Міністерство аграрної політики України
Вінницький державний аграрний університет

Кафедра економічної кібернетики та інформатики

ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ З ДИСЦИПЛІНИ “ТЕОРІЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ”

Методичні вказівки для студентів спеціальності ”Економічна кібернетика” всіх форм навчання вищих аграрних навчальних закладів ІІІ-IV рівнів акредитації

Вінниця ВДАУ
2006

УДК 519.688

Лабораторний практикум з дисципліни “Теорія випадкових процесів”. Методичні вказівки для студентів спеціальності “Економічна кібернетика” всіх форм навчання вищих аграрних навчальних закладів III-IV рівнів акредитації. – Вінниця, ВДАУ, 2006. – 23 с.

У виданні вміщено методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни “ Теорія випадкових процесів ”, розраховані на студентів спеціальності “Економічна кібернетика” всіх форм навчання з метою отримання ними вмінь і практичних навичок розробки математичних моделей та алгоритмів дослідження випадкових процесів в межах функціонування актуальних економічних систем. Змістовний матеріал п’яти лабораторних робіт спрямовано на програмну реалізацію засобами мови високого рівня Visual Basic або табличного процесора Excel.

Укладачі:

Бісікало О.В., к.т.н., доцент кафедри економічної кібернетики та інформатики Вінницького державного аграрного університету,

Берник О.В., к.т.н., доцент кафедри економічної кібернетики та інформатики Вінницького державного аграрного університету

Рецензенти:

Потапова Н.А., к.е.н., зав. каф. інформаційних систем в менеджменті Вінницького державного аграрного університету

Довгалець С.М., к.т.н., декан факультету автоматики та комп’ютерних систем управління Вінницького національного технічного університету

Схвалено на засіданні кафедри економічної кібернетики та інформатики Вінницького державного аграрного університету, протокол № від 2006 року

Схвалено науково-методичною радою Вінницького державного аграрного університету, протокол № від 2006 року

Зміст

Загальні вимоги до виконання лабораторних робіт

Виконання всіх шести завдань лабораторного практикуму повинно фіксуватися у вигляді звітів в окремому зошиті або на листах формату А4. Теоретичний матеріал перед виконанням лабораторної роботи необхідно опрацювати в повному обсязі з приведенням в звіті математичних викладок та доказів окремих положень. Додатково можна користуватися списком літератури та/або джерелами з Інтернету. По кожному завданню до проведення лабораторного експерименту треба вказати його тему та мету, при необхідності занотувати нові для себе або ключові теоретичні положення, а також усвідомити постановку задачі. При необхідності студент може звернутися до викладача на консультаціях з метою отримання додаткових роз'яснень щодо суті отриманого завдання.

Власний варіант індивідуального завдання для всіх лабораторних робіт співпадає з порядковим номером студента в журналі викладача. Після виконання лабораторної роботи в цілому студент обов'язково демонструє отримані на комп'ютері практичні результати викладачу до її захисту.

Завершують звіт з лабораторної роботи загальні висновки щодо отриманих результатів. Захист кожної лабораторної роботи здійснюється студентом в режимі співбесіди з викладачем і є обов'язковою передумовою допуску кожного студента до проходження залікового тестування в локальній мережі ВДАУ.

Лабораторна робота № 1

Тема: Операції над матрицями.
Мета: Автоматизувати матричні операції за допомогою інструментальних засобів *Excel* та *Visual Basic*.

Теоретичні відомості

Над матрицями можна виконувати деякі математичні операції: додавання, віднімання, множення матриці на число, множення матриці на матрицю.

Якщо

$$A=\begin{bmatrix}5 & 3 & 7\\ 4 & 9 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & -4 & 5\\ 3 & 6 & 7\end{bmatrix}$$

то сумою матриць є матриця *C*:

$$C=A+B=\begin{bmatrix}5+2 & 3-4 & 7+5\\ 4+3 & 9+6 & 2+7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -1 & 12\\ 7 & 15 & 9\end{bmatrix}.$$

Добутком матриці на дійсне число *k* називається матриця, в якій всі елементи матриці *A* помножені на число *k*:

$$B=k\cdot A=k\cdot\begin{bmatrix}a & b & c\\ f & g & h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka & kb & kc\\ kf & kg & kh\end{bmatrix}.$$

Різниця двох матриць визначається формулою:

$$A–B=A+(–1)B.$$

Множення матриць. Добуток матриць *A* і *B* визначається лише в тому випадку, коли кількість стовпців матриці *A* дорівнює числу рядків матриці *B*.

Нехай задано матрицю *A*, яка має *m* рядків і *p* стовпців, і матрицю *B*, яка має *p* рядків і *n* стовпців:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & p_{pn}\end{bmatrix}.$$

Тоді добутком матриць *AB* називається матриця:

$$C = AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{m1} & c_{m2} & ... & c_{mn} \end{bmatrix},$$

розмірністю $m \times n$, елементи якої c_{ij} обчислюються за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ...a_{ip}b_{pj},$$

Тобто елементи i-тої рядку матриці A множаться на відповідні елементи j-того стовпця матриці B, і добутки додаються.

