



Поліщук Л. К.

Вінницький  
національний  
технічний  
університет

Харченко Є. В.

Національний  
університет  
“Львівська  
політехніка”

УДК 622.3.065.25:622.67

## АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ СТІЛИ ВІДВАЛОУТВОРЮВАЧА У ВЕРТИКАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ

*Рассматриваются результаты исследований свободных колебаний стрелы отвалообразователя, состоящей из шарнирно соединённых секций и удерживаемой с помощью вантовой подвески, в вертикальной плоскости. Анализируется влияние коэффициентов жесткости оттяжек и погонной массы участков стрелы на собственные частоты и формы колебаний. Обосновываются практические рекомендации по предотвращению резонансных явлений при работе конвейера отвальной консоли отвалообразователя.*

*The results of studies of free oscillations of boom spreader consisting of hinged sections and held by the cabling suspension in a vertical plane. Examines the impact coefficients of stiffness and mass per unit length of braces boom sections on the natural frequencies and mode shapes. Practical recommendations are justified to prevent resonance in the work of the conveyor bucket moldboard console.*

У технологічних процесах видобування корисних копалин відкритим способом важливу роль відіграють відвалоутворювачі [4, 8]. Від їх продуктивності і довжини відвальної консолі (стріли) значно залежить ефективність освоєння родовища. Несівна конструкція складається з декількох шарнірно з'єднаних секцій, що утримуються в робочому положенні за допомогою вантової підвіски. Консоль обладнана стрічковим конвеєром для транспортування сипкого вантажу (ґрунту, видобутої руди тощо).

Під час роботи конвеєра стріла перебуває під дією динамічних навантажень, викликаних вітровим потоком, статичною та динамічною невірноваженістю обертюваних елементів, взаємодією завантаженої стрічки, що перебуває у поступальному русі, з опорними роликками. Характер зміни в часі динамічних навантажень, здебільшого, є близьким до періодичного. Тому проведення модального аналізу механічної системи стріли з метою уникнення резонансних явищ під час роботи конвеєра має істотне практичне значення. Обчислення частотного спектра дає можливість запобігти резонансним явищам у механічній системі, а знаходження власних

форм сприяє вивченню вимушених коливань утримувальної конструкції.

Дослідженням динаміки довгомірних несівних конструкцій у літературі приділяється значна увага з огляду на широке застосування згаданих елементів у підіймально-транспортній, гірничій, нафтогазовидобувній техніці, будівництві тощо. Вільні та вимушені коливання механічних систем, що містять довгомірні металокопункції, розглядаються у працях [1, 9, 12]. Розробляються підходи до проведення аналізу взаємодії несівних конструкцій з привідними системами [3, 6, 11, 13], рухомими навантаженнями [2], виконавчими органами машин [4, 7]. З метою спрощення інженерних розрахунків за рахунок дискретизації пружних систем з розподіленими параметрами застосовують методи скінченних елементів [1, 14], скінченних різниць [13], узагальнених переміщень [5] тощо.

Незважаючи на широке застосування континуальних та континуально-дискретних розрахункових моделей механічних систем з довгими ланками, для дослідження динаміки пристроїв, виготовлених у вигляді сукупності шарнірно зчленованих елементів і призначених для переміщення і позиціонування вантажів,



застосовують моделі зі скінченним числом ступенів вільності [10]. Ця тенденція є притаманною, зокрема, дослідженням у галузі робототехніки і спрямована на спрощення методів розрахунків динамічних процесів.

У цій статті, в рамках згаданого підходу, пропонується математична модель вільних коливань підвісної стріли відвалоутворювача, що складається з трьох жорстких, шарнірно зчленованих секцій, і проводяться дослідження впливу маси транспортованого вантажу і жорсткості утримувальних канатів на власні частоти і форми механічної системи.

