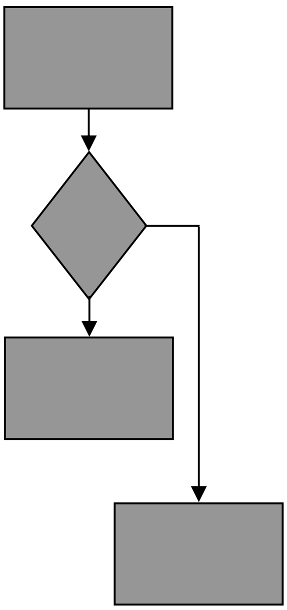
В.О.Милосердов
Л.Б.Терешкевич

АЛГОРИТМІЗАЦІЯ

ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ЕНЕРГЕТИКИ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

В.О.Милосердов, Л.Б.Терешкевич

АЛГОРИТМІЗАЦІЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ЕНЕРГЕТИКИ

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів енергетичних спеціальностей

Вінниця ВНТУ 2004

УДК 681.3:621.311
М 60

Рецензенти

В.І.Клочко, доктор педагогічних наук, професор
В.М.Кутін, доктор технічних наук, професор
Д.І.Оболонський, кандидат технічних наук

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

М 60 Милосердов В.О.,Терешкевич Л.Б.
Алгоритмізація оптимізаційних задач енергетики. Навчальний посібник. - Вінниця: ВНТУ, 2004. – 122 с.

Навчальний посібник знайомить з технологією постановки задач оптимізації та з найбільш поширеними і добре зарекомендувавшими себе на практиці алгоритмами їх розв’язування.

Для самостійного вивчення дисципліни наведені запитання і завдання для самоконтролю.

Призначається для студентів енергетичних спеціальностей вищих закладів освіти, що вивчають дисципліни “Алгоритмізація оптимізаційних задач енергетики”, “Математичне моделювання в енергетиці” та інші.

УДК 681.3: 621.311

Зміст

ВСТУП

Прикладні задачі, що пов'язані з проектуванням, монтажем та експлуатацією систем електроспоживання передбачають переробку інформації значних обсягів за складними алгоритмами і вирішуються за допомогою сучасних ПЕОМ. Розробка кожної такої задачі – високоінтелектуальна робота, оскільки потребує глибокої обізнаності з технологією, економікою, плануванням та організацією енергетичного виробництва з однієї сторони, а з іншої – добрих знань відповідних методів прикладної математики, алгоритмічних мов та програмування.

Серед таких задач особливе місце займають задачі оптимізації, що потребують певної попередньої підготовки (розробки математичної моделі) і лише після цього вирішуються тим або іншим методом. Прикладні задачі оптимізації важко формалізуються, а в процесі їх вирішення доводиться виконувати велику кількість елементарних операцій і здійснюється це за складними алгоритмами. Кількість арифметичних операцій, що виконуються за одну ітерацію при вирішенні практичних задач (процес вирішення оптимізаційних задач ітераційний) може становити мільйони. З цієї причини їх вирішення можливе лише при використанні обчислювальної техніки. Тому бурхливий розвиток методів оптимізації припадає саме на роки, коли з'явилась обчислювальна техніка. В підтвердження цього наведемо такий історичний факт. Перший числовий метод оптимізації – лінійне програмування – був розроблений в 1939 р. в роботі математика Л.В.Канторовича "Методы организации и планирования производства". Робота залишилась не поміченою, оскільки перспектив практичного використання вона не мала (перша ЕОМ „ENIAS" з'явилась в 1946 р). Справжнє визнання прийшло згодом, а в 1975 р. академіку Л.В.Канторовичу за цю роботу була присуджена Нобілевська премія в галузі математики.

Розв'язування задач оптимізації, в тому числі і в енергетичній галузі, - область, в якій кваліфіковане використання ЕОМ може дати суттєвий економічний ефект. Слід пам'ятати, що оптимізаційні задачі в експлуатації та проектуванні систем електропостачання становлять незначний відсоток. Основна причина – складність їх постановки та уніфікації (як правило, такі задачі є індивідуальною розробкою для певних умов їх використання, а в інших випадках вони потребують складної адаптації).

Навчальні програми підготовки сучасних спеціалістів складені таким чином, щоб забезпечити добру комп'ютерну підготовку майбутніх інженерів – електриків. Комп'ютерна підготовка не повинна обмежуватись лише умінням користуватись готовим програмним забезпеченням або написанням програм, оскільки все це лише засіб досягнення мети. Тому дуже важливою ланкою в цій системі практичних навичок, знань та умінь, що називається комп'ютерною підготовкою спеціаліста, є його здатність математично поставити прикладну задачу та розробити алгоритм її розв'язування.

Для практичного використання тих або інших математичних методів достатньо, як мінімум, лише володіти алгоритмом (послідовністю правил, за якими слід виконувати розрахунки в процесі переробки інформації), щоб отримати кінцеві результати. Наприклад, ми користуємось теоремою Піфагора, не знаючи її доведення, або розв'язуємо квадратне рівняння, використовуючи відомі формули для розрахунку x_1 та x_2, хоча, безперечно, існує математичне доведення, що корені квадратного рівняння відповідним чином пов'язані з його коефіцієнтами. У зв'язку з цим, мета, що ставиться в навчальному посібнику, така:

- оволодіння технологією розробки математичних моделей;
- вивчення ряду алгоритмів, що широко використовуються для вирішення енергетичних оптимізаційних задач.

Даний навчальний посібник написаний у відповідності до програми дисципліни "Алгоритмізація оптимізаційних задач енергетики", до якої включені методи оптимізації, що отримали найбільше розповсюдження, та які найкращим чином себе зарекомендували. В окремих розділах роботи вивчаються такі практичні питання:

- технологія побудови математичних моделей;
- симплекс-алгоритм вирішення лінійних задач математичного програмування;
- алгоритм Гоморі для вирішення лінійних задач дискретного програмування;
- метод безпосередньої лінійної апроксимації для розв'язування задачі квадратичного програмування;
- методи штрафних функцій для вирішення задач нелінійного програмування;
- метод динамічного програмування та його використання для вирішення багатоетапних задач.

Розділи 1, 2, 5 та 6 навчального посібника написані доц. Терешкевичем Л.Б., розділи 3 та 4 доц. Милосердовим В.О. Загальна редакція тексту виконана доц. Терешкевичем Л.Б.

Розділ 1 МЕТОДОЛОГІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ПОСТАНОВКИ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

1.1 Загальна схема вирішення прикладних оптимізаційних задач

Перш ніж вирішити задачу оптимізації, необхідно виконати її математичну постановку. Від постановки задачі залежать якість та достовірність результатів, а також швидкість їх отримання. Розв'язування практичної задачі за ідеалізованою схемою виконується таким чином, рис.1.1:

- спеціаліст з деякої прикладної галузі (інженер, економіст, соціолог) – має створити модель об'єкта;
- спеціаліст з прикладної математики вибирає один або декілька із існуючих методів розв'язування задачі (якщо необхідно – створює новий метод);
- програміст пише програму для ЕОМ на одній із алгоритмічних мов, налагоджує її, проводить за допомогою ЕОМ необхідні розрахунки та отримує розв'язок задачі, що вирішується.

Отримані результати лише в ідеальному випадку відразу задовольняють постановщика задачі. Але в житті часто буває, що ідеалізовані та на перший погляд бездоганні схеми в реальних умовах не працюють. То чому ж ця на перший погляд ідеальна схема розв'язування задачі (частина схеми, рис. 1.1, що зображена основними лініями) практично не дієздатна? Справа в тому, що всі етапи схеми взаємопов'язані. На етапі постановки задачі можливі помилки, пов'язані з недостатніми знаннями про об'єкт, що моделюється. Іноді виявити ці помилки можна лише аналізом отриманих результатів. З іншого боку математик або програміст іноді змушені (наприклад, з причини обмеження ресурсів ЕОМ) щось спрощувати, змінювати в моделі. Тому потрібні багаточисельні консультації та обговорення таких дій разом із спеціалістом. Тільки після багатьох коректувань (пунктирні лінії на рис. 1.1) можна отримати такі результати, яким можна довіряти.

Звичайно, в такій ситуації ідеальною була б універсальна кваліфікація людей, що вирішують задачу. Наприклад, спеціаліст знає математичні методи і може самостійно розробити алгоритм вирішення задачі або, ще краще, володіє ще й навичками програмування. Але в будь-якій з можливих комбінацій участь спеціаліста з прикладної галузі в розробці задачі є обов'язковою тому, що для цього потрібно добре знати відповідну галузь. Тобто, якщо виключити спеціаліста з цього творчого колективу, то математик чи програміст повинні мати, або спеціально набути, професійні знання, наприклад, інженера-електрика, що нереально.

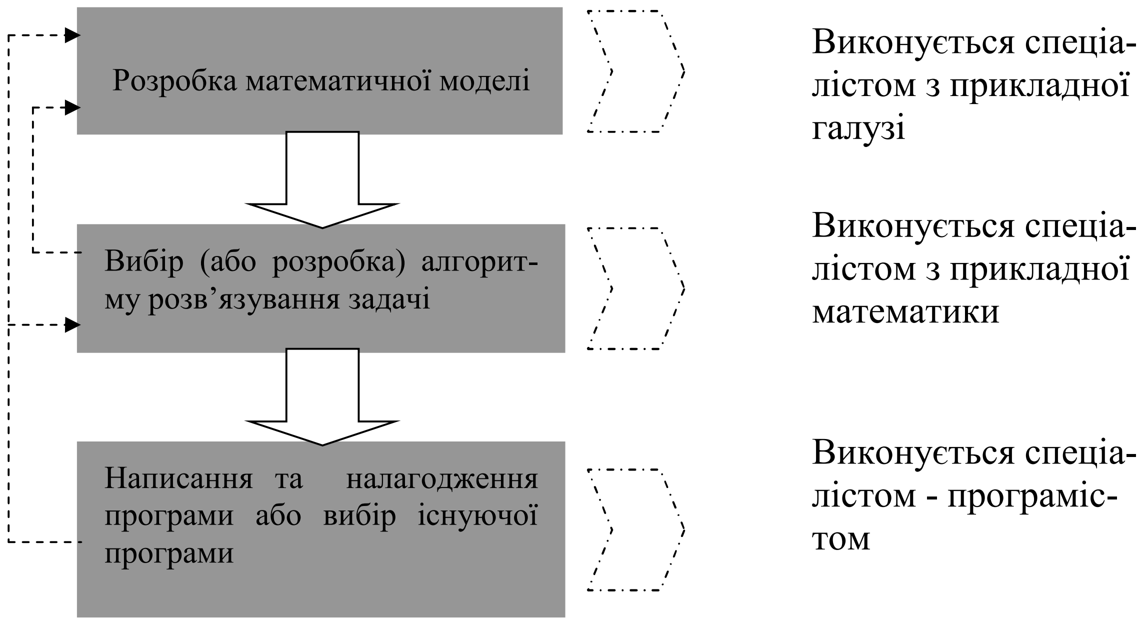


Рисунок 1.1 – Схема розв’язування задачі оптимізації

Але з іншого боку для плідної роботи спеціаліст, який приймає участь в розробці задачі автоматизації, повинен мати добрі знання з прикладної математики, обчислювальної техніки та програмування, оскільки вони потрібні при спілкуванні в творчому колективі.

1.2 Дослідження операцій – математичний апарат визначення оптимальних рішень

Потреби практики в знаходженні найкращих (оптимальних) рішень визвало до життя спеціальні математичні методи, які об’єднуються спільною назвою “дослідження операцій”. Під цим терміном розуміється *використання кількісних математичних методів для обгрунтування рішень в усіх галузях цілеспрямованої діяльності людини.*

Рішення - це будь-який вибір із ряду можливих. Рішення можуть бути вдалими та невдалими, розумними і не розумними. *Оптимальним називається рішення, яке за тими або іншими ознаками є кращим в порівнянні з іншими.*

Операцією називається будь-який захід (система дій), що об’єднаний єдиним замислом та направлений на досягнення певної мети.

Мета дослідження операцій – попереднє кількісне обгрунтування оптимального рішення. Дослідження операцій об’єднує групу математичних теорій, оскільки єдиного математичного методу, що дозволяє вирішити будь-яку оптимізаційну задачу, не існує. Це лінійне та нелінійне програмування, динамічне програмування, детерміноване істохастичне програмування та інші.

Методологія дослідження операцій передбачає розробку математичної моделі. При побудові математичної моделі реальне явище (операція) спрощується, схематизується та описується за допомогою того або іншого математичного апарата. Чим вдалішою буде математична модель, тим краще вона буде віддзеркалювати характерні риси явища, тим ефективніші рішення будуть отримані.

Загальних універсальних способів побудови математичних моделей не існує, але на характерну послідовність основних етапів цього процессу можна вказати.

1.3 Технологія розробки оптимізаційної математичної моделі

Розглянемо одну із оптимізаційних задач і розробимо математичну модель, що дозволяє визначити оптимальний розв'язок. Зробивши узагальнення з виконаної роботи, сформулюємо основні етапи технології розробки математичної моделі і зобразимо це у вигляді алгоритму.

Нехай задача полягає в раціональній доставці палива, наприклад, вугілля від ряду паливних баз (1, 2,...,I) до деякої кількості споживачів палива, наприклад, електростанцій або районних котелень (1, 2,…,J). Відомі добові ресурси вугілля на базах палива a_i, добові потреби палива споживачів b_j та відстань l_{ij} між будь-якими паливними базами і споживачами. Для спрощення припустимо, що добові ресурси всіх баз палива дорівнюють сумарній витраті палива всіма споживачами, тобто все паливо має бути перевезене.

Наведений опис задачі називається словесним формулюванням задачі. Його можна зробити після усвідомлення самої задачі і він відображає вихідну інформацію, яка необхідна для вирішення задачі, та додаткові умови, в рамках яких знаходиться розв'язок.

Задача, що розглядається, відноситься до класичного типу транспортних задач. Очевидно, що процес перевезення може бути виконаним за великою кількістю варіантів; вибір оптимального варіанта складає мету її розв'язування.

Як розв'язування, так і математичний опис будь-якої оптимізаційної задачі можливі лише при наявності критерію ефективності. *Критерій ефективності - це кількісний показник, який дозволяє порівнювати можливі розв'язки і на підставі цього здійснювати відбракування гірших варіантів.* Звернемо увагу на ту обставину, що це має бути кількісний показник, наприклад, грошові витрати, втрати потужності, час, об'єм і т.д., а такий показник, як, наприклад, "якість ремонту" не кількісний, що не дозволяє здійснити об'єктивного вибору кращого варіанта виконання ремонтних робіт. Для будь-якої оптимізаційної задачі можна запропонувати ряд критеріїв ефективності, але завжди можна розставити пріоритети і тим самим виділити найбільш важливий критерій і подальше розв'язування здійснити саме за цим критерієм.

Якщо повернутися до сформульованої задачі, то можна запропонувати ряд критеріїв для її вирішення, але зупинимось на тонокілометровому критерії, який є сумою добутків кількості вугілля на транспортне "плече доставки" (критерій, пропорціональний кількості палива, що потребує траспорту для перевезення вугілля).

Як правило, оптимізаційні задачі, що мають місце на практиці, вирішуються в умовах обмежень, які визначають область допустимих значень отримуваних розв'язків. Для задачі, що розглядається, серед обмежень будуть такі:

- умова необхідності вивезення всього вугілля із всіх паливних баз;
- вимога доставки на кожну із електростанцій такої кількості вугілля, яка потрібна для її роботи.

Математична модель оптимізаційної задачі є сукупністю аналітичних виразів, які встановлюють функціональні залежності критерію ефективності та обмежень із отримуваними розв'язками (із змінними задачі). В зв'язку з цим, необхідно визначити зміст змінних. Для даної задачі змінні можуть мати значення кількості вугілля, що поставляється від i-ої паливної бази до j-го споживача – x_{ij}.

Усвідомивши та вивчивши суть задачі, визначивши необхідну для розв'язування задачі інформацію, огрунтувавши зміст критерію ефективності та обмежень, в рамках яких повинна вирішуватись задача, та ввівши змінні, можна записати математичну модель в символьному вигляді:

$$\begin{cases} \Pi(x_{ij}) \to \min \\ M_i(x_{ij}) = a_i, \ i = 1,2,...,I \\ P_j(x_{ij}) = b_j, \ j = 1,2,...,J \end{cases}, \qquad (1.1)$$

де П - загальна кількість тонокілометрів, що здійснюється транспортом для перевезення необхідної для роботи електростанцій кількості вугілля; M_i – обсяг вугілля, що вивезене з i-ої паливної бази; P_j – обсяг вугілля, що доставлене на j-у електростанцію.

Такий компактний запис задачі корисний на етапі розробки математичної моделі, оскільки є змога переконатися, що математична модель відтворює найбільш суттєві риси явища, прийняті до уваги всі вагомі фактори, від яких залежить кінцевий результат, а також те, що в моделі відсутні незначні, другорядні риси задачі, яка моделюється. Маючи математичну модель в символьному вигляді, можна перейти до встановлення необхідних функціональних залежностей, що входять до моделі.

Невідомі нашої задачі створюють вектор:

$$\mathbf{X}^{\mathbf{T}} = (x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_k) \,\Big|\, k = I\,J,$$

кожний компонент якого, як відмічалось вище, буде мати значення кількості вугілля, яке поставляється від i-ої паливної бази до j-го споживача, що дає можливість для аналітичного опису критерію ефективності. Виражений математично та пов'язаний з вектором змінних, цей показник f(**X**) буде називатись *критеріальною (цільовою) функцією* задачі. Її природно направити до мінімуму

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} l_{ij}x_{ij} \to \min. \tag{1.2}$$

Перше обмеження, що відображає вимогу необхідності вивезення всього вугілля з i-тої паливної бази, можна подати так:

$$\sum_{j=1}^{J} x_{ij} = a_i. \tag{1.3}$$

Ясно, що кількість таких рівнянь може бути записано рівно стільки, скільки є паливних баз. Друге обмеження повинно відображати факт доставки j-му споживачу потрібного палива b_j від будь-яких паливних баз:

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ij} = b_j. \tag{1.4}$$

Таких рівнянь можна записати за кількістю споживачів – J.

Крім наведених "технологічних" обмежень корисно задати обмеження на невід'ємність будь-якої компоненти вектора **X**. Фізично це означало б недопустимість перевезення вугілля від електростанції до якої-небудь паливної бази і це цілком погоджується зі здоровим глуздом.

В результаті математичної постановки задачі ми приходимо до такої математичної моделі:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} l_{ij}x_{ij} \to \min \\ \sum_{j=1}^{J} x_{ij} = a_i, \ \ i = 1,2,\ldots,I \\ \sum_{i=1}^{I} x_{ij} = b_j, \ \ j = 1,2,\ldots,J \\ x_{ij} \ge 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

При побудові математичної моделі може бути (в залежності від суті задачі та точності вихідних даних) використаним математичний апарат різної складності. В самих простих випадках (як даний) явище описується простими алгебраїчними рівняннями. В більш складних, коли необхідно розглядати явища в динаміці, використовується апарат диференціальних рівнянь. В найбільш складних, коли розвиток явища, що моделюється, та його результат залежать від великої кількості випадкових факторів, які переплітаються між собою, аналітичні методи взагалі не можна використати і використовуються методи статистичного моделювання.

На розглянутому прикладі можна зробити узагальнення щодо послідовності розробки математичної моделі. Зобразимо це у вигляді алгоритму (алгоритм 1.1), рис.1.2.

Отриману математичну модель називають пробною, оскільки вона, як правило, потребує додаткових зусиль з “доводки”. Для цього вирішується тестовий приклад, з якого стає зрозумілим сумісність обмежень, наявність оптимуму цільової функції та погодженість знайденого розв’язку із здоровим глуздом. Іноді для отримання робочої моделі доводиться здійснювати ряд уточнень пробної.

Створення математичної моделі – найбільш відповідальна частина дослідження, що потребує глибоких знань не стільки математики, скільки суті явищ, що моделюються.

При створенні будь-якої математичної моделі доводиться робити певні допущення та спрощення. Абсолютно точних математичних моделей не може бути. Тому математичні моделі необхідно перевірити на їх адекватність. Готових рецептів для такої перевірки немає. Іноді для цього достатньо провести за даною моделлю розрахунки для одного або ряду прикладів і отримані кінцеві результати проаналізувати. В інших випадках одну і ту ж задачу вирішують за декількома моделями, які створені на основі різних допущень, користуючись різним математичним апаратом. Якщо отримані результати суттєво відрізняються, то необхідно переглянути концепції, що покладені в основу різних моделей, виявити, яка з них найбільш адекватна дійсності. В деяких випадках доводиться поставити фізичний експеримент.

Рисунок 1.2 - Алгоритм 1.1 Алгоритм розробки математичної моделі задачі

Розробка математичних моделей високоінтелектуальна, творча робота. От що з цього приводу пише відомий математик та популяризатор математики О.Е.Вентцель в одній із своїх книжок: “Мистецтво будувати математичні моделі є саме мистецтво, і досвід в ньому набувається поступово".

1.4 Формулювання задачі дослідження операцій

Розглянемо математичну постановку, до якої зводиться велика частина задач дослідження операцій. Всі вони носять спільну назву *"задачі математичного програмування''*.

Нехай необхідно знайти числові значення для змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які створюють вектор змінних $\mathbf{X}^{т} = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$, де т – індекс транспонування, що забезпечують екстремальне (мінімальне або максимальне) значення для цільової функції $f(\mathbf{X})$. При цьому необхідно забезпечити виконання ряду технічних обмежень, що можуть бути записаними у вигляді рівностей або нерівностей:

$$\begin{gathered} \mathbf{g}_k(\mathbf{X}) = 0,\ k = 1,2,\ldots,m; \\ \mathbf{h}_t(\mathbf{X}) \le 0,\ t = 1,2,\ldots,l, \end{gathered} \tag{1.6}$$

де $\mathbf{g}_k(\mathbf{X})$ та $\mathbf{h}_t(\mathbf{X})$ – деякі вектор-функції.

Методи математичного програмування забезпечують знаходження розв'язків лише в області невід'ємних значень для всіх змінних, $x_i \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Математична символіка допускає такі дві можливих форми запису задачі математичного програмування.

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) \to \min \\ \mathbf{g}_k(\mathbf{X}) = 0,\ k = 1,2,\ldots,m \\ \mathbf{h}_t(\mathbf{X}) \le 0,\ t = 1,2,\ldots,l \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,n \end{cases}, \tag{1.7}$$

або

$$\begin{gathered} \min\{f(\mathbf{X}) \mid \mathbf{g}_k(\mathbf{X}) = 0,\ k = 1, 2,\ldots, m;\ \mathbf{h}_t(\mathbf{X}) \le 0, \\ t = 1, 2,\ldots,l;\ \ x_i \ge 0\ i = 1,2,\ldots,n\} \end{gathered} \tag{1.8}$$

Даний запис не втрачає своєї загальності, оскільки:

$$\min\{f(\mathbf{X})\} = \max\{-f(\mathbf{X})\}. \tag{1.9}$$

В залежності від того, якого виду функції $f(\mathbf{X})$, $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ та $\mathbf{h}(\mathbf{X})$ виділяють задачі лінійного програмування, коли всі залежності лінійні. Якщо всі або деякі з цих функцій більш високого порядку (квадратичні, або інших степенів), то це задача нелінійного програмування. Частковий випадок нелінійного програмування – квадратичне програмування, коли цільова функція - квадратична залежність від змінних, а всі обмеження -лінійні.

Звернемо увагу на ту обставину, що нами наведено задачу, коли здійснюється пошук числового значення для вектора **X**, який забезпечує екстремальне значення для одного критерію ефективності f(**X**). Життєві ситуації можуть бути такими, що виникає необхідність знаходити розв'язки за умови, коли задача вирішується при наявності декількох критеріїв ефективності. Така оптимізаційна задача називається багатокритеріальною або задачею векторної оптимізації.

1.5 Існуючі підходи до розв'язування багатокритеріальних задач

Багатокритеріальні задачі - це такі, для яких характерний векторний критерій ефективності та векторна цільова функція:

$$f(\boldsymbol{X}) = (f_1(\boldsymbol{X})\ \ f_2(\boldsymbol{X})\ \ \dots\ \ f_s(\boldsymbol{X})). \qquad (1.10)$$

В ідеальному випадку розв'язком такої задачі є координата **X**, якій відповідає мінімум всіх критеріїв. Насправді такий варіант є ідеалізованим і розв'язування багатокритеріальних задач полягає в досягенні компромісів між критеріями. Всі методи розв'язування таких задач полягають в конструюванні таких компромісів. Найбільш поширеним є метод пошуку оптимальних розв'язків за Парето. Визначення таких розв'язків наступне. *Розв'язок* $\boldsymbol{X}^* \in D$ *багатокритеріальної задачі оптимальний в розумінні Паретто, якщо не існує жодної точки* $\boldsymbol{X} \in D$ *такої, щоб*
$f_k(\boldsymbol{X}) \le f_k(\boldsymbol{X}^*),\ k = 1, 2, \dots, s.$
і хоча б для одного(наприклад, j-го) критерію ця нерівність була строгою:
$f_j(\boldsymbol{X}) \le f_j(\boldsymbol{X}^*).$

Тобто, якщо визначено оптимальний розв'язок в розумінні Парето, то неможливо покращити будь-який із критеріїв, не погіршивши значення інших.

Розглянемо найпростішу двокритеріальну ситуацію, рис. 1.3, де виділена область відображає ті значення критеріїв оптимізації f_1та f_2, які відповідають змінним вектора **X** допустимих значень, що вони можуть набувати. Для такої двокритеріальної задачі мінімізації точками Парето є їх множина по контуру виділеної області між точками А та В. Для підтвердження цього можна навести такі міркування. Візьмемо точку всередині області, точку 1. Тоді, наприклад, будь-яка точка, що знаходиться нижче, наприклад, точка 2 буде кращою за критерієм f_1 при тому ж значенні критерію f_2. Значить, точку 1 не можна визначити, як оптимальну в розумінні Парето. Якщо взяти точку на контурі між точками А та В, то, як би її не пересувати, якийсь із критеріїв при цьому буде збільшуватись.

Множина точок, що знаходяться на контурі між А та В, є оптимальною в розумінні Парето.

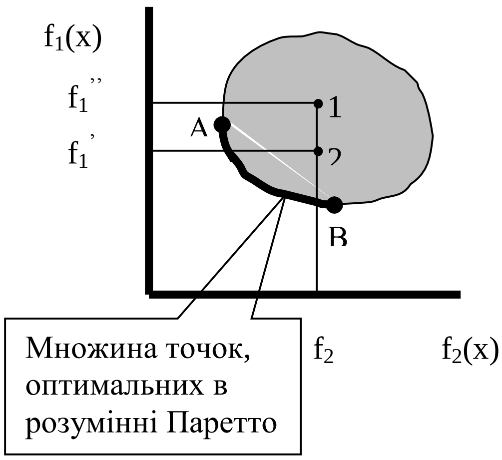


Рисунок 1.3 - Точки Парето у випадку двох критеріїв

Точок оптимальних в розумінні Парето навіть в найпростіших задачах може бути багато. Чим більше таких точок, тим складніше прийняти остаточне рішення, тому що з формальних позицій вони рівноцінні між собою. В таких випадках вибір єдиного рішення часто доручають людині – експерту, спеціалісту з даної галузі.

Розглянемо декілька інших практичних методів вирішення багатокритеріальних задач оптимізації.

Принцип жорсткого пріоритету полягає в тому, що всі критерії ранжуються в залежності від їх важливості, наприклад, критерію $f_1(\mathbf{X})$ надана перевага по відношенню до критерію $f_2(\mathbf{X})$, а критерію $f_2(\mathbf{X})$ – по відношенню до $f_3(\mathbf{X})$ і т.д. Знаходиться локальний оптимум для найбільш важливого критерію - $f_1(\mathbf{X})$. Знайдений розв'язок фіксується у вигляді обмеження і знаходиться локальний оптимум для критерію $f_2(\mathbf{X})$. Знайдений розв'язок фіксується і знаходяться координати оптимуму для наступного за важливістю критерію. З кожним разом можливості для знаходження оптимуму для наступного критерію звужуються. Даний підхід дає ефект лише в випадку, коли на кожному етапі шукається не одна локальна точка екстремуму, а деяка область розв'язків, близьких до оптимального.

Метод *субоптимізації* полягає в тому, що серед критеріїв визначається найбільш важливий. На всі інші критерії встановлюються порогові значення і їх включають до обмежень.

Вирішуючи багатокритеріальну задачу методом *середньозваженого критерію* всім $f_1(\mathbf{X})$, $f_2(\mathbf{X})$, $f_3(\mathbf{X})$ … $f_s(\mathbf{X})$ приписують вагові коефіцієнти – $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,..., \lambda_s$ та формують середньозважений критерій:

$$F(\mathbf{X}) = \lambda_1 f_1(\mathbf{X}) + \lambda_2 f_2(\mathbf{X}) + \lambda_3 f_3(\mathbf{X}) + \ldots + \lambda_s f_s(\mathbf{X}). \quad (1.11)$$

Для сформованого критерію знаходяться координати екстремуму.

Метод *експертного вибору* полягає в тому, що задачу оптимізації вирішують s разів за кожним із критеріїв: $f_1(\mathbf{X})$, $f_2(\mathbf{X})$, $f_3(\mathbf{X})$ … $f_s(\mathbf{X})$. Отримані результати порівнюються і експертами відбирається один із них для прийняття рішення. Складність в даному випадку полягає в тому, що потрібно багато часу на розрахунки, а також в наявності суб'єктивізму.

1.6 Класифікація математичних моделей

Класифікацію математичних моделей можна навести за рядом ознак, наприклад:

- За типом систем, що досліджуються (математичні моделі прості та складні).
- За описом в часі (моделі статичні та динамічні).
- За інформаційним забезпеченням (стохастичні моделі, де інформація має ймовірну природу, детерміновані, де інформація виключно достовірна, та змішані).
- За типом змінних, що входять в модель (моделі з неперервними змінними, з дискретними змінними та із змішаними змінними).
- За порядком співвідношень, що входять до математичної моделі (моделі лінійні, квадратичні, нелінійні).
- За способом пошуку оптимуму (моделі математичного програмування, імітаційні моделі).
- За кількістю критеріїв (моделі локальної та багатоцільової оптимізації).

Завдання для самостійної роботи

1. Поясніть смисл таких термінів та понять:

- оптимізаційна задача;
- критерій ефективності;
- обмеження;
- математична модель;
- цільова функція;
- багатокритеріальна задача;
- середньозважений критерій;
- жорсткий пріоритет;
- експертний вибір;
- точки Паретто.

2. Для задачі розділу 1.3 запропонуйте інші критерії ефективності її вирішення.

3. Як позначиться на отриманих розв'язках будь-яке із обмежень математичної моделі 1.5?

4. При яких допущеннях вирішується задача доставки палива на електростанції, розділ 1.3?

5. Дайте перелік інформації, що потрібна для розв’язування задачі розділу 1.3 за допомогою розробленої математичної моделі.

6. Складіть математичну модель для випадку, коли паливо, наприклад, з першого паливного складу немає можливості доставляти, наприклад, на другу електростанцію (немає шляху для перевезень).

7. Запропонуйте, як в математичній моделі врахувати той факт, що якість дорожного покриття на всіх транспортних зв’язках між паливними базами та електростанціями різна?

8. Запропонуйте як діяти, коли результати отримані шляхом аналізу математичної моделі не підтверджуються експериментально?

9. Наведіть приклад багатокритеріальної задачі.

Розділ 2 ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

2.1 Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

Серед задач математичного програмування самими простими і найбільш дослідженими є задачі лінійного програмування (ЛП). Для цих задач характерно те, що цільова функція f(**X**) лінійно залежить від елементів вектора **X**, а обмеження, що накладаються на розв'язки, мають вид лінійних рівностей або нерівностей відносно **X**. Саме до задач ЛП відноситься математична модель (1.5), що синтезована в розділі 1.3.

Розглянемо задачу ЛП:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 12x_1 + 15x_2 \to \max \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (2.1)$$

Нумерація співвідношень математичної моделі
(1)
(2)
(3)
(4)

Зауважимо, що роз'язки будь-якої задачі математичного програмування шукаються в області невід'ємних значень для змінних.

Оскільки змінних в наведеному прикладі дві, $\mathbf{X}^{т} = (x_1\ x_2)$, то задачу (її сутність та розв'язок) можна розглянути на площині x_1, x_2. Кожне обмеження-нерівність, що входить до математичної моделі, ділить площину x_1, x_2 на дві частини. Границею є пряма, що відображає рівняння, яке отримується шляхом заміни знака нерівності відповідного обмеження на рівність. Будь-яка точка однієї площини, в тому числі і точка, що належить згаданій лінії, задовольняє відповідне обмеження, а точка взята з іншої півплощини навпаки – не задовольняє.

Ця задача графічно зображена на рис.2.1, де всі лінії пронумеровані відповідно до нумерації цільової функції та обмежень математичної моделі (такі ж позначення прийняті і в інших прикладах розділу 2.1). Заштрихований чотирикутник містить в собі точки (область значень x_1 та x_2), що задовольняють всі обмеження. Координати множини точок, що належать заштрихованному чотирикутнику, називаються *областю допустимих розв'язків (ОДР)*. Паралельні прямі, що зображені, є лініями рівня цільової функції, а стрілки, які їх пересікають, направлені в сторону зростання значень цільової функції. Оптимальний розв'язок – точка А з координатами $x_1 = \frac{15}{7}$, $x_2 = \frac{8}{7}$, а оптимальне значення $f(\mathbf{X}) = \frac{300}{7}$. Задача має *один оптимальний розв'язок.*

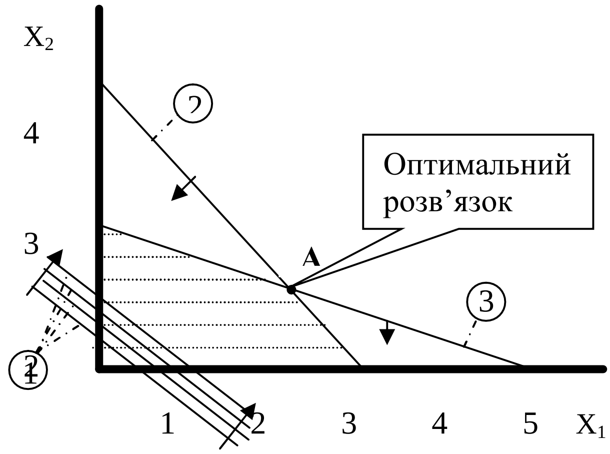


Рисунок 2.1 – Геометрична інтерпретація задачі з одним оптимальним розв'язком

Відмітимо важливу обставину – розв'язок задачі, що розглядалася, знаходиться в вершині ОДР, що має місце для будь-якої задачі ЛП.

Розглянемо іншу задачу ЛП:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 4x_1 + 10x_2 \to \max \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} . \tag{2.2}$$

Нумерація співвідношень математичної моделі
(5)
(6)
(7)
(8)

Якщо математичну модель порівняти з попередньою, то можна побачити, що інших значень набули лише коефіцієнти цільової функції. А це значить, що ОДР, яка формується виключно системою обмежень, залишається незмінною. Кут нахилу ліній рівня цільової функції стане іншим. Геометрична інтерпретація даної задачі наведена на рис 2.2. В даному випадку всі точки, що лежать на відрізку АВ, оптимальні (в тому числі і вершини ОДР), а оптимальне значення f(**X**) = 20. Задача, що розглядалась, має *альтернативні оптимальні розв'язки.*

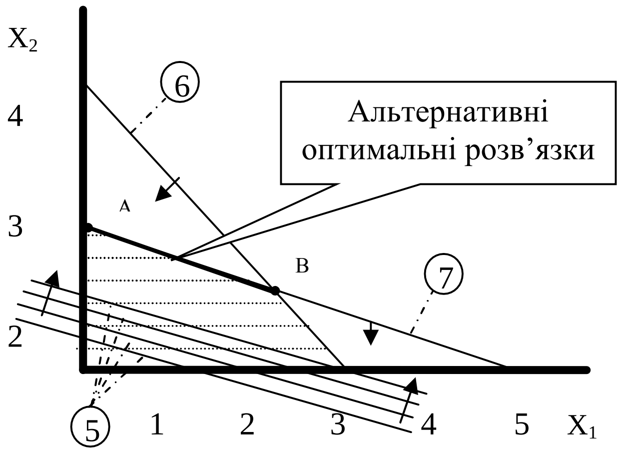


Рисунок 2.2 – Геометрична інтерпретація задачі, що має альтернативні оптимальні розв'язки

Розглянемо задачу, що має *необмежений оптимальний розв'язок:*

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -2x_1 + 6x_2 \rightarrow \max \\ -x_1 - x_2 \le -2 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} . \qquad (2.3)$$

Нумерація співвідношень математичної моделі
(9)
(10)
(11)
(12)

Геометрична інтерпретація задачі наведена на рис 2.3, з якої видно, що значення цільової функції може бути як завгодно великим: для будь-якого заданого значення цільової функції в просторі розв'язків завжди існує точка, в якій цільова функція набуде ще більшого значення.