Помножимо, для прикладу, матрицю A на матрицю B, де:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Тоді добутком буде матриця С:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},$$

де елементи матриці С:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 19;$$
$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 22;$$
$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 43;$$
$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 50.$$

Кінцевий результат можна записати у вигляді:

$$C = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Порядок виконання роботи

1. Реалізуйте матричні операції додавання, віднімання множення на число та множення двох матриць у програмі *Microsoft Excel*.
2. Реалізуйте операцію множення матриць довільних розмінностей у *Visual Basic*.
3. Складіть програму піднесення довільної квадратної матриці до довільного степеня.
4. За виконаними завданнями оформіть звіт, який повинен містити теоретичну частину та тексти програм.

Лабораторна робота № 2

Тема: Дискретний марківський процес з дискретним часом (однорідний марківський ланцюг).

Мета: Навчитись визначати ймовірності будь-якого стану на будь-якому кроці однорідного марківського ланцюга (*Excel* або *Visual Basic*).

Теоретичні відомості

Розв'язання економічних задач на основі однорідного марківського ланцюга вважається повним, якщо знайдено ймовірності знаходження економічної системи у будь-якому стані на будь-якому кроці її функціонування. Розглянемо типову задачу [1] для однорідного марківського ланцюга, а саме стани банку S2, S2, S3 та S4, що характеризуються відсотковими ставками 3%, 4%, 5%, 6%, які встановлюються на початку кожного місяця і фіксовані на всьому його проміжку. Спостереження за роботою банку в попередній період показало, що перехідні ймовірності станів на протязі кварталу змінюються мало, тому їх можна вважати постійними. Визначити ймовірності станів банку наприкінці кварталу, якщо в кінці минулого кварталу відсоткова ставка дорівнювала 5%, а розмічений граф станів банку має наступний вигляд (рис.1).

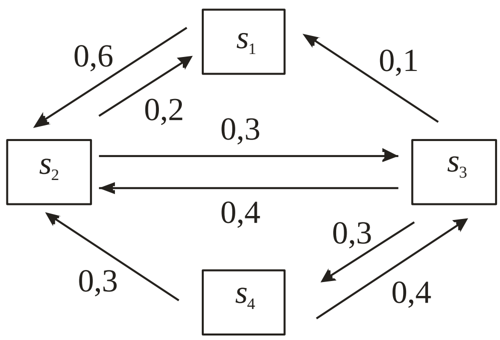


Рис.1. Розмічений граф станів банку.

Згідно з [2] для однорідного марківського ланцюга вектор-рядок ймовірностей станів від k-го до (k+1)-го кроку дорівнює добутку вектор-рядку ймовірностей станів від (k-1)-го до k-го кроку на матрицю перехідних ймовірностей P:

$$(p_1(k),...,p_n(k)) = (p_1(k-1),...,p_n(k-1)) \cdot P\text{ , (1)}$$

де матриця P не залежить від номеру кроку k, її порядок n співпадає з числом станів системи, а на головній діагоналі розташовані ймовірності затримок:

$$P = (p_{ij})_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}. \text{ (2)}$$

З формули (1) також виводиться формула-наслідок:

$$(p_1(k),...,p_n(k)) = (p_1(0),...,p_n(0)) \cdot P^k, k = 1,2,\dots \text{ (3)}$$

Для вирішення поставленої задачі в табличному процесорі Microsoft Excel необхідно занести дані початкового вектор-рядку ймовірностей станів p(0) та матриці P, враховуючи що і вектор і матриця є стохастичними, тобто сума кожного рядку дорівнює 1 згідно з формулою повної ймовірності для групи несумісних подій. З цією метою на основі розміченого графу станів банку створюється матриця P так, щоб кожний її рядок відповідав певному стану системи, а вектор-рядок p(0) має всі нульові елементи і тільки той, що відповідає початковому стану системи дорівнює одиниці (рис.2):

	A	B	C	D	E	F	G
17							Сума:
18	P(0) = (	0	0	1	0	)	1
19							
20		0,4	0,6	0	0		1
21	P = (	0,2	0,5	0,3	0	)	1
22		0,1	0,4	0,2	0,3		1
23		0	0,3	0,4	0,3		1

Рис.2. Вектор-рядок p(0) та матриця P для поставленої задачі.

Згідно з формулою (3) необхідно підвести матрицю P спочатку в квадрат, а потім – в куб (рис.3 та рис.4):

B25 fx =$B20*B$20+$C20*B$21+$D20*B$22+$E20*B$23

	A	B	C	D	E	F	G
24							
25		0,28	0,54	0,18	0		1
26	P^2 = (	0,21	0,49	0,21	0,09	)	1
27		0,14	0,43	0,28	0,15		1
28		0,1	0,4	0,29	0,21		1

Рис.3. Підведення матриці P в квадрат в табличному процесорі Excel.

B30 fx =$B20*B$25+$C20*B$26+$D20*B$27+$E20*B$28

	A	B	C	D	E	F	G
29							
30		0,238	0,51	0,198	0,054		1
31	P^3 = (	0,203	0,482	0,225	0,09	)	1
32		0,17	0,456	0,245	0,129		1
33		0,149	0,439	0,262	0,15		1

Рис.4. Підведення матриці P в куб в табличному процесорі Excel.