Схема стріли відвалоутворювача зображена на рис. 1, а, а розрахункова модель стріли – на рис. 1, б. Стріла складається із трьох шарнірно зчленованих секцій довжинами  $l_1, l_2, l_3$ , що розглядаються як тверді тіла масами  $m_1, m_2, m_3$  і центральними моментами інерції  $I_1, I_2, I_3$ . Центри мас секцій  $O_1, O_2, O_3$  розташовані на відстанях  $a_1, a_2, a_3$  від їхніх лівих кінців. Лівий кінець першої секції опирається на нерухому шарнірну опору, а з'єднувальні шарніри секцій та правий кінець останньої (третьої) секції утримуються за допомогою канатних відтяжок, як показано на рис. 1, а. Жорсткості відтяжок в напрямі, перпендикулярному до осі стріли, становлять  $c_1, c_2$  та  $c_3$  (рис. 1, б). Будемо

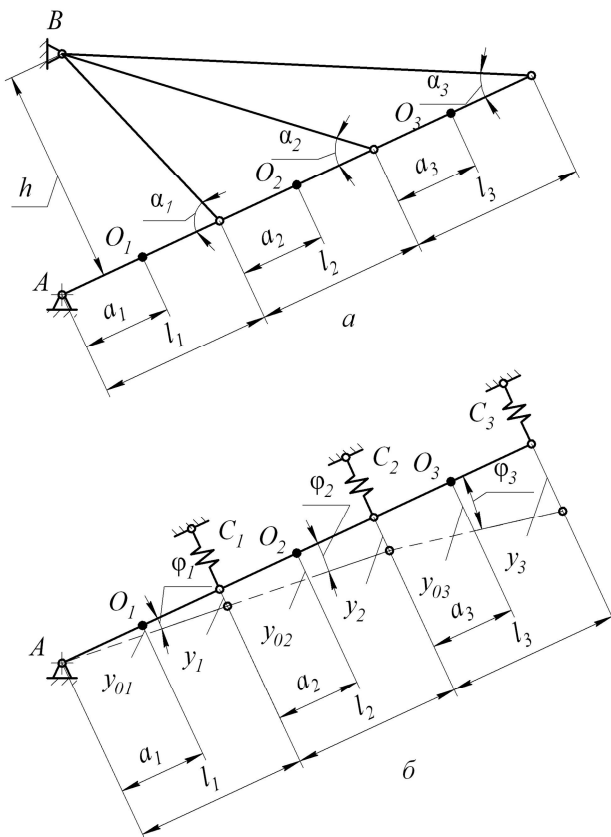


Рис. 1. Схема стріли відвалоутворювача (а) та її розрахункова модель (б)

вважати, що коли стріла перебуває у стані спокою, осі секцій збігаються і утворюють спільну пряму лінію. В процесі коливань положення системи можна охарактеризувати за допомогою кутів повороту секцій  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Тоді переміщення опорних вузлів у напрямі, перпендикулярному до осі стріли в недеформованому стані системи, будуть:

$$y_1 = \varphi_1 l_1;$$

$$y_2 = \varphi_1 l_1 + \varphi_2 l_2;$$

$$y_3 = \varphi_1 l_1 + \varphi_2 l_2 + \varphi_3 l_3. \quad (1)$$

Відповідні переміщення центрів мас секцій стріли визначаються залежностями

$$y_{o1} = \varphi_1 a_1;$$

$$y_{o2} = \varphi_1 l_1 + \varphi_2 a_2;$$

$$y_{o3} = \varphi_1 l_1 + \varphi_2 l_2 + \varphi_3 a_3. \quad (2)$$

Рух механічної системи опишемо за схемою рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, 2, \dots, S), \quad (3)$$

де  $T$  і  $\Pi$  – кінетична і потенціальна енергії системи;  $q$  – узагальнена координата;  $t$  – час;  $S$  – число ступенів вільності.

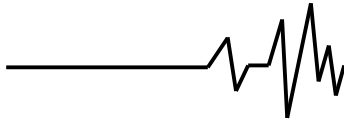
Кінетичну і потенціальну енергії системи запишемо як

$$T = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{m_i \dot{y}_{oi}^2}{2} + \frac{I_i \dot{\varphi}_i^2}{2} \right); \quad (4)$$

$$\Pi = \sum_{i=1}^3 \frac{c_i y_i^2}{2}. \quad (5)$$

З урахуванням співвідношень (1) і (2) вирази енергій (4) і (5) перетворюємо до вигляду

$$T = \frac{m_1 (\dot{\varphi}_1 a_1)^2}{2} + \frac{m_2 (\dot{\varphi}_1 l_1 + \dot{\varphi}_2 a_2)^2}{2} + \frac{m_3 (\dot{\varphi}_1 l_1 + \dot{\varphi}_2 l_2 + \dot{\varphi}_3 a_3)^2}{2} +$$



$$+ \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{I_2 \dot{\varphi}_2^2}{2} + \frac{I_3 \dot{\varphi}_3^2}{2}; \quad (6)$$

$$\Pi = \frac{c_1(\varphi_1 l_1)^2}{2} + \frac{c_2(\varphi_1 l_1 + \varphi_2 l_2)^2}{2} + \frac{c_3(\varphi_1 l_1 + \varphi_2 l_2 + \varphi_3 l_3)^2}{2}. \quad (7)$$