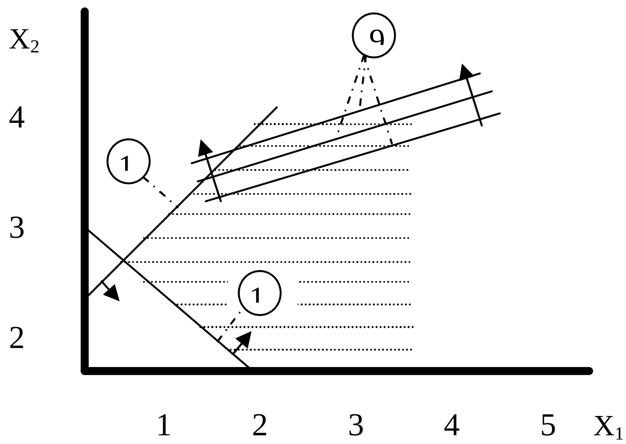


Рисунок 2.3 – Геометрична інтерпретація задачі, що має необмежений оптимальний розв'язок

Крім розглянутих варіантів можливим ще є варіант, коли задача *не має розв'язку:*

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 \le -1 \\ x_1 - x_2 \le -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (2.4)$$

Нумерація співвідношень математичної моделі
(13)
(14)
(15)
(16)

Геометрична інтерпретація задачі зображена на рис. 2.4, з якої видно, що множина точок, які є розв'язками задачі, пуста (ОДР не існує). Система обмежень математичної моделі не сумісна.

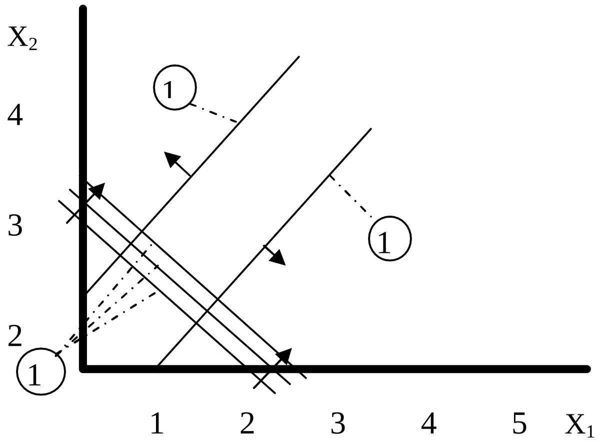


Рисунок 2.4 – Геометрична інтерпретація задачі, що немає розв'язку

Якщо кількість компонент у векторі **X** три, то побудову ОДР та знаходження розв'язку задачі шляхом геометричних побудов слід здійснювати в тривимірному просторі – x_1, x_2, та x_3, а якщо їх n, то до розгляду слід прийняти n-мірний простір, який є математичною абстракцією.

2.2 Основна задача лінійного програмування

Запис задачі ЛП у вигляді основної задачі ЛП (ОЗЛП) є одним із етапів в процесі пошуку оптимального розв'зку. ОЗЛП формулюється таким чином: *знайти невід'ємні значення для змінних x_1, x_2,..., x_n, які б задовольняли умови-рівності*

$$\boldsymbol{AX = B} \qquad (2.5)$$

і забезпечували б мінімум (максимум) лінійної функції цих змінних:

$$f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{CX} \rightarrow min, \qquad (2.6)$$

*де **A** – матриця коефіцієнтів при невідомих вимірністю* $m \times n$ *(m<n), **B** – стовпцева матриця вільних членів вимірністю* $m \times 1$*, **C** – матриця коефіцієнтів цільової функції вимірністю* $1 \times n$.

Перехід до ОЗЛП можна завжди зробити, вводячи вільні змінні до обмежень-нерівностей, які будучи, невід'ємними за величиною, перетворюють нерівність в рівність. Так систему k обмежень виду :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{li} x_i \le b_l, \ l = 1,2,...,k, \tag{2.7}$$

де a_{li} – коефіцієнт при змінній, b_l – вільний член, можна записати:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{li} x_i + x_{n+l} = b_l, \ l = 1,2,...,k, \tag{2.8}$$

де x_{n+l} - вільна змінна.

Система обмежень виду:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ti} x_i \le b_t, \ t = (k+1),(k+2),...,\varepsilon, \tag{2.9}$$

де ε – загальна кількість обмежень-нерівностей математичної моделі, запишеться:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ti} x_i - x_{n+t} = b_t, \ t = (k+1),(k+2),...,\varepsilon. \tag{2.10}$$

В результаті такого перетворення збільшується вимірність вектора змінних **X**. До нього включаються вільні змінні $x_{n+1}, x_{n+2},\ldots,x_{n+k}$, $x_{n+(k+1)},\ldots,x_{n+\varepsilon}$. Відповідно до цього також змінюється вимірність матриць **A** і **C**.

Приклад 2.1 Записати задачу ЛП:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min \\ 2x_1 + 4x_2 \le 5 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 \ge -2 \\ x_1 + x_3 = 5 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

у вигляді ОЗЛП.

Розв'язування: Введемо вільні змінні для обмежень-нерівностей з врахуванням їх знака:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 = -2 \\ x_1 + x_3 = 5 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,...,5 \ . \end{cases}$$

Для оптимізаційної задачі завжди має місце співвідношення $\varepsilon > m$, де ε – загальна кількість змінних ОЗЛП, m – кількість обмежень математичної моделі. Якщо система обмежень сумісна, то при такому співвідношенні ε та m задача має безмежну кількість розв'язків і вона по суті є оптимізаційною. Саме такі задачі розглядаються далі. Якщо $\varepsilon = m$, то задача може мати лише один розв'язок.

2.3 Основні ідеї симплекс-алгоритму розв'язування задачі ЛП

Симплекс-алгоритм - універсальний метод для будь-якої задачі ЛП. Він передбачає в результаті ітераційного процесу (кожна ітерація - це перехід до нового допустимого розв'язку) знаходження оптимального розв'язку.

Допустимим розв'язком ОЗЛП називається будь-яка сукупність невід'ємних значень $x_1, x_2, \ldots, x_\varepsilon$, яка задовольняє обмеження задачі.

Оптимальним називається той із допустимих розв'язків, який обертає в мінімум (максимум) функцію $f(\mathbf{X})$.

Мета розв'язування задачі ЛП полягає в знаходженні оптимального розв'язку, якщо такий існує.

Ідея симплекс-алгоритму полягає в тому, що здійснюється перебір допустимих розв'язків. Спочатку знаходиться один із таких розв'язків – координата вершини ОДР (адже оптимальний розв'язок слід шукати серед вершин ОДР). Такий розв'язок називається *опорним* або *опорним планом*, а далі шляхом послідовних цілеспрямованих проб визначаються координати екстремуму $f(\mathbf{X})$ або *оптимальний план (оптимальний розв'язок).* Таким чином, симплекс-алгоритм складається з двох частин: визначення опорного плану та визначення плану оптимального.

Спрощена блок-схема симплекс-алгоритму задачі ЛП, яка буде деталізуватись в наступних розділах, наведена на рис. 2.5.

Нехай ОЗЛП має ε змінних та m незалежних обмежень. Оскільки оптимальний розв'язок це вершина ОДР, де як мінімум, $\varepsilon - m$ змінних набувають значень, що дорівнюють нулю, то виберемо $\xi = \varepsilon - m$ змінних (вони називаються *вільними*) і через них виразимо інші m змінних математичної моделі (вони називаються *базисними або базисом*). Нехай, як вільні, вибрані перші ξ змінних $x_1, x_2, \ldots, x_\xi$, а інші m виражені через них. Система обмежень (2.5) запишеться:

$$\mathbf{X}_2 = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{X}_1 + \boldsymbol{\beta}, \tag{2.11}$$

де $\mathbf{X}_1$ та $\mathbf{X}_2$ блоки вектора $\mathbf{X}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{X}_2$ – включає базисні зміні (вимірність $m \times 1$); $\mathbf{X}_1$ – вільні (вимірність $\xi \times 1$): $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ – матриці коефіцієнтів при змінних та вільних членах, що отримані після відповідних перетворень. Вимірність матриці $\boldsymbol{\alpha}$ – (m × ξ), а матриці $\boldsymbol{\beta}$ – (m × 1).

Цільова функція (2.6) також зазнає перетворень:

$$f(\mathbf{X}_1) = \gamma_0 + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{X}_1 \to \min, \tag{2.12}$$

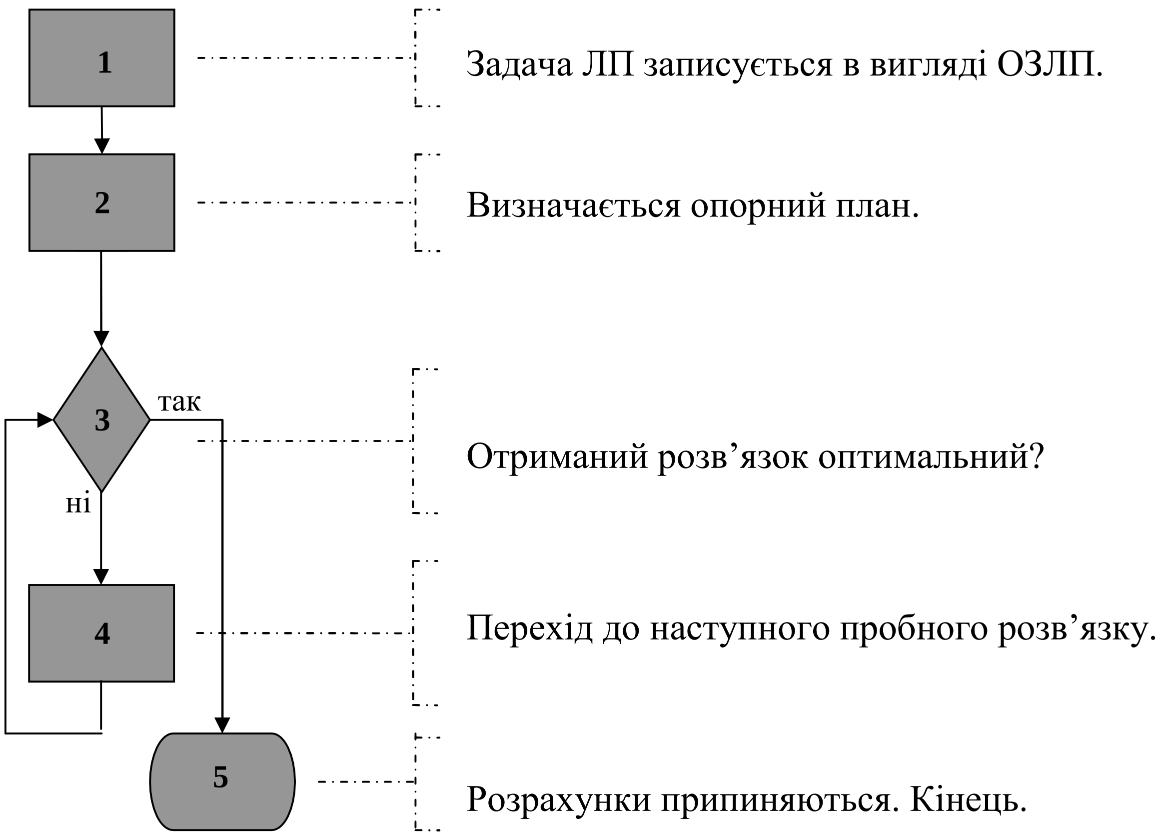


Рисунок 2.5 – Алгоритм 2.1. Алгоритм розв’язування задачі ЛП симплекс-методом

де - γ_0 – вільний член; $\boldsymbol{\gamma}$ – матриця коефіцієнтів при вільних змінних цільової функції в результаті відповідних перетворень вимірністю 1 × m.

Прирівнявши вільні змінні до нуля, отримаємо: $\mathbf{X_2} = \boldsymbol{\beta}$. Цей розв’язок може бути допустимим або не допустимим. Розв’язок буде допустимий, якщо всі компоненти матриці вільних членів $\boldsymbol{\beta}$ – невід’ємні. В такому випадку отриманий *пробний розв’язок* приймається як опорний. Якщо ні, то у відповідності з алгоритмом, що розглядається далі, здійснюється пошук такого розв’язку.

В опорному розв’язку величина γ_0 – це числове значення критерію ефективності, що йому відповідає. Якщо серед елементів матриці $\boldsymbol{\gamma}$ – є елементи від’ємні, то отриманий розв’язок можна поліпшити. Для цього треба збільшити значення вільної змінної з від’ємним коефіцієнтом (нагадаємо, що мова йде про вільні змінні, які в даному пробному розв’язку дорівнюють нулю). Найсуттєвіший ефект буде, якщо вибрати змінну з найбільшим (за модулем) від'ємним коефіцієнтом (забезпечується максимальний приріст f(**X**) у відповідному напрямку при збільшенні такої змінної на кожну одиницю в порівнянні з іншими варіантами).

Звичайно, при цьому відповідним чином змінюються числові значення всіх базисних змінних, оскільки вони пов'язані функціонально. Збільшувати значення вибраної вільної змінної можна до межі, коли якась із базисних не набуде нульового значення. (Якщо серед базисних змінних такої немає, то маємо варіант задачі ЛП з необмеженим оптимальним роз'язком.) Таку базисну змінну треба виключити з базису, а вибрану вільну – включити (виконати *заміну базисних змінних*).

Практично визначити базисну змінну для виключення з базису можна певним чином проаналізувавши співвідношення деяких елементів матриць $\boldsymbol{\alpha}$ та $\boldsymbol{\beta}$. На суті такого аналізу, розглядаючи ідеї симплекс-алгоритму, зупинятись не будемо, але як це зробити сформулюємо далі.

В наступних розділах деталізуємо алгоритм 2.1, який лише ілюструє загальні ідеї симплекс-алгоритму, що дасть змогу на практиці визначити опорний план задачі ЛП та маючи такий, - знайти оптимальний.

2.4 Алгоритм заміни базисних змінних

Заміну базисних змінних доводиться виконувати, як в процесі пошуку опорного плану так і шукаючи оптимальне рішення. Для того, щоб ввести вільну змінну x_i до базису, і в свою чергу виключити змінну x_j, необхідно "перевіришити" систему вихідних співвідношень математичної моделі ОЗЛП відносно нових базисних змінних (з рівняння, що відповідає змінній x_j визначити x_i та, зробивши відповідні підстановки і перетворення, виключити x_i з цільової функції та обмежень).

Наведемо алгоритм О.С.Вентцель, що реалізує цю операцію шляхом перетворення *стандартних таблиць (симплекс-таблиць),* які заповнюються за певними правилами, рис. 2.6.

Щоб скористатися цим алгоритмом необхідно для ОЗЛП знайти пробний розв'язок і записати математичну модель в стандартному вигляді. Цільова функція (2.12) в стандартному вигляді запишеться:

$$F(\mathbf{X}_1) = \gamma_0 - (-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{X}_1) \to \min, \tag{2.13}$$

а обмеження (2.11) таким чином:

$$\mathbf{X_2} = \boldsymbol{\beta} - (-\boldsymbol{\alpha}\mathbf{X_1}). \tag{2.14}$$

Продемонструємо процес заміни базисних змінних на числовому прикладі.

Приклад 2.2 Для задачі ЛП:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 5x_1 - 2x_3 \to \min \\ -5x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_3 + x_4 \le 5 \\ -3x_1 + 5x_4 \le 7 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,...,4 \end{cases}$$

знайти пробний розв’язок та записати в стандартному вигляді.

Розв’язування: Запишемо дану задачу ЛП в вигляді ОЗЛП:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 5x_1 - 2x_3 \to \min \\ -5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ -x_1 + x_3 + x_4 + x_6 = 5 \\ -3x_1 + 5x_4 + x_7 = 7 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,...,7 \end{cases}$$

В даній ОЗЛП кількість рівнянь m=3, кількість змінних ε=7. Тому число вільних змінних має бути ξ = 7 – 3 = 4, а всі інші, ε – ξ = 3 – базисні. Як базисні можна взяти будь-які, але в даному випадку зручніше (це пов’язано з меншою кількістю математичних перетворень) взяти вільні змінні x_5, x_6, x_7. Якщо виразити через них інші змінні математичної моделі, то отримаємо пробний розв’язок:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 0 + 5x_1 - 2x_3 \to \min \\ x_5 = 2 + 5x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_6 = 5 + x_1 - x_3 - x_4 \\ x_7 = 7 + 3x_1 - 5x_4 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,...,7 \end{cases}.$$

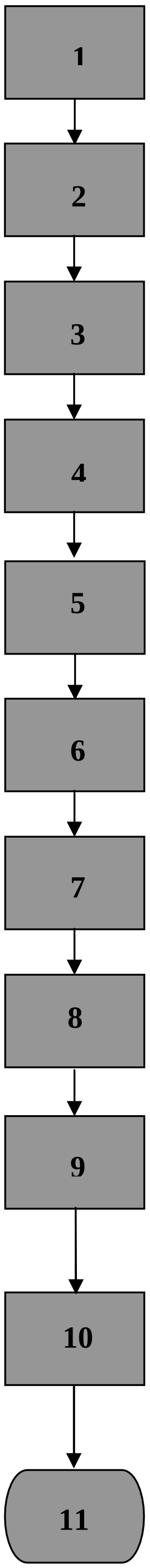
Запишемо математичну модель в стандартному вигляді:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 0 - (-5x_1 + 2x_3) \to \min \\ x_5 = 2 - (-5x_1 - x_2 + 2x_3) \\ x_6 = 5 - (-x_1 + x_3 + x_4) \\ x_7 = 7 - (-3x_1 + 5x_4) \\ x_i \ge 0, i = 1,2,...,7 \end{cases}.$$

В даному пробному розв’язку $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; $x_5 = 2$; $x_6 = 5$; $x_7 = 7$. Цільова функція дорівнює нулю. Оскільки базисні змінні невід’ємні, отриманий розв’язок допустимий і його можна прийняти за базисний.

Приклад 2.3 Для пробного розв’язку задачі ЛП, що знайдено в прикладі 2.2, виконати заміну базисних змінних x_3 на x_5.

Розв’язування: Заміну базисних змінних виконаємо за алгоритмом 2.2.



Малюється таблиця, в якій кількість рядків дорівнює (m + 2), а кількість стовпчиків – (ε – m + 2).

Перший рядок заповнюється, починаючи з другої клітинки, за схемою: вільний член , а далі позначення всіх вільних змінних.

Перший стовпчик заповнюється, починаючи з другої клітинки, за схемою: f(**X**), а далі позначення всіх базисних змінних.

В частину таблиці, що залишилась, записуються γ_0 та елементи матриць $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\beta}$ та $\boldsymbol{\alpha}$.

Виділяються вирішувальний стовпчик, рядок та елемент.

Розраховується величина обернена вирішувальному елементу - μ.

Елементи вирішувального рядка множаться на величину μ і результати записуються в його нижній частині.

Елементи вирішувального стовпчика множаться на величину (-μ) і результати записуються в його нижній частині.

Виділяються вихідні елементи вирішувального рядка та розраховані вирішувального стовпчика.

Всі інші елементи таблиці розраховуються перемножуючи виділені елементи у відповідних стовпчику та рядку. Результат додається до вихідного значення елемента, та записується в нижню частину клітинки.

Розрахунки припиняються. Кінець

Рисунок 2.6 – Алгоритм 2.2. Алгоритм заміни базисних змінних

Таблиця 2.1 – Стандартна таблиця заміни базисних змінних

		Вільний член	x_1	x_2	$\leftrightarrow x_5$ x_3	x_4
	f(**X**)	0 -2	-5 0	0 1	2 -1	0 0
$\leftrightarrow x_3$	x_5	2 1	-5 -2,5	-1 -0,5	2 0,5	0 0
	x_6	5 4	-1 2,5	0 0,5	1 -0,5	1 1
	x_7	7 7	-3 -3	0 0	0 0	5 5

Примітка. Вирішувальний стовпчик та вирішувальний рядок, виділення яких передбачені кроком 5 алгоритму 2.2, в стандартній таблиці позначені подвійною лінією.

2.5 Алгоритм пошуку оптимального розв'язку задачі ЛП

Симплекс-алгоритм передбачає перебір допустимих варіантів (пробних розв'язків), наближаючи кожного разу нас до оптимального. Такий перехід здійснюється шляхом заміни базисних змінних. Але поза увагою залишилися, наприклад , такі запитання:

- як визначити змінну для включення до базису?
- те ж, для виключення з базису?
- як слід діяти у випадку, коли змінної для виключення з базису немає
- яка ознака того, що оптимальний розв'язок отримано?

Тому наведемо деталізацію відповідної частини алгоритму 2.1.

Вибір вільної змінної для включення в базис в черговому пробному розв'язку здійснюється у відповідності до симплекс-критерію 1, а змінної для виключення з числа базисних за симплекс-критерієм 2. Сформулюємо симплекс-критерій 1 для випадку f(**X**) → min.

Симплекс-критерій 1. Для включення в черговий пробний розв'язок задачі ЛП нової базисної змінної потрібно переглянути всі коефіцієнти при вільних змінних цільової функції. Для подальшого розгляду відібрати додатні коефіцієнти. Серед множини відібраних визначити найбільший. Відповідну змінну (змінну, при якій знаходиться відібраний коефіцієнт) слід включити до базису.

Симплекс-критерій 2. Проглянути відношення вільного члена до коефіцієнта при новій базисній змінній (лише в обмеженнях математичної моделі). З цієї множини відкинути від'ємні відношення , а із множини, що залишилася, відібрати найменше за величиною. Базисна змінна, яка відповідає цьому співвідношенню, виключається з базису.

На деяких ітераціях обчислювальні процедури, що визначені симплекс-критеріями 1 та 2 можуть виявитись неоднозначно визначеними, наприклад, коли в результаті оцінки коефіцієнтів в рядку цільової функції дві або більше двох змінних у відповідності до симплекс-критерію 1 мають бути включеними до базису в наступному пробному розв'язку. Вибір однієї з них виконується довільно, наприклад, можна взяти змінну з найменшим значенням індексу.

Якщо, відповідно до симплекс-критерію 2, дві або більше двох змінних проміжного базису повинні одночасно прийняти нульове значення в результаті включення в наступний базис нової змінної, то із попереднього базису виключати потрібно лише одну з них. Інші із згаданих змінних залишаються в базисі та приймають нульові значення. Базис, що отримується при цьому, називається виродженим.

Якщо в цільовій функції є додатній елемент, а в стовпчику, що відповідає йому, немає жодного додатного, то маємо випадок необмеженого оптимального розв'язку.

Черговий пробний розв'язок є оптимальним тоді, коли збільшення будь-якої вільної змінної не приводить до зменшення f(**X**). Але це можливо в тому випадку, коли всі $\gamma_i \le 0$. Деталізований симплекс-алгоритм задачі ЛП в частині пошуку оптимального розв'язку наведений на рис. 2.7.

2.6 Алгоритм пошуку опорного розв'язку

Якщо в пробному розв'язку є від'ємні базисні змінні, то необхідно виконати пошук опорного плану. Алгоритм такого пошуку передбачає крок за кроком шляхом заміни базисних змінних наближення до опорного розв'язку або дозволяє переконатись, що такого розв'язку не існує (система обмежень не суммісна з умовою $x_i \ge 0$, i = 1, 2, …, ε).

Алгоритм пошуку опорного розв'язку, який деталізує алгоритми 2.1 та 2.3 у відповідній частині, наведено на рис. 2.8.

Розглянемо числовий приклад вирішення задачі ЛП, де є етапи пошуку опорного плану та оптимального розв'язку.

Приклад 2.4. Для задачі ЛП:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -2x_1 - 10x_2 + 4x_3 \to \min \\ 3x_1 + x_2 \le 10 \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 \le 5 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \ge 2 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

знайти оптимальний розв'язок.

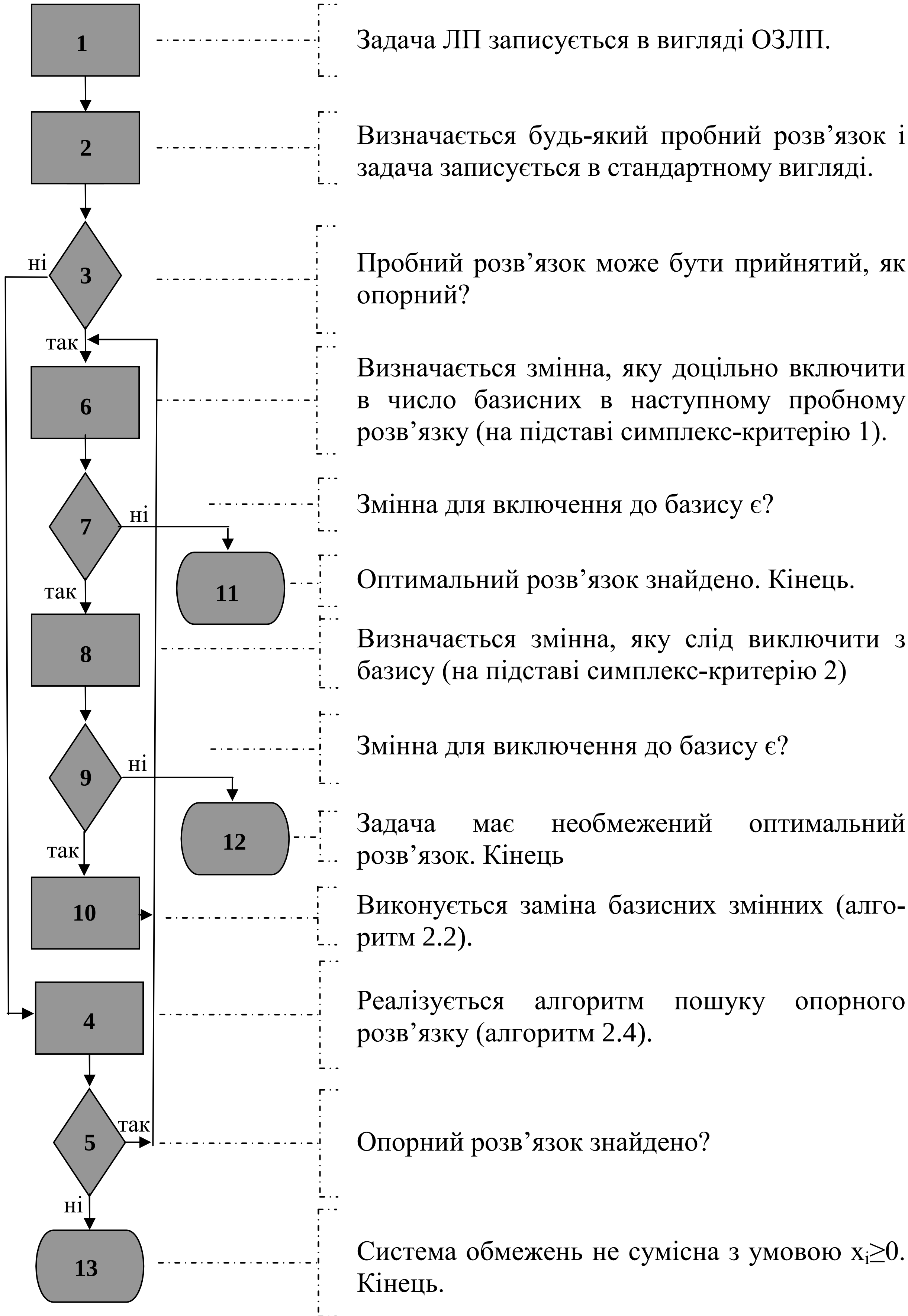
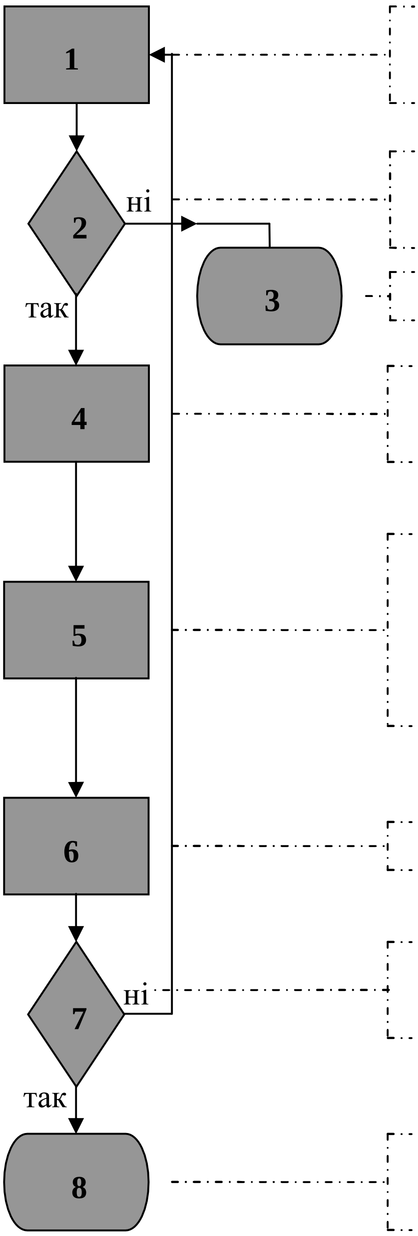


Рисунок 2.7 – Алгоритм 2.3. Деталізований симплекс-алгоритм задачі ЛП



Визначається рядок в системі обмежень з від’ємним вільним членом.

Чи є в даному рядку від’ємний коефіцієнт при будь-якій вільній змінній?

Система обмежень ЗЛП не сумісна з вимогою $x_i \geq 0$. Задача розв’язку не має.

Серед множини коефіцієнтів при вільних змінних вибирається найбільший і відповідний стовпчик береться як вирішувальний.

Розглядається співвідношення вільних членів до коефіцієнтів вирішувального стовпчика. Приймаються до уваги лише додатні. Найменшому з них відповідає вирішувальний рядок.

Виконується заміна базисних змінних.

В отриманому пробному розв’язку базисні змінні всі додатні?

Опорний розв’язок знайдено. Кінець.

Рисунок 2.8 – Алгоритм 2.4. Алгоритм пошуку опорного розв’язку задачі ЛП

Розв’язування. Запишемо ОЗЛП:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -2x_1 - 10x_2 + 4x_3 \to \min \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ -4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 5 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_6 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

Знайдемо пробний розв’язок та запишемо його в стандартній формі:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 0-(2x_1+10x_2-4x_3) \to \min \\ x_4 = 10-(3x_1+x_2) \\ x_5 = 5-(-4x_1+3x_2-x_3) \\ x_6 = -2-(2x_1+3x_2-3x_3) \\ x_i \ge 0, i = 1,2,\dots,6 \end{cases}$$

Отриманий пробний розв’язок не можна прийняти за опорний, оскільки x_6 = -2, тому заповнимо стандартну таблицю та виконаємо розрахунки для пошуку опорного розв’язку.

Таблиця 2.2 – Симплекс-таблиця для виконання першої ітерації

	Вільний член	x_1	x_2	$\leftrightarrow x_6$ x_3
f(**X**)	0 2,33	2 -0,66	10 6	-4 -1,33
x_4	10 10	3 3	1 1	0 0
x_5	5 5,66	-4 -4,66	3 2	-1 -0,33
$\leftrightarrow x_3$ x_6	-2 0,66	2 -0,66	3 -1	-3 -0,33

За результатами виконаної ітерації знайдено опорний розв’язок (x_4 = 10, x_5 = 5,66, x_3 = 0,66, $x_1 = x_2 = x_6$ = 0). Значення цільової функції, що йому відповідає f(**X**) = 2,33. Якщо проаналізувати коефіцієнти в рядку f(**X**) симплекс-таблиці, то можна, керуючись симплекс-критерієм 1, визначити змінну для включення до базису. Виконаємо заміну базисних змінних і тим самим наблизимось до оптимального розв’язку.

Таблиця 2.3 – Симплекс-таблиця для виконання другої ітерації

	Вільний член	x_1	$\leftrightarrow x_5$ x_2	x_6
f(**X**)	2,33 -14,33	-0,66 13,33	6 -3	-1,33 -0,33
x_4	10 7,16	3 5,33	1 -0,5	0 0,16
$\leftrightarrow x_2$ x_5	5,66 2,83	-4,66 -2,33	2 0,5	-0,33 -0,16
x_3	0,66 3,5	-0,66 -3	-1 0,5	-0,33 -0,5

Отримане значення f(**X**) = -14,33 можна поліпшити ще.

Таблиця 2.4 – Симплекс-таблиця для виконання третьої ітерації

			$\leftrightarrow x_4$		
		Вільний член	x_1	x_5	x_6
	f(**X**)	-14,33 -32,25	13,33 -2,5	-3 -1,66	-0,33 -0,66
$\leftrightarrow x_1$	x_4	7,16 1,34	5,33 0,18	-0,5 -0,09	0,16 0,03
	x_2	2,83 5,97	-2,33 0,43	0,5 0,28	-0,16 -0,09
	x_3	3,5 7,53	-3 0,56	0,5 0,22	-0,5 -0,4

Отримано оптимальний розв’язок $x_4 = x_5 = x_6 = 0$; $x_1 = 1,34$; $x_2 = 5,97$; $x_3 = 7,53$, якому відповідає значення цільової функції f(**X**) = - 32,25.

2.7 Перехід від змінних, що не мають обмеження на знак, до невід’ємних змінних

Всі методи математичного програмування, в тому числі і методи ЛП, передбачають пошук розв’язків лише серед невід’ємних значень для змінних ($x_i \geq 0$, i = 1, 2, …, ε). Але ця умова не охоплює всіх можливих ситуацій, в тому числі і в енергетичній галузі. Наприклад, потоки потужності або струми можуть мати, як один напрямок, який приймається за додатній, так і інший – від’ємний. В процесі синтезу електричної схеми можна отримати від’ємне значення реактивного опору, що реалізується ємністю відповідних параметрів, або - додатнє, що потребує включення індуктивного елемента і т.д.

Для таких випадків (коли за змістом задачі, який глибоко усвідомлений, потрібно мати можливість отримувати як додатні, так і від’ємні значення для змінних) можна скористатись одним із двох типів перетворень. Ці перетворення дозволяють здійснити перехід від змінних, що не мають обмежень на знак, до невід’ємних змінних.

Перетворення першого типу полягає в наступному. Спочатку вибирається одне із обмежень ОЗЛП, що містить змінну x_i, яка не має обмежень на знак. Далі це рівняння вирішується відносно x_i і отриманий результат підставляється в усі інші обмеження та в цільову функцію. Виконується спрощення шляхом зведення подібних. Отримані в результаті такої підстановки співвідношення математичної моделі зберігають лінійний характер та містять всі змінні крім x_i.

Числове значення x_i отримують після того, як вирішена задача оптимізації відносно всіх інших змінних. Їх значення дають можливість визначити величину x_i, скориставшись відповідним рівнянням.

Перетворення другого типу полягає в тому, що x_i подається у вигляді двох невід'ємних змінних:

$$x_i = y_j - y_{j+1}.$$

В залежності від того, як співвідносяться між собою невід'ємні y_j та y_{j+1} за результатами вирішення задачі, можна отримати будь-яке (за знаком) значення для x_i.

Першим підходом доцільно скористатись, коли кількість змінних задачі, що не мають обмежень на знак, невелика.