Тоді на основі формули (3) знаходимо розв'язок поставленої задачі (рис.5) – з найбільшою ймовірністю наприкінці кварталу ставка банку буде дорівнювати 4%.

B35 fx =$B18*B$30+$C18*B$31+$D18*B$32+$E18*B$33

	A	B	C	D	E	F	G
34							
35	P(3) = (	0,17	0,456	0,245	0,129	)	1

Рис.5. Визначення вектору-рядку ймовірностей станів на третьому кроці p(3) в табличному процесорі Excel.

Для візуалізації отриманих результатів в табличному процесорі Excel з метою аналізу поведінки економічної системи бажано на тому самому листі електронної таблиці намалювати граф станів банку, а значення ймовірностей біля кожної стрілки підписувати у вигляді формули, що бере значення з відповідного елементу матриці P (рис.6).

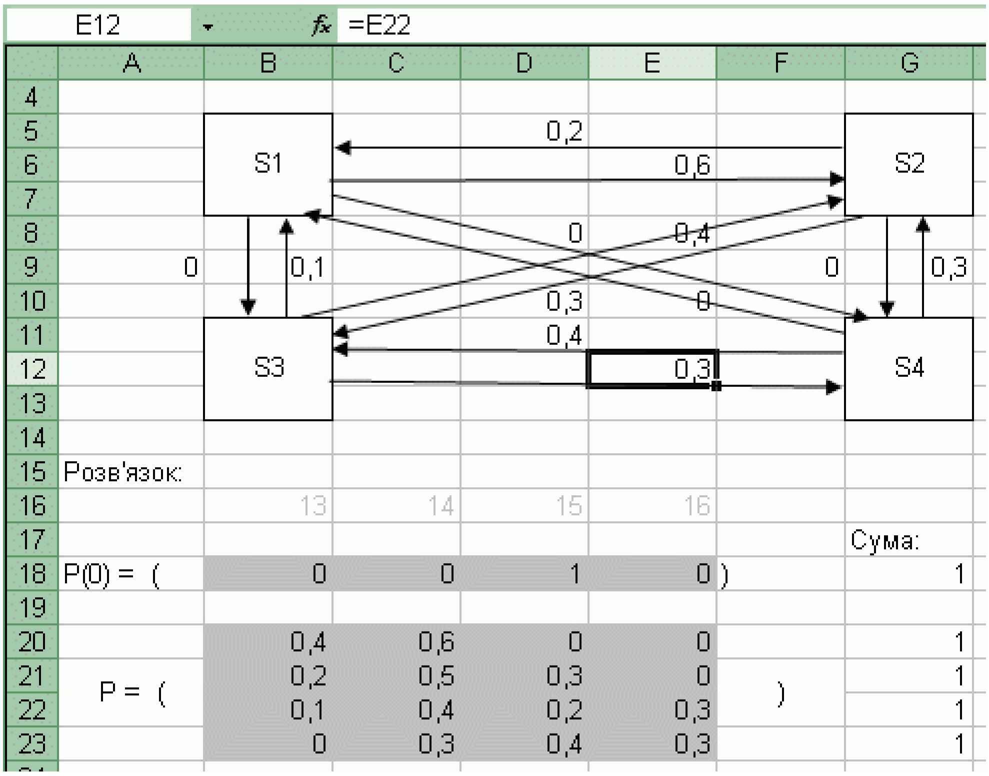
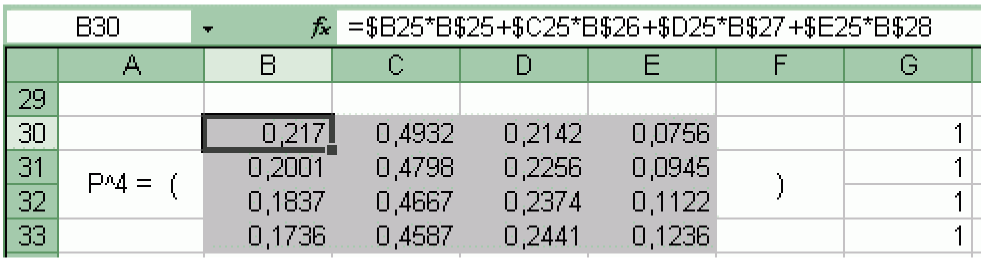


Рис.6. Візуалізація розміченого графу станів банку в табличному процесорі Excel.

Примітка: якщо за умовами задачі необхідно визначити ймовірності станів на четвертому кроці, то простіше це зробити підведенням в квадрат квадрату матриці P (рис.7).



B30 =$B25*B$25+$C25*B$26+$D25*B$27+$E25*B$28

	A	B	C	D	E	F	G
29							
30		0,217	0,4932	0,2142	0,0756		1
31	P^4 = (	0,2001	0,4798	0,2256	0,0945	)	1
32		0,1837	0,4667	0,2374	0,1122		1
33		0,1736	0,4587	0,2441	0,1236		1

Рис.7. Підведення квадрату матриці P в квадрат в табличному процесорі Excel.