Прийнявши, що  $q_1 = \varphi_1$ ;  $q_2 = \varphi_2$ ;  $q_3 = \varphi_3$  і підставивши вирази (6) і (7) до рівняння Лагранжа (3), одержимо рівняння руху системи у вигляді

$$\begin{aligned} & [I_1 + a_1^2 m_1 + (m_2 + m_3) l_1^2] \ddot{\varphi}_1 + \\ & + (m_2 l_1 a_2 + m_3 l_1 l_2) \ddot{\varphi}_2 + m_3 l_1 a_3 \ddot{\varphi}_3 + \\ & + (c_1 + c_2 + c_3) l_1^2 \varphi_1 + (c_2 + c_3) l_1 l_2 \varphi_2 + \\ & + c_3 l_1 l_3 \varphi_3 = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & (m_2 a_2 l_1 + m_3 l_1 l_2) \ddot{\varphi}_1 + (I_2 + m_2 a_2^2 + m_3 l_2^2) \ddot{\varphi}_2 + \\ & m_3 l_2 a_3 \ddot{\varphi}_3 + (c_2 + c_3) l_1 l_2 \varphi_1 + (c_2 + c_3) l_2^2 \varphi_2 + \\ & + c_3 l_2 l_3 \varphi_3 = 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & m_3 a_3 l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_3 a_3 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (I_3 + m_3 a_3^2) \ddot{\varphi}_3 + \\ & + c_3 l_1 l_3 \varphi_1 + c_3 l_2 l_3 \varphi_2 + c_3 l_3^2 \varphi_3 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Для визначення частот і форм вільних коливань механічної системи шукаємо розв'язки однорідної системи диференціальних рівнянь (8) – (10) у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \Phi_1 \cos \omega t; & \varphi_2 &= \Phi_2 \cos \omega t; \\ \varphi_3 &= \Phi_3 \cos \omega t, \end{aligned} \quad (11)$$

де  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  – амплітуди кутових переміщень;  $\omega$  – циклічна частота коливань.

З урахуванням (11) рівняння (8) – (10) подаємо як

$$(B - \lambda A) \Phi = 0, \quad (12)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} I_1 + a_1^2 m_1 + (m_2 + m_3) l_1^2 & m_2 l_1 a_2 + m_3 l_1 l_2 & m_3 l_1 a_3 \\ m_2 a_2 l_1 + m_3 l_1 l_2 & I_2 + m_2 a_2^2 + m_3 l_2^2 & m_3 l_2 a_3 \\ m_3 a_3 l_1 & m_3 a_3 l_2 & I_3 + m_3 a_3^2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} (c_1 + c_2 + c_3) l_1^2 & (c_2 + c_3) l_1 l_2 & c_3 l_1 l_3 \\ (c_2 + c_3) l_1 l_2 & (c_2 + c_3) l_2^2 & c_3 l_2 l_3 \\ c_3 l_1 l_3 & c_3 l_2 l_3 & c_3 l_3^2 \end{pmatrix};$$

$$\Phi = \text{col}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3); \quad \lambda = \omega^2.$$

Нижчі власні частоти знаходимо, розв'язуючи задачу на власні числа

$$\det(B - \lambda A) = 0, \quad (13)$$

причому, значення цих частот обчислюємо як

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (14)$$

Для визначення жорсткості відтяжки розглянемо схему її деформування внаслідок переміщення шарніра, що з'єднує зчленовані секції стріли (рис. 2).

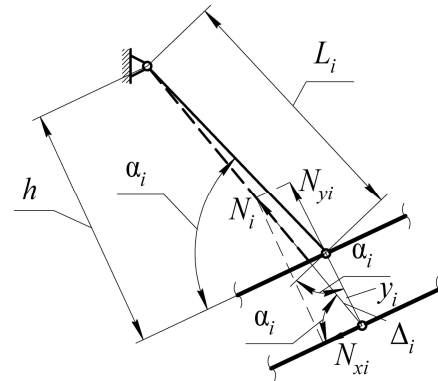


Рис. 2. Схема вузла з'єднання відтяжки з шарніром стріли

Деформація відтяжки  $\Delta_i$ , викликана зміщенням шарніра стріли  $y_i$ , становить

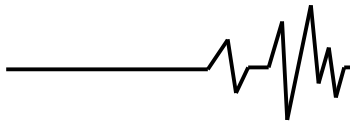
$$\Delta_i = y_i \cdot \sin \alpha_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (15)$$

де  $\alpha_i$  – кут між відтяжкою і стрілою у початковому положенні.