Другий підхід збільшує кількість змінних і, як наслідок, вимірність задачі, що позначається на трудомісткості розв'язку, але може бути використаним навіть у випадку, коли відсутні обмеження на знак для всіх елементів вектора **X**. При цьому:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_3 - y_4 \\ \dots \\ y_{(2n-1)} - y_{2n} \end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

2.8 Двоїста задача ЛП

В теорії ЛП існує дуже важливе і корисне поняття двоїстості, яке дозволяє:

- здійснювати аналіз математичних моделей на чуттєвість (визначення інтервалів можливих змін для вхідних параметрів без суттєвого відхилення від знайденого оптимуму, без значного порушення структури базису, який формує оптимальний розв'язок);
- перевірити на оптимальність будь-який допустимий розв'язок вихідної задачі;
- полегшити вибір базисного розв'язку.

Двоїсту задачу ЛП можна визначити таким чином:

Нехай є вихідна задача ЛП:

$$\begin{cases} \boldsymbol{CX} \to min \\ \boldsymbol{AX} \le \boldsymbol{b} \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,\dots,n \end{cases}, \qquad (2.16)$$

де вимірність матриць та векторів: ***C*** *– (1 × n);* ***X*** *– (n × 1);* ***A*** *– (m×n);* ***b*** *– (m×1).*

Двоїста задача ЛП по відношенню до вихідної має вигляд:

$$\begin{cases} \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{Y} \to max \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Y} \geq \boldsymbol{C}^T \\ y_i \geq 0, i = 1,2,...,m \end{cases}, \tag{2.17}$$

де вимірність вектора $\boldsymbol{Y}$ *– (m×1).*

Приклад 2.5. Для вихідної задачі ЛП

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 \to \max \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 16 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 25 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

записати двоїсту.

Розв'язування. На основі визначення запишемо двоїсту до даної задачу ЛП

$$\begin{cases} F(\mathbf{X}) = 16y_1 + 25y_2 \to \min \\ y_1 + 7y_2 \geq 4 \\ y_1 + 5y_2 \geq 5 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 9 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

В математиці доводиться теорема двоїстості, яка формулюється таким чином.

Якщо вихідна та двоїста до неї задачі ЛП мають допустимі розв'язки, то:

- *існує оптимальний розв'язок вихідної задачі –* $\mathbf{X}^*$*;*
- *існує оптимальний розв'язок –* $\mathbf{Y}^*$ *двоїстої задачі;*
- *має місце таке співвідношення:*
-

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{Y}^* \tag{2.18}$$

Якщо вихідна (двоїста) задача має обмежений оптимальний розв'язок (для якого значення цільової функції обмежене), то відповідна їй двоїста (вихідна) задача має обмежений оптимальний розв'язок при тому ж значенні цільової функції.

Теорема двоїстості має місце також і в випадку, коли вихідна і двоїста задачі ЛП записані у вигляді ОЗЛП. Склавши для будь-якої ОЗЛП двоїсту задачу, можна переконатися, що кількість невідомих для цих задач завжди однакова і дорівнює – ε.

2.9 Двоїстий симплекс–метод

Розглянемо із задачею ЛП їй двоїсту. Між оптимальними розв’язками цих задач існує зв’язок. Тому розв’язування двоїстої задачі симплекс – методом є в той же час методом пошуку оптимального розв’язку задачі вихідної. Цей метод називається двоїстим симплекс–методом.

Між невідомими x_i, i = 1, 2,…, ε вихідної задачі та y_i, i = 1, 2, …, ε двоїстої задачі існує певна відповідність: базисні невідомі вихідної задачі відповідають вільним невідомим задачі двоїстої. Базисній змінній x_{n+1} вихідної задачі відповідає вільна y_1 двоїстої. Аналогічно змінним x_{n+2}, x_{n+3},…, $x_ε$ відносяться вільні змінні двоїстої задачі y_2, y_3,..., $y_{ε-m}$. Аналогічну відповідність можна встановити для вільних x_1, x_2,..., x_n.

Елементи будь якого j-го рядка симплекс-таблиці двоїстої задачі відрізняються лише знаком від відповідних елементів j-го стовпчика симплекс-таблиці вихідної задачі.

Приклад 2.6. Задачу ЛП:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 7x_1 + 5x_2 \to \max \\ 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 \le 18 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

вирішити двоїстим симплекс-методом.

Розв’язування. Складемо двоїсту задачу ЛП та перейдемо до ОЗЛП:

$$\begin{cases} F(\mathbf{Y}) = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4 \to \min \\ 2y_1 + 2y_2 + 3y_4 \ge 7 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 5 \\ y_i \ge 0, i = 1,2,...,4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} F(\mathbf{Y}) = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4 \to \min \\ 2y_1 + 2y_2 + 3y_4 - y_5 = 7 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_6 = 5 \\ y_i \ge 0, i = 1,2,...,6 \end{cases}.$$

Виберемо пробний розв’язок, де базисні будуть y_3 та y_4, а вільні y_1, y_2, y_5, y_6. Виразимо базисні змінні через вільні і отриманий результат запишемо в стандартній формі

$$\begin{cases} F(\mathbf{Y}) = 67 - (8y_1 + 4y_2 - 6y_5 - 5y_6) \to \min \\ y_3 = 1{,}66 - (y_1 - 0{,}33y_2 - 0{,}33y_6) \\ y_4 = 2{,}33 - (0{,}66y_1 + 0{,}66y_2 - 0{,}33y_5) \\ y_i \ge 0, i = 1,2,...,6 \end{cases}.$$

Звернемо увагу, що виконання цього етапу є трудомістким, якщо базисні змінні взяті не з числа додаткових. У випадку, коли додаткових змінних немає (обмеження задані у вигляді рівностей), пошук пробного розв’язку вимагає великої кількості арифметичних операцій. Тому цей етап в даному випадку простіше виконати для двоїстої задачі, оскільки кількість обмежень тут менша. В даному прикладі додаткові змінні не прийняті за базисні, оскільки їх значення буде від’ємне, а це потребує наступним кроком пошуку опорного розв’язку, а як наслідок – додаткові арифметичні дії та час.

Складемо симплекс-таблицю та виконаємо першу ітерацію.

Таблиця 2.5 – Симплекс-таблиця для виконання першої ітерації

				$\leftrightarrow y_4$		
		Вільний член	y_1	y_2	y_5	y_6
	F(**Y**)	67 53	8 4	4 -6	-6 -4	-5 -5
	y_3	1,66 0,5	1 0,66	-0,33 -0,5	0 0,16	-0,33 -0,33
$\leftrightarrow y_2$	y_4	2,33 3,5	0,66 1	0,66 1,5	-0,33 -0,5	0 0

Отриманий розв’язок можна поліпшити.

Таблиця 2.6 – Симплекс-таблиця для виконання другої ітерації

			$\leftrightarrow y_3$			
		Вільний член	y_1	y_4	y_5	y_6
	F(**Y**)	53 50	4 -6	-6 -3	-4 -5	-5 -3
$\leftrightarrow y_1$	y_3	0,5 0,75	0,66 1,5	-0,5 -0,75	0,16 0,25	-0,33 -0,5
	y_2	3,5 2,75	1 -1,5	1,5 2,25	-0,5 -0,75	0 0,5

Отриманий розв’язок оптимальний.

Встановимо відповідність змінних вихідної та двоїстої задачі.

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix}$$

Враховуючи те, що знаки при коефіцієнтах в симплекс-таблиці двоїстої задачі протилежні до коефіцієнтів симплекс-таблиці вихідної задачі, можна записати розв’язок для вихідної задачі ЛП.

Значення базисних змінних:

$$x_5 = 6; \quad x_6 = 3; \quad x_1 = 5; \quad x_2 = 3.$$

Вільні змінні:

$$x_3 = x_4 = 0;$$
$$f(\mathbf{X}) = 50.$$

Алгоритм розв'язування задачі ЛП за допомогою двоїстого симплекс-методу зображено на рис. 2.8.

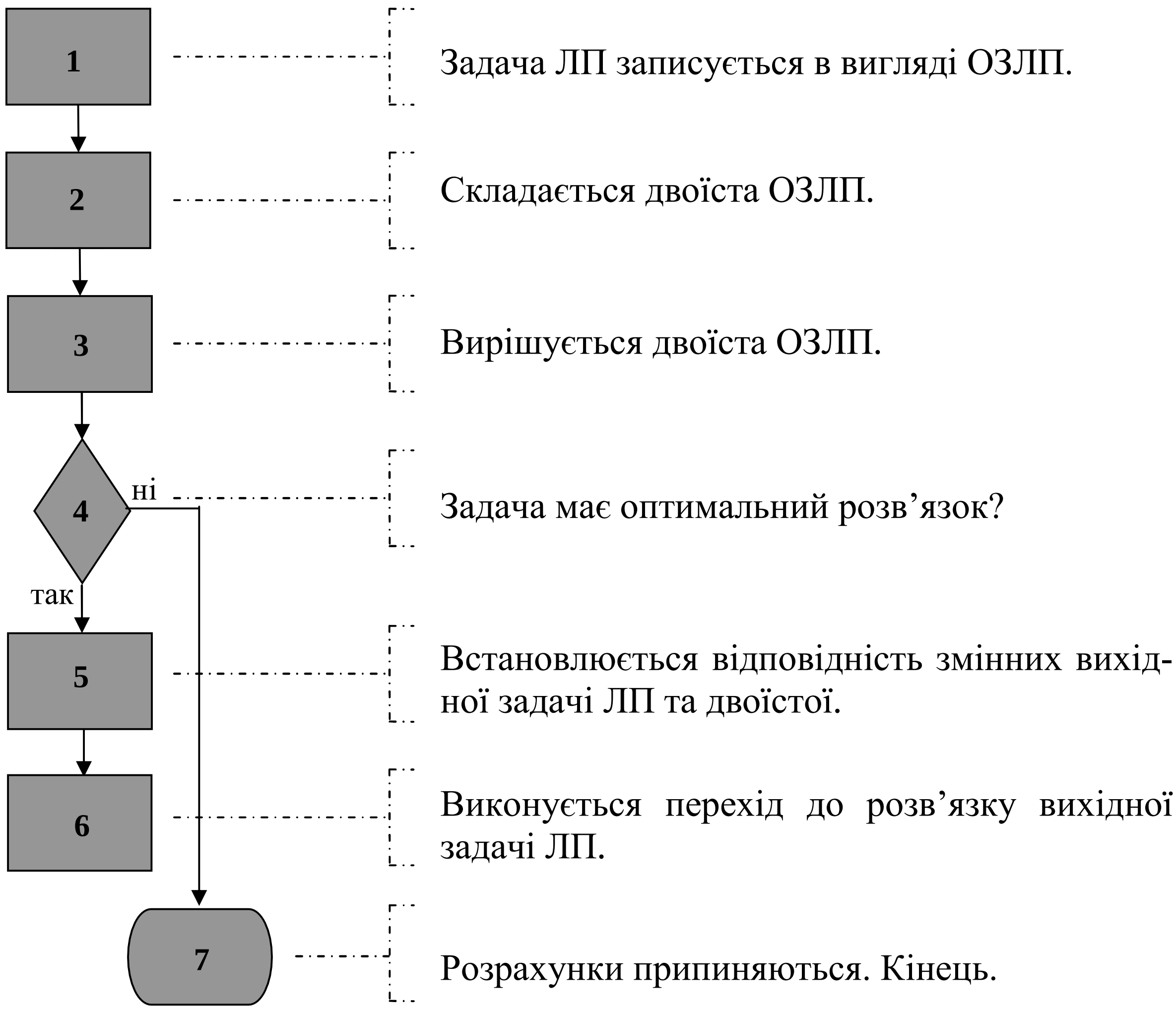


Рисунок 2.8 Алгоритм 2.5. Алгоритм розв'язування задачі ЛП двоїстим симплекс-методом

Завдання для самостійної роботи

1. Поясніть смисл таких термінів та понять:
- область допустимих розв'язків;
- оптимальний розв'язок;

- необмежений оптимальний розв'язок;
- альтернативний оптимальний розв'язок;
- основна задача лінійного програмування;
- додаткова (базисна, вільна) змінна;
- базис;
- опорний (пробний) розв'язок (план);
- стандартна таблиця (симплекс-таблиця);
- заміна базисних змінних;
- вирішувальний елемент (стовпчик, рядок);
- двоїста задача ЛП.

2. При наявності обмежень:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ 6x_1 + 4x_2 \ge 24 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

знайти:

а) $x_1 \to \min$; б) $x_2 \to \min$; в) $x_1 \to \max$;
г) $x_2 \to \min$; д) $x_1 + x_2 \to \min$; е) $x_1 + x_2 \to \max$;
ж) $-x_1+2x_2 \to \max$; з) $x_1-2x_2 \to \max$; і) $-3x_1-2x_2 \to \max$.

3. При наявності обмежень:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 0 \\ -7x_1 + 8x_2 \le 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ 0 \le x_1 \le 4 \\ 0 \le x_2 \le 6 \end{cases}$$

знайти:

а) $x_1 \to \max$; б) $x_1 \to \min$; в) $x_2 \to \max$;
г) $x_2 \to \min$; д) $x_1 + x_2 \to \min$; е) $x_1 + x_2 \to \max$;
ж) $3x_1 + 5x_2 \to \min$; з) $3x_1 + 5x_2 \to \max$; і) $-2x_1-x_2 \to \max$.

4. Виконайте заміну базисних змінних x_1 на x_6:

		Вільний член	x_1 ($\leftrightarrow x_6$)	x_2	x_3	x_4	x_5
	f(**X**)	6	2	-1	3	-2	-10
$\leftrightarrow x_1$	x_6	2	1	-1	2	-2	-6
	x_7	5	1	2	-1	7	3

x_8	4	-1	1	1	-1	0
x_9	11	1	2	2	4	-3

5. Для умов попередньої задачі визначіть невідомі для заміни базисних змінних, якщо вирішується задача:

а) $f(\mathbf{X}) \to \min$; б) $f(\mathbf{X}) \to \max$.

6. Знайдіть будь-який пробний розв'язок задачі:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 6 + 5x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 \to \min \\ x_1 + x_2 - 3x_4 \ge 2 \\ x_1 + 2x_3 \le -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3,4. \end{cases} .$$

7. Яку із змінних потрібно включити до базису на першій ітерації, якщо цільова функція $f(\mathbf{X})$ має вигляд:

а) $0-(-14x_1-5x_2-9x_3-11x_4) \to \min$; б) $0-(-14x_1-5x_2-9x_3-11x_4) \to \max$;
в) $22-(-4x_1-5x_2-9x_3-8x_4) \to \min$; г) $22-(-4x_1-5x_2-9x_3-8x_4) \to \max$;
д) $-3-(-4x_1-5x_2+9x_3-11x_4) \to \min$; е) $-3-(-4x_1-5x_2+9x_3-11x_4) \to \max$;
ж) $-10-(4x_1+5x_2+9x_3+11x_4) \to \min$; з) $-10-(4x_1+5x_2+9x_3+11x_4) \to \max$.

8. За допомогою симплекс-методу знайти оптимальний розв'язок задачі ЛП:

а) $$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -5x_1 - 6x_2 \to \min \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

знайдений розв'язок перевірити графічними побудовами;

б) $$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -30x_1 - 23x_2 - 29x_3 \to \min \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 26 \\ -4x_1 - 2x_2 - 5x_3 \ge 7 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases} ;$$

в) $\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 15x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 2x_4 \to \max \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 0{,}6x_4 \le 10 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 0{,}25x_4 \le 12 \\ -7x_1 - x_4 \ge 35 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3,4 \end{cases}$.

9. Знайти базисний розв’язок для задачі ЛП:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 3 - x_4 + x_5 \to \min \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 - 7 = 0 \\ x_3 - x_4 - 3x_5 - 2 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 - 2 = 0 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,\ldots,5 \end{cases}.$$

10. Вирішити задачу двоїстим симплекс-методом:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 + x_3 \to \max \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}.$$

Розділ 3 ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА АЛГОРИТМ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

3.1 Загальна постановка задачі цілочислового програмування

В процесі проектування електричних систем і систем електропостачання пошук оптимальних рішень в деяких випадках вимагає отримання значень для компонент вектора змінних в цілих числах. Іншими словами допустиму множину розв'язків для даної задачі утворює виключно дискретна множина точок. Прикладами таких задач є визначення кількості електричних станцій і енергоблоків, вибір кількості трансформаторних підстанцій та трансформаторів, врахування дискретного ряду значень потужностей трансформаторів, комплектних конденсаторних установок, визначення кількості ліній електропостачання тощо. Зрозуміло, що отримання оптимального роз'язку для вищенаведених задач у дробних числах є неприпустимим.

Для задач цілочислового программування функція, що підлягає оптимізації, задається в дискретній множині точок і до неї не можна застосувати методи пошуку екстремуму, які пов'язані із розрахунками похідних. Тут не вдається скористатись властивостями неперервності критеріальної функції, тому що множина допустимих розв'язків дискретна. Застосування іншого шляху розв'язування, пов'язаного з простим перебиранням точок в ОДР, є неефективним і навіть неможливим у більшості практичних випадків. З іншого боку просте округлення неперервного розв'язку до цілих чисел іноді порушує обмеження і дуже часто є не оптимальним цілочисловим розв'язком. Це положення ілюструється на рис. 3.1 на прикладі задачі лінійного програмування. Прямі, які утворюють трикутник, геометрично зображують обмеження і формують ОДР. Дискретна множина має вигляд цілочислової сітки. Нехай трикутник ОДР знаходиться між рядками цілочислової сітки. Припустимо, що симплекс-метод ідентифікує вершину А області допустимих розв'язків як оптимальну точку.

Найближча цілочислова апроксимація цієї вершини знаходиться поза межами ОДР і тому не може бути прийнята як розв'язок задачі. Як можна побачити із рисунка, цілочислове рішення задачі може знаходитись на значній віддалі від симплексного рішення. В даному випадку в ОДР є тільки одна точка з цілочисловими координатами.

В найбільш узагальненій формі *задача цілочислового програмування має наступний вигляд: визначити вектор* $\boldsymbol{X}$ *з невід'ємними компонентами* x_j, $j=1,\dots,n$ *в* E^n, *який мінімізує цільову функцію* $f(\boldsymbol{X})$ *при обмеженнях* $g_i(x_1,\dots,x_n)\geq 0$, $i=1,\dots,m$. З геометричної точки зору здійснюється пошук точки з цілочисловими координатами в ОДР, яка мінімізує функцію $f(\mathbf{X})$.

В деяких задачах висуваються вимоги отримання цілих чисел тільки для окремих компонент вектора **X**. Такий випадок отримав назву *частково цілочислового програмування*. Якщо такі вимоги ставляться до всіх компонент вектора **X,** то такий випадок називається *цілковито цілочисловим програмуванням***.**

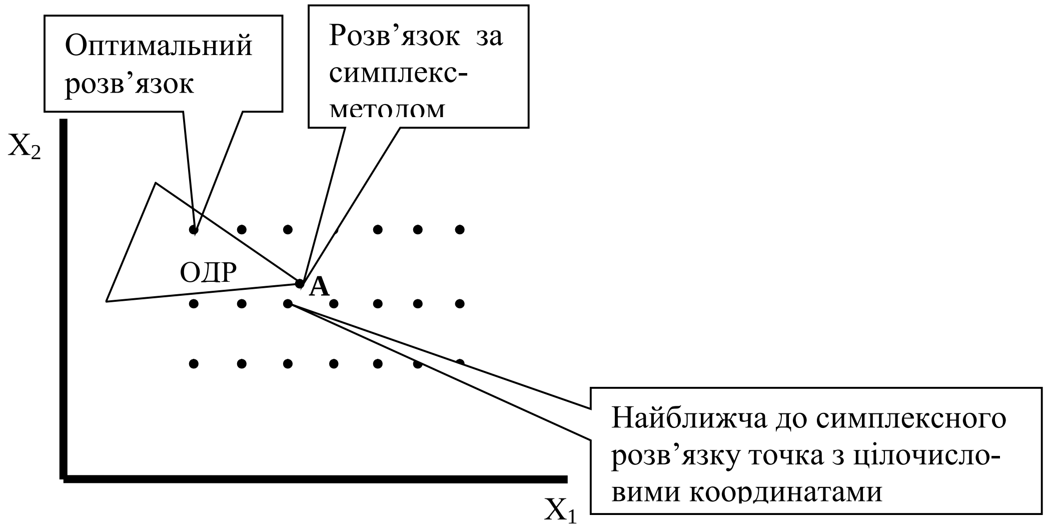


Рисунок 3.1 – Приклад невдалої цілочислової апроксимації

В деяких задачах цілочислового програмування здійснюється пошук вектора **X**, компоненти якого можуть приймати значення 0 або 1. Такі змінні називаються *булєвими*, а сама задача – *задачею цілочислового програмування із булєвими змінними*.

На прикладі задачі лінійного програмування (рис. 3.1) можна побачити, що оптимальний цілочисловий розв'язок не обов'язково знаходиться в одній з вершин випуклого багатокутника ОДР. Тому звичайні алгоритми лінійного програмування, які шукають розв'язки серед вершин ОДР, а також інші алгоритми, що призначені для задач з неперервними змінними, не можуть бути застосовані для визначення цілочислового розв'язку. Для розв'язування екстремальних цілочислових задач розроблена ціла група спеціальних методів та їх модифікацій відповідно для окремих випадків.

Розглянемо більш детально метод Гоморі для задач лінійного програмування. Крім того існує модифікований алгоритм Гоморі для розв'язування задач цілочислового програмування з параболічними обмеженнями. Для більш поглибленого ознайомлення з методами та алгоритмами цілочислового програмування можна рекомендувати книгу Т. Сааті [6], а також книгу Дж. Моудера і С.Елмаграбі [7].

3.2 Алгоритм цілочислового лінійного програмування Гоморі*

Суть методу Гоморі полягає в наступному: якщо задача лінійного програмування при відсутності вимог цілочисловості не має розв'язку в цілих числах, то треба послідовно змінювати ОДР шляхом відтинання тих її частин, які не містять цілочислових компонент. Після виконання ряду таких відтинань буде отримано цілочисловий оптимальний розв'язок.

Для пояснення алгоритму Гоморі введемо такі позначення:

- R_o – множина дійсних чисел, що утворена обмеженнями задачі лінійного програмування при відсутності умов цілочисловості;
- R – множина дійсних чисел така, що $R \in R_o$;
- множина R' - опукла оболонка множини R. Вона складається із різноманітних опуклих лінійних комбінацій точок множини R.

Таким чином, опукла оболонка R' є мінімальною опуклою множиною, яка містить в собі всі точки множини R. Зрозуміло, що ця опукла оболонка утворюється множиною лінійних обмежень.

Відомо, що оптимальний розв'язок обов'язково повинен належати дискретній множині R і знаходитись не в середині множини, а на її опуклій оболонці R'. Виходячи з цього, можна обрати таку послідовність дій при пошуку оптимального цілочислового розв'язку:

1) визначити дискретну множину R;
2) утворити її лінійну опуклу оболонку R';
3) на множині R' розв'язати задачу лінійного програмування при відсутності умов цілочисловості.

Утворення опуклої оболонки R', в якій відсутні всі непотрібні точки множини R_o, є дуже складною процедурою і тому вона здійснюється поступово, крок за кроком. При цьому розв'язують послідовність задач лінійного програмування.

На першому кроці розв'язується вихідна задача лінійного програмування при відсутності умов цілочисловості. Якщо рішення, яке отримане, містить в собі тільки цілочислові компоненти, то це і є дискретний оптимум. Інакше утворюється нова задача лінійного програмування з введенням одного додаткового обмеження. Ця задача формується таким чином, щоб ОДР вже не включала оптимального розв'язку попередньої задачі лінійного програмування, але одночасно не втрачала ні однієї із допустимих цілочислових точок, які належать оболонці R'. Далі розв'язується нова задача лінійного програмування, отриманий оптимальний розв'язок перевіряється на цілочисловість. Якщо умова цілочисловості не виконується, то формується наступна задача лінійного програмування з додатковим новим обмеженням.

Додаткові обмеження, які включаються кожний раз в нові задачі лінійного програмування, називаються *відтинаннями*. Вони відокремлю -

---

*) В цьому параграфі використані деякі положення, що наведені в книзі В.Г.Авакумова [1]

ють частину множини R_o разом з оптимумом попередньої задачі і тим самим зменшують “об’єм” опуклого багатогранника R_o.

Описана вище процедура формування і розв’язування послідовності задач лінійного програмування здійснюється до отримання цілочислового оптимального рішення. Збіжність цього процесу суттєво залежить від способу вибору відтинання. Алгоритм Гоморі використовує такий спосіб формування відтинань, при якому розв’язок знаходиться за кінцеву кількість кроків.

Розглянемо, як саме формуються відтинання. Нехай в результаті розв’язування задачі лінійного програмування обмеження в канонічній формі мали наступний вигляд:

$$x_i = b_i - \sum a_{ij} \cdot x_j , \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (3.1)$$

де x_i – базисна змінна; x_j – вільна змінна; b_i – не цілочисловий вільний член; a_{ij} – коефіцієнт при вільній змінній.

Запишемо a_{ij} і b_i у вигляді суми цілої частини і правильного невід’ємного дробу. Для цього виділимо цілу частину дробу, що записаний в квадратних дужках, так щоб отримане число не перевищувало дробного. Наприклад:

$$[4{,}2] = 4; \qquad [-4{,}2] = -5;$$

$$\left[\frac{8}{3}\right] = 2; \qquad \left[-\frac{8}{3}\right] = -3;$$

$$[3] = 3; \qquad [-3] = -3$$

В результаті a_{ij} і b_i будуть мати наступний вигляд:

$$\left.\begin{aligned} a_{ij} &= \lfloor a_{ij} \rfloor + f_j \\ b_i &= [b_i] + f_i \\ 0 \le f_{ij} &\le 1 \end{aligned}\right\} , \qquad (3.2)$$

де f_i, f_j – дробна частина числа.

З врахуванням співвідношення (3.2) вираз (3.1) для x_i буде таким:

$$x_i = [b_i] + f_i - \sum_j \lfloor a_{ij} \rfloor \cdot x_j - \sum_j f_j \cdot x_j , \qquad (3.3)$$

або

$$x_i + \sum_j \lfloor a_{ij} \rfloor \cdot x_j - [b_i] = f_i - \sum_j f_j \cdot x_j . \qquad (3.4)$$

Перетворимо (3.1) наступним чином:

$$x_i + \sum_j a_{ij} \cdot x_j - b_i = 0 . \qquad (3.5)$$

Віднімемо із (3.5) рівняння (3.4)

$$\sum_j a_{ij} \cdot x_j - b_i - \sum_j \lfloor a_{ij} \rfloor \cdot x_j + [b_i] = -(f_i - \sum_j f_j \cdot x_j) . \qquad (3.6)$$

В лівій частині (3.6) обов’язково буде отримане невід’ємне число, тому що з деякого числа віднімається його ціла частина. дійсно

$$4{,}2 - [4{,}2] = 4{,}2 - 4 = 0{,}2 > 0;$$
$$-4{,}2 - [-4{,}2] = -4{,}2 - (-5) = 0{,}8 > 0.$$

Звідси
$$-(f_i - \sum_j f_j \cdot x_j) \ge 0;$$
$$f_i - \sum_j f_j \cdot x_j \le 0. \qquad (3.7)$$

Перетворимо (3.7) в рівняння шляхом введення додаткової невід'ємної змінної x
$$f_i - \sum_j f_j \cdot x_j + x = 0. \qquad (3.8)$$

Тепер запишемо (3.8) в наступній формі:
$$\sum_j (-f_j \cdot x_j) + x = -f_i. \qquad (3.9)$$

Рівняння (3.9) визначає відтинання для будь-якого i.

Алгоритм цілочислового лінійного програмування Гоморі наведений на рис. 3.2.

Розглянемо приклад вирішення задачі цілочислового програмування.

Приклад 3.1 Мінімізувати у невід'ємних числах x_1 і x_2 функцію $f(\mathbf{X}) = x_1 + 3x_2$ при обмеженнях:
$$\begin{aligned} &3x_1 - x_2 \ge 4 \\ &x_1 + x_2 \le 3 \\ &x_j \text{ –цілі числа} \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Розв'язування. *Ітерація 1*.

Запишемо задачу (3.10) у вигляді ОЗЛП та визначимо пробний розв'язок:
$$\begin{cases} f(\boldsymbol{X}) = x_1 + 3x_2 \to \min \\ x_3 = -4 + 3x_1 - x_2 \\ x_4 = 3 - x_1 - x_2 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots, 4 \\ x_j - \text{цілі} \quad \text{числа} \end{cases}$$

Зробимо запис задачі в стандартному вигляді:
$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 0 - (-x_1 - 3x_2) \to \min \\ x_3 = -4 - (-3x_1 + x_2) \\ x_4 = 3 - (x_1 + x_2) \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,\ 2, \ldots, 4 \\ x_j - \text{цілі} \quad \text{числа} \end{cases} \qquad (3.11)$$

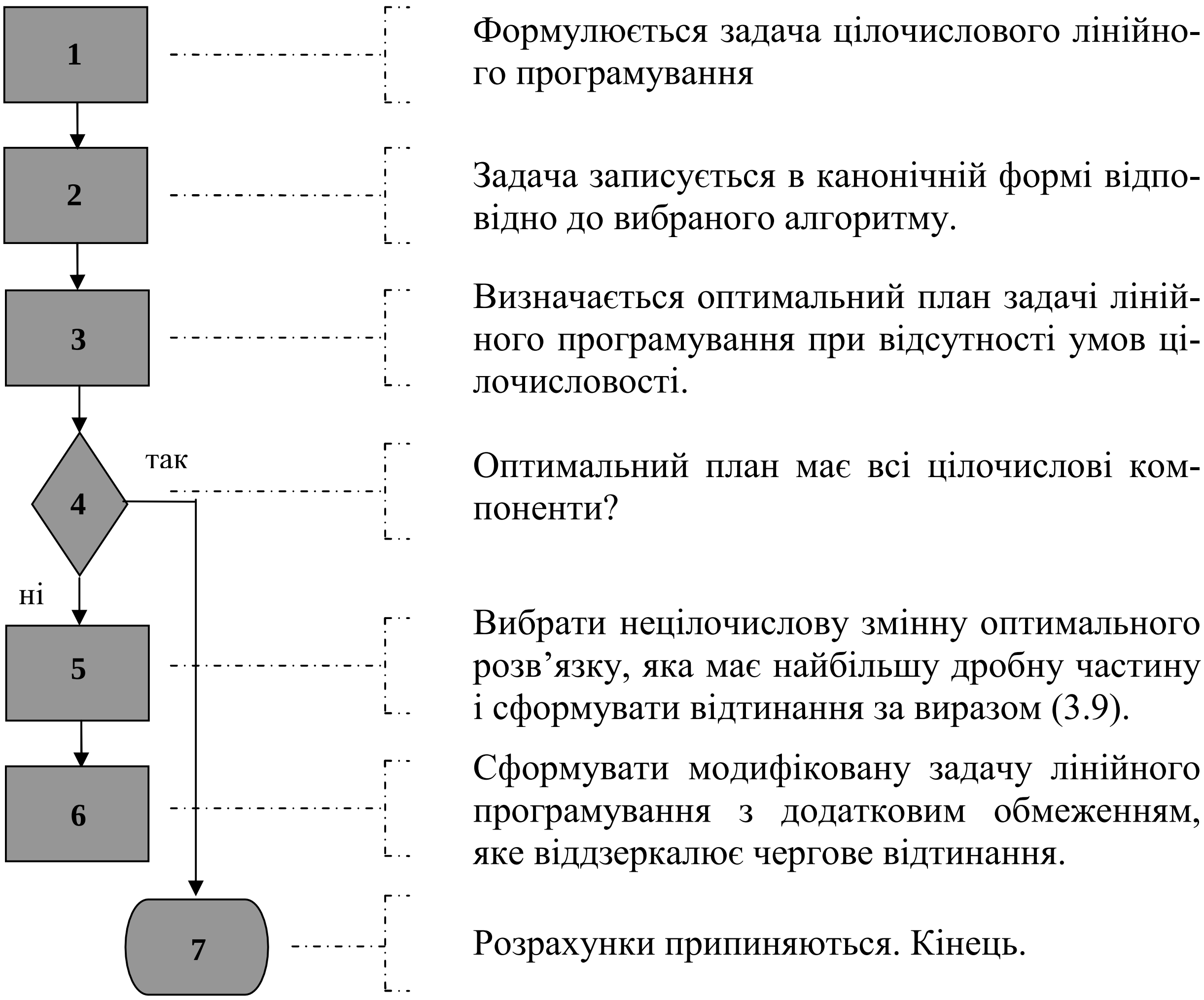


Рисунок 3.2 – Алгоритм 3.1. Алгоритм цілочислового лінійного програмування Гоморі

Визначимо оптимальний план задачі (3.11) при відсутності умов цілочисловості. Для розв'язування скористаємось табличним симплексним алгоритмом задачі лінійного програмування (таблиці 3.1; 3.2).

Таблиця 3.1 –Результати розрахунку неперервного оптимуму на першій ітерації

			$\leftrightarrow x_3$	
		Вільний член	x_1	x_2
	f(**X**)	0 4/3	-1 $\boxed{-1/3}$	-3 -10/3
$\leftrightarrow x_1$	x_3	$\boxed{-4}$ 4/3	-3 -1/3	$\boxed{1}$ -1/3
	x_4	3 5/3	1 $\boxed{1/3}$	1 4/3

Таблиця 3.2 - Заключна симплекс-таблиця пошуку неперервного розв’язку

	Вільний член	x_3	x_2
f(**X**)	$4/3$	$-1/3$	$-10/3$
x_1	$4/3$	$-1/3$	$-1/3$
x_4	$5/3$	$1/3$	$4/3$

Оптимум має місце при наступному векторі змінних – **X**.

$$\mathbf{X}^{т}=(^4/_3 \quad 0 \quad 0 \quad ^5/_3).$$

Значення цільової функції, яке відповідає оптимуму, у відповідності з таблицею 3.2 дорівнює $^4/_3$. Отриманий розв’язок не можна прийняти як задовільний, оскільки умова цілочисловості не виконується ($x_1 = 4/3$; $x_4 = 5/3$).

Ітерація 2. Перейдемо до формування відтинання. Аналізуючи данні таблиці 3.2, приходимо до висновку щодо можливості формування відтинання на основі обмеження з базисною змінною x_1, або обмеження з базисною змінною x_4.

При використанні алгоритму Гоморі рекомендується вибирати для побудови відтинання те обмеження, у якому друга дрібна частина вільного члена є найбільшою. В даному випадку порівнюються числа $^4/_3=1^1/_3$ і $^5/_3= 1^2/_3$. Найбільша дрібна частина $^2/_3$ відповідає останньому обмеженню. Тому для формування відтинання слід скористатись останнім обмеженням в табл. 3.2. Змінимо форму його запису. Це треба зробити у відповідності з виразом (3.9).f_j – дробна частина коефіцієнтів при невідомих: $^1/_3$ – при x_3 і $^1/_3$ – при x_2. Коефіцієнт при x_2 в таблиці 3.2 дорівнює $^4/_3$ і складається із цілої частини $^3/_3$=1 і дробної частини – $^1/_3$. f_i – дробна частина вільного члена. Вільний член останнього обмеження $^5/_3$ утворюється з цілої частини $^3/_3$ і дробної частини – $^2/_3$. Остаточно відтинання, яке буде додаватись до задачі лінійного програмування (табл. 3.2) має наступний вигляд:

$$x_5 = -^2/_3 - (-^1/_3\, x_3 - ^1/_3\, x_2)$$

Запишемо нову задачу лінійного програмування, що утворилась, в канонічній формі

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{X}) = \frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_2 \right) \to \min \\ x_1 = \frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_2 \right) \\ x_4 = \frac{5}{3} - \left(\frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_2 \right) \\ x_5 = -\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_2 \right) \\ x_j \ge 0; \ j = 1, 2, \ldots, 5. \end{cases} \qquad (3.12)$$

Можна переконатись, що для задачі (3.12) оптимальний план, який був отриманий в попередній задачі, є недопустимим, оскільки сформоване обмеження-відтинання відсікає з ОДР точку з координатами (4/3 0 0 5/3). Тому вирішення задачі (3.12) треба починати з визначення опорного плану. Заповнимо стандартну симплекс-таблицю для задачі (3.12), а також наведемо остаточні результати її вирішення, табл. 3.14.