Порядок виконання роботи

1. Реалізуйте розглянутий приклад на листі електронної таблиці *Microsoft Excel*.
2. На другому листі цієї ж електронної таблиці розв’яжіть поставлену задачу для четвертого кроку, тобто визначте ймовірності відсоткових ставок банку після чотирьох місяців.
3. На третьому та четвертому листі цієї ж електронної таблиці розв’яжіть задачі із завдань №2 та №3, що виносяться на практику (с.6-7 [1]). Для цього необхідно розглядати економічну систему з трьома та п’ятьма станами.
4. Проведіть експеримент з електронними таблицями – чи впливає і наскільки початковий стан системи на кінцеві ймовірності станів.
5. За виконаними завданнями оформіть звіт, який повинен містити математичну модель однорідного марківського ланцюгу та формульну частину, графи станів і результати розрахунків в електронній таблиці.

Лабораторна робота № 3

Тема: Неоднорідний марківський ланцюг.
Мета: Навчитись визначати ймовірності будь-якого стану на будь-якому кроці неоднорідного марківського ланцюга (*Excel* або *Visual Basic*).

Теоретичні відомості

Припустимо, що в системі S відбувається марківський процес з дискретним часом. Формально маємо марківський ланцюг, якщо $s_1,\ldots,s_n$ – можливі стани системи, а $t_1, t_2,\ldots,t_k,\ldots$ – кроки, в яких система може перескакувати із стану в стан. Марківський ланцюг має назву неоднорідного, якщо перехідні ймовірності (хоча б одна) залежать від номеру кроку k. Тоді матриця перехідних ймовірностей P(k) залежить від k:

$$P(k) = (p_{ij}(k))_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & \ldots & p_{1n}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & \ldots & p_{2n}(k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1}(k) & p_{n2}(k) & \ldots & p_{nn}(k) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Як і для однорідного марківського ланцюга матриця P(k) на кожному кроці k=1,2,… є стохастичною, тобто справедливо рівняння:

$$\sum_{j=1}^{n} (p_{ij}(k)) = 1, i = 1,\ldots,n; k = 1,2,\ldots. \quad (2)$$

Для неоднорідного марківського ланцюга вектор-рядок ймовірностей станів від k-го до (k+1)-го кроку дорівнює добутку вектор-рядку ймовірностей станів від (k-1)-го до k-го кроку на матрицю перехідних ймовірностей від k-го до (k+1)-го кроку:

$$(p_1(k),\ldots,p_n(k)) = (p_1(k-1),\ldots,p_n(k-1)) \cdot P(k). \quad (3)$$

З формули (3) також виводиться формула-наслідок:

$$(p_1(k),\ldots,p_n(k)) = (p_1(0),\ldots,p_n(0)) \cdot P(1) \cdot \ldots \cdot P(k), k = 1,2,\ldots. \quad (4)$$

Легко показати, що добуток стохастичних матриць є стохастичною матрицею. Тому вектор-рядок ймовірностей станів від k-го до (k+1)-го кроку згідно з формулою (4) також має бути стохастичним [1].

Для моделювання економічних задач у вигляді неоднорідного марківського ланцюга в табличному процесорі Microsoft Excel можна скористатися електронною таблицею з лабораторної роботи №2. З цією метою необхідно створити окремий лист таблиці для кожного k-го кроку, причому матриця перехідних ймовірностей станів P(k) та відповідний граф станів на кожному з цих листів будуть мати унікальний характер. Для першого листа електронної таблиці окремо вказується початковий вектор-рядок p(0), який має всі нульові елементи окрім одного одиничного, що відповідає початковому стану системи. Для всіх наступних листів електронної таблиці значення вектор-рядку ймовірностей станів від (k-1)-го до k-го кроку береться з попереднього листа.

Порядок виконання роботи

1. Перенесіть на перший лист електронної таблиці *Microsoft Excel* модель однорідного марківського ланцюга для системи з чотирма станами з лабораторної роботи №2 та прорахуйте за її допомогою один крок згідно з завданням №1 (с.8 [2]).
2. Аналогічно п.1 на другому та третьому листах електронної таблиці проведіть розрахунки для наступних кроків неоднорідного марківського ланцюга на основі даних завдання №1 та знайдіть відповідь у вигляді ймовірностей станів банку наприкінці кварталу.
3. На другому листі цієї ж електронної таблиці розв'яжіть поставлену задачу для четвертого кроку, тобто визначте ймовірності відсоткових ставок банку після чотирьох місяців.
4. В окремих електронних таблицях аналогічним чином розв'яжіть задачі із завдань №2 та №3, що виносяться на практику (с.8-10 [2]). Для цього необхідно розглядати економічну систему з п'ятьма та трьома станами.
5. За виконаними завданнями оформіть звіт, який повинен містити математичну модель неоднорідного марківського ланцюгу та формульну частину, графи станів і результати розрахунків в електронних таблицях.

Лабораторна робота № 4

Тема: Розв'язок систем диференціальних рівнянь чисельними методами (*метод Ейлера*).
Мета: Навчитись розв'язувати системи диференціальних рівнянь чисельними методами (*Excel, Visual Basic*).

Теоретичні відомості

Велика кількість задач у науці, техніці, економіці описується системами диференціальних рівнянь. Тому виникає необхідність їх вирішення. Наближені методи використовуються тому, що проінтегрувати диференціальні рівняння можна не завжди, і, навіть, в тому випадку коли це можливо, одержана формула може бути дуже громіздкою. Крім того, чисельні методи дозволяють значно скоротити час обчислень.