Силу, що спричинила цю деформацію, знаходимо за законом Гука:

$$N_i = \frac{\Delta_i E A}{L_i}, \quad (16)$$

де  $E$  – модуль пружності,  $A$  – площа поперечного перерізу відтяжок,  $L_i$  – довжина відповідної відтяжки.



З урахуванням (15) та (16) жорсткість відтяжки визначаємо за співвідношенням:

$$c_i = \frac{N_{yi}}{y_i} = \frac{EA \sin^2 \alpha}{L_i} \quad (17)$$

Виразивши довжину відтяжки через відстань від осі нездеформованої стріли точки підвісу  $h$ , остаточно запишемо вираз для визначення жорсткості відтяжок:

$$c_i = c_0 \cdot \sin^3 \alpha_i, \quad (18)$$

де  $c_0$  – характеристичний коефіцієнт жорсткості,

$$c_0 = \frac{EA}{h}$$

Дослідження частот та форм коливань виконано для стріли відвалоутворювача ОГ-7000/85 з такими параметрами: довжини секцій  $l_1=38\text{м}$ ,  $l_2=22\text{м}$ ,  $l_3=30\text{м}$ ; відстані до центрів мас  $a_1=19\text{м}$ ,  $a_2=11\text{м}$ ,  $a_3=15\text{м}$ ; маси ненавантажених секцій становлять  $m_1=59660\text{кг}$ ,  $m_2=34540\text{кг}$ ,  $m_3=47100\text{кг}$ ; маси відповідних навантажених секцій приймали більшими у порівнянні з масами ненавантажених на величини  $\mu l_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), де  $\mu=617\text{кг/м}$  – погонна маса вантажу; моменти інерції ненавантажених секцій  $I_1=7,179 \cdot 10^6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $I_2=1,393 \cdot 10^6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $I_3=1,731 \cdot 10^6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ; моменти інерції навантажених секцій  $I_1=1 \cdot 10^7 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $I_2=1,941 \cdot 10^6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $I_3=2,207 \cdot 10^6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ; кути нахилу відтяжок до осі стріли  $\alpha_1=65^\circ$ ,  $\alpha_2=35^\circ$ ,  $\alpha_3=25^\circ$ ; коефіцієнти жорсткості відтяжок, що відповідають значенню характеристичного коефіцієнта жорсткості  $c_0=57,6 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$ , становлять  $c_1=42,84 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$ ,  $c_2=10,87 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$ ,  $c_3=4,35 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$ ;

На рис. 3 наведені залежності власних частот системи від жорсткості відтяжок та ступеня завантаженості стріли, а на рис. 4 – графіки форм коливань залежно від ступеня завантаженості стріли, причому, а – ненавантажена стріла; б – навантажена лише перша секція; в – навантажені перша та друга секції; г – навантажені усі три секції; д – навантажені друга і третя секції; е – навантажена лише третя секція.

Як видно з одержаних результатів, значення власних частот стрілової конструкції суттєво залежать як від розподіленої маси вантажу, так і від коефіцієнтів жорсткості елементів вантової підвіски.