Таблиця 3.13 Результати розрахунків дискретного оптимуму на I-й ітерації

		Вільний член	x_1 ↔x_5	x_2
	f(**X**)	4/3 2	-1/3 -1	-10/3 -3
	x_1	4/3 2	-1/3 -1	-1/3 0
	x_4	5/3 1	1/3 1	4/3 1
↔x_3	x_5	-2/3 2	-1/3 -3	-1/3 1

Таблиця 3.14 – Підсумкова симплекс-таблиця для цілочислового розв’язування

	Вільний член	x_5	x_2
f(**X**)	2	-1	-3
x_1	2	-1	0
x_4	1	1	1
x_3	2	-3	1

Оптимальний розв’язок відповідає вектору управління $\mathbf{X}^T = (2\ \ 0\ \ 2\ \ 1\ \ 0)$.

Проаналізуємо отримані результати. На відміну від розв’язку задачі, лінійного програмування, що отриманий на першій ітерації, всі компоненти вектора змінних є цілими числами. Має місце збільшення значення f(**X**) в порівнянні з результатом першої ітерації (від $4/3$ до 2). Гірші результати, що отримані в порівнянні з розв’язком в неперервних змінних, є завжди типовим явищем для задачі цілочислового програмування. Це пов’язано з тим, що введення додаткових обмежень (відтинань) відсікає частину множини R_o і звужує ОДР.

3.3 Математична модель цілочислової задачі оптимального розвитку енергосистеми

Як приклад задачі цілочислового програмування, розглянемо загальну задачу оптимізації розвитку енергосистем.

Нехай існує M діючих електричних станцій, тобто $m=1,2,...,M$ і N будівельних майданчиків для нових електростанцій, тобто $n=1,2,...,N$. Для кожної нової електростанції є можливим l_n варіантів її параметрів (потужності блоків, параметри пари тощо), тобто $l_n=1,2,...,L_n$, а також існує S можливих для будівництва ліній електропередач, тобто $j=1,2,…,S$. Нехай приведені витрати - З на споруду нової електростанції за варіантом n в рік l відповідно складають:

- З=0 при $t<t_в$;
- З=$a_{nl}+b_{nl}\Delta P_{nlt_B}$ при $t=t_в$;
- З=$b_{nl}\Delta P_{nlt}$ при $t>t_в$,

де $t_в$ – рік введення станції в експлуатацію; ΔP_{nlt} - величина потужності, що вводиться в рік t по станції n і варіанту l.

Введемо булеві змінні x_{nlt}, які приймають цілочислові значення 0 або 1. Тоді приведені витрати на спорудження всіх нових електростанцій за роками розрахункового періоду можна прийняти рівними:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{l=1}^{L_n} x_{nlt}a_{nlt}+\sum_{n=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{l=1}^{L_n} b_{nlt}\Delta P_{nlt}$$

при обмеженнях

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{l=1}^{L_n} x_{nlt}\le 1;\qquad \sum_{t=1}^{T}\sum_{l=1}^{L_n} x_{nlt}P_{nl\,\text{макс}}\ge\sum_{t=1}^{t}\Delta P_{nlt}.$$

Перше обмеження визначає x_{nlt}, яке буде дорівнювати 1, тільки в випадку, коли $t=t_в$, а при інших - l_n. Із другого обмеження виходить, що при всіх $t<t_в$ ліва частина нерівності буде дорівнювати 0, тобто при $t<t_в$ на станції n ніколи не можливе введення нових потужностей. Якщо $x_{nlt}=1$ (при $t=t_{вn}$ і конкретному значенні l_n), то для року $t_{вn}$ витрати будуть дорівнювати $a_{nl}+b_{nl}\Delta P_{nltв}$. В цей рік будь-яка потужність на станції n повинна бути введена обов'язково, в протилежному випадку $x_{nlt}=0$ і спорудження цієї станції є недоцільним. У зв'язку з тим, що $x_{nlt}=0$ для всіх інших l, то всі $\Delta P_{nlt}=0$ для інших значень l згідно з другим обмеженням. Іншими словами за весь період буде вводитись потужність по станції n тільки за оптимальним варіантом l і тільки починаючи з оптимального року введення $t_в$. Витрати на паливо по всіх станціях приблизно можуть бути визначені таким чином:

$$\sum_{t=1}^{T}\sum_{m=1}^{M}\sum_{h_{m\,min}}^{h_{m\,max}} c_{mt}^{h}P_{m}^{h}+\sum_{t=1}^{T}\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{L_n}\sum_{h_{n\,min}}^{h_{n\,max}} c_{nlt}^{h}P_{nlt}^{h}, \tag{3.13}$$

де c_{mt}^{h}, c_{nlt}^{h} – питомі експлуатаційні витрати (включно з паливом) для певної кількості годин роботи (h_m, h_n), які змінюються ступенями від h_{min} до h_{max}. Для кожного варіанта спорудження нових станцій буде відповідати окреме значення c_{nlt}^{h}, яке буде відрізнятись від інших варіантів. Обмеження визначаються виходячи із умови забезпечення покриття максимуму навантаження і виробництва електроенергії.

Для ліній електропередач приведені витрати на спорудження і експлуатацію в різних варіантах реалізації можуть бути прийнятими:

- при $t<t_в$ дорівнюють 0;
- при $t=t_в$ дорівнюють $a_{ijl} + b_{ijl}P_{ijlt}$;
- при $t>t_в$ дорівнюють $З_{ijl}P_{ijl}$,

де $З_{ijl}$ – експлуатаційні витрати разом з втратами електроенергії (для існуючих ліній вищевказана формула є вельми приблизною і базується на припущенні незмінності потоків потужності в цих мережах); P_{ijl} – максимальна потужність, яка дорівнює пропускній спроможності лінії.

Поряд з обмеженнями $\sum_{t=1}^{T} x_{ijlt} \le 1$ і $\sum_{t=1}^{T}\sum_{l=1}^{L} x_{ijlt}P_{ij\,max} \ge P_{ijlt}$ є обмеження по балансу потужності в вузлах (виконання І-го закону Кірхгофа). Невідомими у вищенаведеній задачі є: $x_{nlt}, \Delta P_{nlt}, h_{mt}, h_{nt}, x_{ijlt}, P_{ijl}$. Величини x_{nlt}, x_{ijlt} є цілочислові і приймають значення 0 або 1.

Завдання для самостійної роботи

1. Поясніть смисл таких термінів та понять:

- який розв’язок називається допустимим для задачі цілочислового програмування?
- чим відрізняється допустимий розв’язок від оптимального?
- які змінні отримали назву булевих?
- наведіть приклади математичних моделей електроенергетичних задач з булевими змінними;
- чим відрізняються між собою задачі частково цілочислового програмування і задачі цілковито цілочислового програмування?
- запропонуйте електроенергетичні екстремальні задачі з цілочисловими змінними.

2. Знайдіть максимум функції $3x_1 – x_2$ при обмеженнях:

$$3x_1 – 2x_2 \le 3$$
$$-5x_1 – 4x_2 \le -10$$
$$2x_1 + x_2 \le 5,$$

де $x_j \ge 0$, j = 1,2 – цілі числа.

3. Знайдіть мінімум функції $3x_1 + x_2$ при обмеженнях:

$$2x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$2x_1 – 3x_2 \le 3,$$

де $x_j \geq 0$, $j = 1,2$ – цілі числа.

4. Знайдіть мінімум функції $3x_1 + 5x_2$ при обмеженнях:

$$1{,}5x_1 + 2x_2 \geq 2$$
$$7x_1 + 2x_2 \leq 7,$$

де $x_j \geq 0$, $j = 1,2$ – цілі числа.

5. При визначенні розв'язку задачі в неперервних змінних у підсумковій симплекс-таблиці система обмежень в стандартній формі має такий вигляд:

$$x_1 = \tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{3}{4}x_3 + x_6$$
$$x_4 = \tfrac{1}{2} - x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{3}{2}x_6$$
$$x_5 = \tfrac{7}{4} - \tfrac{5}{2}x_2 - \tfrac{7}{2}x_3 + \tfrac{3}{2}x_6$$

Сформулюйте і запишіть наступне відтинання, яке треба додати до наведених обмежень.

Розділ 4 ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

4.1 Загальна постановка задачі нелінійного програмування

Задача нелінійного програмування формулюється таким чином: визначити вектор $\boldsymbol{X}^T = (x_1 \; x_2 \; \dots \; x_n)$ *, який є розв'язком задачі*

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{X}) \to max(min) \\ g_i(\boldsymbol{X}) \ge 0 \;\; i = 1,2,\dots,m \\ h_j(\boldsymbol{X}) = 0 \;\; j = 1,2,\dots,p \\ \boldsymbol{X} \in E^n \end{cases} \tag{4.1}$$

за умови, що хоча б одна із функцій $f(\boldsymbol{X})$, $g_i(\boldsymbol{X})$ *або* $h_j(\boldsymbol{X})$ *є нелінійною, де* E^n *–* n*-мірний евклідовий простір.*

Задачі нелінійного програмування мають більш загальний характер у порівнянні з задачами лінійного програмування і виникають у різних сферах суспільного виробництва (енергетика, управління, економіка, наука тощо). Застосування нелінійних функцій дозволяє здійснити точне моделювання реальних задач і, як наслідок, отримати кращі розв'язки.

Приклад. 4.1. Визначити вектор $\mathbf{X}^т = (x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4)$, що обертає в мінімум функцію

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{X}) = x_1^2 + 4x_1e^{x_2} + x_2x_3x_4^2 \to \min \\ h_1(\boldsymbol{X}) = 2 + 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ g_1(\boldsymbol{X}) = 3 + x_1 + x_2 + x_3 + \dfrac{3}{x_4} \ge 0 \\ g_2(\boldsymbol{X}) = 1 + 2x_1 - x_2 + x_3^2 + 4e^{x_4} \le 100 \\ g_3(\boldsymbol{X}) = x_1 \ge 0 \\ g_4(\boldsymbol{X}) = x_2 \ge 0 \\ g_5(\boldsymbol{X}) = x_3 \ge 0 \\ g_6(\boldsymbol{X}) = x_4 \ge 1 \end{cases} . \tag{4.2}$$

Ця задача має нелінійну цільову функцію і два нелінійних обмеження.

Так само, як і для задач лінійного програмування в задачі (4.1) можна здійснити перехід від пошуку умов, що забезпечують максимум f(**X**), до пошуку її мінімуму. Для цього необхідно f(**X**) помножити на -1.

4.2 Увігнуті і опуклі множини та функції

Вирішенню задачі нелінійного програмування повинно передувати дослідження математичного виду співвідношень, які входять до моделі (4.1). Проведення такого аналізу передбачає встановлення опуклості, увігнутості або багатоекстремальності цільової функції, а також аналогічних характеристик множини, що задається обмеженнями. Увігнутість функцій є особливо важливою властивістю в задачах нелінійного програмування, бо дозволяє отримати, при наявності необхідних умов, достатні умови оптимальності точки X.

Введемо декілька визначень.

Градієнт функції $\nabla f(\boldsymbol{X})$ *- це вектор* n *– мірного простору, кожна i-а компонента якого дорівнює* $\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_i}$*:*

$$\nabla f(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Градієнт визначає напрямок зростання цільової функції. Наприклад, для довільно заданого напрямку d $\nabla f(\mathbf{X})^T d$ характеризує миттєву швидкість зміни функції f(**X**) вздовж напрямку d. Якщо градієнт не дорівнює нулю, то він завжди вказує на такий напрямок, незначний крок пересування по якому буде збільшувати функцію f(**X**).

*Гесіан функції f(**X**)- це квадратна симетрична матриця Гесе других частинних похідних, "ij" елемент якої дорівнює* $\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{X})}{\partial x_i \partial x_j}$*,*

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{X})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{X})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{X})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{X})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{X})}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{X})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ & \dots & & \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{X})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{X})}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{x}_n^2} \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Локальний мінімум (максимум) – це точка в околі якої немає інших точок, які задовольняють обмеженням задачі і надають цільовій функції менших (більших) значень.

Якщо неперервна функція на замкнутій обмеженій множині в E^n містить в собі декілька локальних мінімумів (максимумів), то найменший (найбільший) з них називається *глобальним*.

За певних умов локальні оптимуми можуть збігатися з глобальними. Така ситуація має місце для опуклих або увігнутих функцій, що розглядаються на опуклих множинах в евклідовому просторі.

Ідентифікувати опуклість функцій можна різними способами:

- через значення функцій для деяких аргументів;
- з використанням матриці Гесе.

Опуклі множини мають особливу властивість, пов'язану з тим, що відрізок прямої, який з'єднує будь-які дві точки множини, також належить цій множині. таким чином, множина с називається опуклою, якщо будь-яка комбінація точок із с належить с. або

$$\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \in C \quad \text{для} \quad 0 \le \lambda \le 1 \quad \text{I} \quad X_1, X_2 \in C \ . \tag{4.5}$$

*функція f(**x**) називається опуклою на не порожній опуклій множині s, якщо для будь-яких точок* $x_1, x_2 \in S$ *і будь-якого* $0 \le \lambda \le 1$ *правильною є нерівність*

$$f\left[\lambda\, x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \le \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \tag{4.6}$$

Приклади опуклих множин та функцій наведено на рис. 4.1.

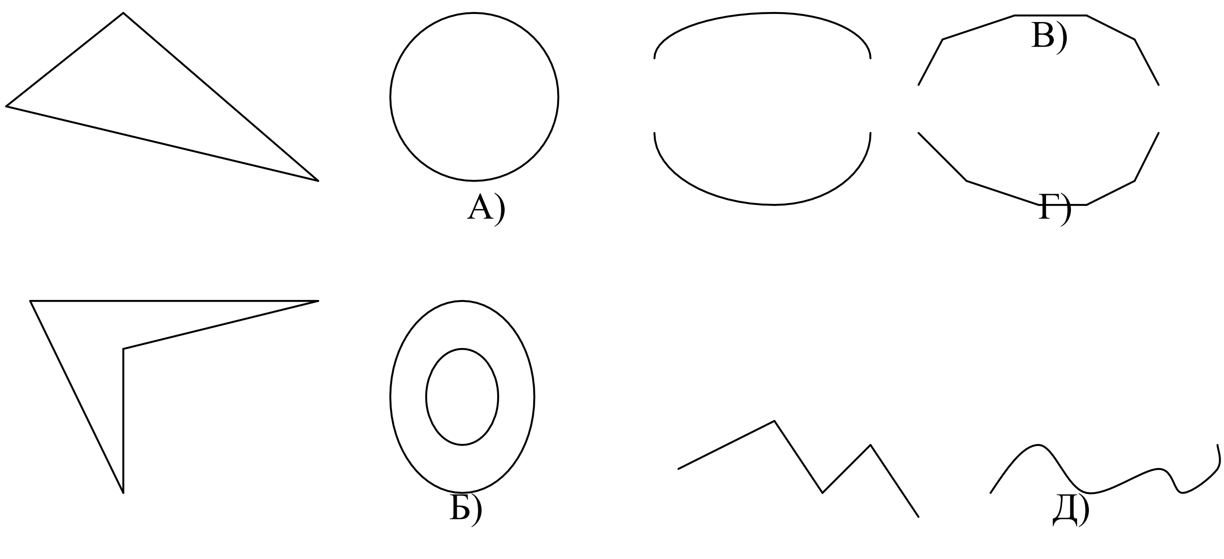


Рисунок 4.1 - опуклі множини і функції
а – опуклі множини; б – не опуклі множини; в – увігнуті функції; г – опуклі функції; д – функції, які не є ні увігнутими ні опуклими

Неперервна диференційована функція f(**x**) для $\mathbf{X} \in S$ буде опуклою, якщо для будь-яких $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in S$ має місце нерівність

$$f(\mathbf{X}_2) \ge f(\mathbf{X}_1) + (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)^T \cdot \nabla f(\mathbf{X}_1) \ . \qquad (4.7)$$

Якщо функція f($\mathbf{x}$) двічі неперервна диференційована для $\mathbf{X} \in S$, то вона буде опуклою у випадку існування додатної напіввизначеної симетричної матриці Гесе

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{H}\mathbf{Y} \ \ge \ 0 \qquad (4.8)$$

для будь-якого ненульового вектора $\mathbf{y}$.

Відрізняють поняття опуклості і строгої опуклості функцій.

Функція f($\mathbf{x}$) буде *строго опуклою*, якщо співвідношення (4.7) або (4.8) виконуються як строгі нерівності. увігнутість - поняття в певному значенні протилежне поняттю опуклості.

Функція f($\mathbf{x}$) називається увігнутою на опуклій множині s, якщо функція –f($\mathbf{x}$) є опуклою на S.

Показовим прикладом опуклого функціонала, визначеного на множині e^2, є функція схожа на піалу (рисунок 4.1,г). для такого функціонала визначають мінімум. перегорнута догори дном піала, є увігнутим функціоналом, тобто таким, що має максимум. лінійна функція є одночасно і увігнутою і опуклою.

При дослідженні математичного виду задачі (4.1) дуже важливою є теорема, в якій доводиться, що перетин кінцевої кількості опуклих множин завжди утворює опуклу множину $S = \bigcap S_i$, s також буде опуклою, якщо s_I | I=1,2... – опуклі.

Пошук екстремуму опуклої (увігнутої) цільової функції на опуклій множині допустимих рішень s, завжди гарантує отримання глобального оптимуму.

Приклад 4.2. Перевірити опуклість наступного функціонала:

$$f(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 - 2{,}95x_1 + 4{,}4x_2 - 4{,}6x_3 + 10{,}5 \to \min$$

Розв'язування. виберемо $\mathbf{X}_1$ I $\mathbf{X}_2 \in S$.

нехай $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$; $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. приймемо $\lambda = 0{,}1$.

у відповідності з (4.6) маємо

$$f\left[0{,}1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} + (1-0{,}1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \le 0{,}1 f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} + (1-0{,}1) f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Розрахуємо ліву частину цієї нерівності.

$$f\begin{pmatrix}0{,}9\\1{,}9\\0{,}08\end{pmatrix}=2\cdot 0{,}9^2+2\cdot 1{,}9^2+2\cdot 0{,}08^2-0{,}9\cdot 1{,}9-0{,}9\cdot 0{,}08-1{,}9\cdot 0{,}08-2{,}95\cdot 0{,}9+$$

$$+4{,}4\cdot 1{,}9-4{,}6\cdot 0{,}08+10{,}5=22{,}89$$

$$0{,}1\cdot f\begin{pmatrix}0\\1\\0{,}8\end{pmatrix}=0{,}1\cdot(2+2\cdot 0{,}8^2-0{,}8+4{,}4-4{,}6\cdot 0{,}8+10{,}5)=1{,}37\,;$$

$$(1-0{,}1)f\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=0{,}9(2+8-2-2{,}95+2\cdot 4{,}4+10{,}5)=21{,}91\,;$$

$$22{,}89<1{,}37+21{,}91=23{,}28\ .$$

Тепер перевіримо опуклість функції f(**x**) за допомогою співвідношення (4.8).

Нехай $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, тоді

$$\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\-1 & 4 & -1\\-1 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=6>0\ . \qquad (4.9)$$

У відповідності з отриманим результатом (4.9) маємо додатну величину,.6>0 і, як наслідок, додатно визначену матрицю Гесе. Таким чином, можна стверджувати, що функція f(**x**), яка досліджується, є опуклою і має мінімум.

В результаті таких попередніх розрахунків, щодо з'ясування математичного виду співвідношень в задачі нелінійного програмування (4.1), можна зробити висновок про можливість отримання оптимуму і коректність сформульованої задачі.

4.3 Ідентифікація оптимальної точки. Необхідні і достатні умови оптимальності для задач нелінійного програмування з обмеженнями (умови куна-такера)

Необхідні умови існування екстремуму для диференційованих функцій відомі з курсу вищої математики. так, якщо функція f(**x**) є диференційованою функцією і $\mathbf{x}^*$ - екстремум, то

$$\nabla f(\mathbf{X}^*)=0\ , \qquad (4.10)$$

де $\nabla f(\mathbf{X}^*)$ - градієнт функції f(**x**) в точці $\mathbf{X}^*$.

Ідентифікація екстремуму для задач нелінійного програмування з обмеженнями на відміну від задач без обмежень (4.10) потребує виконання більшого кола умов і створює додаткові труднощі. визначення екстремальної (оптимальної) точки в задачах нелінійного програмування здійснюється на основі перевірки відповідності точки $\mathbf{X}^*$ умовам Куна-Такера. Умови Куна-Такера узагальнюють висновок (4.10) на задачі з обмеженнями. За своїм змістом вони стверджують, що для задачі (4.1) при здійсненні руху від точки $\mathbf{X}^*$ в будь-якому напрямку, доки точка $\mathbf{X}$ залишається в допустимій множині S, цільова функція не може збільшуватись. Ці умови базуються на лемі, яка має строге доведення того, що для оптимальної точки задачі нелінійного програмування $\mathbf{X}^*$ обов'язково виконується співвідношення

$$\nabla f(\mathbf{X}^*)^{\mathrm{T}} d \le 0 \quad \text{для всіх} \quad d \in D(\mathbf{X}^*), \tag{4.11}$$

де d – можливий напрямок в точці $\mathbf{X}^*$, якій притаманні такі властивості, як $\mathbf{X} + \tau d$ знаходиться в допустимій множині s для всіх достатньо малих τ. величина τ є невід'ємною ($\tau \ge 0$) і знаходиться в інтервалі $0 \le \tau \le 1$. з математичної точки зору напрямок d є можливим в точці $\mathbf{X}$=$\mathbf{X}^1$, якщо для будь-якого τ наступна точка належить допустимій множині $(\mathbf{X}^1 + \tau d) \in S$. множина всіх можливих напрямків в точці $\mathbf{x}^1$ позначається через d($\mathbf{x}^1$).

$$D(\mathbf{X}^1) = \left\{ d \middle| \exists \tau \ge 0 \ni 1 \ge \tau \ge 0 \Rightarrow \mathbf{X}^1 + \tau d \in S \right\} \quad . \tag{4.12}$$

Символи алгебри множин в (4.12) читаються таким чином: напрямок d належить D($\mathbf{x}^1$), якщо можна пересуватись від точки $\mathbf{X}^1$ на невелику відстань в напрямку d, залишаючись у допустимій множині S, (рис. 4.2). тут символ $\exists$- означає «існує», $\ni$ - «таке, що», а символ $\Rightarrow$ означає «виходить».

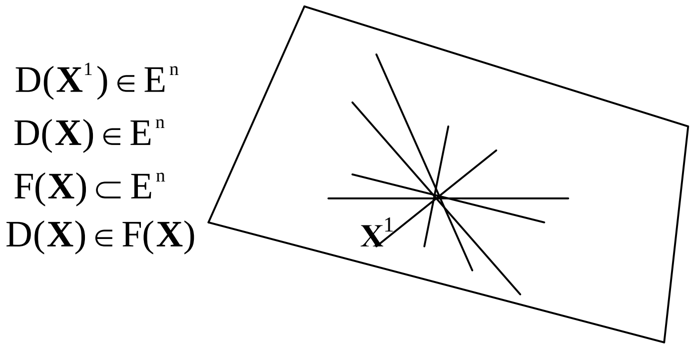


Рисунок 4.2 - Приклад можливих напрямків в точці $\mathbf{X}^1$

Через D($\mathbf{X}$) – позначена множина можливих напрямків в довільній точці $\mathbf{X}$. Символ $\subset$ означає «міститься в ...».

Розглянемо задачу нелінійного програмування з обмеженнями у вигляді нерівностей і рівностей, яка полягає у визначенні max f($\mathbf{X}$) при обмеженнях:

$$g_i(\mathbf{X}) \ge 0, \quad i = 1,2,...,m,$$

$$g_i(\mathbf{X}) = 0, \quad i=m+1,\dots,p,$$

де всі функції є диференційованими.

Нехай $\mathbf{X}^*$ - оптимальна точка (розв'язок). Тоді правильними є наступні три твердження:

1) $\mathbf{X}$ – допустима точка. Існують множники $\lambda_i \ge 0$, i = 1,2,...,m та необмежені за знаком множники λ_i, i = m+1, m+2, …, p, такі, що

2) $\lambda_i g_i(\mathbf{X}^*) = 0$, i =1, 2,..., m.

3) $\nabla f(\mathbf{X}^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{X}^*) = 0$.

Треба звернути увагу на те, що невід'ємні множники відповідають обмеженням-нерівностям, тоді як множники для обмежень-рівнянь допускаються від'ємними, додатними або нульовими. Умови Куна-Такера (2) відносяться до обмежень нерівностей.

Умови (1) –(3) називаються умовами Куна-Такера. За своїм змістом ці умови замінюють твердження про те, що $\mathbf{X}^*$- оптимальна точка, рівняннями і нерівностями. Умови Куна-Такера є еквівалентними (але більш строгими) лемі Фаркаша у відповідності з якою $\mathbf{X}^*$ - оптимум, якщо $\nabla f(\mathbf{X}^*)^T d \le 0$ для всіх $d \in D(\mathbf{X}^*)$.

Таким чином, умови Куна-Такера точно визначають математичне формулювання наступної інтуїтивної концепції: в будь-якому можливому напрямку похідна $f(\mathbf{X})$ за напрямком повинна вказувати на зменшення цільової функції.

Умови Куна-Такера є необхідними, але не достатніми для визначення оптимальності точки $\mathbf{X}^*$. Для того, щоб точка $\mathbf{X}^*$ була оптимальною точкою, необхідне, по-перше, виконання умов Куна-Такера, а по-друге – щоб функція $f(\mathbf{X})$ була увігнутою, а функції $g_i(\mathbf{X})$-опуклими. Ці додаткові умови визначають достатність ідентифікації точки $\mathbf{X}^*$, як оптимальної точки.

4.4 Метод безпосередньої лінійної апроксимації

Велика група оптимізаційних задач електроенергетики ставиться у вигляді екстремальних моделей, які мають квадратичну цільову функцію і лінійні обмеження. Такі моделі створюють за своєю структурою задачі нелінійного програмування, що отримали назву задач квадратичного програмування. Для розв'язування задач квадратичного програмування існує достатньо велика кількість методів. Серед них одним із найбільш відомих є метод, який був запропонований Франком і Вулфом для розв'язування задач наступного виду:

$$\max \{f(\mathbf{X}) \,|\, \mathbf{AX} = \mathbf{B};\ x_i \ge 0\}, \qquad (4.13)$$

де $\mathbf{A}$ – матриця коефіцієнтів при змінних в обмеженнях задачі розміром $(m \times n)$; $\mathbf{B}$ – стовпцева матриця, яка складена із вільних членів обмежень, розміром $(m \times 1)$; $\mathbf{X}$ – вектор змінних.

Найбільш простим підходом при розв'язування таких задач є лінійна апроксимація квадратичної цільової функції членами першого порядку у відповідному розкладанні в ряд Тейлора навколо точки $\mathbf{X}^k$, що розглядається.

Розкладання f($\mathbf{X}$), яка має неперервні похідні n-го порядку, в ряд Тейлора здійснюється за формулою:

$$f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}^k) + \frac{f'(\mathbf{X}^k)}{1!}\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{X}^k)^1 + \ldots + \frac{f^n(\mathbf{X}^k)}{n!}\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{X}^k)^n. \qquad (4.14)$$

В цьому випадку для даної допустимої точки $\mathbf{X}^k$, $\mathbf{Y}^k$ буде розв'язком задачі лінійного програмування, яка має ті ж самі обмеження, що і задача (4.13), а цільова функція є лінійною апроксимацією f($\mathbf{X}$) в точці $\mathbf{X}^k$:

$$f_l(\mathbf{Y}) = f(\mathbf{X}^k) + \nabla f(\mathbf{X}^k)^T\cdot(\mathbf{Y}-\mathbf{X}^k). \qquad (4.15)$$

Напрямок для пошуку більшого значення цільової функції обирають з наступного виразу:

$$d^k = \mathbf{Y}^k - \mathbf{X}^k.$$

Таким чином, шляхом використання симплекс-алгоритму лінійного програмування, при фіксованому $\mathbf{X}^k$ можна визначити $\mathbf{Y}^k$ наступної підзадачі:

$$\max\{f(\mathbf{X}^k) + \nabla f(\mathbf{X}^k)^T\ (\mathbf{Y}-\mathbf{X}^k)\ \big|\ \mathbf{AY} = \mathbf{B};\ y_i \geq 0\}. \qquad (4.16)$$

В зв'язку з тим, що деякі члени цільової функції (4.16) є постійними, то алгоритм розв'язує більш просту, але еквівалентну, підзадачу лінійного програмування:

$$\max\{\nabla f(\mathbf{X}^k)^T\ \mathbf{Y}\ \big|\ \mathbf{AY} = \mathbf{B};\ y_i \geq 0\}, \qquad (4.17)$$

де $\mathbf{X}$ - фіксована допустима точка; $\mathbf{Y}$ – вектор змінних лінерізованої функції; y_i – змінна.
Після визначення напрямку оптимізації за виразом: $d^k = \mathbf{Y}^k - \mathbf{X}^k$, можна отримати наступну точку $\mathbf{X}^{k+1}$:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \tau(\mathbf{Y}^k - \mathbf{X}^k),$$

де τ - довжина кроку в напрямку вектора d, яка визначається за формулою:

$$\max f(\mathbf{X}^{k+1}) = \max\left[f(\mathbf{X}^k + \tau^k d^k)\right], \text{ де } \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Процес розв'язування закінчується в точці $\mathbf{X}^*$, в якій для деякої точки $\mathbf{Y}^*$ підзадачі (4.17) виконуються умови Куна–Такера.

$$\nabla f(\mathbf{X}^*)^T\ (\mathbf{Y}^* - \mathbf{X}^*) \leq 0.$$

Блок-схема обчислювального процесу алгоритму безпосередньої лінійної апроксимації наведена на рис. 4.4. Графічна ілюстрація процесу розв'язування зображена на рис. 4.3. Точка "a" визначає безумовний максимум функції $f(\mathbf{X})$, а овали – це лінії рівня функції $f(\mathbf{X})$. Областю допустимих рішень є прямокутник b, c, d, e. Графічно показана процедура отримання точок $\mathbf{X}^1$, $\mathbf{X}^2$, $\mathbf{X}^3$. Із рисунка видно, що послідовність точок $\mathbf{X}^1,...,\ \mathbf{X}^k$ збігається до точки $\mathbf{X}^\infty$, яка представляє собою розв'язок задачі. Треба звернути увагу на те, що точка $\mathbf{X}^\infty$ створює зигзагоподібний рух до точки $\mathbf{X}^\infty$. Ця обставина дещо сповільнює збіжність.

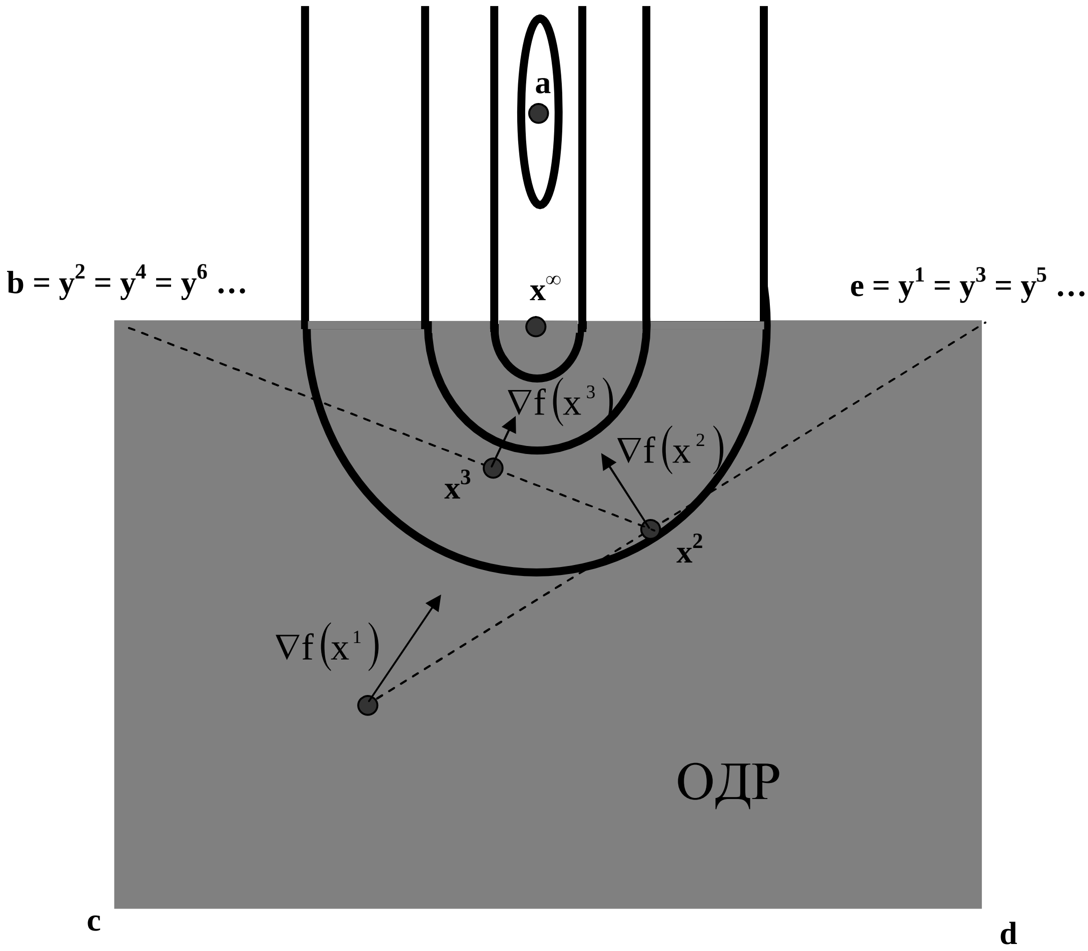


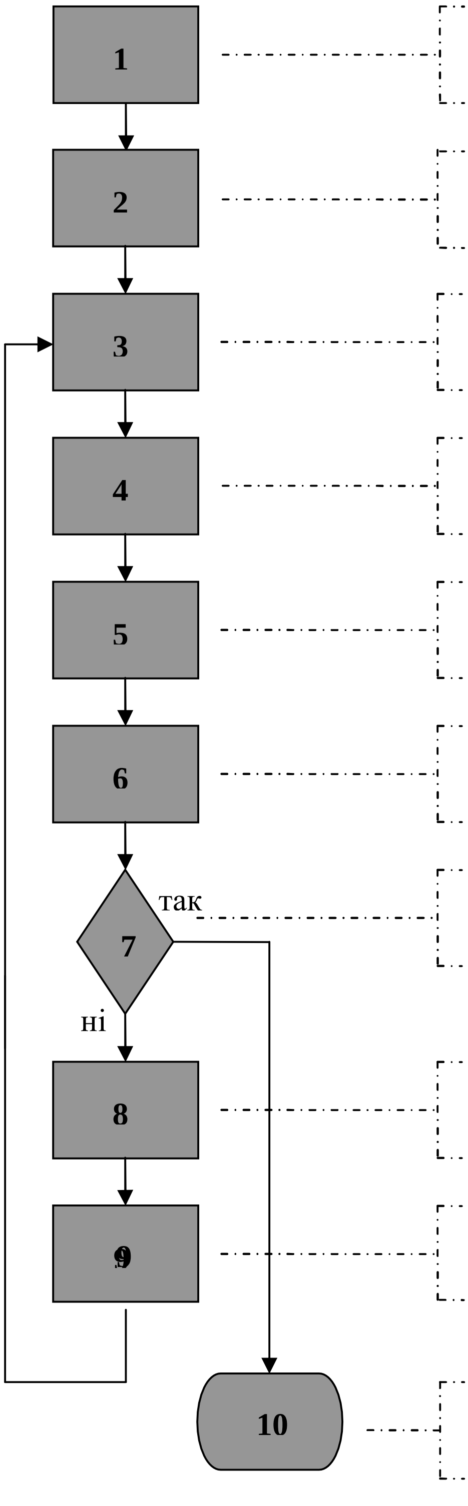
Рисунок 4.3 - Графічне зображення процесу розв'язування за алгоритмом безпосередньої лінійної апроксимації

Не дивлячись на сповільнення швидкості збіжності до оптимальної точки на кінцевих ітераціях, простота цього методу обумовила його широке застосування для розв'язування задач квадратичного програмування.