Розглянемо наближений метод розв'язку диференціальних рівнянь, що задовольняють умовах Коші, метод Ейлера. Нехай дано диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Потрібно знайти функцію на відрізку $[x_0, x_n]$, яка задовольняє подане вище рівняння та початкову умову $y_0 = f(x_0)$. Для того, щоб існував наближений розв'язок необхідно, щоб існував точний розв'язок і щоб він був єдиний. Припустимо, що точний розв'язок даного рівняння існує.

Суть методу Ейлера полягає в тому, що інтегральна крива, яка є геометричною інтерпретацією розв'язку рівняння замінюється ламаною (рис.1).

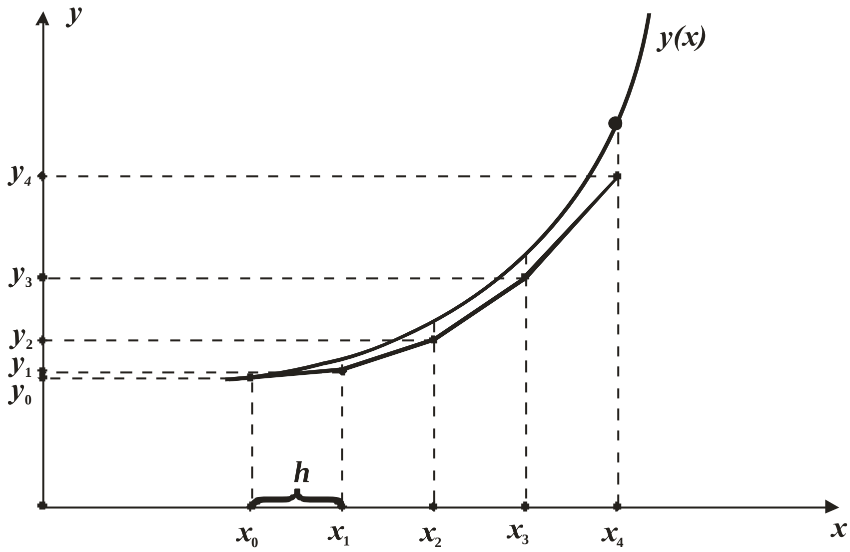


Рис.1

Для побудови ламаної ми припускаємо, що аргумент змінюється з постійним кроком від першого значення x_0 до *n*-ого, яке обчислюється за формулою $x_n = x_0 + n \cdot h$, де *n* – це кількість кроків від початкового до кінцевого значення аргументу.

Щоб побудувати перший відрізок ламаної з координатами початкової та кінцевої точок (x_0,y_0) та (x_1,y_1) відповідно потрібно побудувати дотичну до кривої у точці (x_0,y_0). Рівняння такої лінії матиме вид:

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Перенесемо у ліву частину y_0, отримаємо:

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Підставимо в це рівняння значення координати $x_1 = x_0 + 1 \cdot h$ для того, щоб визначити y_1. Рівняння набуде виду:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

Маючи значення координати x_1 за поданою вище формулою можна обчислити координату y_2.

Далі будуємо дотичну до інтегральної кривої у точці з координатою x_1 та переносимо її у точку з координатами (x_1,y_1), аналогічним чином записуємо рівняння дотичної та підставляємо у нього координати точки (x_2, y_2). Для обчислення координати *y* *n*-ої точки буде використано рівняння:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n).$$

Розглянемо на прикладі розв’язок системи диференціальних рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -2p_1(t) + p_2(t), \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -3p_2(t) + 2p_1(t), \\ \dfrac{dp_3(t)}{dt} = 2p_2(t). \end{cases}$$

Початкові умови: $p_1(0) = 1,\ p_2(0) = 0,\ p_3(0) = 0$.

Потрібно визначити ймовірності станів системи в момент часу t=1.

Запишемо у програмі Microsoft Excel матрицю коефіцієнтів біля відповідних станів та початкові умови (рис.2):

	A	B	C	D
1	Матриця коефіцієнтів диференціальних рівнянь	-2	1	0
2		2	-3	0
3		0	2	0
4	Початкові значення	p1(0)	p2(0)	p3(0)
5		1	0	0

Рис.2

Розділимо часовий інтервал в одиницю на 20 підінтервалів. Отримаємо крок h=0,05. Введемо значення кроку у комірку E2.

У комірки 7*B*, 7*C*, 7*D* запишемо відповідно формули:

	B	*C*	*D*
7	=B5+$E$2*($B$1*B5+$C$1*C5+$D$1*D5)	=C5+$E$2*($B$2*B5+$C$2*C5+$D$2*D5)	=D5+$E$2*($B$3*B5+$C$3*C5+$D$3*D5)

Таким чином ми обчислимо значення ймовірностей станів у момент часу t=0,05. Скопіюємо значення цих формул до тих пір поки не отримаємо значення ймовірності стану в момент часу t=1 (див рис.3). Також підпишемо дані, перевіряючи в колонці E суму рядка ймовірностей станів системи, яка для повної групи подій завжди має дорівнювати одиниці.