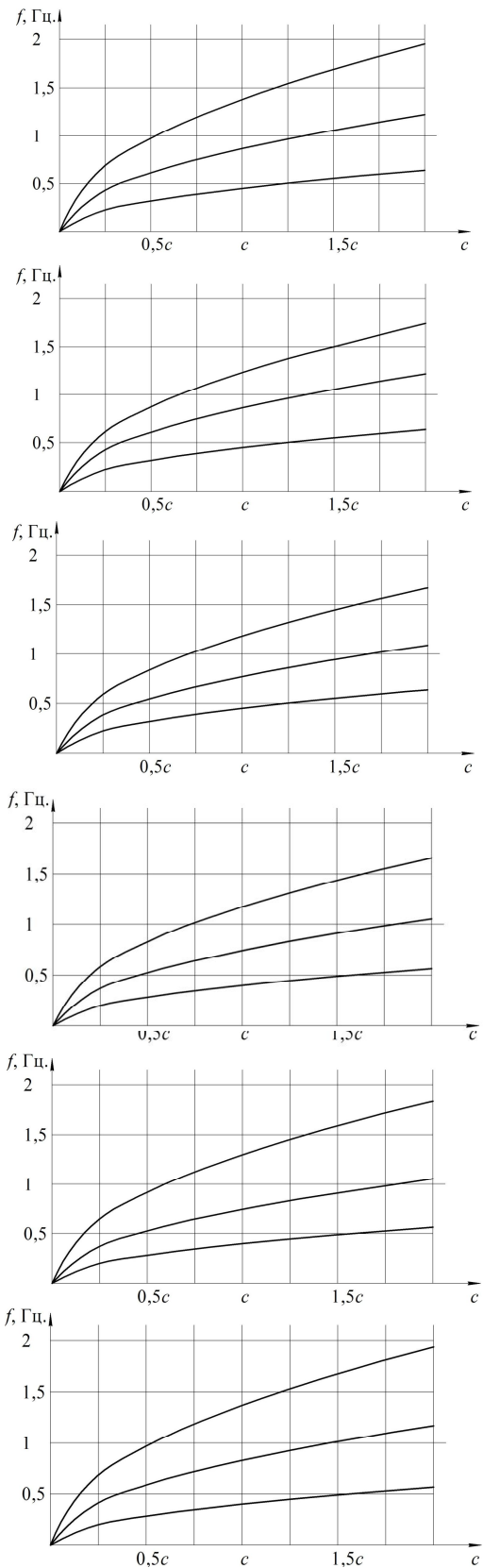
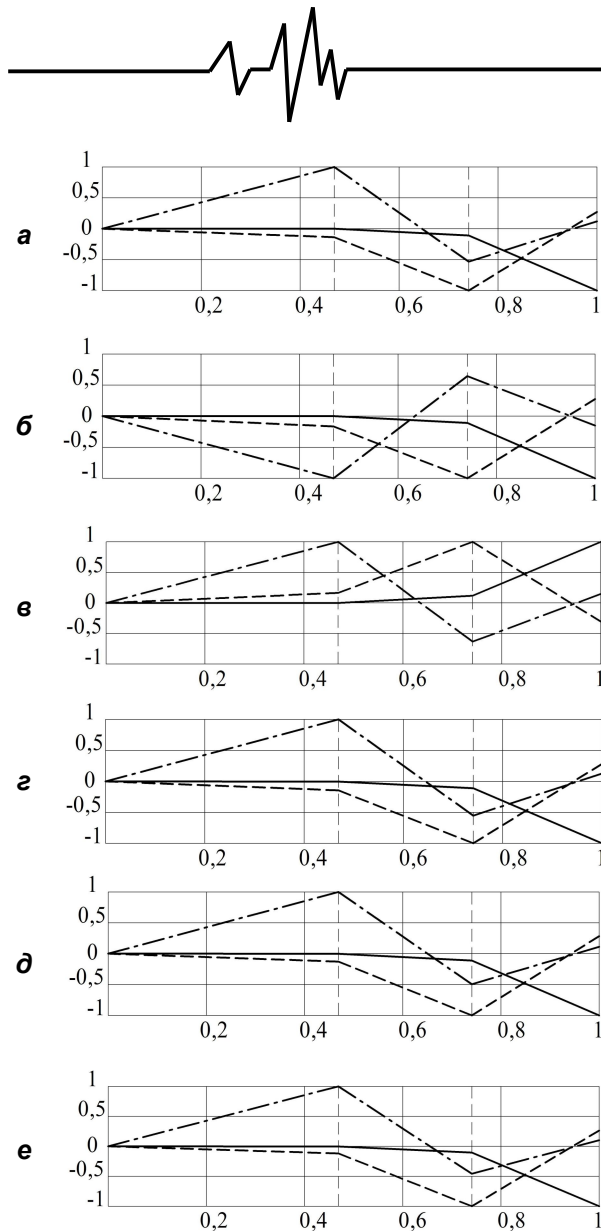


Рис. 3. Залежності власних частот стріли від жорсткості відтяжок та ступеня завантаженості стріли



**Рис. 4. Графіки форм коливань стріли за різних випадків її завантаженості:**

— форма 1    - - - форма 2    - · - форма 3

На першій власній частоті основну участь у коливальному процесі бере третя секція стріли, на другій власній частоті – друга і третя секції, на третій власній частоті інтенсивні коливання здійснюють усі три секції (рис. 4).