Приклад 4.3. Виконати одну ітерацію наступної задачі квадратичного програмування:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_1^2 - 2x_2^2 - 0{,}25x_3^2 \to \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_i \ge 0;\ \ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Розв’язування. Зробимо спочатку деякі перетворення цільової функції і обмеження. Загальна кількість компонент вектора керованих змінних n дорівнює 3, а



Формулюється задача квадратичного програмування і визначається опорний розв’язок в точці $\mathbf{X}^0$.

Складається вектор-градієнт цільового функціонала - $\nabla f(\mathbf{X})$.

Розраховується вектор-градієнт для пробної точки $\nabla f(\mathbf{X}^k)$.

Формалізується задача лінійного програмування $\max\left\{\nabla f\left(\mathbf{X}^k\right)^T \mathbf{Y} \middle| \mathbf{AY} = \mathbf{B}\right\}$

Знаходиться розв’язок задачі лінійного програмування.

Визначається напрямок оптимізації для k-ої ітерації $d^k = \mathbf{Y}^k - \mathbf{X}^k$.

Градієнт $\nabla f(\mathbf{X}^k)^T d^k \leq 0$?

Знаходиться крок оптимізації $\tau^k = \max f(\mathbf{X}^k + \tau d^k)$.

Знаходиться точка наступного пробного розв’язку $\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \tau^k d^k$.

$\mathbf{X}^k$ – розв’язок задачі. Кінець.

Рисунок 4.4 – Алгоритм 4.1. Алгоритм безпосередньої лінійної апроксимації

кількість обмежень – m=1. Визначаємо кількість вільних $(k = n - m)$ і базисних змінних - m.

$$k = 3 - 1 = 2, \quad \text{а} \quad m=1.$$

Нехай x_1 і x_2 будуть вільними змінними, а x_3- базисною. Виразимо базисну змінну x_3 через вільні змінні x_1 і x_2. В результаті отримаємо:

$$x_3 = 4 - x_1 - 2x_2 .$$

Виключимо x_3 з $f(\mathbf{X})$:

$$f(\mathbf{X}) = 6x_1 + 4x_2 + 2(4 - x_1 - 2x_2) - 3x_1^2 - 2x_2^2 - 0{,}25(4 - x_1 - 2x_2)^2 =$$
$$4 + 6x_1 + 4x_2 - 3{,}25x_1^2 - 3x_2^2 - x_1x_2 \rightarrow \max$$

Визначимо початковий опорний план $\mathbf{X}^0 = (0\ 0\ 4)^T$ і градієнт цільової функції в аналітичному вигляді:

$$\nabla f(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 6 - 6{,}5x_1 - x_2 \\ 4 - 6x_2 - x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для точки $\mathbf{X}^0 = (0\ 0\ 4)^T$ градієнт $\nabla f(\mathbf{X})$ в точці $\mathbf{X}^0$ буде складати:

$$\nabla f(\mathbf{X}^0) = (6\ 4\ 0)^T$$

Сформуємо задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 6y_1 + 4y_2 \rightarrow \max \\ y_3 = 4 - y_1 - 2y_2 \\ y_i \ge 0;\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Оптимальним розв’язком цієї задачі лінійного програмування є такий:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^0 = (4\ 0\ 0)^T.$$

Визначаємо напрямок подальшої оптимізації:

$$d^0 = \mathbf{Y}^0 - \mathbf{X}^0 = (4\ 0\ 0)^T - (0\ 0\ 4)^T = (4\ 0\ -4)^T.$$

Перевіряємо виконання умов Куна-Такера для точки X^0.

$$\nabla f(\mathbf{X}^0)^T d^0 = (6\ 4\ 0)\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 24 > 0.$$

Умови Куна-Такера не виконуються, тому продовжуємо пошук оптимуму. Визначимо довжину кроку τ уздовж напрямку оптимізації на основі такого виразу:

$$\tau_0 = \max_{\tau} f(\mathbf{X}^0 + \tau d^0) = \max f\left[(0 \quad 0 \quad 4) + \tau(4 \quad 0 \quad -4)\right] =$$
$$= \max f(4\tau \quad 0 \quad 4 - 4\tau);$$

$$f(\tau) = 24\tau + 8 - 8\tau - 48\tau^2 - 0{,}25(4 - 4\tau)^2;$$

$$\frac{\partial f(\tau)}{\partial \tau} = 24 - 8 - 96\tau + 8 - 8\tau = 0; \qquad \tau = \tau_0 = 0{,}23.$$

У відповідності з алгоритмом визначимо координати наступної пробної точки:

$$\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^0 + \tau^0 d^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}23 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}92 \\ 0 \\ 3{,}08 \end{pmatrix}.$$

Цільова функція f(**X**) в новій точці має значення:

$$f(\mathbf{X}^1) = 4 + 6 \cdot 0{,}92 - 3{,}25 \cdot 0{,}92^2 = 6{,}77.$$

Попереднє значення функції f(**X**) в точці $\mathbf{X}^0$ складало $f(\mathbf{X}^0)=4$. Таким чином, має місце зростання значення критеріальної функції, що відповідає постановці задачі.

Тепер перевіримо умову виконання обмежень задачі в точці $\mathbf{X}^1$: 3,08 = 4 - 0,92. Умова виконується, тобто розрахунки на першій ітерації проведені правильно.

4.5 Методи штрафних функцій

Окрему групу оптимізаційних методів утворюють методи штрафних функцій. Ці методи є універсальними і можуть бути застосовані для розв’язування, як задач лінійного, так і задач нелінійного програмування. Вони вперше були запропоновані Р.Курантом, потім досліджувались і отримали подальший розвиток в роботах А.Фіакко і Г.Мак-Корміка, У.Зангвіла, Д.Хімельблау і інших вчених-математиків.

Головна ідея методів штрафних функцій полягає в перетворенні початкової задачі нелінійного програмування з обмеженнями в послідовність екстремальних задач безумовної оптимізації (екстремальних задач при відсутності обмежень). Позбавлення задачі нелінійного програмування обмежень здійснюється за рахунок застосування допоміжних параметричних функцій, які дозволяють залучити обмеження до цільової функції і розглядати задачу оптимізації, як послідовність екстремальних задач при відсутності обмежень. Такий підхід знаходиться в основі методу невизначених множників Лагранжа, який є окремим випадком методу штрафних функцій.

Розглянемо суть методів штрафних функцій більш детально. Сформулюємо задачу нелінійного програмування наступним чином:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) \to \min; \\ \mathbf{X} \in C; \\ C \subset E^n, \end{cases} \tag{4.19}$$

де E^n - n-мірний евклідовий простір; f(**X**) – неперервна диференційована функція в E^n; C – замкнена множина в E^n.

Нехай множина C задається обмеженнями виду:

$$g_i(\mathbf{X}) \ge 0, \quad i = 1,2,...,m. \tag{4.20}$$

Введемо до розгляду функцію G($\mathbf{X}$), яка є розривною з наступними значеннями:

$$G(\mathbf{X}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{X} \in C; \\ \infty, & \mathbf{X} \notin C. \end{cases} \tag{4.21}$$

Створимо модифіковану функцію:

$$\Phi(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + G(\mathbf{X}) \tag{4.22}$$

і спрямуємо її до мінімуму.

Вектор $\mathbf{X}^*$, який є оптимумом для задачі (4.21) у евклідовому просторі E^n, одночасно також буде розв'язком задачі (4.19). Це видно із того, що функція G($\mathbf{X}$) додає нескінченно великий штраф за вихід поза межі допустимої області C. На жаль, ускладнення, пов'язані з розривним характером функції G($\mathbf{X}$), не дозволяють використовувати функцію G($\mathbf{X}$) безпосередньо у вигляді (4.21). Тому здійснюють апроксимацію G($\mathbf{X}$), деякими неперервними функціями $P(r_k, \mathbf{X})$, які залежать від параметра r_k.

Розглянемо, як приклад, штрафний функціонал наступного вигляду:

$$P(r_k,\mathbf{X}) = r_k \sum_i g_i(\mathbf{X})^{-1} \quad | \quad r_k > 0. \tag{4.23}$$

Якщо будь-яке обмеження $g_i(\mathbf{X})$ початкової задачі нелінійного програмування (4.20) наближається до нуля $g_i(\mathbf{X}) \to 0$, тобто виходить на межу множини C, то штрафний функціонал (4.23) буде прямувати до нескінченності. Таким чином, утворюється перешкода виходу точки $\mathbf{X}$ за межі допустимої області в результаті необмеженого зростання величини штрафу у вигляді функціонала (4.23). Пошук оптимального розв'язку задачі (4.19) здійснюється шляхом мінімізації модифікованого функціонала

$$\Phi(r_k, \mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + P(r_k, \mathbf{X}) \tag{4.24}$$

при спадній послідовності $r_k \, (r_{k+1} < r_k, \ \lim r_k = 0)$. Послідовність екстремальних точок $\mathbf{X}^k$ для кожного конкретного значення параметра r_k при $k \to \infty$ збігається до оптимального рішення $\mathbf{X}^*$.

За допомогою штрафного функціонала (4.23) здійснюється запобігання виходу точок $\mathbf{X}$ за межі допустимої області C. Тому такий штрафний функціонал відносять до групи методів, які отримали назву методи внутрішніх штрафних функцій. Також існує інша група методів штрафних функцій, які використовують апроксимацію $G(\mathbf{X})$ і сприяють наближенню точки $\mathbf{X}$ до множини C, з боку неприпустимої області. Ця група методів отримала назву методів зовнішніх штрафних функцій. Як приклад, розглянемо функціонал наступного вигляду:

$$F(r_k, \mathbf{X}) = r_k^{-1} \sum_i \min[g_i(\mathbf{X}), 0]^2. \qquad (4.25)$$

При обмеженнях (4.20) штрафний функціонал (4.25) буде дорівнювати нулю, якщо точка $\mathbf{X}$, знаходиться у допустимій множині C, $(\mathbf{X} \in C)$. І навпаки, якщо точка $\mathbf{X}$ знаходиться поза межами допустимої множини **C** $(\mathbf{X} \in C)$, то при використанні в розрахунках спадної послідовності параметра r, $r_{k+1} < r_k$ і $\lim r_k = 0$, буде отримане необмежене велике значення штрафу $F(r_k, \mathbf{X}) \to \infty$. Кожному конкретному значенню параметра r_k буде ставитись у відповідність екстремальна точка $\mathbf{X}^k$, послідовність яких остаточно збігається до оптимального розв'язку $\mathbf{X}^*$.

Найбільш поширеною групою методів є така, що одночасно використовує внутрішні і зовнішні штрафні функції. Вони мають назву комбінованих штрафних функцій.На рис. 4.5 і 4.6 наведена графічна ілюстрація зовнішніх і внутрішніх функцій штрафу.

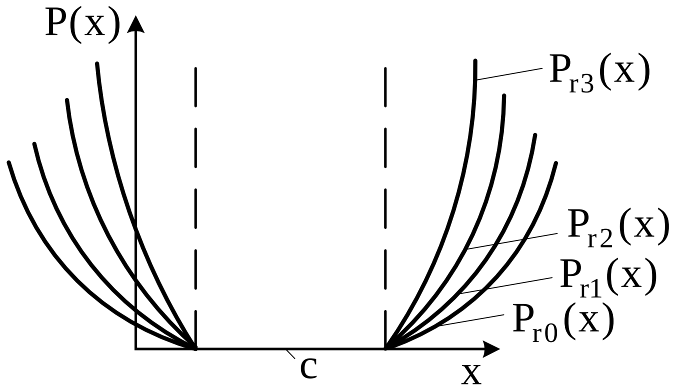


Рисунок 4.5 - Графічна ілюстрація зовнішніх функцій штрафу

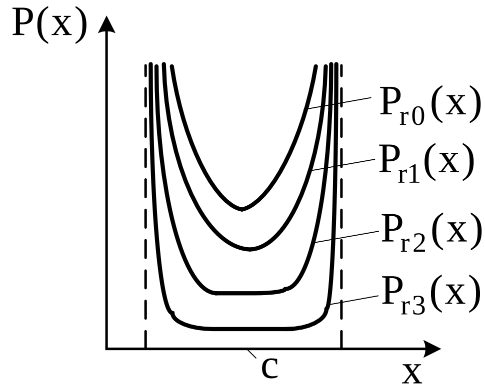


Рисунок 4.6 – Графічна ілюстрація внутрішніх функцій штрафу

Перетворення задачі (4.19) в задачу (4.22) за своєю суттю визначає перехід від задачі умовної оптимізації із врахуванням обмежень до задачі безумовної оптимізації, в якій обмеження відсутні. Для пошуку екстремуму в задачах безумовної оптимізації застосовуються градієнтні методи, до яких відносяться метод найшвидшого спуску (метод Коші) і метод Ньютона. Градієнтні методи здійснюють пошук стаціонарної точки $\mathbf{X}^*$, яка визначається виразом $\nabla f(\mathbf{X}^*) = 0$. Відмінність між методом найшвидшого спуску і методом Ньютона полягає в тому, що перший застосовує перші частинні похідні, а другий – другі похідні.

В методі найшвидшого спуску визначення $\mathbf{X}^k$ на кожній наступній ітерації здійснюється за формулою:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \tau^k \nabla f(\mathbf{X}^k), \tag{4.26}$$

де τ^k - довжина кроку, що локально мінімізує функцію $f(\mathbf{X})$ в напрямку $d^k = -\nabla f(\mathbf{X}^k)$, якщо за вихідну точку прийняти $\mathbf{X}^k$.

Разом з цим, метод найшвидшого спуску має ряд недоліків, які обмежують його застосування для розв'язування задач нелінійного програмування при відсутності обмежень. Основними є такі:

1) невелика швидкість збіжності, яка дуже тісно залежить від графіка і характеру функції $f(\mathbf{X})$;

2) кожна наступна ітерація виконується незалежно від інших, тобто інформація, яка б могла прискорити збіжність, не накопичується і не використовується.

Метод Ньютона має певну перевагу проти методу найшвидшого спуску, яка полягає у квадратичній збіжності в околі мінімуму цільового функціонала, тобто саме там, де явно виражені недоліки методів першого порядку. В основі цього методу знаходиться тейлорівська квадратична апроксимація функції $f(\mathbf{X})$. Для двічі неперервної диференційованої функції $f(\mathbf{X})$, яка має неособливу матрицю Гесе для всіх $\mathbf{X} \in C$, в результаті ряду перетворень можна отримати співвідношення, що визначає ітерації:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \tau^k \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X}^k) \nabla f(\mathbf{X}^k) \tag{4.27}$$

Із формули (4.27) видно, що вектор напрямку $d^k = -\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X}^k)\nabla f(\mathbf{X}^k)$ в точці $\mathbf{X}^k$ вказує напрямок пошуку точки $\mathbf{X}^*$, яка оптимізує квадратичну апроксимацію $f(\mathbf{X})$. Співвідношення (4.27) отримало назву ітераційної формули Ньютона-Рафсона. Таким чином, процедура Ньютона є ідентичною процедурі Коші за винятком того, що замість $d^k = -\nabla f(\mathbf{X}^k)$ використовується напрямок $d^k = -H^{-1}(\mathbf{X}^k)\nabla f(\mathbf{X}^k)$.

Для задачі нелінійного програмування в узагальненій формі (4.1) найбільш ефективним є комбінований метод штрафних функцій. Встановлено, що для введення в модифіковану цільову функцію обмежень-нерівностей типу $g_i(\mathbf{X}) \geq 0$ треба застосовувати внутрішні штрафні функції, а для обмежень-рівнянь типу $h_j(\mathbf{X}) = 0$ - зовнішні штрафні функції.

Послідовність безумовних екстремальних задач буде визначатись на підставі наступного модифікованого функціонала:

$$W(r_k, \mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) - r_k \sum_{i=1}^{m} \ln \ g_i(\mathbf{X}) \ + \ r_k^{-1} \sum_{j}^{l} \left[h_j(\mathbf{X}) \right]^2 \to \min, \qquad (4.28)$$

де $\ln \ g_i(\mathbf{X})$ - внутрішні (логарифмічні) функції штрафу; $\left[h_j(\mathbf{X})\right]^2$ - зовнішні квадратичні функції штрафу.

Введемо до розгляду такі позначення:

$\nabla W(r_k, \mathbf{X})$ - градієнт модифікованого функціонала;

$\mathbf{H}(r_k, \mathbf{X})$ - гесіан модифікованого функціонала;

$\mathbf{H}^{-1}(r_k, \mathbf{X})$ - зворотна матриця Гесе;

$d(r_k, \mathbf{X})$ - вектор напрямку мінімізації;

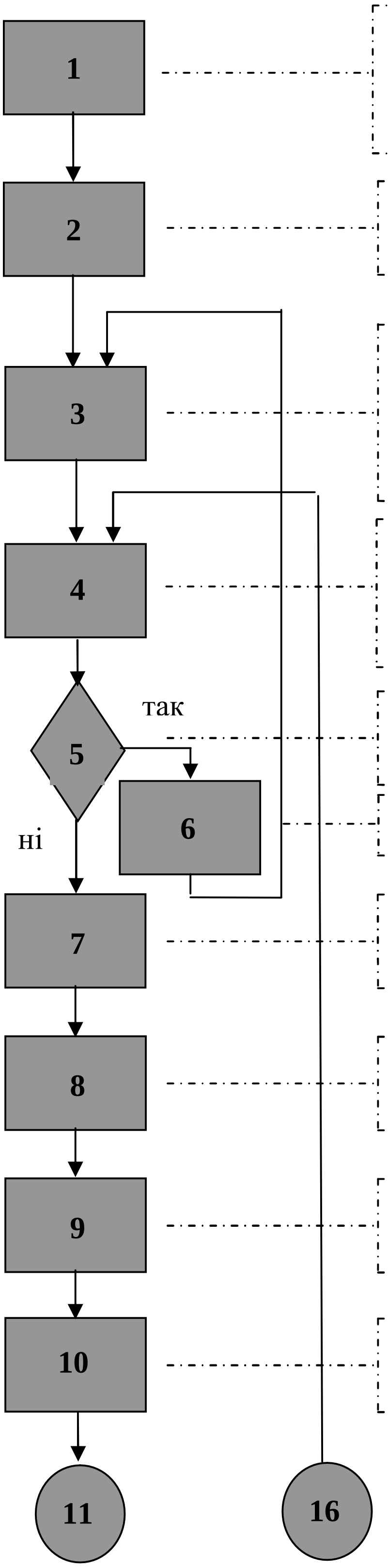
τ - довжина кроку в напрямку мінімізації;

Δ - оцінка раціональної довжини кроку τ.

Вибір довжини кроку τ на кожній поточній ітерації можна здійснювати різними способами, виходячи із наступної умови $W\left[\mathbf{X}^k + \tau d(r_k, \mathbf{X}^k)\right] = \min$, де $0 \le \tau \le 1$. Безпосередньо користуватись цією формулою при розрахунках дуже складно. Тому розроблена значна кількість алгоритмів визначення оптимальної довжини кроку τ. Одним із найбільш простих методів розрахунку довжини кроку τ є алгоритм Армійо, що базується на визначенні деякої оцінки Δ, в залежності від значень якої довжина кроку τ може бути прийнятою як одиниця, або вибрана у межах від 0,5 до 0,8. Після цього здійснюється перевірка правильності вибору величини τ.

Блок-схема алгоритму штрафних функцій наведена на рис. 4.7 та 4.8. Більш детально обумовимо деякі рекомендації, яких доцільно дотримуватись при використанні вище означеного алгоритму.

Вибір початкової точки $\mathbf{X}^0$ треба здійснити таким чином, щоб задовольнялись обмеження-нерівності, які вводяться в модифікований цільовий функціонал за допомогою внутрішніх штрафних функцій. Початкове значення параметра r_0 для внутрішніх і зовнішніх штрафних функцій можна обирати з однаковими або різними значеннями. Найбільш часто початкове значення параметра r_0 прирівнюють до одиниці. Припинення розрахунків в міру наближення до оптимуму здійснюється за наступними ознаками:



Формулюється модифікований функціонал виду $W(r_k,\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) - r_k\sum_{i=1}^{m}\ln g_i(\mathbf{X}) + {}$
$+\, r_k^{-1}\sum_j^{1}\left[h_j(\mathbf{X})\right]^2 \to \min$.

Записується в аналітичному вигляді градієнт і Гесіан модифікованого функціоналу.

Вибирається початкова точка $X^0 \in E^n$, приймається k = 0 і r = 1; всі наступні значення параметра r визначаються за формулою $r_{k+1} = \dfrac{r_k}{b}, b > 0$.

Визначається вектор-градієнт модифікованого функціоналу в пробній точці $\nabla W(r_k X^k)$

$\nabla W(r_k X^k) = 0$?

k = k + 1

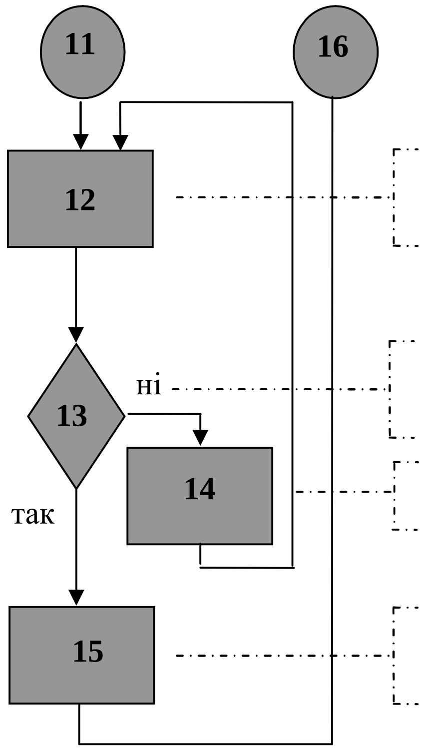
Визначається гесіан модифікованого функціоналу в пробній точці $\mathbf{H}(r_k,\mathbf{X}^k)$.

Визначається зворотна матриця Гесе в пробній точці $\mathbf{H}^{-1}(r_k,\mathbf{X}^k)$.

Визначається напрямок оптимізації $d(r_k,\mathbf{X}^k) = -\mathbf{H}^{-1}(r_k,\mathbf{X}^k)\nabla W(r_k,\mathbf{X}^k)$.

Приймається попередня довжина кроку τ=1.

Рисунок 4.7 – Алгоритм 4.2. Алгоритм методу штрафних функцій (початок)



Визначається оцінка раціональної довжини кроку $\Delta = W\left[\mathbf{X^k} + \tau d\left(r_k, \mathbf{X^k}\right)\right] - W\left(r_k, \mathbf{X^k}\right) -$

Оцінка раціональної довжини кроку $\Delta \leq 0$?

$\tau_k = \beta\tau, \quad \beta \in \left(0{,}5;\, 0{,}8\right)$

Визначити наступну пробну точку $\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \tau_k d(r_k, \mathbf{X}^k)$.

Рисунок 4.8. – Алгоритм 4.2. Алгоритм методу штрафних функцій (продовження)

- різниця між значенням модифікованого функціонала і цільової функції вихідної задачі нелінійного програмування для пробної точки $\mathbf{X}^k$ приймає значення менше, ніж задана величина похибки ε

$$W(r_k, \mathbf{X}^k) - f(\mathbf{X}^k) \leq \varepsilon, \tag{4.29}$$

де ε - величина похибки, яка обирається дослідником;

- компоненти вектора керованих змінних несуттєво відрізняються на суміжних ітераціях

$$\left| x_d^{k+1} - x_d \right| \leq \varepsilon, \quad d \in n;$$

- рівняння-обмеження в пробній точці $\mathbf{X}^k$ наближаються до нуля

$$\left| h_j(\mathbf{X}^k) \right| \leq \varepsilon.$$

Кількість циклів розрахунків за алгоритмом комбінованих штрафних функцій при постійному значенні параметра r (рис. 4.7 та 4.8) здійснюється доти, доки не з´явиться одна із наступних ознак:

- наближення до нуля градієнта модифікованого функціонала в пробній точці $\nabla W(r_k, \mathbf{X}^k) \leq \varepsilon$;
- незначні зміни модифікованого функціонала для пробних точок на суміжних ітераціях;

- зміна знака у деяких або у всіх обмеженнях-рівняннях для суміжних пробних точок.

За цими ознаками робиться узагальнення про припинення розрахунків з досягнення оптимального розв'язку, або про перехід до нового значення параметра r.

Приклад 4.4. Визначити оптимальний розв'язок наступної задачі нелінійного програмування:

$$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = \ln x_1 - x_2 \to \min \\ g_1(\mathbf{X}) = x_1 - 1 \geq 0 \\ g_2(\mathbf{X}) = x_1 \geq 0 \\ g_3(\mathbf{X}) = x_2 \geq 0 \\ h_1(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування. 1. Сформуємо модифікований функціонал відповідно до (4.28) з використанням методу комбінованих штрафних функцій:

$$W(r_k, \mathbf{X}) = \ln x_1 - x_2 - r_k \ln(x_1 - 1) - r_k \ln x_1 - r_k \ln x_2 + r_k^{-1}(x_1^2 + x_2^2 - 4)^2 \to \min$$

2. Запишемо в аналітичному вигляді градієнт і гесіан модифікованого функціонала:

$$\nabla W(r_k, \mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{r_k}{x_1 - 1} - \dfrac{r_k}{x_1} + \dfrac{4x_1(x_1^2 + x_2^2 - 4)}{r_k} \\ -1 - \dfrac{r_k}{x_2} + \dfrac{4x_2(x_1^2 + x_2^2 - 4)}{r_k} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{H}(r_k, \mathbf{X}) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

де $$A_1 = \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{r_k}{(x_1 - 1)^2} + \frac{r_k}{x_1^2} + \frac{4(3x_1^2 + x_2^2 - 4)}{r_k} \right);$$

$$A_2 = \left(\frac{8x_1x_2}{r_k} \right);$$

$$A_3 = \left(\frac{8x_1x_2}{r_k} \right);$$

$$A_4 = \left(\frac{r_k}{x_2^2} + \frac{4(x_1^2 + 3x_2^2 - 4)}{r_k} \right).$$

3. Приймемо на І-й ітерації початкову точку $\mathbf{X}^0 = (1{,}553 \;\; 1{,}334)^T$, для якої задовольняються всі обмеження, що введені в модифікований функціонал за допомогою внутрішніх (логарифмічних) функцій штрафу. Приймемо $r_0 = 1$ і будемо зменшувати цей параметр за формулою r_k / b, де b=4.

4. Визначаємо вектор-градієнт модифікованого функціонала в пробній точці $\mathbf{X}^k = \mathbf{X}^0$ - $\nabla W(r_0, \mathbf{X}^0)$:

$$\nabla W(r_k, \mathbf{X}^0) = \begin{pmatrix} -0.62 \\ -0.729 \end{pmatrix}.$$

5. Перевіряємо умову $\nabla W(r_0, \mathbf{X}^0) = 0$? Оскільки умова не виконується, то переходимо до кроку 6.

6. Визначаємо матрицю Гесе в пробній точці $\mathbf{X}^0$:

$$\mathbf{H}(r_0, \mathbf{X}^0) = \begin{pmatrix} 24{,}159 & 16{,}574 \\ 16{,}574 & 15{,}574 \end{pmatrix}.$$

7. Визначаємо зворотну матрицю Гесе в точці X^0

$$\mathbf{H}^{-1}(r_0, \mathbf{X}^0) = \begin{pmatrix} 0{,}153 & -0{,}163 \\ -0{,}163 & 0{,}238 \end{pmatrix}.$$

8. Визначаємо напрямок мінімізації

$$d(r_0, \mathbf{X}^0) = -\mathbf{H}^{-1}(r_0, \mathbf{X}^0)\nabla W(r_0, \mathbf{X}^0) = \begin{pmatrix} -0{,}024 \\ 0{,}072 \end{pmatrix}.$$

9. Приймемо попередню довжину кроку $\tau = 1$.

10. Розрахуємо оцінку Δ оптимальної довжини кроку τ:

$$\Delta = W\left[\mathbf{X}^0 + \tau d(r_0, \mathbf{X}^0)\right] - W(r_0, \mathbf{X}^0) - \tau/2\left[\nabla W(r_0, \mathbf{X}^0)^T d(r_0, \mathbf{X}^0)\right] =$$

$$= -1{,}011 + 0{,}993 + 0{,}019 = 0{,}001.$$

11. В зв'язку з тим, що $\Delta > 0$ приймаємо $\tau = 0{,}8 \cdot 1 = 0{,}8$ $(\beta = 0{,}8)$ і повертаємось до кроку 10. Знову розраховуємо оцінку Δ з кроком $\tau = 0{,}8$.

$$\Delta = -1{,}011 + 0{,}993 + 0{,}000308 = -0{,}018.$$

12 Визначаємо нову точку:

$$\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^0 + \tau d(r_0, \mathbf{X}^0) = \begin{pmatrix} 1{,}553 \\ 1{,}334 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}0192 \\ 0{,}0576 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}534 \\ 1{,}392 \end{pmatrix}.$$

Тепер повертаємось до кроку 4.

Визначаємо градієнт модифікованого функціонала в точці $\mathbf{X}^1$,

$$\nabla W(r_0, \mathbf{X}^1) = \begin{pmatrix} -0{,}088 \\ -0{,}099 \end{pmatrix}.$$

Градієнт відрізняється від нуля. Тому продовжуємо розрахунки при тому ж самому значенні параметра $r_0 = 1$.

Визначаємо матрицю Гесе і зворотну їй матрицю для точки $\mathbf{X}^1$.

$$\mathbf{H}(r_0, \mathbf{X}^1) = \begin{pmatrix} 24{,}345 & 17{,}083 \\ 17{,}181 & 16{,}665 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{H}^{-1}(r_0, \mathbf{X}^1) = \begin{pmatrix} 0{,}149 & -0{,}152 \\ -0{,}153 & 0{,}217 \end{pmatrix}.$$

Визначаємо напрямок мінімізації

$$d(r_0, \mathbf{X}^1) = -\mathbf{H}^{-1}(r_0, \mathbf{X}^1)^t \cdot \nabla W(r_0, \mathbf{X}^1) = \begin{pmatrix} -0,002 \\ 0,008 \end{pmatrix}.$$

Приймемо попередньо $\tau = 1$.

$$\mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 1,534 \\ 1,392 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,002 \\ 0,008 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,532 \\ 1,4 \end{pmatrix}, \quad W(r_0, \mathbf{X}^2) = -1,011.$$

Визначимо вектор-градієнт модифікованого функціонала в точці $\mathbf{X}^2$.

$$\nabla W(r_0, \mathbf{X}^2) = \begin{pmatrix} 0,00174 \\ 0,00505 \end{pmatrix}.$$

Компоненти вектора-градієнта $\nabla W(r_0, \mathbf{X}^2)$ мають дуже незначну величину і наблизились до нуля з точністю до тисячних. Таке наближення вектора-градієнта до нуля можна прийняти задовільним при $r_0 = 1$ і перейти до розрахунків з іншим значенням параметра r. Якщо порівняти попереднє значення точки $\mathbf{X}^1$ з наступним - $\mathbf{X}^2$, то можна побачити, що зміна величини компонентів векторів $\mathbf{X}^k$ є дуже незначною. Ця ознака також дозволяє зробити висновок щодо закінчення розрахунків з параметром r_0 і необхідності переходу до параметра r_1.

У відповідності з пунктом 3 алгоритму нові значення параметра r визначаємо за формулою $r_{k+1} = r_k / b$. Приймемо b=4. Тоді нове значення параметра r буде мати значення $r_1 = 0,25$.

Нове коло розрахунків розпочинаємо з пункту 4 алгоритму.

Визначаємо вектор-градієнт, матрицю Гесе і зворотну матрицю Гесе в точці $\mathbf{X}^2$ з параметром $r_1 = 0,25$.

$$\nabla W(r_1, \mathbf{X}^2) = \begin{pmatrix} 7,545 \\ 5,699 \end{pmatrix}; \qquad H(r_1, \mathbf{X}^2) = \begin{pmatrix} 81,433 & 68,634 \\ 68,634 & 67,76 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{H}^{-1}(r_1, \mathbf{X}^2) = \begin{pmatrix} 0,084 & -0,085 \\ -0,085 & 0,101 \end{pmatrix}.$$

Далі визначаємо напрямок оптимізації $d(r_1, \mathbf{X}^2)$

$$d(r_1, \mathbf{X}^2) = -\mathbf{H}^{-1}(r_1, \mathbf{X}^2) \cdot \nabla W(r_1, \mathbf{X}^2) = \begin{pmatrix} -0,149 \\ 0,067 \end{pmatrix}.$$

Нехай попередня величина довжини кроку складає 1; $\tau = 1$.
Визначаємо нову пробну точку $\mathbf{X}^3$:

$$\mathbf{X}^3 = \mathbf{X}^2 + \tau d = \begin{pmatrix} 1,532 \\ 1,4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -0,149 \\ 0,067 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,383 \\ 1,467 \end{pmatrix}.$$

Оцінка оптимальної довжини кроку буде складати:

$$\Delta = -1,063 + 0,629 + 0,112 = -0,316.$$

Умова пункту 11 виконується, тому значення точки $\mathbf{X}^3$ не змінюємо і повертаємось до пункту 4.

Ітераційний процес здійснюється далі за вище наведеною схемою доти, доки не з'являться певні ознаки, за якими можна припинити розрахунки і констатувати досягнення оптимального рішення.

В таблиці 4.1 наведені результати розрахунків прикладу 4.4, а на рис. 4.9 показана геометрична інтерпретація цієї задачі.

Таблиця 4.1 – Результати розрахунків прикладу 4.1

	r	$x_1(r)$	$x_2(r)$	$W[x(r),r]$
r_1	1	1,553	1,334	-0,993
r_2	0,25	1,159	1,641	-1,189
r_3	0,0625	1,040	1,711	-1,505
r_4	0,015625	1,010	1,727	-1,653
r_5	0,0039	1,002	1,731	-1,707

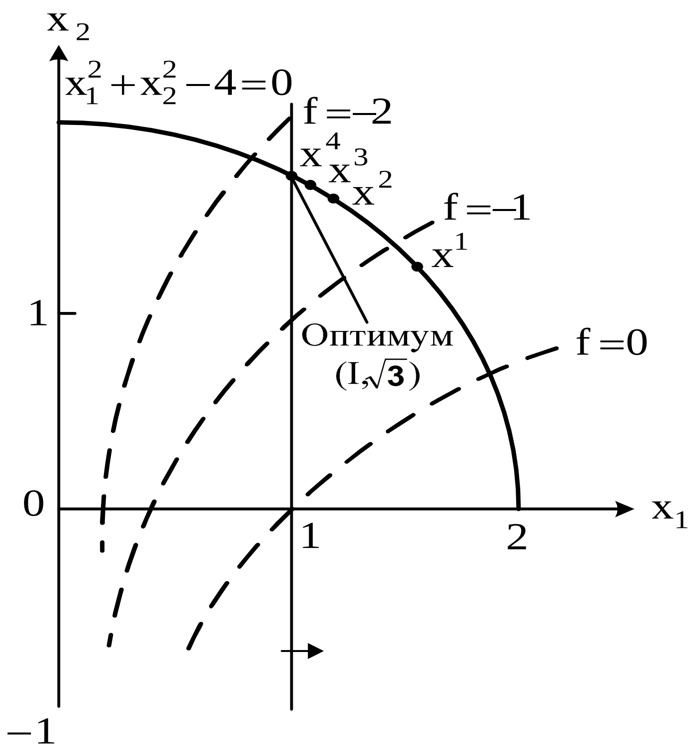


Рисунок 4.9 - Геометрична інтерпретація результатів розв’язку прикладу 4.4.

Завдання для самостійної роботи

1. Поясніть смисл таких термінів та понять:

- Які задачі математичного програмування відносяться до задач умовної і безумовної оптимізації?
- За якими умовами здійснюється ідентифікація екстремуму в задачах умовної і безумовної оптимізації?
- В чому полягає основна ідея методу штрафних функцій?
- Наведіть види штрафних функцій, за допомогою яких обмеження можуть бути введені в цільову функцію?