	A	B	C	D	E
1	Матриця коефіцієнтів диференціальних рівнянь	-2	1	0	Крок (h)
2		2	-3	0	0,05
3		0	2	0	
4	Початкові значення	p1(0)	p2(0)	p3(0)	Сума
5		1	0	0	1
6		p1(0,05)	p2(0,05)	p3(0,05)	
7		0,9	0,1	0	1
8		p1(0,1)	p2(0,1)	p3(0,1)	
9		0,815	0,175	0,01	1
10		p1(0,15)	p2(0,15)	p3(0,15)	
11		0,74225	0,23025	0,0275	1
12		p1(0,2)	p2(0,2)	p3(0,2)	
13		0,6795375	0,2699375	0,050525	1
14		p1(0,25)	p2(0,25)	p3(0,25)	
15		0,625080625	0,297400625	0,07751875	1
16		p1(0,3)	p2(0,3)	p3(0,3)	
17		0,577442594	0,315298594	0,107258813	1
18		p1(0,35)	p2(0,35)	p3(0,35)	
19		0,535463264	0,325748064	0,138788672	1
20		p1(0,4)	p2(0,4)	p3(0,4)	
21		0,498204341	0,330432181	0,171363478	1
22		p1(0,45)	p2(0,45)	p3(0,45)	
23		0,464905516	0,330687788	0,204406696	1
24		p1(0,5)	p2(0,5)	p3(0,5)	
25		0,434949354	0,327575171	0,237475475	1
26		p1(0,55)	p2(0,55)	p3(0,55)	
27		0,407833177	0,321933831	0,270232992	1
28		p1(0,6)	p2(0,6)	p3(0,6)	
29		0,383146551	0,314427074	0,302426375	1
30		p1(0,65)	p2(0,65)	p3(0,65)	
31		0,360553249	0,305577668	0,333869083	1
32		p1(0,7)	p2(0,7)	p3(0,7)	
33		0,339776808	0,295796343	0,36442685	1
34		p1(0,75)	p2(0,75)	p3(0,75)	
35		0,320588944	0,285404572	0,394006484	1
36		p1(0,8)	p2(0,8)	p3(0,8)	
37		0,302800278	0,274652781	0,422546941	1
38		p1(0,85)	p2(0,85)	p3(0,85)	
39		0,28625289	0,263734891	0,450012219	1
40		p1(0,9)	p2(0,9)	p3(0,9)	
41		0,270814345	0,252799947	0,476385708	1
42		p1(0,95)	p2(0,95)	p3(0,95)	
43		0,256372908	0,241961389	0,501665703	1
44	Ймовірності станів при t=1	p1(1)	p2(1)	p3(1)	
45		0,242833687	0,231304472	0,525861842	1

Рис.3

Обчислимо точні значення для відповідних моментів часу, користуючись формулами, показаними на рис.4.

	F	G
	p1(1) точне	=1/3*EXP(-4*t)+2/3*EXP(-1*t)
	p2(1) точне	=-2/3*EXP(-4*t)+2/3*EXP(-1*t)
	p3(1) точне	=1/3*EXP(-4*t)-4/3*EXP(-1*t)+1

Рис.4

Зведемо в окрему таблицю точні та наближені значення (рис.5) та побудуємо графіки (рис.6).

	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Час (t)	Точне p1	Точне p2	Точне p3	Наближене p1	Наближене p2	Наближене p3	Сума 1	Сума 2
2	0	1	0	0	1	0	0		
3	0,05	0,907063	0,088332	0,004604	0,9	0,1	0	1	1
4	0,1	0,826665	0,156345	0,01699	0,815	0,175	0,01	1	1
5	0,15	0,756743	0,207931	0,035327	0,74225	0,23025	0,0275	1	1
6	0,2	0,695597	0,246268	0,058135	0,6795375	0,2699375	0,050525	1	1
7	0,25	0,641827	0,273948	0,084225	0,625080625	0,297400625	0,07751875	1	1
8	0,3	0,594277	0,293083	0,11264	0,577442594	0,315298594	0,107258813	1	1
9	0,35	0,551991	0,305394	0,142615	0,535463264	0,325748064	0,138788672	1	1
10	0,4	0,514179	0,312282	0,173539	0,498204341	0,330432181	0,171363478	1	1
11	0,45	0,480185	0,314886	0,204929	0,464905516	0,330687788	0,204406696	1	1
12	0,5	0,449466	0,31413	0,236404	0,434949354	0,327575171	0,237475475	1	1
13	0,55	0,421568	0,310764	0,267668	0,407833177	0,321933831	0,270232992	1	1
14	0,6	0,396114	0,305396	0,29849	0,383146551	0,314427074	0,302426375	1	1
15	0,65	0,372788	0,298515	0,328697	0,360553249	0,305577668	0,333869083	1	1
16	0,7	0,351327	0,290517	0,358156	0,339776808	0,295796343	0,36442685	1	1
17	0,75	0,331507	0,28172	0,386774	0,320588944	0,285404572	0,394006484	1	1
18	0,8	0,31314	0,272378	0,414482	0,302800278	0,274652781	0,422546941	1	1
19	0,85	0,296068	0,262694	0,441238	0,28625289	0,263734891	0,450012219	1	1
20	0,9	0,280154	0,252831	0,467015	0,270814345	0,252799947	0,476385708	1	1
21	0,95	0,265284	0,242914	0,491802	0,256372908	0,241961389	0,501665703	1	1
22	1	0,251358	0,233043	0,515599	0,242833687	0,231304472	0,525861842	1	1