Основними причинами збудження періодичних коливань механічної системи стріли є взаємодія транспортованих кусків породи з опорними роликками стрічки конвеєра, а також дисбаланс ведучого і веденого барабанів, опорних роликків та інших елементів приводу.

Якщо швидкість транспортування вантажу становить 4,5 м/с, а відстань між опорними роликками – 1,2 м, то частота

взаємодії транспортованого куска породи з роликками дорівнює 3,7 Гц. Частота обертання ведучого і веденого барабанів, що мають діаметр 1,25 м, становить 1,15 об/с ( $f = 0,18$  Гц). Частота обертання опорного ролика діаметром 0,16 м дорівнює 8,95 об/с ( $f = 1,46$  Гц).

Порівняльний аналіз наведених частот збудження коливань стріли з її трьома нижчими власними частотами (рис. 3) свідчить про можливість виникнення резонансних коливань механічної системи стріли в процесі експлуатації відвалоутворювача. Найбільш ймовірним чинником збудження резонансних явищ є взаємодія кусків транспортованої породи з опорними роликками стрічки конвеєра. Для усунення резонансних режимів роботи відвальної консолі слід раціонально добирати швидкість транспортування сипкого вантажу.

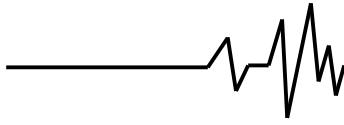
### Висновки

Побудована математична модель вільних коливань трисекційної підвісної стріли дає можливість з достатньою точністю проводити модальний аналіз механічної системи відвальної консолі відвалоутворювача з жорсткими секціями на стадії проектування. Як показали дослідження, власні частоти стріли значною мірою залежать від маси транспортованого вантажу та від жорсткості утримувальних канатів і можуть змінюватися, в залежності від технічних характеристик канатів і умов експлуатації відвалоутворювача, в широких діапазонах.

Періодичне збурення коливань системи у зв'язку з взаємодією вантажу з опорними роликками стрічки конвеєра може призводити до появи резонансних явищ. Для їх усунення необхідно раціонально добирати швидкість транспортування вантажів, що свідчить про доцільність оснащення відвалоутворювачів регульованим гідравлічним або електричним приводом.

### Література

1. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
2. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 320 с.
3. Волков Д. П., Каминская Д. А. Динамика электромеханических систем экскаваторов. – М.: Машиностроение, 1971. – 384 с.
4. Волков Д. П., Черкасов В. А. Динамика и прочность многоковшовых



экскаваторов и отвалообразователей. – М.: Машиностроение, 1969. – 408 с.

5. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. – М: Стройиздат, 1979. – 320 с.

6. Ловейлін В. С., Ярошенко В. Ф., Коробко М. М. Аналіз режимів пуску ланцюгових конвеєрів сільськогосподарських машин // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – Вип. 40. – Мелітополь: ТДАА, 2006. – С. 221–230.

7. Мухопад Н. Д., Кондрахин П. М., Шахтарь П. С. и др. Проектирование и конструирование транспортных машин и комплексов / Под ред. И.Г.Штокмана. – 2-е изд. перераб. и доп. – М: Недра, 1986. – 391 с.

8. Панкратов С. А. Динамика машин для открытых горных и земляных работ (основы теории и расчета). – М.: Машиностроение, 1967. 447 с.

9. Поліщук Л. К. Застосування методу початкових параметрів до аналізу вільних

коливань конвеєра // Вісник вінницького політехнічного інституту. – №1. – 1998. – С. 72–77.

10. Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. Л. Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

11. Скородумов Б. А. Динамика привода скребкового конвейера при резком торможении цепи / Горные машины. – №4. –1958. – 206 с.

12. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – Москва: Машиностроение, 1985. – 472 с.

13. Харченко Е. В. Динамические процессы буровых установок. – Львов: Світ, 1991. – 176 с.

14. Харченко Є. В., Поліщук Л. К., Собковскі С. Розрахунок перехідних процесів у стрічковому конвеєрі з урахуванням рухомості меж транспортувального органу // Технічні вісті. – 2001. – №1(12), 2(13). – С. 102–106.