M}, \quad e_i = \frac{E_I}{E_H} = \frac{E_I}{U_B I_H T_M}, \quad e_{qi} = \frac{E_{QI}}{E_H} = \frac{E_{QI}}{k_q Q_H T_M}; \quad (45)$$

$$\tau_q = \frac{T_Q}{T_M}, \quad \tau_i = \frac{T_I}{T_M}, \quad \tau_{qi} = \frac{T_{QI}}{T_M}; \quad (46)$$

$$\alpha = \frac{r_B I_H}{U_B}, \quad \gamma = \frac{U_B I_H}{k_p Q_H}; \quad (47)$$

у якості еквівалентів обмежень (20), (21), (22) у відносних величинах отримаємо відповідно функціонали

$$l_q = \int_0^{\tau_q} v d\tau, \quad (48)$$

$$l_i = \int_0^{\tau_i} v d\tau, \quad (49)$$

$$l_{qi} = \int_0^{\tau_{qi}} v d\tau, \quad (50)$$

де:

$$l_q = \frac{L_Q}{V_H T_M}, \quad l_i = \frac{L_I}{V_H T_M}, \quad l_{qi} = \frac{L_{QI}}{V_H T_M}. \quad (51)$$

Тепер ми маємо всі співвідношення, необхідні для розв'язання задачі оптимізації руху автомобіля як у випадку створення тягової сили лише двигуном внутрішнього згорання чи лише електродвигуном постійного струму з послідовним збудженням, так і у випадку її створення обома двигунами одночасно. Отже, можемо перейти до декомпозиції цієї задачі, для якої логічно є така схема.

1. У разі виходу з ладу електричного приводу чи за повного розряду акумуляторної батареї ту частину маршруту, що залишилась, доведеться долати лише за допомогою двигуна внутрішнього згорання, для якого необхідно синтезувати закони оптимального руху як горизонтальними ділянками дороги, так і на спусках та підйомах.

2. У разі виходу з ладу двигуна внутрішнього згорання чи закінчення запасу пального в баку ту частину маршруту, що залишилась, доведеться долати лише за допомогою електропривода, для якого необхідно синтезувати закони оптимального руху як горизонтальними ділянками дороги, так і на спусках та підйомах.

3. За умови обох справних двигунів, достатнього запасу пального й використання дорогих акумуляторів, вартість придбання яких і витрати на експлуатацію вводять у відповідну пропорцію, визначену терміном експлуатації, до вартості спожитої електроенергії, увесь маршрут доцільно долати за допомогою одночасно працюючих на спільний вал обох двигунів, що призводить до необхідності синтезу законів оптимального руху для цього випадку як горизонтальними ділянками, так і на спусках та підйомах.

4. За обох справних двигунів і використання дешевих акумуляторів, що робить більш економічним режим долаття маршруту за допомогою електропривода, доцільно долати горизонтальні ділянки та спуски лише за допомогою електропривода, а на підйомах до валу підключати, окрім електропривода, також і двигун внутрішнього згорання, що призводить до необхідності синтезу законів оптимального руху з урахуванням цієї особливості. Це режим економічного витрачання пального, якого слід дотримуватися в місцевості, де немає можливості здійснити підзарядку акумулятора, а тому завершувати поїздку необхідно буде завдяки лише використанню двигуна внутрішнього згорання. Цей режим є також доцільним за дефіциту часу, необхідного для підзарядки акумулятора, у випадках, коли на маршруті можливість здійснити підзарядку є.

Процедури синтезу законів оптимального руху гібридного автомобіля для всіх наведених вище випадків будуть розглянуті в наступних наших публікаціях.

Висновки

1. Сформульовано задачу синтезу законів оптимального руху гібридного автомобіля як горизонтальною ділянкою дороги, так і на спусках та підйомах; приведено до відносних величин рівняння динаміки автомобіля, критеріальні функціонали та ізопериметричні обмеження.

2. Здійснено декомпозицію поставленої задачі для охоплення всіх можливих випадків організації руху гібридного автомобіля за оптимальними законами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський А. М. Теоретична механіка / М. А. Павловський. – Київ : Техніка, 2002. – 512 с.
2. Мхитарян А. М. Аэродинамика / А. М. Мхитарян. – Москва : Машиностроение, 1970. – 289 с.
3. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления / Ю. П. Петров. – Москва-Наукові праці ВНТУ, 2015, № 3

Ленинград : Энергия, 1965. – 220 с.

4. Мокін Б. І. Теорія автоматичного керування, методологія та практика оптимізації / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 210 с.

Мокін Олександр Борисович – д. т. н., проф., завідувач кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів (ВЕТЕСК), e-mail: abmokin@gmail.com.

Мокін Борис Іванович – акад. НАПН України, д. т. н., проф., професор кафедри ВЕТЕСК, e-mail: borys.mokin@gmail.com.

Лобатюк Віталій Анатолійович – аспірант кафедри ВЕТЕСК.

Кубрак Ольга Петрівна – студентка факультету електроенергетики та електромеханіки. Вінницький національний технічний університет.