- Чи може рішення задачі нелінійного програмування знаходитись в середині множини допустимих рішень C?
- Чому одна група штрафних функцій називається внутрішніми, а інша – зовнішніми?
- Які функції штрафу необхідно обирати для обмежень типу $g_i(\mathbf{X}) \geq 0$, а які – для обмежень $h_j(\mathbf{X}) = 0$?
- Чим відрізняються між собою поняття цільова функція і модифікований функціонал?
- Як обрати початковий опорний план $\mathbf{X}^0$?
- Яке значення слід надати параметру r_0 на початку розрахунків?
- За якою ознакою припиняються розрахунки послідовності точок $\mathbf{X}^k$ для конкретного постійного значення r_k?
- Як визначається наступне значення параметра r_{k+1}?
- Чи може параметр r_k приймати від'ємні значення r_k <0?
- Як визначається напрямок оптимізації в методах Коші і Ньютона-Рафсона?
- Що розуміється під поняттями: вектор-градієнт модифікованого функціонала та матриця Гесе?
- Поясніть, яка існує відмінність в позначеннях: $\nabla W(r, \mathbf{X})$ і $\nabla W(r_k, \mathbf{X}^k)$, а також $\mathbf{H}(r, \mathbf{X})$ і $\mathbf{H}(r_k, \mathbf{X}^k)$?
- За яким виразом визначається наступна точка $\mathbf{X}^{k+1}$ в ітераційному процесі методу штрафних функцій?
- Як визначити оптимальну довжину кроку τ в напрямку мінімізації модифікованого функціонала?
- За якими ознаками ідентифікується оптимальне рішення вихідної задачі нелінійного програмування?
- Поясніть, як змінюються числові значення штрафних функцій при наближенні до оптимуму?

2. Визначіть мінімум функції $f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2$

при обмеженнях:
$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 \geq 0,$$
$$g_2(\mathbf{X}) = x_2 \geq 0,$$
$$h(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 9x_2 + 4{,}25 = 0.$$

3. Визначити мінімум функції $f(\mathbf{X}) = e^{x_1} + e^{x_2}$

при обмеженнях:
$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 - 1 \geq 0,$$
$$g_2(\mathbf{X}) = x_1 \geq 0,$$
$$g_3(\mathbf{X}) = x_2 \geq 0,$$

$$h(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0.$$

4. Визначити мінімум функції $f(\mathbf{X}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$ при обмеженнях: $g_1(\mathbf{X}) = x_1 \geq 0,$

$$g_2(\mathbf{X}) = x_2 \geq 0,$$

$$h(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 - 4 = 0.$$

5. Визначити мінімум функції $f(\mathbf{X}) = 4x_1 - x_2^2 - 12$

при обмеженнях: $g_1(\mathbf{X}) = 10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - 34 \geq 0,$

$$g_2(\mathbf{X}) = x_1 \geq 0,$$

$$g_3(\mathbf{X}) = x_2 \geq 0.$$

Початкова точка $\mathbf{X}^0 = (2 \quad 4)^{\mathrm{T}}$.

Розділ 5 ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

5.1 Метод динамічного програмування

Динамічне програмування – це особливий метод оптимізації, що призначений для операцій, в яких процес прийняття рішень може бути розбитим на окремі етапи (кроки). Такі операції називаються *багатоетапними* Використання методу динамічного програмування доцільне для операцій, що мають дуже багато етапів розв'язування. Ідея динамічного програмування полягає в розбитті складної задачі на ряд простих з наступним розв'язуванням послідовності цих задач.

Для того, щоб збагнути, які саме задачі можна розглядати, як багатоетапні, розглянемо задачу розвитку електричної мережі. Сутність її полягає в тому, що для деякого регіону у відповідності до плану його розвитку вводяться в дію нові виробництва. Для подачі до них електроенергії розширюються діючі електричні мережі (наприклад, будуються нові лінії електропередач та трансформаторні підстанції). Відомі навантаження, що вводяться в дію на кожному році розвитку регіону, та їх територіальне місцезнаходження. Потрібно побудувати електричні мережі таким чином, щоб сумарні витрати на це були мінімальними.

Якщо на першому році розвитку мережі прийняти рішення, якому відповідають мінімальні витрати, то на другому році розвитку це рішення може виявитися далеко не найкращим або навіть не допустимим. Іноді доцільно йти на додаткові витрати, які виявляться оправданими на наступних періодах розвитку мережі. Наприклад, передбачити можливість встановлення більш потужних трансформаторів, запроектувавши відповідні фундаменти, або будувати лінії електропередач в габаритах більш високої напруги і т.д. Тобто в такій задачі слід передбачати деякі технічні рішення з врахуванням перспективи росту навантажень.

Розглянемо конкретну ситуацію, рис. 5.1, де 1 – підприємство, що вводиться в дію на першому етапі розвитку мережі (наприклад, на першому році проміжку часу, що розглядається); 2 – те саме, але на другому; А – вузол діючої електричної мережі (трансформаторна підстанція), до якого можна здійснити підключення.

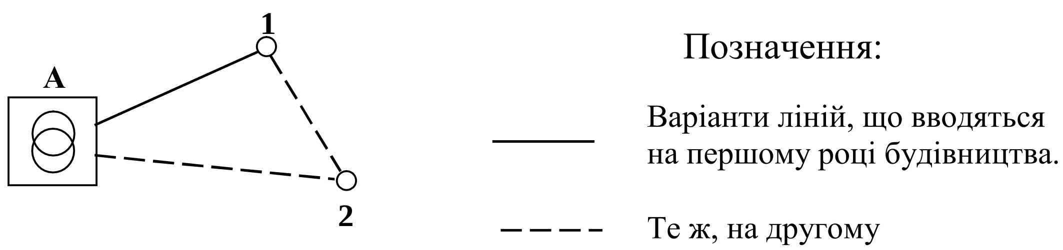


Рисунок 5.1 – Можливі варіанти розвитку електричної мережі

Рішення першого етапу – це лінія від вузла А до підприємства 1 (суцільна лінія А – 1). На другому етапі можливі варіанти (пунктирні лінії А – 2 та 1 – 2): підключення підприємства 2 до підприємства 1, або – підключення до вузла А окремою лінією. Підключення до підприємства 1 можливе, якщо лінія електропередач, що побудована на основі рішення, яке прийняте на першому етапі, здатна пропустити відповідну додаткову потужність. Для цього треба на першому етапі, з огляду на перспективу, передбачити завищений переріз провода для лінії А – 1, тобто піти на додаткові капітальні витрати. Якщо це забезпечить мінімум витрат в цілому (за результатами в данному випадку двох етапів), то потрібно діяти саме так.

Можна зробити підсумок. Приймаючи рішення з розвитку мережі лише з позиції першого етапу, оптимальному варіанту будуть відповідати витрати на будівництво – B'_1, те саме, але з позиції лише другого етапу - B'_2. Сумарні витрати дорівнюють - $B'_1 + B'_2$. Якщо на першому етапі діяти з врахуванням перспективи другого етапу, то як оптимальне слід визначити інше рішення, якому відповідають витрати B_1 (далі таке рішення назвемо умовно оптимальним). Рішення другого етапу буде вже іншим і йому відповідатимуть втрати B_2. При цьому буде мати місце:

$$B_1 + B_2 < B'_1 + B'_2.$$

Розглянута ситуація має лише два етапи та максимально спрощена по суті. Реальна задача розвитку мережі має набагато більше етапів, як для поточного планування (1 – 5 років), так і для перспективного (до 20 років). Можна запропонувати такі шляхи для її вирішення:

- шукати оптимальний розв’язок відразу для всієї складної задачі;
- будувати оптимальний розв’язок поступово крок за кроком, на кожному етапі розрахунку, оптимізуючи лише один крок з врахуванням всіх можливих наслідків для майбутнього.

Другий шлях виявляється набагато простішим.

Для задачі, що розглядалась, за етап приймався проміжок часу, в рамках якого потрібно прийняти рішення. Зміст етапу задачі, яка вирішується методом динамічного програмування, може бути іншим. Наприклад, включення чергової секції оптимізаційного пристрою дискретного управління або крок просування по мережному графу і т.д.

В детальному вигляді задача, до вирішення якої можна застосувати метод динамічного програмування, полягає в наступному:

- дана система (обмежена множина взаємопов’язаних елементів), стан якої характеризується вектором параметрів стану – $\mathbf{W}$;
- її необхідно перевести з вихідного стану U_0, який характеризується вектором $\mathbf{W}_0$, в кінцевий U_n, що характеризується вектором $\mathbf{W}_n$;
- процес переходу можна розбити на послідовність n етапів, а стан системи за результатами кожного етапу позначимо як $U_1, U_2, \ldots, U_n$;

- перехід системи з одного стану в інший відбувається внаслідок реалізації відповідних рішень $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2,\ldots, \mathbf{X}_n$, де $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2,\ldots, \mathbf{X}_n$ – вектор змінних відповідно першого, другого та n - го етапів розв’язування задачі;
- реалізація вектора рішень $\mathbf{X}_1$ переводить систему із стану U_0 в стан U_1, вектор $\mathbf{X}_2$ – переводить із стану U_1 в стан U_2 і т.д;
- в цілому переведення системи із стану U_0 в стан U_n відбувається в результаті реалізації вектору рішень:

$$\mathbf{X}^T = (\mathbf{X}_1\ \ \mathbf{X}_2\ \ \ldots\ \ \mathbf{X}_n).$$

В задачах динамічного програмування вважають, що стан системи в кінці і-го етапу залежить лише від стану системи для (і-1)-го етапу, який характеризується вектором $\mathbf{W}_{i-1}$, та вектора $\mathbf{X}_i$. Така властивість системи називається *відсутністю післядії.*

Змінюючи значення компонент вектора $\mathbf{X}$, можна отримати різну ефективність процесу переходу із стану U_0 в стан U_n, яка повинна бути кількісним показником – f, $f(\mathbf{W}_0,\mathbf{X})$, який бажано максимізувати чи мінімізувати. Показник ефективності і-го етапу, що залежить від вектора параметрів стану $\mathbf{W}_{i-1}$ та вектора $\mathbf{X}_i$, що вибраний на данному етапі, позначимо як f_i, $f_i(\mathbf{W}_{i-1},\mathbf{X}_i)$. В задачі динамічного програмування залежність $f(\mathbf{W}_0,\mathbf{X})$ має бути *адитивною,* тобто

$$f(\mathbf{W}_0,\mathbf{X}) = \sum_{f=1}^{n} f_f\,(\mathbf{W}_{f-1}, \mathbf{X}_f\,)\,. \tag{5.1}$$

Схематично задача динамічного програмування зображена на рис. 5.2.

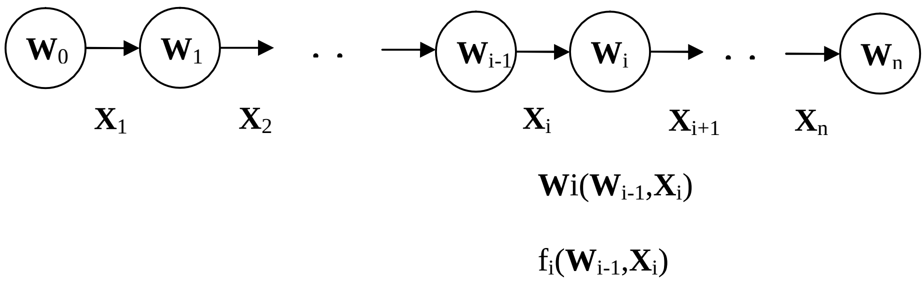


Рисунок 5.2 – Схематичне зображення процесу для методу динамічного програмування

Задачу динамічного програмування можна сформулювати таким чином: *визначити сукупність допустимих рішень – $\boldsymbol{X_1}$, $\boldsymbol{X_2}$, ... , $\boldsymbol{X_n}$, що переводять систему з початкового стану U_0 в кінцевий U_n, мінімізуючи (максимізуючи) показник ефективності f.*

5.2 Принцип оптимальності та рекурентні співвідношення Р. Белмана

Метод динамічного програмування полягає в тому, що оптимальне рішення будується поступово крок за кроком. На кожному етапі визначається оптимальний розв'язок тільки для даного етапу, але при цьому враховуються можливі наслідки. Їх неврахування може призвести до неоптимального вирішення задачі в цілому.

Ілюстрацією до сказаного може бути задача аналізу мережного графа з метою визначення критичного шляху. Такі графіки складаються, наприклад, для планування виконання електромонтажних робіт, як правило, складних об'єктів. Послідовність електромонтажних робіт, що виконуються у відповідності до критичного шляху, забезпечує мінімальний термін будівництва. Таку задачу можна інтерпретувати в задачу більш зрозумілого для студента третього курсу змісту – вибору найкоротшого шляху для переходу з пункту A в пункт R, рис 5.3. Маршрут проходить через деякі пункти, які позначені кружками, а дороги, що їх з'єднують – відрізками прямої, поряд з якими проставлені відповідні відстані.

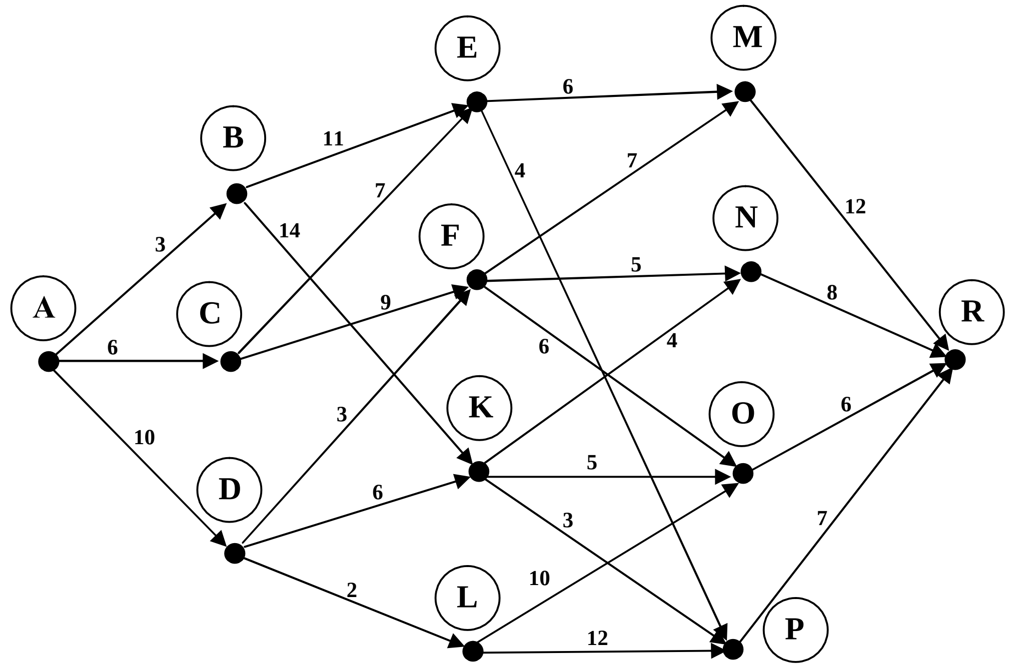


Рисунок 5.3 – Задача вибору найкоротшого шляху

За етап в даній задачі приймемо перехід до наступного пункту. Першим етапом є перехід до одного з таких пунктів: B; C; D, другим – до одного із E; F; K; L – третім - до M; N; O; P і останнім - до пункту R. Можна переконатись, подивившись кінцевий розв'язок задачі, що преревхід до пункту B є оптимальним для першого етапу, але він не забезпечує оптимального продовження маршруту. Це демонстрація того, що в багатоетапній задачі, рішення на кожному кроці (етапі) потрібно вибирати з врахуванням наслідків, що будуть на наступних етапах. Воно повинно забезпечити оптимальне продовження процесу відносно досягнутого в даний момент стану. Такий принцип вибору рішення називається *принципом оптимальності.*

Рішення, що забезпечує оптимальне продовження процесу відносно заданого стану, називається умовно оптимальним на даному етапі.

Принцип оптимальності, як основне правило динамічного програмування, сформульований Р. Белманом і полягає він в наступному. *Якого б стану не було б досягнуто системою в результаті (i-1) попередніх етапів її розвитку, рішення, що приймається на даному i-му етапі, повинно бути таким, щоб в сукупності з умовно оптимальними рішеннями наступних етапів забезпечити максимальну ефективність системи на всіх подальших етапах, включаючи даний.*

Використання цього принципу гарантує, що рішення, яке вибране на будь-якому етапі, є не локально найкращим, а найкращим з точки зору процесу в цілому.

Так, якщо система на початку i-го етапу знаходиться в стані U_{i-1},то рішення $\mathbf{X}_i$ і всі наступні $\mathbf{X}_{i+1}$, $\mathbf{X}_{i+2}$,..., $\mathbf{X}_n$ повинні вибиратися оптимальними відносно стану U_{i-1}. Це значить, що забезпечується оптимум для показника ефективності на всіх подальших (включаючи даний) етапах - $\sum_{j=i}^{n} f_j(\mathbf{W}_{i-1}, \mathbf{X}i)$.

Повернемося до задачі вибору найкоротшого шляху графу і для найбільшої наглядності виконаємо її розв'язання з кінця, розуміючи під номером етапу кількість кроків до пункту R (кінцевого етапу системи).

<u>Етап 1 (до пункту R один крок)</u>

Якщо за рішеннями попередніх етапів ми опинились в пункті M, то для наступного рішення варіантів немає – це перехід в пункт R, що оцінюється в 12 одиниць (а якщо були б інші варіанти, то очевидно потрібно вибрати найкращий). Запишемо показник ефективності для цього випадку:

$$f_1^M = 12.$$

Аналогічний запис можна зробити, якщо рішення необхідно приймати будучи в пунктах N, O або P:

$$f_1^N = 8;$$
$$f_1^O = 6;$$
$$f_1^P = 7.$$

Зобразимо це графічно, рис. 5.4, де (тут і далі) в квадратах записано числове значення показника ефективності для оптимального продовження процесу (умовно оптимальне значення), а товстими лініями позначено оптимальну траєкторію пересування.

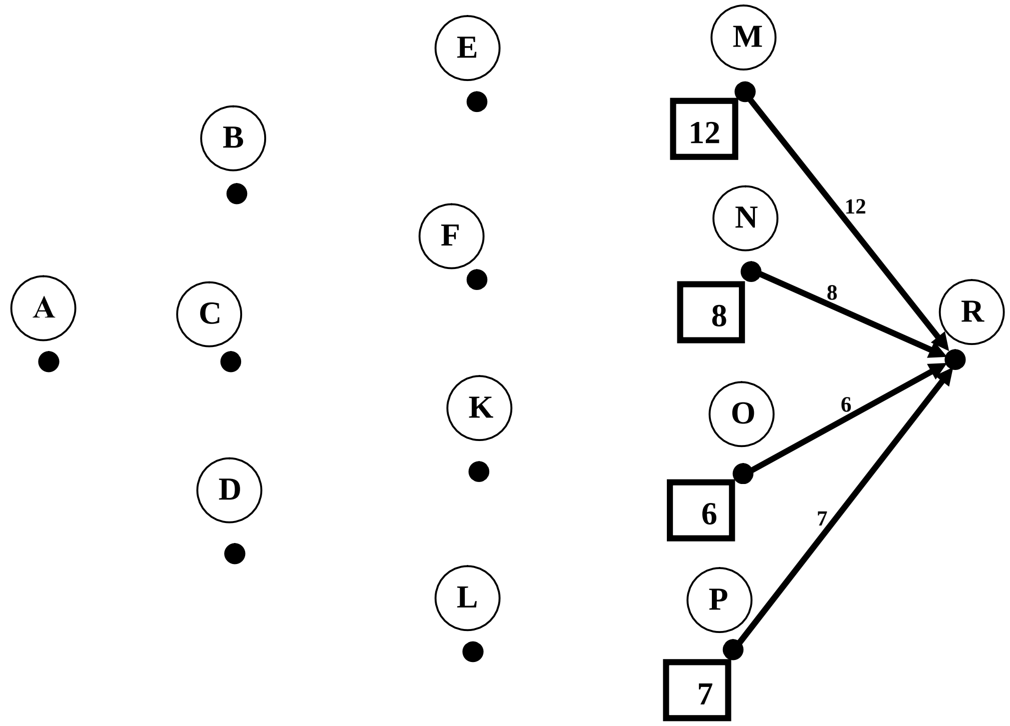


Рисунок 5.4 – Варіанти просування на першому етапі

Етап 2 (до пункту R два кроки)

Якщо у відповідності до рішень попередніх етапів ми опинились в пункті Е, то подальший вибір необхідно зробити проглянувши можливі варіанти і виходячи із:

$$f_2^E = \min\{(6 + 12)\ (4 + 7)\} = \min\{\ 18 \quad 11\} = 11$$

Оптимальна подальша стратегія руху з пункту Е на пункт Р, на пункт R (E → P → R). Аналогічні розрахунки можна провести для інших можливих варіантів данного етапу:

$f_2^F = \min\{(7 + 12)\ (5 + 8)\ (6 + 6)\} = \min\{\ 19 \quad 13 \quad 12\} = 12$; (F→O→R);

$f_2^K = \min\{(4 + 8)\ (5 + 6)\ (3 + 7)\} = \min\{\ 12 \quad 11 \quad 10\} = 10$; (K→P→R);

$f_2^L = \min\{(10 + 6)\ (12 + 7)\} = \min\{\ 16 \quad 19\} = 16$; (L→O→R).

Отримані результати зображені на рис 5.5.

Звернемо увагу, що на першому та другому етапах даної задачі проглядаються всі можливі варіанти пересування, а на подальших етапах до розгляду вже приймається обмежена їх кількість.

Етап 3 (до пункту R три кроки)

На даному етапі можливі перебування в пунктах B, C та D. Якщо ми знаходимось в пункті B, то можливий рух на пункт Е, а подальша оптимальна стратегія уже відома E→P→R, критерій ефективності для неї становить $f_2^E = 11$. З пункту В можна рухатись ще на пункт К, а звідти оптимальний шлях K→P→R, для якого $f_2^K = 10$. Тому перебуваючи в пункті В, подальший шлях пересування вибиремо виходячи із:

$f_3^B = \min\{(11 + 11)\ (14 + 10)\} = \min\{22 \quad 24\} = 22$; (B→E→P→R).

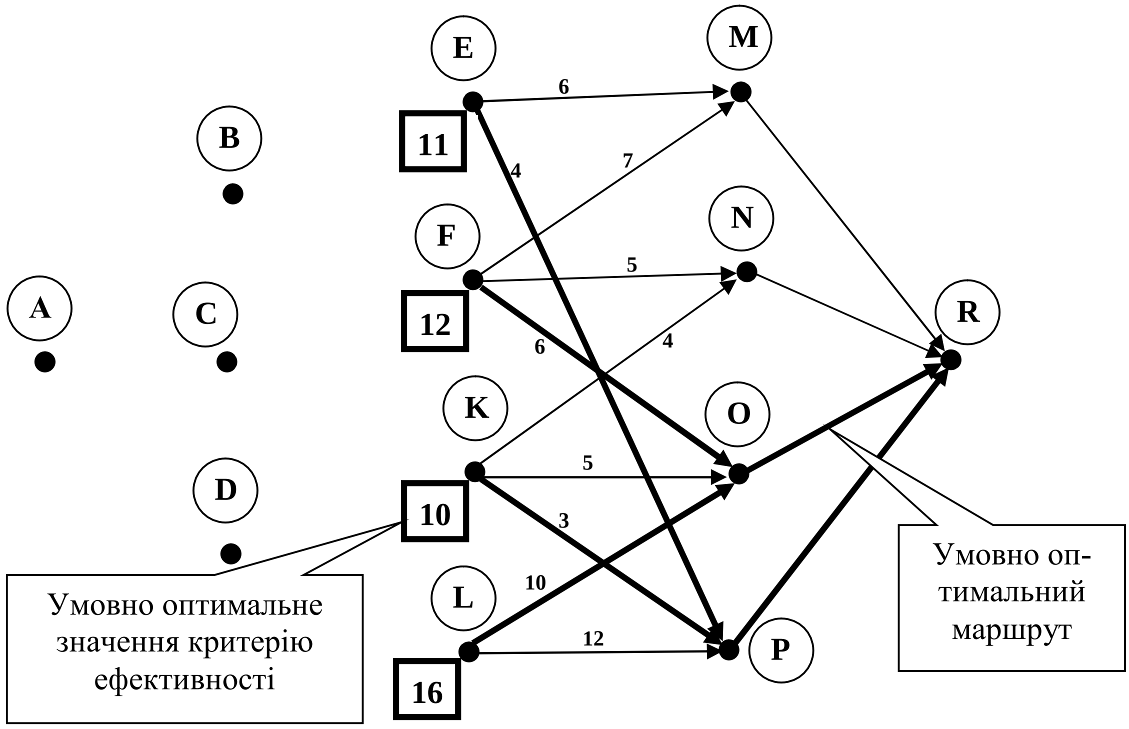


Рисунок 5.5 – Варіанти оптимального просування до пункту R на другому етапі

Знаходячись в пунктах C та D маємо діяти аналогічно:

f_3^C = min{(7 + 11) (9 + 12)} = min{18 21} = 18; (C→E→P→R);

f_3^D = min{(3 + 12) (6 + 10)(2 + 6)} = min{15 16 18} = 15; (B→E→P→R).

Отримані результати зображені на рис. 5.6.

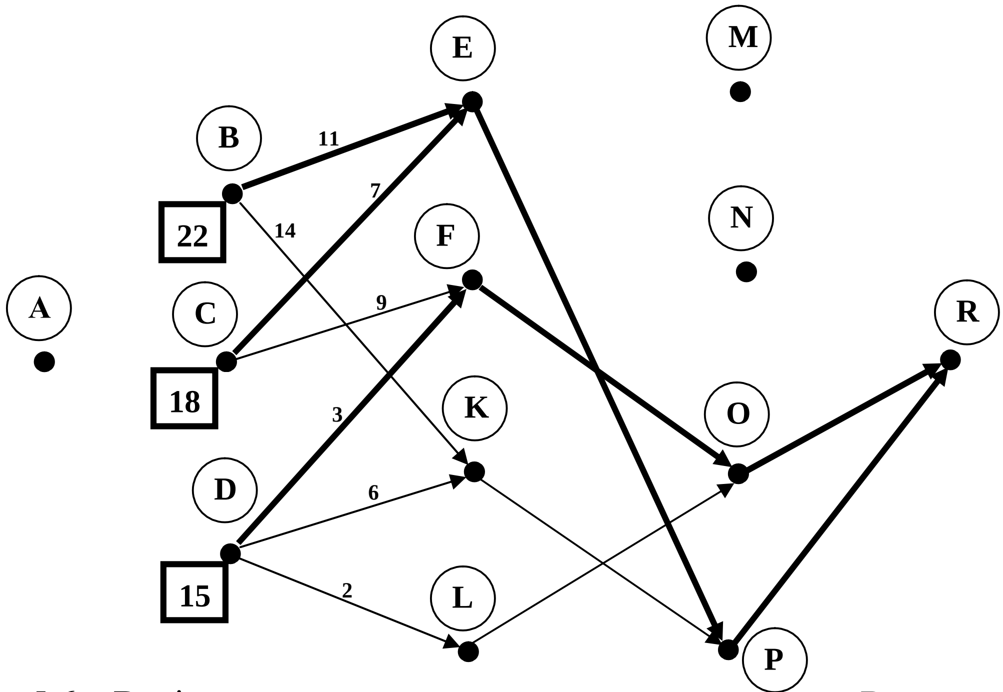


Рисунок 5.6 – Варіанти оптимального просування до пункту R на третьому етапі

Етап 4 (до пункту R чотири кроки)

Оптимальний шлях пересування з пункту A до пункту R можна визначити за такими розрахунками:

$$f_4^A = \min\{(3 + 22)\ (6 + 18)\ (10 + 15)\} = \min\{25 \quad 24 \quad 25\} = 24.$$

За результатами розрахунків, що проведені за методом динамічного програмування, оптимальний шлях пересування з пункту A в пункт R такий: A→C→E→P→R, рис. 5.7, для якого значення критерію ефективності найменший в порівнянні зі всіма іншими можливими і становить 24.

Метод динамічного програмування, як і інші методи дослідження операцій, передбачає обмежений перебір варіантів, в чому є нагода переконатись на конкретному прикладі. Обчислювальну ефективність методу можна оцінити, наприклад, в порівнянні із суцільним перебором всіх варіантів. Інформація для такого порівняння наведена в табл. 5.1, де вказана кількість елементарних операцій, які доводиться виконати за згаданними методами для вирішення задачі вибору оптимального маршруту, що розглядалася.

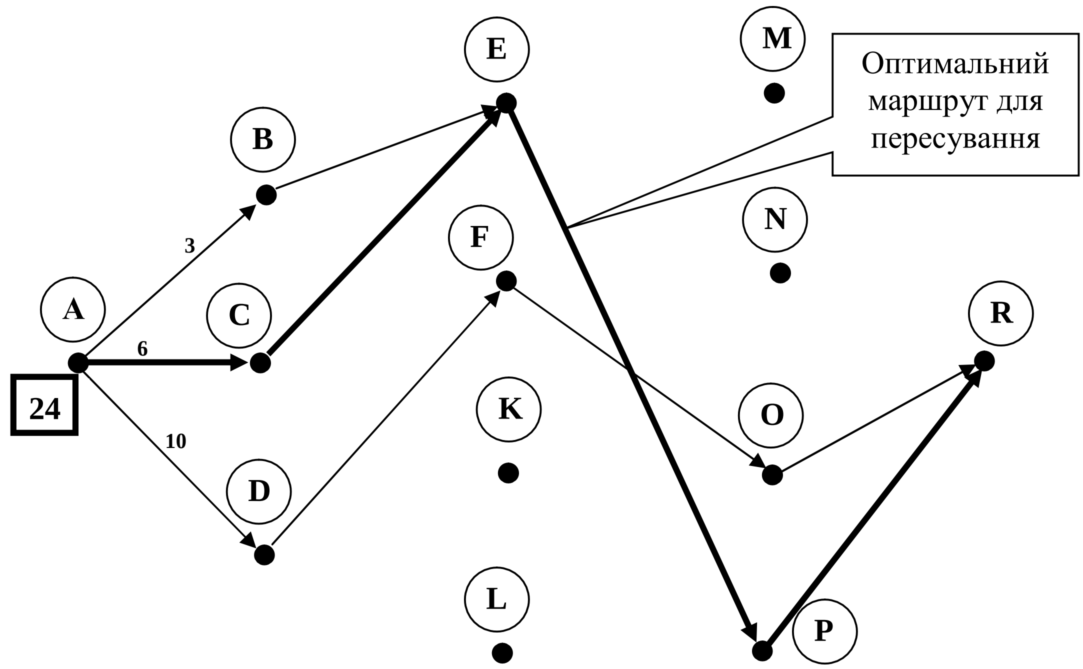


Рисунок 5.7 – Оптимальний маршрут руху з пункта A в пункт R

Таблиця 5.1 – Порівняльна таблиця обчислювальної ефективності

Число операцій	Метод розрахунку	
	Суцільний перебор	Динамічне програмування
Додавання	54	20
Запам'ятовування	18	11
Мінімізації	1	8

Якщо уважно простежити хід проведених розрахунків, то можна встановити певні закономірності:

- обчислення на першому етапі дещо відрізняються від обчислень на етапах подальших, а обчислення на етапах 2, 3,...,n виконуються за однаковою схемою;
- на першому етапі рішення вибирається із всіх можливих і тим самим система переходить в стан U_1, що оцінюється показником ефективності f_1.
- на наступних етапах до уваги береться сумарне значення показника ефективності всіх попередніх етапів $f_{(i-1)}$ та проглядаються ефекти від реалізації можливих рішень даного етапу і за результатами цього приймається остаточне рішення.

Дії, що виконані при розв'язуванні даної задачі, можна узагальнити у вигляді таких співвідношень, що не пов'язані з конкретною задачею, та які називаються *рекурентними (зворотними) співвідношеннями Р. Белмана.*

$$\left.\begin{array}{c} f_1 = \min\limits_{\text{по всім } \mathbf{X}1} \left[\varphi\left(\mathbf{W}_0, \mathbf{X}_1\right)\right] \\ ---------- \\ f_j = \min\limits_{\text{по всім } \mathbf{X}_j} \left[\varphi\left(\mathbf{W}_{j-1}, \mathbf{X}_j\right) + f_{j-1}\right],\ j = 2,3,\ldots,n \end{array}\right\}, \tag{5.2}$$

де φ – функція, що залежить від $\mathbf{W}_j$ та $\mathbf{X}_j$.

5.3 Метод динамічного програмування для вирішення цілочислових задач оперативного керування в системах електропостачання

Для забезпечення оптимальних процесів електропостачання в системах електропостачання широко використовуються оптимізуючі пристрої, які мають різноманітне призначення: для компенсації реактивної потужності, для регулювання напруги, симетрування режимів та інше. Найбільшого поширення набули пристрої дискретного керування, наприклад, конструкція силових трасформаторів дозволяє змінювати його коефіцієнт трансформації відносно до номінального таким чином: +5%; +2,5%; 0%; -2,5%; -5%, потужність батарей статичних конденсаторів можна змінювати шляхом комутації окремих секцій. Задача керування такими пристроями по суті є оптимізаційною, оскільки доводиться здійснювати вибір найкращого рішення із множини допустимих. Змінні таких математичних моделей можуть набувати лише дискретних значень, а самі моделі містити обмеження як у вигляді рівностей, так і нерівностей. Співвідношення (цільова функція та обмеження), які містяться в деяких математичних моделях, лінійні відносно до змінних (надалі для розгляду прийнято саме такий випадок). Для аналізу таких моделей можна використати симплекс-метод лінійного програмування, але розв’язок такої задачі можна знайти і за методом динамічного програмування.

Рішення про включення секцій батарей статичних конденсаторів для компенсації реактивної потужності можна визначити за допомогою математичної моделі:

$$\begin{cases} Q_н - \Delta\mathbf{Q}\mathbf{X} \to \min \\ \mathbf{X} + \overline{\mathbf{X}} = \mathbf{n} \\ Q_н - \Delta\mathbf{Q}\mathbf{X} \geq A \\ x_i ; \overline{x}_i = 1 \forall 0 \end{cases}, \tag{5.3}$$

де $\mathbf{X}$ – вектор керування (невідомих), кожна компонента якого x_i є булевою змінною, і якщо вона дорівнює одиниці, то і-ту секцію батарей конденсаторів слід включити, а якщо нулю, то навпаки – не включати; $\overline{\mathbf{X}}$ - вектор, кожна компонента якого $\overline{x}_i$ пов’язана з відповідною компонентою вектора $\mathbf{X}$ як x_i + $\overline{x}_i$ = 1 (фізичного змісту немає); $Q_н$ – природне споживання реактивної потужності по вводу підприємства; $\Delta\mathbf{Q}$ – матриця потужностей секцій конденсаторних батарей вимірністю 1×m, де m – загальна кількість секцій; A – допустима величина реактивної потужності, що встановлюється енергопостачальною організацією; $\mathbf{n}$ – одинична стовпцева матриця вимірністю m×1; $\forall$ - символ логічної операції „АБО”.

Математична модель відноситься до класу лінійних і для її аналізу можна використати симплекс-метод лінійного програмування. Розв’язок тіє ж самої за змістом та технічною реалізацією задачі можна знаходити також і за схемою методу динамічного програмування, обчислювальна процедура якого простіша.

Для даної задачі за етап розв’язування можна прийняти знаходження рішення про включення чергової секції компенсувального пристрою.Технічне обмеження на величину реактивної потужності можна забезпечити, формуючи на кожному етапі k множину допустимих до включення секцій – D_k. Кожний елемент цієї множини $Q_{rk} \in D_k$, $1 \leq r \leq R$ – реактивна потужність секції компенсувального пристрою із числа тих, що залишились не включеними на попередніх (k-1) етапах розв’язування задачі, та, яка менша за реактивну потужність на вводі – Q_k, або дорівнює їй, де $Q_k = Q_н - Q_{kr} - A$; Q_{kr} – сума потужностей секцій, рішення про включення яких прийняте на попередніх (k-1) етапах розв’язування задачі.