Рис.5

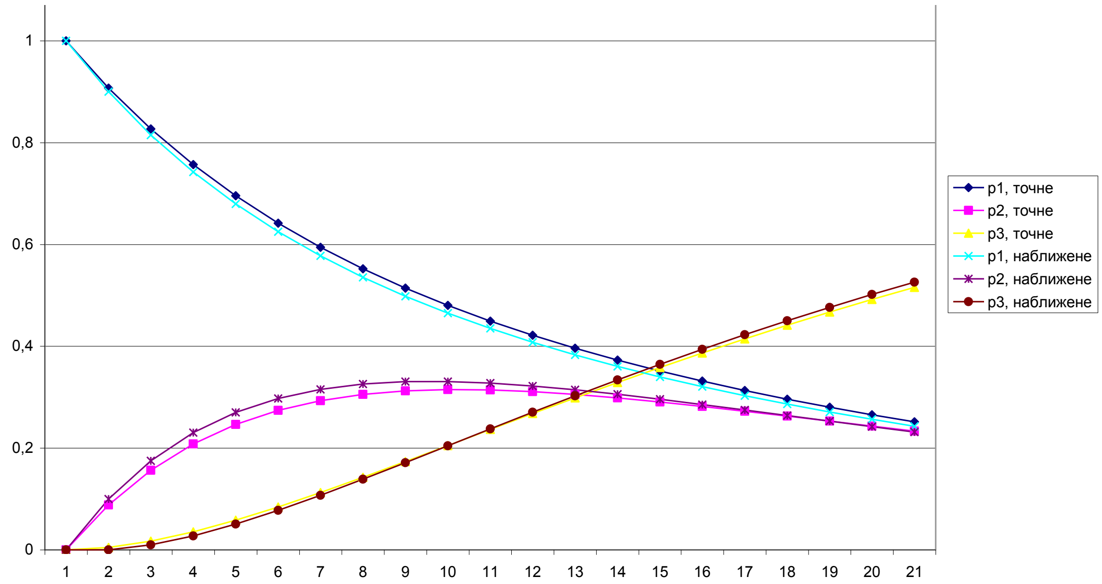


Рис.6

Порядок виконання роботи

1. Реалізуйте поданий приклад у програмі *Microsoft Excel*.
2. Розв'яжіть задачі із завдань, що виносяться на практику.
3. Проведіть експеримент для різних значень кроку h, як більших, так і менших за 0,05. За результатами експерименту проаналізуйте поведінку системи за той чи інший період часу.
4. Складіть програму розв'язку систем диференціальних рівнянь із різною кількістю рівнянь у *Visual Basic*. Передбачте можливість розрахунків за умов введення різної кількості кроків.
5. За виконаними завданнями оформіть звіт, який повинен містити теоретичну частину та лістинги програм та висновки з п.3.

Лабораторна робота № 5

Тема: Чисельні методи інтегрування функцій (метод прямокутника).
Мета: Навчитись інтегрувати функції чисельними метолами.

Теоретичні відомості

Суть методу полягає в тому, що фігура обмежена інтегральною кривою розбивається на деяку кількість прямокутників, площу яких можна знайти користуючись формулою.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \text{ або}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

де $[a,b]$ - інтервал інтегрування, n - кількість підінтервалів.
Оцінимо інтеграл

$$I = \int_0^6 x^2 dx .$$

Якщо проінтегрувати задану функцію на інтервалі $[0,6]$, то одержимо значення

$$I = \int_0^6 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 72.$$

Нехай *n*=100, обчислимо наближене значення інтегралу (табл.1).

Таблиця 1. Знаходження значення інтегралу чисельними методами

	$x_i + \Delta x$	$y_i = x^2$
1	0,06	0,0036
2	0,12	0,0144
3	0,18	0,0324
4	0,24	0,0576
5	0,3	0,09
6	0,36	0,1296
7	0,42	0,1764
8	0,48	0,2304
9	0,54	0,2916
10	0,6	0,36
11	0,66	0,4356
12	0,72	0,5184
13	0,78	0,6084
14	0,84	0,7056
15	0,9	0,81
16	0,96	0,9216
17	1,02	1,0404
18	1,08	1,1664
19	1,14	1,2996
20	1,2	1,44
21	1,26	1,5876
22	1,32	1,7424
23	1,38	1,9044
24	1,44	2,0736
25	1,5	2,25
26	1,56	2,4336
27	1,62	2,6244
28	1,68	2,8224
29	1,74	3,0276
30	1,8	3,24
31	1,86	3,4596
32	1,92	3,6864
33	1,98	3,9204
34	2,04	4,1616
35	2,1	4,41
36	2,16	4,6656
37	2,22	4,9284
38	2,28	5,1984
39	2,34	5,4756
40	2,4	5,76
41	2,46	6,0516
42	2,52	6,3504
43	2,58	6,6564
44	2,64	6,9696
45	2,7	7,29
46	2,76	7,6176
47	2,82	7,9524
48	2,88	8,2944
49	2,94	8,6436
50	3	9
51	3,06	9,3636
52	3,12	9,7344
53	3,18	10,1124
54	3,24	10,4976
55	3,3	10,89
56	3,36	11,2896
57	3,42	11,6964
58	3,48	12,1104
59	3,54	12,5316
60	3,6	12,96
61	3,66	13,3956
62	3,72	13,8384
63	3,78	14,2884
64	3,84	14,7456
65	3,9	15,21
66	3,96	15,6816
67	4,02	16,1604
68	4,08	16,6464
69	4,14	17,1396
70	4,2	17,64
71	4,26	18,1476
72	4,32	18,6624
73	4,38	19,1844
74	4,44	19,7136
75	4,5	20,25
76	4,56	20,7936