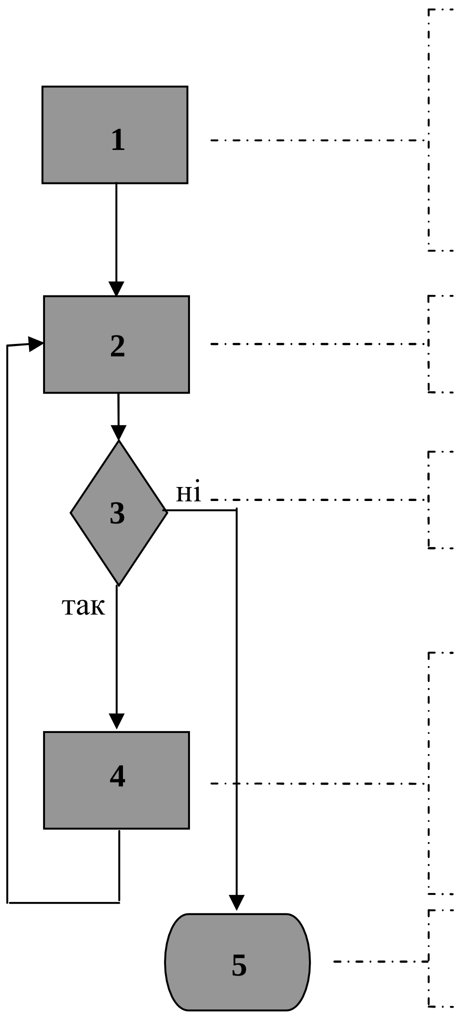
Рекурентні співвідношення Р.Белмана для даної задачі можна записати таким чином:

$$\left.\begin{array}{c} f_1 = \min\limits_{1 \leq r \leq R_1} \left\{ -\Delta Q_{r1} + Q_н \right\} \\ ---------- \\ f_k = \min\limits_{1 \leq r \leq R_k} \left\{ -\Delta Q_{rk} + f_{(k-1)} \right\} \; k = 2,3,...,n \end{array}\right\}, \tag{5.4}$$

де f_k – оцінка стану системи на k-му етапі – реактивна потужність на вводі, якщо реалізувати всі рішення, що прийняті на попередніх етапах, включаючи даний.

Обчислювальний процес припиняється на етапі (n+1), коли множина $D_{(n+1)}$ виявиться пустою.

Знаходження вектора керування у відповідності до математичної моделі (5.3) за методом динамічного програмування з врахуванням технічних обмежень, що встановлені енергосистемою, слід здійснювати за алгоритмом, рис. 5.8.



Виконується оцінювання станів системи в припущенні, що здійснюється почергове включення кожної із секцій та вибирається для остаточного включення секція, яка забезпечує максимальний ефект. Відповідний цьому стан системи фіксується.

Визначається множина допустимих для подальшого включення секцій – D_k.

Множина D_k – пуста?

Дається оцінка наступного стану системи в припущенні, що почергово включаються секції, які є компонентами множини D_k. Для остаточного включення вибирається секція, що забезпечує максимальний ефект. Відповідний стан системи фіксується.

Обчислення припиняються. Кінець.

Рисунок 5.8 – Алгоритм 5.1. Алгоритм розв’язування цілочислової задачі оперативного керування методом динамічного програмування

Порівняння ефективності обчислювального процесу за методами лінійного та динамічного програмування для визначення оптимального вектора керування здійснемо за результатами числового прикладу.

Приклад 5.1. Знайти вектор керування для компенсувального пристрою, який має такі параметри потужностей секцій ΔQ_1 = 400 квар, ΔQ_2 = 300 квар, ΔQ_3 = 50 квар, ΔQ_4 = 150 квар, ΔQ_5 = 100 квар, ΔQ_6 = 25 квар, ΔQ_7 = 200 квар, ΔQ_8 = 150 квар, ΔQ_9 =

100 квар, ΔQ_{10} = 50 квар, ΔQ_{11} = 20 квар. Природнє споживання реактивної потужності по вводу підприємства – 1000 квар. Реактивна потужність, що встановлена енергосистемою для споживання, А = 0 квар.

Розв'язування. Розв'язування задачі виконаємо симплекс-методом лінійного програмування (алгоритм 2.3), а також методом динамічного програмування (алгоритм 5.1). При цьому відслідкуємо збіг, як остаточного розв'язку, так і проміжних результатів. Висновки щодо ефективності обчислювального процесу зробимо за кількістю елементарних арифметичних операцій, що довелось виконати по ітераціях та окремих етапах. Результати обчислень при розв'язуванні задачі зведені до табл. 5.2.

Таблиця 5.2 – Вирішення задачі включення секцій компенсувального пристрою

Метод лінійного програмування							Метод динамічного програмування						
Ітерація	Вектор невідомих - $\mathbf{X}^{т}$	Кількість операцій				Кількість порівнянь	Етап	Вектор невідомих - $\mathbf{X}^{т}$	Кількість операцій				Кількість порівнянь
		(+)	(-)	(×)	(:)				(+)	(-)	(×)	(:)	
1	(10000000000)	132	0	154	1	21	1	(10000000000)	12	0	0	0	21
2	(11000000000)	132	0	154	1	20	2	(11000000000)	12	0	0	0	19
3	(11000010000)	132	0	154	1	19	3	(11000010000)	11	0	0	0	17
4	(11001010000)	132	0	154	1	18	4	(11001010000)	10	0	0	0	15
Всього		528	0	616	4	78	Всього		45	0	0	0	72

При значно більших вимірностях задачі, що характерні для реальних систем електропостачання, а особливо для великих підприємств, ефект буде значно вагомішим.

Завдання для самостійної роботи

1. Поясніть смисл таких термінів та понять:
a. багатоетапна задача;
b. умовно оптимальне рішення;
c. принцип оптимальності;
d. рекурентні співвідношення.

2. Знайдіть оптимальний маршрут руху по графу, рис 5.3, за умови, що зв'язку С→Е не існує.

3. Будемо вважати, що додатково існує маршрут С→К, рис. 5.3. Якою повинна бути його мінімальна довжина, щоб оптимальним залишався б маршрут А→С→Е→Р→R.

4. Знайдіть оптимальний маршрут переходу з пункту А в пункт R, рис 5.3, який обов'язково проходить через пункт К. Вибір підтвердіть необхідними розрахунками.

5. Розв'яжіть задачу прикладу 5.1:

а) симплекс-методом, а результати, як проміжні, так і кінцеві порівняйте з наведеними в таблиці 5.2;

б) те ж, але методом динамічного програмування у відповідності до рекурентних співвідношень 5.4.

Розділ 6 ОСОБЛИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ

6.1 Моделювання задач керування електричними режимами

Розв'язування всіх оптимізаційних задач в класичній математиці пов'язане зі знаходженням екстремуму цільової функції f(X) або цільового функціонала $J(X)=\int_a^b X(t)dt$, де f(X) та X(t) деякі функції, визначені на відрізку [a,b]. Залежності f(X) та J(X) є скалярними функціями дійсного змінного, тобто приймають значення, що виражаються дійсними числами.

Екстремум функції f(X) - це найбільше або найменше значення функції (число дійсне) на відрізку [a,b]. Якщо значення змінних повинні належити деякій області допустимих значень, то оптимізаційна задача вирішується методами математичного програмування. Під оптимумом при цьому розуміється найбільше або найменше значення функції, знайдене з області допустимих значень змінних. Розв'язання задачі математичного програмування згідно з класичними алгоритмами можливе тільки тоді, коли математичні моделі містять скалярні функції дійсних змінних. Якщо оптимізаційна задача полягає в знаходженні максимуму або мінімуму цільового функціонала, то застосовуються методи варіаційного числення або оптимального керування. При цьому функціонал визначається деяким набором скалярних функцій дійсного змінного та є дійсним числом, що залежить від обраної функції.

Зробивши узагальнення, звернемо увагу на ту обставину, що в усіх випадках розв'язування задач оптимізації класичними методами доводиться мати справу лише із скалярними функціями дійсного змінного. Проте ряд задач оптимізації режиму електричних мереж може описуватись в комплексному вигляді. До числа таких задач відносяться задачі:

- регулювання напруги для випадків, коли до уваги слід приймати повздовжню та поперечну складові вектора втрати напруги (в мережах до 35кВ поперечною складовою можна нехтувати);
- оптимізації несиметричних режимів, критеріями оптимальності яких є параметри режиму струм чи напруга зворотної послідовності ($\dot{I}_2, \dot{U}_2$) або пульсуюча потужність - $\tilde{N}$, за природою - величини векторні.

Цільові функціонали цих задач в загальному вигляді можна записати таким чином:

$$\dot{F}(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + j\varphi(\mathbf{X}) \tag{6.1}$$

де **X** - вектор змінних, кожний компонент якого - дійсне число; f, φ - скалярні функції; j - уявна одиниця.

Залежність (6.1) є нескалярною функцією дійсного змінного, де кожному значенню **X** відповідає певне значення функції $\dot{F}(\mathbf{X})$, що виражається комплексним числом. Співвідношення між складовими функції (6.1) в згаданих задачах такі, що знехтувати будь-якою із них неможливо. Тому класичні обчислювальні методи при такій постановці оптимізаційної задачі використані бути не можуть.

Термін "оптимум" в економіко-математичних методах використовується в значенні: найкращий варіант із можливих станів системи. В цьому значенні оптимумом, наприклад, в задачах симетрування електричних режимів слід вважати стан електричної мережі, який описується мінімальними за модулем векторами (комплексами) $\dot{I}_2, \dot{U}_2, \tilde{N}$.

При побудові математичної моделі керування можна зробити перехід до модулів векторів режимних параметрів, які є скалярами. Як показали дослідження, такі моделі симетрування режиму електромережі відносяться до класу нелінійних моделей, а іноді зображаються моделями квадратичного програмування. Після такого переходу для знаходження розв'язку оптимізаційної задачі можуть використовуватись уже відомі обчислювальні алгоритми, а самі розв'язки знаходяться в неперервних змінних.

Як відмічалось вище, для керування, зокрема, несиметричним режимом, в реальному масштабі часу необхідні розв'язки, знайдені в цілочислових змінних, оскільки за ними стоять, наприклад, параметри симетрувального пристою, які мають дискретні величини, або відповідне фазування несиметричних навантажень.

Розв'язування задач квадратичного програмування в цілочислових змінних пов'язане з рядом труднощів. Такі задачі керування можуть вирішуватись в неперервних змінних (без урахування цілочисловості), і якщо отриманий розв'язок задовольняє обмеження цілочисловості, то він є оптимальним для початкової цілочислової задачі. В протилежному випадку слід перейти до округлення компонент оптимального плану звичайної моделі квадратичного програмування до цілих чисел, але при цьому можливі розв'язки, що недопустимі за умовою задачі, або не оптимальні.

Викликає інтерес задача симетрування режиму електричної мережі з функцією мети виду (6.1). Таку задачу назвемо *задачею нескалярної оптимізації.* Під нескалярною оптимізацією будемо розуміти знаходження плану, що мінімізує модуль вибраного критеріального показника. При постановці задачі симетрування режиму у вигляді задачі нескалярної оптимізації є можливість використати для її розв'язування алгоритм, оснований на ідеях симплекс-методу лінійного програмування, оскільки перший та другий доданки виразу (6.1) є лінійною функцією вектора змінних, або методу динамічного програмування. Така постановка задачі дає змогу:

- в два рази понизити порядок цільової функції та використати для розв'язування задачі алгоритми, що мають більш просту обчислювальну процедуру, і, як наслідок, скоротити машинний час розрахунку цілеспрямованих впливів;

- знаходити розв'язки в цілочислових змінних, оскільки для цілочислових задач лінійного програмування добре розроблені обчислювальні процедури.

Таким чином, на етапі математичної постановки слід забезпечити адекватність моделі із об'єктом керування, врахувавши особливості процесів, що моделюються, та можливості реалізації керування з однієї сторони, а з іншої - слід виконати вимоги тих або інших математичних методів, якими буде знаходитись розв'язок задачі. Іноді трапляються складнощі, як у випадку, що розглядається. Для вирішення задачі можна піти на припущення довівши, що вони суттєво не позначаться на отриманих результатах, а якщо цього зробити не можна, то доводиться, обгрунтувавши необхідними дослідженнями, адаптувати відомі математичні методи аналізу чи розробити нові.

6.2 Симплекс-метод для вирішення задач нескалярної оптимізації

Якщо задача нескалярної оптимізації лінійна (лінійні дійсна та уявна частини цільової функції відносно змінних, а також лінійні всі обмеження математичної моделі), то для її вирішення можна скористатись основними ідеями симплекс-алгоритму задачі ЛП, але сам алгоритм в своїх деталях має бути адаптованим для нескалярної задачі. З метою спрощення обчислювального процесу можна проаналізувати особливості конкретної задачі, що пов'язані з її природою, встановити певні закономірності і на основі цього зробити відповідні зміни в алгоритмі, залишивши незмінною саму його ідею.

Розглянемо модифікований симплекс-алгоритм для вирішення нескалярних цілочислових задач, що містять обмеження у вигляді рівностей, а також, коли обмеження подані у вигляді рівностей та нерівностей.

6.2.1 Модифікований симплекс-алгоритм для задачі нескалярної оптимізації з обмеженнями у вигляді рівностей

Прикладом такої задачі є задача внутрішнього симетрування однофазних навантажень. Вона полягає в тому, що, знаючи параметри навантажень, необхідно визначити на яку напругу трифазної системи включити кожне із них, щоб рівень несиметрії режиму, що створюється групою однофазних споживачів, був якомога меншим. Не поглиблюючись в енергетичну сутність задачі та не наводячи необхідних обґрунтувань, які робляться при розробці математичної моделі (вони потребують глибоких професійних знань з даної проблеми), запишемо модель внутрішнього симетрування навантажень в функціональному вигляді:

$$\begin{cases} \left|\sum\limits_{n=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{3} a_{ni}x_{ni} + j\sum\limits_{n=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{3} b_{ni}x_{ni}\right| \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{3} x_{ni} = 1,\ n = 1,2,3,...,m \\ x_{ni} = 1 \forall 0, \end{cases} \qquad (6.2)$$

де a_{ni} та b_{ni} – дійсна та уявна частина струму зворотної послідовності, що генерується при включенні навантаження n, n = 1, 2, ... , m, на напругу i, i = 1 (U_{AB}), 2 (U_{BC}), 3 (U_{CA}).

Критерієм ефективності в даній задачі є струм зворотної послідовності (як міра несиметрії режиму). Змінні набувають значень 1 або 0. Якщо змінна x_{ni} дорівнює одиниці, то n-те навантаження слід включити на напругу – i, а якщо x_{ni} = 0, то навпаки – не включати. Такі змінні в математиці називаються булевими.

Система обмежень встановлює вимогу обов'язкового підключення кожного навантаження до мережі трифазного струму (кожне навантаження це технологічне обладнання і відключення його від мережі пов'язане з недовипуском продукції).

Цільова функція математичної моделі нескалярна, а обмеження – лінійні залежності від змінних. У відповідності до наведеного нами визначення, математична модель задачі внутрішнього симетрування відноситься до класу лінійних моделей нескалярної оптимізації. Оскільки модель лінійна, то розв'язок такої задачі можна шукати за модифікованим симплекс методом, основні ідеї якого залишаються тими ж як у класичному алгоритмі, розділ 2.3

Розглянемо сутність модифікованого симплекс-алгоритму для розв'язання задачі 6.2. Розгляд всіх його етапів будемо супроводжувати порівнянням з класичним симплекс-алгоритмом.

Як і для класичного алгоритму, для подальшого процесу оптимізації необхідно спочатку визначити опорний розв'язок. Нагадаємо, що в класичному алгоритмі, якщо знайдений пробний розв'язок не можна прийняти за опорний, то його пошук здійснюється за алгоритмом 2.4 і він є ітераційним процесом. На відміну від цього, будь-який пробний розв'язок задачі нескалярної оптимізації 6.2 може бути прийнятий як опорний. Щоб переконатись в цьому достатньо навести такі міркування: Кількість базисних змінних в даній задачі – m, кількість вільних – 2m. Якщо прирівняти до одиниці будь-яку n-ту змінну для всіх n = 1, 2, ..., m, то інші змінні набудуть нульових значень. Зробивши відповідні виключення з цільової функції, отримаємо пробний розв'язок, де m змінних дорівнюють одиниції, а 2m дорівнює нулю. Якщо повернутися до енергетичного змісту задачі, то, як опорний розв'язок, можна прийняти довільний розподіл навантажень на напруги трифазної системи. Таким чином, складних алгоритмів пошуку опорного розв'язку задача нескалярної оптимізації 6.2 не потребує.

Ітераційний процес оптимізації (покращення будь-якого знайденого допустимого розв'язку) починається з вибору вільної змінної для включення до базису. (Читачеві доречно самостійно нагадати, як це робиться в класичному алгоритмі, звернувшись до розділу 2.5). Такий вибір можна зробити у відповідності до симплекс-критерію 1 (мінімізація), який для задачі нескалярної оптимізації 6.2 формулюється таким чином:

Якщо є вільні змінні, включення яких до базису забезпечує зменшення значення критерію ефективності, то серед них слід вибрати ту, яка забезпечує найбільший від'ємний приріст величини струму зворотної послідовності. Якщо жодна із вільних змінних не забезпечує зменшення цільової функції, то оптимальний розв'язок отримано.

Даний етап у виконанні більш трудомісткий в порівнянні з класичним алгоритмом, оскільки треба перебрати всі вільні змінні, почергово прирівнюючи їх до одиниці, та оцінити (шляхом розрахунку) ефекти, що будуть отримані. Відмітимо, що інших значень, виходячи із сутності задачі, вільні змінні набувати не можуть.

Змінну для виключення з базису визначимо за симплекс-критерієм 2, який для задачі 6.2 формулюється таким чином:

Для виключення з базису завжди є лише одна змінна, яку в черговому пробному розв'язку слід прирівняти до нуля (для інших базисних змінних відношення вільного члена до відповідного коефіцієнта при новій базисній змінній дорівнює нулю).

Трудомісткість даного етапу, в порівнянні з класичним алгоритмом, менша. Вільній змінній, яку доцільно включити до базису, знаходиться у відповідності лише одна базисна змінна, яку необхідно виключити з базису. Для знаходження її не треба робити будь-яких обчислень та порівнянь. Якщо повернутися до суті задачі, то це значить, що якщо якесь навантаження доцільно переключити на іншу напругу трифазної мережі, то для цього треба відключити від напруги, на яку воно було включене попередньо. Заміну базисних змінних можна проводити за алгоритмом перетворення стандартних таблиць, розділ 2.4, який залишається таким-же, як і для випадку класичного симплекс методу (лише для запису коефіцієнтів цільової функції передбачається два рядки в стандартній таблиці).

Розглянутий алгоритм можна зобразити блок-схемою, рис 6.1.

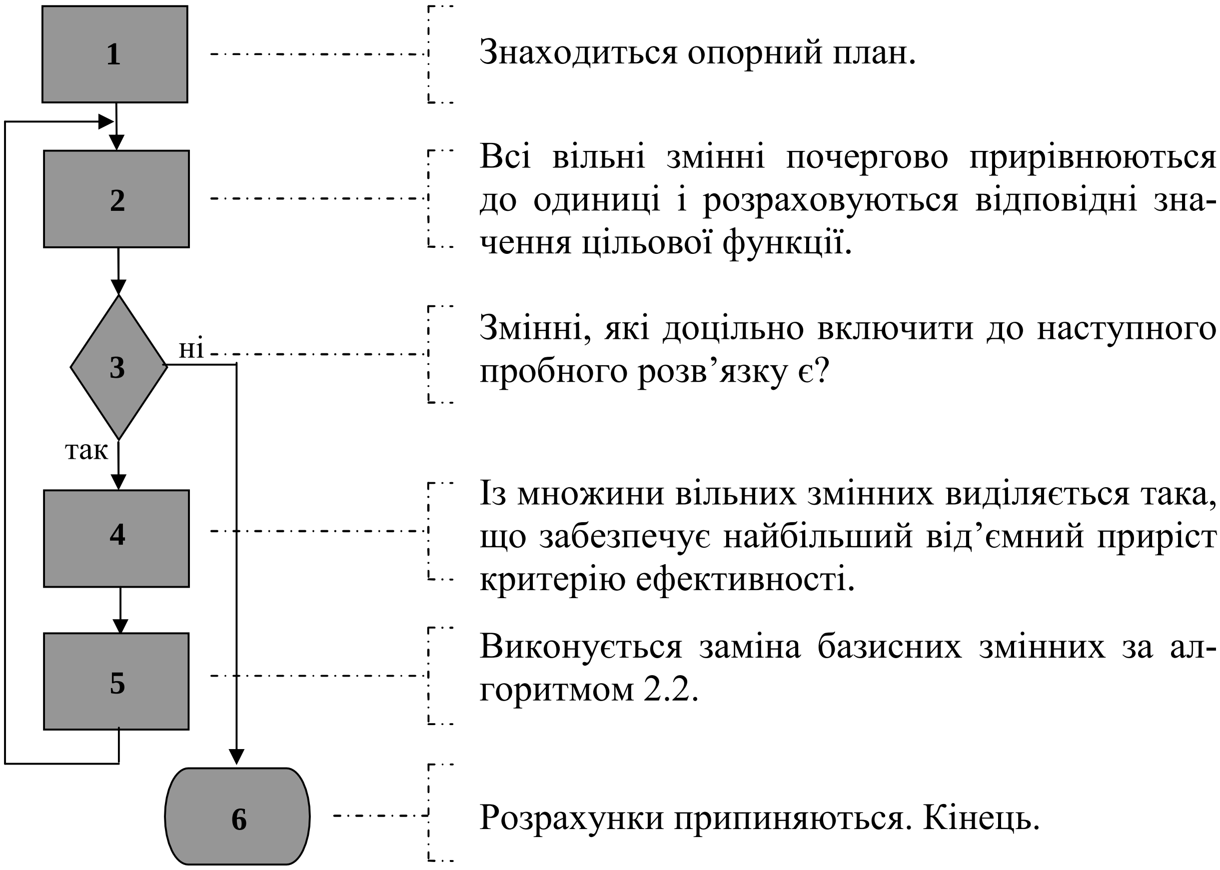


Рисунок 6.1 – Алгоритм 6.1. Модифікований симплекс-алгоритм для лінійної задачі нескалярної оптимізації з обмеженнями рівностями

Приклад 6.1. Виконати внутрішнє симетрування однофазних навантажень, що мають такі параметри режиму: I_1 = 0,3А; $\cos\varphi_1$ = 0,954; I_2 = 0,42А; $\cos\varphi_2$ = 0,879; I_3 = 0,565А; $\cos\varphi_3$ = 0,783; I_4 = 0,63А; $\cos\varphi_4$ = 0,737; I_5 = 0,65; $\cos\varphi_5$ = 0,7.

Розв’язування. Математична модель даної задачі запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \big|(0{,}129\ \ -0{,}164\ \ 0{,}035\ \ 0{,}207\ \ -0{,}213\ \ 0{,}006\ \ 0{,}303\ \ -0{,}255 \\ -0{,}048\ \ 0{,}347\ \ -0{,}268\ \ -0{,}078\ \ 0{,}363\ \ -0{,}263\ \ -0{,}1)\mathbf{X}+\rightarrow \\ +\,j(0{,}155\ \ 0{,}054\ \ -0{,}169\ \ 0{,}127\ \ 0{,}115\ \ -0{,}242\ \ 0{,}12\ \ 0{,}207 \\ -0{,}322\ \ 0{,}109\ \ 0{,}245\ \ -0{,}353\ \ 0{,}093\ \ 0{,}268\ \ -0{,}361)\mathbf{X}\big| \rightarrow \min \\ \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}, \qquad (6.3)$$

де $\mathbf{X}^{T} = (x_{11}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{21}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{31}\ x_{32}\ x_{33}\ x_{41}\ x_{42}\ x_{43}\ x_{51}\ x_{52}\ x_{53})$.

Продемонструємо заміну базисних змінних на прикладі однієї ітерації табличного алгоритму Є.С.Вентцель відповідно до алгоритму, рис.6.1.

Крок 1. Вибираємо довільний опорний розв’язок, наприклад,

$$\mathbf{X}^{T} = (1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0).$$

Крок 2. Визначимо, за рахунок якої з числа небазисних змінних можливо максимально поліпшити розв’язок, надавши кожній з них значення одиниці. Такою змінною, як видно з таблиці 6.1, є x_{53}.

Таблиця 6.1 - Визначення змінної для включення в базис

Вільні змінні	Відповідні значення струмів		
	$\mathrm{Re}\,\dot{I}_2$	$\mathrm{Im}\,\dot{I}_2$	I_2
$x_{12} = 1$	1,056	0,503	1,170
$x_{13} = 1$	1,255	0,280	1,285
$x_{22} = 1$	0,929	0,553	1,081
$x_{23} = 1$	1,148	0,195	1,165
$x_{32} = 1$	0.790	0,652	1,024
$x_{33} = 1$	0,988	0,122	1,005
$x_{42} = 1$	0,734	0,700	1,014
$x_{43} = 1$	0,924	0,101	0,930
$x_{52} = 1$	0,723	0,738	1,033
$x_{53} = 1$	0,886	0,109	0,892

Крок 3. Визначимо змінну, яку слід виключити із базису. Такою змінною буде x_{51}.

Крок 4. Виконаємо заміну базисних змінних $\overline{x}_{51} \leftrightarrow x_{53}$, наприклад, шляхом перетворення стандартної таблиці, табл. 6.2.

Таблиця 6.2 - Стандартна таблиця заміни базисних змінних

	Вільний член	x_{12}	x_{13}	x_{22}	x_{23}	x_{32}	x_{33}	x_{42}	x_{43}	x_{52}	x_{53}
$\mathrm{Re}\,\dot{I}_2$	1,349 0,866	0,293 0,293	0,094 0,094	0,420 0,420	0,201 0,201	0,558 0,558	0,351 0,351	0,615 0,615	0,425 0,425	0,163 0,626	0,46 -0,46
$\mathrm{Im}\,\dot{I}_2$	0,564 0,109	0,061 0,061	0,284 0,284	0,012 0,012	0,369 0,369	-0,09 -0,09	0,442 0,442	-0,14 -0,14	0,462 0,462	-0,63 -0,18	0,45 -0,45
x_{11}	1 1	1 1	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
x_{21}	1 1	0 0	0 0	1 1	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
x_{31}	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0
x_{41}	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	0 0	0 0
x_{51}	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1

Крок 5. Повертаємось до кроку 2.
Кінцевий розв'язок задачі дає такий вектор керування:

$$\mathbf{X}^T = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1).$$

Практично цей розв'язок реалізується таким чином: навантаження 1 підключається до напруги U_{AB}, навантаження 2 - до U_{CA}, навантаження 3 - до U_{AB}, навантаження 4 - до U_{BC} і навантаження 5 - до U_{CA}. В результаті в мережі буде циркулювати струм I_2 = 0,142А.

6.2.2 Модифікований симплекс-алгоритм для задачі нескалярної оптимізації з обмеженнями у вигляді рівностей та нерівностей

Прикладом математичної моделі нескалярної оптимізації з обмеженнями у вигляді рівностей та нерівностей є модель для оперативного керування симетрувальним пристроєм, в якій крім цілеспрямованого впливу на параметри несиметрії режиму контролюється величина реактивної потужності, що при цьому генерується. Розглянемо математичну модель такої задачі, не поглиблюючись в її енергетичну сутність, оскільки це виходить за рамки поставлених цілей.

$$\begin{cases} \left| \mathrm{Re}\dot{I}_2^H + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i + j\left(\mathrm{Im}\dot{I}_2^H + \sum\limits_{i=1}^{m} b_i x_i \right) \right| \to \min \\ x_1 + \bar{x}_1 = 1 \\ x_2 + \bar{x}_2 = 1 \\ ------ \\ x_m + \bar{x}_m = 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{m} Q_i x_i \le Q_{dop} \\ x_i, \bar{x}_i = 1 \forall 0\ , \end{cases} \tag{6.4}$$

де $\mathrm{Re}\dot{I}_2^н$, $\mathrm{Im}\dot{I}_2^н$ - дійсна та уявна частини вектора струму зворотної послідовності навантаження; a_i, b_i – те ж, що генеруються при включенні і-го вимикача симетрувального пристрою; Q_i – реактивна потужність і-ої секції симетрувального пристрою; Q_{dop} – допустима потужність симетрувального пристрою; x_i – булева змінна, що описує стан і-го вимикача симетрувального пристрою; $\bar{x}_i$ - фіктивна змінна, яка фізичного змісту не має.

Критерій ефективності для даної задачі – це струм зворотної послідовності в живильному вводі вузла несиметричного навантаження. Як видно, він описується нескалярною лінійною функцією. Обмеження моделі описують можливий стан кожного вимикача симетрувального пристрою, а також контролюють величину його потужності. Всі вони є лінійними залежностями від змінних.

Принципова відмінність математичної моделі (6.4) від моделі (6.2), яка не дозволяє скористатися алгоритмом 6.1, полягає в наявності обмеження-нерівності. Опорний розв'язок і розв'язки наступних ітерацій, як і в класичному симплекс-алгоритмі, повинні задовольняти всі обмеження моделі при невід'ємних змінних. Це можливо забезпечити, якщо вибір вільної змінної для включення в базис наступного пробного розв'язку здійснювати із множини таких, що задовольняють обмеження-нерівність (або всі обмеження-нерівності, якщо їх в моделі декілька).

Для даної задачі процес обчислення можна спростити, вилучивши етап класичного симплекс-алгоритму, що полягає в знаходженні опорного плану. За опорний розв'язок можна прийняти $x_i = 0$, $i = 1, 2,..., m$. Якщо при цьому не задовольняється обмеження-нерівність, то виходячи з енергетичної сутності задачі, вона не має розв'язків і жодного вимикача симетрувального пристрою включати не треба.

Виконання кожної наступної ітерації потрібно починати з відбору вільних змінних x_i, включення яких до базису забезпечують обмеження-нерівність (або обмеження-нерівності, якщо їх декілька), і формування з них множини D_k, де k – номер ітерації. Всі подальші дії слід виконувати, як за алгоритмом 6.1, але вибір нової базисної змінної здійснюється з множини D_k.

Зробивши узагальнення зі сказаного, можна запропонувати такий алгоритм обчислень для лінійної задачі нескалярної оптимізації з обмеженнями рівностями та нерівностями, рис. 6.2.

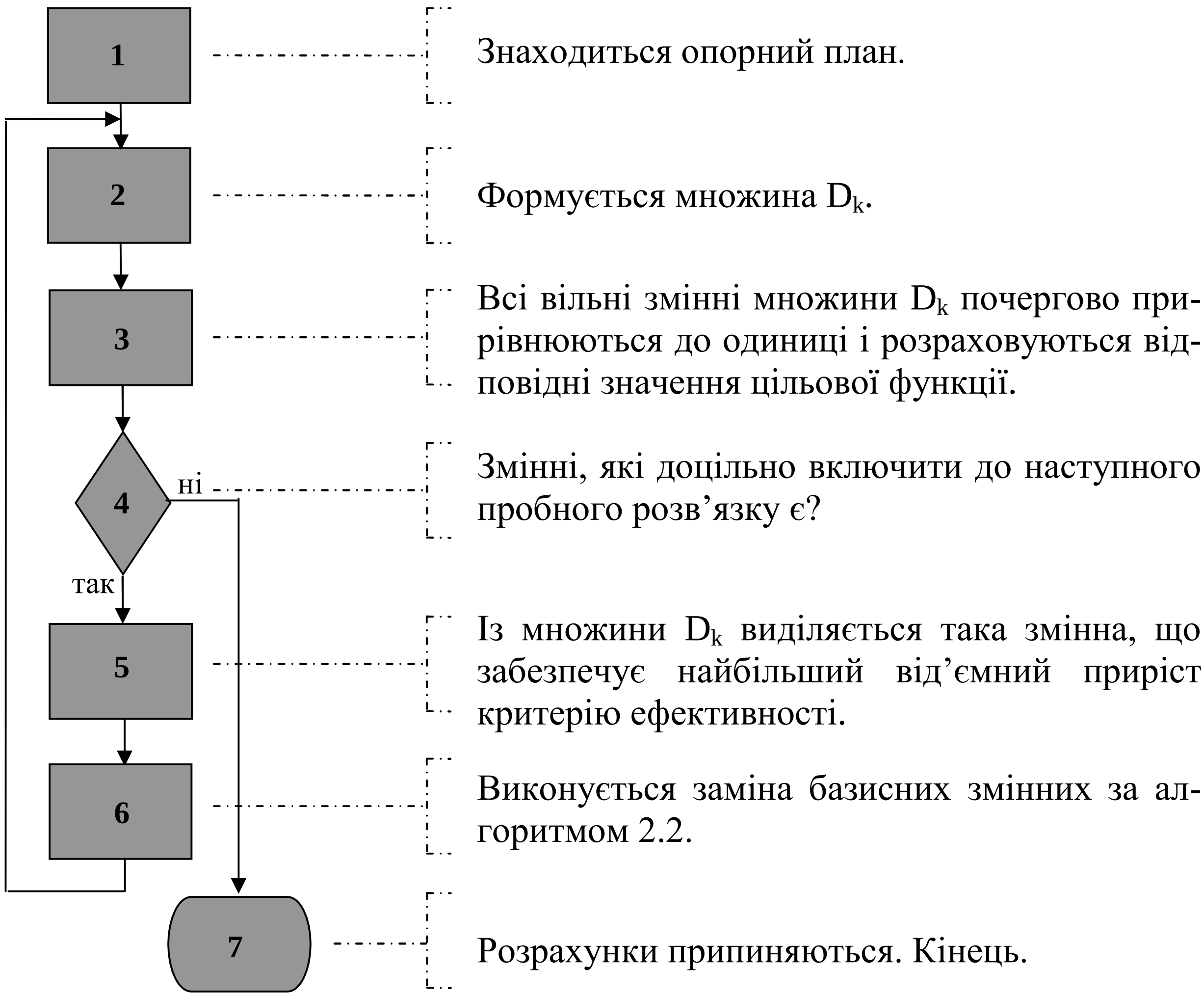


Рисунок 6.2 – Алгоритм 6.2. Модифікований симплекс-алгоритм для лінійної задачі нескалярної оптимізації з обмеженнями рівностями та нерівностями

Приклад 6.2. В лінії, що живить несиметричне навантаження, встановився електричний режим, симетрична складова струму зворотної послідовності якого дорівнює $\dot{I}_2^{н} = 4{,}036 + j1{,}725$ А. В вузлі живлення є симетрувальний пристрій, з такими параметрами окремих секцій, що включаються на напругу $U_{АБ}$: Q_1 = 180вар; Q_2 = 120вар; Q_3 = 60вар. Секції, що включаються на напругу U_{BC}, мають параметри: Q_4 = 180вар; Q_5 = 120вар; Q_6 = 60вар, а на напругу U_{CA}, мають параметри: Q_7 = 180вар; Q_8 = 120вар; Q_9 = 60вар. Розрахувати, які вимикачі симетрувального пристрою (їх нумерація збігається з нумерацією секцій) доцільно включити з метою зменшення несиметрії електричного режиму, якщо напруга в вузлі 100В, а допустима потужність симетрувального пристрою до включення - 540вар.

Розв’язування. Математична модель для прийняття рішення формалізується таким чином:

$$\begin{cases} \left| 4{,}036 + (-0{,}9\ \ -0{,}6\ \ -0{,}3\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0{,}9\ \ 0{,}6\ \ 0{,}3)\mathbf{X} + \to \right. \\ \left. + j\left[1{,}725 + (0{,}52\ \ 0{,}346\ \ 0{,}173\ \ -1{,}04\ \ -0{,}693\ \ -0{,}346\ \ 0{,}52\ \ 0{,}346\ \ 0{,}173)\mathbf{X}\right] \right| \to \min \\ \mathbf{X} + \overline{\mathbf{X}} = \mathbf{n} \\ (180\ \ 120\ \ 60\ \ 180\ \ 120\ \ 60\ \ 180\ \ 120\ \ 60)\mathbf{X} \le 540 \\ x_i, \overline{x}_i = 1 \forall 0\ , \end{cases} \tag{6.5}$$

де $\mathbf{X}^T = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8\ x_9)$; $\overline{\mathbf{X}}^T = (\overline{x}_1\ \overline{x}_2\ \overline{x}_3\ \overline{x}_4\ \overline{x}_5\ \overline{x}_6\ \overline{x}_7\ \overline{x}_8\ \overline{x}_9)$.

Ітерація 1.

Крок 1. Приймемо, як опорний, такий розв'язок:

$\mathbf{X}^T = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$; $\overline{\mathbf{X}}^T = (1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$.

Крок 2. Сформуємо множину D_1, куди входять вільні змінні, включення яких до базису задовольняє обмеження-нерівність:

$$D_1 = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8\ x_9).$$

Крок 3. Почергово прирівняємо кожну з вільних змінних до одиниці та розрахуємо відповідні значення цільової функції. Результати цього розрахунку наведені в табл. 6.3.

Таблиця 6.3 – Визначення змінної для включення до базису

Вільна змінна	$\mathrm{Re}\,\dot{I}_2$	$\mathrm{Im}\,\dot{I}_2$	I_2
$x_1 = 1$	3,136	2,245	$\boxed{3{,}856}$
$x_2 = 1$	3,436	2,071	4,011
$x_3 = 1$	3,736	1,898	4,19
$x_4 = 1$	4,036	0,685	4,093
$x_5 = 1$	4,036	1,032	4,165
$x_6 = 1$	4,036	1,379	4,265
$x_7 = 1$	4,936	2,245	5,422
$x_8 = 1$	4,636	2,071	5,077
$x_9 = 1$	4,336	1,898	4,733

Як видно, змінною, що забезпечує максимальний від'ємний приріст цільової функції, є x_1.

Крок 4. Виконаємо заміну базисних змінних $\overline{x}_1 \leftrightarrow x_1$. Для цього скористаємось табличним симплекс - алгоритмом.

Таблиця 6.4 – Заміна базисних змінних першої ітерації

	Віль-ний член	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
$\mathrm{Re}\,\dot{I}_2$	4,036 3,136	0,9 -0,9	0,6 0,6	0,3 0,3	0 0	0 0	0 0	-0,9 -0,9	-0,6 -0,6	-0,3 -0,3
$\mathrm{Im}\,\dot{I}_2$	1,725 2,245	-0,52 0,52	-0,346 -0,346	-0,173 -0,173	1,04 1,04	0,693 0,693	0,346 0,346	-0,52 -0,52	-0,346 -0,346	-0,173 -0,173
$\bar{x}_1$	1 1	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
$\bar{x}_2$	1 1	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
$\bar{x}_3$	1 1	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
$\bar{x}_4$	1 1	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
$\bar{x}_5$	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0
$\bar{x}_6$	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1`	0 0	0 0	0 0
$\bar{x}_7$	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0
$\bar{x}_8$	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0
$\bar{x}_9$	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1
x_{10}	540 360	180 -180	120 120	60 60	180 180	120 120	60 60	180 180	120 120	60 60

Для виконання другої ітерації повертаємось до кроку 2.

Остаточним розв’язком задачі буде вектор $\mathbf{X}^{T}$ = (110101000),. Реалізація якого потребує включення секцій №№ 1; 2; 4; 6. Струм зворотної послідовності зменшиться до величини I_2 = 2,8 А.

Завдання для самостійної роботи

1. Поясніть смисл таких термінів і понять:
   - скалярна та нескалярна функція дійсного змінного;
   - екстремум скалярної та нескалярної функції.

2. Виконайте другу та наступні ітерації для прикладу 6.1.

3. Як сформулювати ознаку досягнення оптимального розв’язку для прикладів 6.1 та 6.2?

4. Виконайте другу та наступні ітерації для прикладу 6.2.

5. Сформулюйте симплекс-критерій 1 та симплекс-критерій 2 для задачі нескалярної оптимізації.

6. Які етапи модифікованого симплекс-алгоритму для задач нескалярної оптимізації 6.2 та 6.4 менш трудомісткі, а які більш трудомісткі в порівнянні з класичним алгоритмом?

Додаток А

Засоби опису алгоритмів

Під алгоритмом розуміється точний припис з виконання деякого обчислювального процесу, який за кінцеве число кроків приведе до розв'язку задачі.

Будь-якому алгоритму притаманні такі загальні риси.

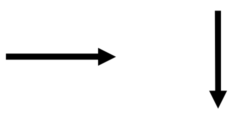
Детермінованість алгоритму. Оскільки перелік правил, який є алгоритмом, однозначний, то його багатократне використання за одних і тих же початкових умов дає той же результат.

Масовість алгоритму. Алгоритм є приписом для розв'язування не однієї конкретної задачі, а дозволяє вирішити серію однотипних задач при різних початкових умовах.

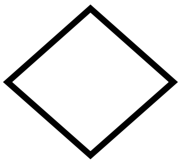
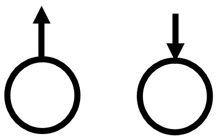
Результативність алгоритму. Алгоритм – це припис, виконуючи який отримуємо або кінцевий розв'язок задачі в результаті певної кількості кроків, або повідомлення про неможливість вирішення задачі

Найбільш зручним способом запису алгоритму на перших етапах його розробки є *блок-схема*, яка є таким графічним зображенням, де етапи розв'язування задачі зображаються у вигляді різних геометричних фігур. В середині цих фігур вказується зміст даного етапу обчислень. Якщо опис етапу обчислення громіздкий, в середині блока проставляється номер етапу обчислення, а опис дається в додатку до блок-схеми. Геометричні фігури (блоки) з'єднуються стрілками, які вказують напрямок розвитку обчислювального процесу. Іноді біля стрілок роблять написи, що вказують, при яких умовах здійснюється вибір даного напрямку. Графічні позначення, що використовуються при зображенні блок-схем, наведені в табл. А.1

Таблиця А.1 – Графічні позначення в блок-схемах алгоритмів

Графічне позначення блока	Функції, що виконуються блоком
	Обробка числового матеріалу, команд і т.д (обчислювальний блок)
	Операції введення та виведення інформації (підготовчий блок)
	Показчик послідовності виконання операцій

Продовження таблиці А.1

	Організація розгалуження алгоритму (логічний блок)
	Виконання підпрограми
	Зв’язок блоків
	Операції початку або кінця обчислень (програми)

Додаток Б

ЗАВДАННЯ
на контрольну роботу для студентів заочної форми навчання та методичні вказівки до її виконання

Варіант завдання на контрольну роботу вибирається у відповідності з порядковим номером прізвища в журналі обліку занять академічної групи.

Контрольна робота складається з трьох задач і запитання реферативного характеру, номер якого у відповідності до варіанту вибирається з табл. Б-1.

Таблиця Б.1 - Перелік запитань для реферату по варіантах

Номер варіанта	Номер запитання реферату	Номер варіанта	Номер запитання реферату
1	25	16	12
2	24	17	11
3	23	18	10
4	22	19	9
5	21	20	8
6	20	21	7
7	14	22	6
8	16	23	5
9	19	24	4
10	18	25	3
11	17	26	2
12	13	27	1
13	30	28	27
14	28	29	26
15	29	30	15

<u>Перелік запитань до реферату</u>

1. Процес проектування як послідовність задач прийняття рішень (застосування методів системного аналізу при постановці задач автоматизованого проектування систем електропостачання).
2. Постановка електроенергетичних задач як математичних екстремальних задач з обмеженнями. Приклади оптимізаційних електроенергетичних задач.

3. Основні поняття і принципи системного аналізу. Характеристика термінів.
4. Методика формалізації задач у вигляді математичних моделей. Опис альтернатив, мети і обмежень.
5. Класифікація математичних моделей. Загальна постановка задачі математичного програмування.
6. Побудова математичних моделей. Етапи моделювання.
7. Побудова лінійної математичної моделі виконання графіка планово-попереджувального ремонту електрообладнання.
8. Побудова лінійної математичної моделі вибору оптимальної стратегії виробництва продукції при обмеженнях в постачанні електричної енергії.
9. Лінійне програмування. Основна задача лінійного програмування.
10. Необхідні і достатні умови сумісності рівнянь-обмежень основної задачі лінійного програмування.
11. Геометрична інтерпретація основної задачі лінійного програмування.
12. Симплексний метод розв’язування основної задачі лінійного програмування.
13. Задача пошуку опорного і оптимального розв’язку основної задачі лінійного програмування.
14. Послідовність дій при переході від задачі лінійного програмування загального виду до основної задачі лінійного програмування.
15. Цілочислове програмування. Основні положення спеціальних методів розв’язування екстремальних цілочислових задач.
16. Алгоритм цілочислового лінійного програмування (алгоритм Р.Гоморі).
17. Загальна постановка задачі нелінійного програмування.
18. Задача квадратичного програмування – як окремий випадок задачі нелінійного програмування.
19. Опуклі і увігнуті функції та множини. Поняття про локальний і глобальний мінімум (максимум).
20. Умови оптимальності екстремальних задач при наявності обмежень (умови Куна – Такера).
21. Основні положення та загальна характеристика методу безпосередньої лінійної апроксимації (метод Франка і Вулфа).
22. Алгоритм методу Франка і Вулфа (метод безпосередньої лінійної апроксимації).
23. Основні положення методу штрафних функцій для розв’язування задач нелінійного програмування.
24. Алгоритм методу штрафних функцій.
25. Динамічне програмування. Принцип оптимальності Белмана і наслідки, що виходять з нього.

26. Рекурентні співвідношення методу динамічного програмування.

27. Алгоритм динамічного програмування.

28. Суть і області застосування теорії ігор для розв’язування електроенергетичних задач в умовах невизначеності.

29. Матриці ігор і найкращі чисті стратегії.

30. Оптимальні змішані стратегії матричних ігор.

31. Перетворення матричної енергетичної гри в задачу лінійного програмування.

Задача 1

Визначити оптимальну конфігурацію електричної мережі для даних, що наведені в табл. б.2, на основі побудови моделі лінійного програмування і її подальшого аналізу.

Методичні вказівки до розв’язування задачі

Побудуйте максимальний граф електричної мережі, який враховує всі можливі зв’язки між джерелом і споживачами електричної енергії. Вузол балансу треба поєднати з вузлом, в якому знаходиться джерело електричної енергії, та надати йому номер N + 1 (N – кількість підстанцій, що споживають електричну енергію), рис. Б.1.

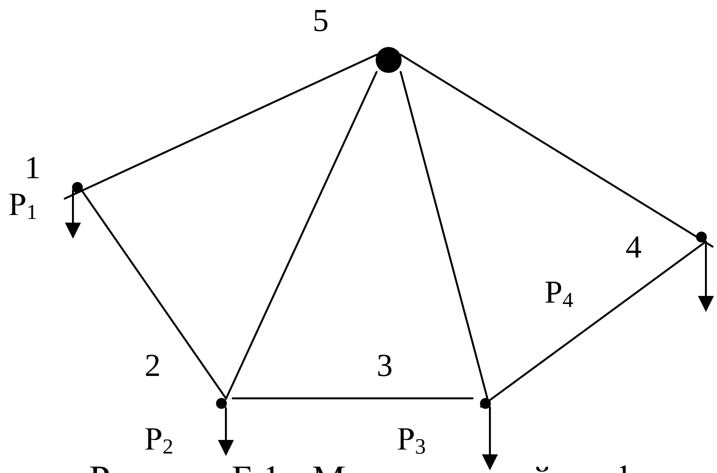


Рисунок Б.1 - Максимальний граф електричної мережі

Розрахунки проводяться у відповідності з математичною моделлю

$$\begin{cases} З\left(\mathbf{P}_{ij}\right) \to \min \\ \mathbf{M} * \mathbf{P}_{ij} = -\mathbf{P}_N \\ p_{ij} <> 0 \end{cases} \qquad (Б\text{-}1)$$

де n – кількість вузлів;

М – перша матриця інциденцій;

З ($\mathbf{P}_{ij}$) – витрати в лінії електропередачі, тис. грн./ км·МВт;

$\mathbf{P}_{ij}$ – вектор потоків активної потужності, що передаються від вузла і до вузла j, МВт;

$\mathbf{P}_N$ – вектор електричних навантажень підстанцій, МВт;

$i = 1, ... , n-1; j = 1, … , n; N = 1, … , n-1.$

В моделі (Б-1) критеріальною функцією є функція витрат на спорудження ліній електропередач, яка залежить від їх перерізу, матеріалу, марки провода, довжини лінії тощо. В зв'язку з тим, що переріз і марка провода вибираються в залежності від допустимої величини нагріву розрахунковим струмом або потужністю, витрати в лінії можна визначити як функцію активних навантажень, що протікають по лінії. Тому фізичним змістом керованих змінних в моделі (Б-1) є потоки активної потужності p_{ij}, що передаються по лініях електропередачі від вузла і до вузла j або навпаки – від вузла j до вузла i. В радіальних лініях, що з'єднують джерела живлення з підстанціями споживачів, напрямки потоків потужності можуть бути виключно додатними – від джерела до споживача. В інших лініях (дугах графа), що зв'язують вузли навантаження між собою (магістральні лінії), можливі будь-які напрямки потоків потужності. Тому потужності в радіальних лініях позначимо через змінні $x_1, x_2 ... x_{n-1}$, а потужності в магістральних лініях – як різницю двох змінних: $x_n - x_{n+1}$; $x_{n+2} - x_{n+3}$; … $x_{2n-2} - x_{2n-1}$. Таким чином, керовані змінні p_{ij}, позначені через невідомі x_i ($i = 1, …, n-1$) і $x_j - x_{j+1}$ ($j = n, n+1, … , 2n-2$) будуть мати такий вигляд:

$$p_{n,1} = x_1 \qquad\qquad p_{1,2} = x_n - x_{n+1}$$

$$p_{n,2} = x_2 \qquad\qquad p_{2,3} = x_{n+2} - x_{n+3}$$

$$\cdots \qquad\qquad \cdots$$

$$p_{n,n-1} = x_{n-1} \qquad\qquad p_{n-2,n-1} = x_{2n-2} - x_{2n-1}$$

Далі треба записати цільову функцію в функціональному вигляді:

$$З\,(\mathbf{P}_{ij}) = \sum_{i=1}^{l} З_{ij} \cdot l_{ij} \cdot p_{ij}\,, \qquad (5\text{-}2)$$

де l - кількість ліній.

Обмеження моделі (5-1) визначаються як добуток матриці інциденцій **М** і вектора керованих змінних $\mathbf{P}_{ij}$. Отримані результати прирівнюються до відповідних значень електричних навантажень підстанцій споживачів з врахуванням від'ємного знака.

Подальший порядок визначення оптимальної конфігурації електричної мережі на підставі моделі (5-1) є таким:

1. підставити дані власного варіанта в функцію (5-2) і визначити числовий вигляд цільової функції;

2. визначити першу матрицю інциденцій для максимального графа мережі;

3. перемножити матрицю **M** на вектор $\mathbf{P}_{ij}$ і отримати систему рівнянь-обмежень в числовому вигляді;

4. вибрати вільні і базисні змінні, виходячи з того, що кількість вільних змінних дорівнює $k = n - m$, де k – кількість вільних змінних; n – загальна кількість змінних; m – кількість рівнянь – обмежень;

5. записати цільову функцію через вільні змінні;

6. записати рівняння-обмеження таким чином, щоб в правій частині цих функцій були присутніми лише тільки вільні змінні, а в лівій – відповідні базисні;

7. записати основну задачу лінійного програмування в стандартній формі;

8. записати основну задачу лінійного програмування у вигляді стандартної таблиці;

9. вирішити задачу за допомогою табличного симплексного алгоритму (програма “Simplex” або вручну);

10. дати інтерпретацію отриманим результатам з енергетичної точки зору і обґрунтувати оптимальну конфігурацію електричної мережі.

Таблиця Б.2 – Вихідні дані для розв’язування задачі 1

№ варі-анта	Кількість джерел електроенергії	Кіль-кість підстан-цій спожи-вачів	Активна потужність підстанцій, МВт					Відстань між підстанціями, км														
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	L_{12}	L_{23}	L_{34}	L_{45}	L_{41}	L_{42}	L_{43}	L_{51}	L_{52}	L_{53}	L_{61}	L_{62}	L_{63}	L_{64}	L_{65}
1	1	3	5	10	8	-	-	10	20	-	-	15	20	25	-	-	-	-	-	-	-	-
2	1	4	12	6	14	18	-	6	10	8	-	-	-	-	12	15	7	-	-	-	-	-
3	1	5	6	8	12	9	14	20	15	20	10	-	-	-	-	-	-	12	14	10	8	16
4	1	4	4	6	10	8	-	10	20	30	-	-	-	-	22	15	10	-	-	-	-	-
5	1	5	8	10	16	20	12	40	20	35	30	-	-	-	-	-	-	30	20	40	20	25
6	1	3	10	14	18	-	-	15	30	-	-	20	10	10	-	-	-	-	-	-	-	-
7	1	4	16	8	12	10	-	16	10	12	-	-	-	-	10	14	8	-	-	-	-	-
8	1	5	10	16	20	12	14	10	15	20	10	-	-	-	-	-	-	12	20	10	10	18
9	1	3	14	10	8	-	-	10	16	-	-	10	20	10	-	-	-	-	-	-	-	-
10	1	4	11	15	18	13	-	16	20	14	-	-	-	-	20	10	15	-	-	-	-	-
11	1	5	12	8	14	9	10	16	12	20	22	-	-	-	-	-	-	10	16	20	10	12
12	1	4	8	6	10	14	-	10	12	8	-	-	-	-	10	12	20	-	-	-	-	-
13	1	5	10	12	14	11	15	14	20	10	5	-	-	-	-	-	-	10	14	16	20	12
14	1	3	7	10	14	-	-	10	16	-	-	12	20	10	-	-	-	-	-	-	-	-
15	1	4	9	15	18	20	-	15	20	25	-	-	-	-	10	20	12	-	-	-	-	-

Продовження таблиці Б.2

№ варі-анта	Кіль-кість джерел елект-роенер-гії	Кількість підстанцій споживачів	Активна потужність підстанцій, МВт					Відстань між підстанціями, км														
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	L_{12}	L_{23}	L_{34}	L_{45}	L_{41}	L_{42}	L_{43}	L_{51}	L_{52}	L_{53}	L_{61}	L_{62}	L_{63}	L_{64}	L_{65}
16	1	5	14	20	24	16	10	10	12	14	8	-	-	-	-	-	-	8	12	20	10	6
17	1	3	12	16	18	-	-	30	24	-	-	25	35	20	-	-	-	-	-	-	-	-
18	1	4	8	13	7	16	-	20	14	18	-	-	-	-	12	18	24	-	-	-	-	-
19	1	5	15	10	12	16	20	14	21	12	10	-	-	-	-	-	-	18	16	22	14	10
20	1	4	11	16	8	24	-	15	12	11	-	-	-	-	16	20	18	-	-	-	-	-
21	1	3	7	15	21	-	-	8	16	-	-	12	14	17	-	-	-	-	-	-	-	-
22	1	5	10	14	18	20	24	21	18	15	14	-	-	-	-	-	-	20	17	15	24	14
23	1	4	18	12	10	8	-	13	10	8	-	-	-	-	12	14	10	-	-	-	-	
24	1	3	12	8	16	-	-	16	14	-	-	10	12	14	-	-	-	-	-	-	-	-
25	1	5	16	12	10	8	22	10	14	16	13	-	-	-	-	-	-	16	14	10	12	18
26	1	4	6	10	8	12	-	9	12	14	-	-	-	-	11	13	15	-	-	-	-	-
27	1	3	30	25	15	-	-	8	12	-	-	9	7	10	-	-	-	-	-	-	-	-
28	1	5	24	15	10	8	12	12	10	9	13	-	-	-	-	-	-	13	15	10	12	14
29	1	4	10	12	16	20	-	7	10	13	-	-	-	-	10	12	9	-	-	-	-	-
30	1	3	14	18	24	-	-	12	8	-	-	7	11	9	-	-	-	-	-	-	-	-

Продовження таблиці Б.2

№ варіанта	Питомі функції витрат в лінії електропередачі, тис.грн./МВт·км														
	$З_{12}$	$З_{23}$	$З_{34}$	$З_{45}$	$З_{41}$	$З_{42}$	$З_{43}$	$З_{51}$	$З_{52}$	$З_{53}$	$З_{61}$	$З_{62}$	$З_{63}$	$З_{64}$	$З_{65}$
1	2	1	-	-	2	1	3	-	-	-	-	-	-	-	-
2	1	2	1	-	-	-	-	2	1	4	-	-	-	-	-
3	1	1	2	1	-	-	-	-	-	-	2	4	2	3	2
4	2	1	2	-	-	-	-	1	2	1	-	-	-	-	-
5	1	1	2	1	-	-	-	-	-	-	2	1	4	1	2
6	1	2	-	-	4	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-
7	1	1	2	-	-	-	-	2	1	2	-	-	-	-	-
8	1	1	1	2	-	-	-	-	-	-	1	2	1	2	3
9	1	2	-	-	1	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-
10	1	2	1	-	-	-	-	1	1	2	-	-	-	-	-
11	1	1	2	1	-	-	-	-	-	-	1	2	1	2	2
12	1	2	1	-	-	-	-	2	1	2	-	-	-	-	-
13	1	2	2	1	-	-	-	-	-	-	1	1	2	1	3
14	1	3	-	-	2	1	2	-	-	-	-	-	-	-	-
15	4	1	1	-	-	-	-	1	1	1	-	-	-	-	-

Продовження таблиці Б-2

№ варіанта	Питомі функції витрат в лінії електропередачі, тис.грн./МВт·км														
	$З_{12}$	$З_{23}$	$З_{34}$	$З_{45}$	$З_{41}$	$З_{42}$	$З_{43}$	$З_{51}$	$З_{52}$	$З_{53}$	$З_{61}$	$З_{62}$	$З_{63}$	$З_{64}$	$З_{65}$
16	2	1	2	1	-	-	-	-	-	-	0,5	2	1	1	1,5
17	3	2	-	-	2	3	2	-	-	-	-	-	-	-	-
18	2	1,5	2	-	-	-	-	1	-	2	2	-	-	-	-
19	1	2	2	1	-	-	-	-	-	-	2	3	1	2	1,5
20	2	3	1,5	-	-	-	-	2	2	1	-	-	-	-	-
21	4	5	-	-	6	4	5	-	-	-	-	-	-	-	-
22	4	5	5	4	-	-	-	-	-	-	5	6	7	4	5
23	3	4	4	-	-	-	-	2,5	4	3	-	-	-	-	-
24	3	2	-	-	4	3	3	-	-	-	-	-	-	-	-
25	4	3	5	4	-	-	-	-	-	-	4	5	4	3	4
26	2	3	3	-	-	-	-	4	3	3	-	-	-	-	-
27	1,5	2	-	-	2	1	1,5	-	-	-	-	-	-	-	-
28	2	4	3	4	-	-	-	-	-	-	5	4	3	3	5
29	3	4	3	-	-	-	-	3	4	4	-	-	-	-	-
30	2	1,5	-	-	3	4	3	-	-	-	-	-	-	-	-

Задача 2

Визначити величини зниження активної потужності в години максимальних навантажень електричної системи для n – цехів промислового підприємства ΔP_i , що створюють найменший збиток для підприємства в цілому.

За директивною вимогою з боку РДЦ (регіонального диспетчерського центру) треба зменшити споживання активної потужності підприємством в години максимального навантаження системи на ΔP_Σ. Така зміна режиму електроспоживання призводить до виникнення збитків у і-му цеху. Функції питомих збитків споживачів від обмежень активної потужності досліджені і наведені в табл. Б-3. Зниження потужності, що споживається і-м цехом допускається до величини $P_{техн.}$, при якій зберігається стійкість технологічного процесу.

Методичні вказівки до розв'язування задачі

Пропонується призначити керованими змінними величини зниження активної потужності для кожного споживача $\Delta \mathbf{P}_i$, i = 1, … , n - кількість цехів.

Розв'язання провести у відповідності з моделлю:

$$\begin{cases} Y_\Sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i(\Delta P_i) \to \min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta P_i \ge \Delta P_\Sigma \\ P_i - \Delta P_i \ge P_{техн.i} \\ \Delta P_i \ge 0 \end{cases}, \qquad (Б\text{-}3)$$

де P_i – активна потужність і-го цеху, що споживалось перед початком обмежень.

Таблиця Б.3 – Вихідні дані для розв'язування задачі 2

№ варіанта	Задача №2				
	№ цеху	Функції питомих збитків $Y_i(\Delta P_i)$, тис.грн.	Потужність і-го цеху P_i, МВт	$P_{техн.i}$, МВт	ΔP_Σ, МВт
1	2	3	4	5	6
1	1	$Y_1=3+10\Delta P_1$	15	12	4
	2	$Y_2=5+7\Delta P_2$	12	10	
	3	$Y_3=6+6\Delta P_3$	10	8	
2	1	$Y_1=1+4\Delta P_1$	10	8	4
	2	$Y_2=3+3\Delta P_2$	8	7	
	3	$Y_3=5+5\Delta P_3$	12	10	
3	1	$Y_1=6+4\Delta P_1$	9	7	4
	2	$Y_2=3+3\Delta P_2$	6	5	
	3	$Y_3=4+2\Delta P_3$	10	9	
	4	$Y_4=5+5\Delta P_4$	12	10	
4	1	$Y_1=3+5\Delta P_1$	8	7	6
	2	$Y_2=6+4\Delta P_2$	10	8	

	3	$Y_3=5+6\Delta P_3$	11	8	
	4	$Y_4=4+6\Delta P_4$	10	7	
5	1	$Y_1=7+5\Delta P_1$	8	6	5
	2	$Y_2=6+6\Delta P_2$	10	7	
	3	$Y_3=7+6\Delta P_3$	14	10	
6	1	$Y_1=3+8\Delta P_1$	11	8	6
	2	$Y_2=5+7\Delta P_2$	12	9	
	3	$Y_3=10+2\Delta P_3$	12	8	
7	1	$Y_1=4+7\Delta P_1$	11	9	5
	2	$Y_2=5+6\Delta P_2$	11	10	
	3	$Y_3=6+5\Delta P_3$	11	10	
	4	$Y_4=7+6\Delta P_4$	13	10	
8	1	$Y_1=4+10\Delta P_1$	14	12	5
	2	$Y_2=8+2\Delta P_2$	16	15	
	3	$Y_3=10+7\Delta P_3$	17	15	
	4	$Y_4=7+10\Delta P_4$	17	15	
9	1	$Y_1=10+10\Delta P_1$	20	16	10
	2	$Y_2=8+12\Delta P_2$	20	16	
	3	$Y_3=12+9\Delta P_3$	21	16	

Продовження таблиці Б.3

1	2	3	4	5	6
10	1	$Y_1=12+10\Delta P_1$	22	18	6
	2	$Y_2=8+12\Delta P_2$	20	17	
	3	$Y_3=10+9\Delta P_3$	19	17	
11	1	$Y_1=15+15\Delta P_1$	30	28	10
	2	$Y_2=12+17\Delta P_2$	29	25	
	3	$Y_3=10+20\Delta P_3$	30	26	
	4	$Y_4=16+16\Delta P_4$	32	26	
12	1	$Y_1=9+8\Delta P_1$	17	14	6
	2	$Y_2=8+9\Delta P_2$	17	14	
	3	$Y_3=10+7\Delta P_3$	17	15	
13	1	$Y_1=14+14\Delta P_1$	28	25	8
	2	$Y_2=16+12\Delta P_2$	28	24	
	3	$Y_3=17+10\Delta P_3$	27	23	
14	1	$Y_1=13+17\Delta P_1$	32	28	10
	2	$Y_2=14+16\Delta P_2$	35	30	
	3	$Y_3=15+15\Delta P_3$	30	25	
15	1	$Y_1=11+15\Delta P_1$	26	22	10
	2	$Y_2=10+17\Delta P_2$	27	22	
	3	$Y_3=12+14\Delta P_3$	28	24	
	4	$Y_4=14+12\Delta P_4$	24	20	
16	1	$Y_1=11+12\Delta P_1$	20	17	6
	2	$Y_2=9+14\Delta P_2$	22	20	
	3	$Y_3=12+11\Delta P_3$	23	18	
17	1	$Y_1=17+10\Delta P_1$	30	25	10
	2	$Y_2=15+12\Delta P_2$	25	20	
	3	$Y_3=13+13\Delta P_3$	27	24	
18	1	$Y_1=5+30\Delta P_1$	35	25	20
	2	$Y_2=10+25\Delta P_2$	35	30	
	3	$Y_3=15+20\Delta P_3$	40	30	
19	1	$Y_1=6+10\Delta P_1$	20	16	8
	2	$Y_2=8+9\Delta P_2$	18	15	
	3	$Y_3=7+9\Delta P_3$	22	18	
	4	$Y_4=10+7\Delta P_4$	16	15	
20	1	$Y_1=15+15\Delta P_1$	30	26	10
	2	$Y_2=14+17\Delta P_2$	32	26	
	3	$Y_3=13+18\Delta P_3$	34	30	

Продовження таблиці Б.3

1	2	3	4	5	6
21	1	$Y_1=2+8\Delta P_1$	12	11	3
	2	$Y_2=4+5\Delta P_2$	10	8	
	3	$Y_3=5+6\Delta P_3$	9	7	
22	1	$Y_1=6+10\Delta P_1$	18	15	6
	2	$Y_2=7+9\Delta P_2$	20	17	
	3	$Y_3=8+8\Delta P_3$	17	15	
	4	$Y_4=9+7\Delta P_4$	16	15	
23	1	$Y_1=12+20\Delta P_1$	32	28	8
	2	$Y_2=13+19\Delta P_2$	30	26	
	3	$Y_3=14+12\Delta P_3$	35	32	
24	1	$Y_1=11+10\Delta P_1$	20	18	6
	2	$Y_2=12+9\Delta P_2$	18	15	
	3	$Y_3=13+8\Delta P_3$	19	18	
	4	$Y_4=14+7\Delta P_4$	16	14	
25	1	$Y_1=6+8\Delta P_1$	10	8	8
	2	$Y=5+7\Delta P_2$	12	10	
	3	$Y_3=4+6\Delta P_3$	14	10	
	4	$Y_4=5+8\Delta P_4$	12	10	
26	1	$Y_1=8+6\Delta P_1$	16	12	5
	2	$Y_2=6+8\Delta P_2$	14	12	
	3	$Y_3=7+7\Delta P_3$	12	10	
27	1	$Y_1=4+7\Delta P_1$	9	7	5
	2	$Y_2=5+8\Delta P_2$	6	5	
	3	$Y_3=6+9\Delta P_3$	10	8	
	4	$Y_4=6+8\Delta P_4$	12	10	
28	1	$Y_1=7+10\Delta P_1$	15	12	9
	2	$Y_2=5+6\Delta P_2$	16	14	
	3	$Y_3=8+7\Delta P_3$	18	13	
	4	$Y_4=9+8\Delta P_4$	12	10	
29	1	$Y_1=8+9\Delta P_1$	10	8	5
	2	$Y_2=7+8\Delta P_2$	12	10	
	3	$Y_3=10+7\Delta P_3$	13	10	
30	1	$Y_1=9+8\Delta P_1$	14	12	7
	2	$Y_2=8+9\Delta P_2$	10	7	
	3	$Y_3=6+7\Delta P_3$	8	6	
	4	$Y_4=7+8\Delta P_4$	9	7	

Задача 3

Розв’язати задачу лінійного програмування. (табл. Б-4)

Таблиця Б.4 - Розрахункові дані для задачі 3

№ варі-анта	Умови задачі лінійного програмування	№ варі-анта	Умови задачі лінійного програмування
1	2	3	4
1	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \min \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2 \ge 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \ge -1 \\ x_2 + x_3 - 5 \le 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2 \le 0 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -2x_1 - 4x_2 - 0.5x_3 \to \min \\ x_1 + x_2 + 0.1x_3 \le 2 \\ 2x_1 + 0.5x_2 + x_3 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -0.5x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min \\ x_1 + 0.5x_2 \le 2 \\ x_2 + 2x_3 \le 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 \le 5 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$	7	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -x_1 - 4x_2 + 0.5x_3 \to \min \\ x_1 + x_2 + 0.5x_3 \le 4 \\ 2x_2 - x_3 \ge -2 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min \\ x_1 - x_2 - x_3 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_2 - x_3 \ge -1 \\ 2x_1 - x_2 - 2 \le 0 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$	8	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -3x_1 - 3x_2 - 2x_3 \to \min \\ x_1 + 0.5x_2 + 0.1x_3 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4 \ge 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \ge -4 \\ -2x_1 + x_2 \ge -2 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$	9	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -2x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min \\ x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 \le 4 \\ 2x_1 + 0.5x_2 + 4x_3 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -2x_1 - x_2 + 0.5x_3 \to \min \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_2 + x_3 \ge -1 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$	10	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 2x_1 - x_2 \to \min \\ -0.7x_1 - x_2 \ge 10 \\ x_1 + 2x_2 \ge -1 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

Продовження таблиці Б.4

1	2	3	4
11	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = x_1 - 4x_2 - 2x_3 \to \min \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \le 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 0.5 \\ x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$	17	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -4x_1 - 4x_2 \to \min \\ 4x_1 + 3_2 \le 12 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$
12	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 2x_1 - x_2 - x_3 \to \min \\ -x_1 + 0.5x_2 - 0.5x_3 + 4 \ge 0 \\ -0.5x_1 - x_2 + 2x_3 \ge -2 \\ x_1 - 2x_2 \ge -1 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$	18	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -2x_1 - 2x_2 - 0.5x_3 \to \min \\ x_1 + x_2 + 0.5x_3 \le 2 \\ 2x_1 + 0.5x_2 + x_3 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -12x_1 - 15x_2 \to \min \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$	19	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min \\ x_1 - x_2 - x_3 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_2 - x_3 \ge -1 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$
14	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -12x_1 - 15x_2 \to \min \\ 2x_1 + 5x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$	20	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 \to \min \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4 \ge 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \ge -2 \\ 2x_2 + x_3 - 6 \le 0 \\ x_1 - x_2 - 2 \le 0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -x_1 - x_2 + 0.5x_3 \to \min \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_3 \le -1 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$	21	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -2x_1 - x_2 - x_3 \to \min \\ x_1 + x_2 + 0.5x_3 \le 2 \\ 2x_2 - x_3 \ge -2 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$
16	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -4x_1 - 10x_2 \to \min \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$	22	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ x_2 + x_3 \le 5 \\ -2x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$

Продовження таблиці Б.4

1	2	3	4
23	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 3x_1 - x_3 \to \min \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_3 + x_4 - 5 \le 0 \\ -3x_1 + 4x_4 \le 6 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \quad x_4 \ge 0 \end{cases}$	27	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = -10x_1 - 6x_2 \to \min \\ 5x_1 + 4x_2 \le 10 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$
24	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 4x_1 + 10x_2 \to \max \\ -4x_1 - 3x_2 \ge -10 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$	28	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = x_1 + 4x_2 - 0.5x_3 \to \min \\ x_1 + x_2 + 0.5x_3 \le 4 \\ -2x_1 + x_3 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$
25	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 4x_1 + 10x_2 \to \max \\ -4x_1 - 3x_2 \ge -10 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$	29	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = x_1 + 4x_2 - 0.5x_3 \to \min \\ x_1 + x_2 + 0.5x_3 \le 4 \\ -2x_1 + x_3 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0 \end{cases}$
26	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 10x_1 + 6x_2 \to \max \\ -5x_1 - 4x_2 \ge -10 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$	30	$\begin{cases} f(\mathbf{X}) = 4x_1 + 4x_2 \to \max \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Аввакумов В.Г. Постановка и решение электроэнергетических задач исследования операций. –Киев. Вища школа, 1983, –240с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. –М.: Советское радио, 1972, -552с.
3. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. –М.: Советское радио, 1973, –312с.
4. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации.. –М.: Мир, 1972,.-240с.
5. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.. М.: Мир, 1975, –534с.
6. Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. М.: Мир, 1973,. –303с.
7. Исследование операций. Под ред. Дж.Моудера, С.Элмаграби. М.: Мир, 1981, - 677с.

Навчальне видання

Валерій Олександрович Милосердов, Леонід Борисович Терешкевич

Алгоритмізація оптимізаційних задач енергетики

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор В.О.Дружиніна
Коректор Ю.І.Франко

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29,7*421/4
Друк різографічний
Наклад прим.
Зам. №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95