77	4,62	21,3444
78	4,68	21,9024
79	4,74	22,4676

80	4,8	23,04
81	4,86	23,6196
82	4,92	24,2064
83	4,98	24,8004
84	5,04	25,4016
85	5,1	26,01
86	5,16	26,6256
87	5,22	27,2484
88	5,28	27,8784
89	5,34	28,5156
90	5,4	29,16
91	5,46	29,8116
92	5,52	30,4704
93	5,58	31,1364
94	5,64	31,8096
95	5,7	32,49
96	5,76	33,1776
97	5,82	33,8724
98	5,88	34,5744
99	5,94	35,2836
100	6	36
101	Сума y_i	1218,06

Обчислимо результат $I = \frac{6-0}{100} \cdot 1218{,}06 = 73{,}0836$. Якщо збільшити кількість підінтервалі до 1000, то приблизне значення інтегралу буде дорівнювати 72,108036.

Порядок виконання роботи

6. Знайти значення інтегралу чисельним методом за варіантом у *Excel*, прийняти значення n=100, 1000, 5000. Порівняти знайдені значення інтегралів.

Вар.	Завдання
1	$I=\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big\vert_0^{\pi}$
2	$\int_3^8\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert\Big\vert_3^8$
3	$I=\int_1^3 e^x dx=e^x\Big\vert_1^3$
4	$I=\int_4^8\frac{dx}{x^2-9}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-3}{x+3}\right\rvert\Big\vert_4^8$
5	$I=\int_0^{\pi/10}\mathrm{tg}\, x dx=-\ln\lvert\cos x\rvert\Big\vert_0^{\pi/10}$
6	$I=\int_1^4 x^3 dx=\frac{x^4}{4}\Big\vert_1^4$
7	$I=\int_3^7 4^x dx=\frac{4^x}{\ln 4}\Big\vert_3^7$
8	$I=\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x dx=\sin x\Big\vert_{\pi/2}^{\pi}$
9	$I=\int_0^{\pi/6}\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\, x\Big\vert_0^{\pi/6}$
10	$I=\int_3^5\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+7}\right\rvert\Big\vert_3^5$

7. Скласти програму знаходження інтегралу мовою *Visual Basic* та обчислити його значення при n=10000.

За результатами роботи оформити звіт, який повинен містити тему та мету лабораторної, теоретичні відомості, текст програми, результат обчислення та висновки.

Питання до заліку

1. Класичне, геометричне та статистичне означення ймовірності. Дискретні та неперервні випадкові величини.
2. Означення випадкового процесу. Приклади випадкових процесів. Властивість відсутності післядії.
3. Марківські випадкові процеси. Дискретні та неперервні випадкові процеси.
4. Граф станів системи. Визначення множин без входів та без виходів.
5. Означення ергодичної системи. Реалізація випадкового процесу за певний проміжок часу.
6. Марківські ланцюги. Ймовірності станів та перехідні ймовірності.
7. Однорідні марківські ланцюги. Ймовірності станів однорідного марківського ланцюга.
8. Неоднорідні марківські ланцюги. Відмінність однорідного марківського ланцюга від неоднорідного.
9. Вектор початкового розподілу ймовірностей. Розрахунок ймовірностей станів марківського неоднорідного ланцюга на k-ому кроці.
10. Ймовірності станів системи, в якій протікає марківський процес з неперервним часом.
11. Густина ймовірності переходу системи зі стану в стан, її порівняння з перехідними ймовірностями.
12. Означення однорідного і неоднорідного марківського дискретного процесу з неперервним часом.
13. Означення розміченого графу станів системи, в якій протікає марківський випадковий процес з неперервним часом, його порівняння з розміченим графом для процесу з дискретним часом.
14. Теорема про систему диференціальних рівнянь Колмогорова.
15. Правило складання системи диференціальних рівнянь Колмогорова за розміченим графом станів системи.
16. Правило складання системи диференціальних рівнянь Колмогорова за матрицею густини ймовірностей переходів.
17. Означення потоку подій. Однорідні та неоднорідні події.
18. Властивість регулярного потоку подій. Формулювання властивості відсутності післядії для потоку.
19. Ординарність потоку. Назва та характеристика потоку, що має властивості ординарності та відсутності післядії.
20. Означення стаціонарності потоку. Пуасонівський стаціонарний потік.
21. Інтенсивність потоку. Порівняння потоків за інтенсивністю.
22. Дискретна випадкова величина $X(\tau)$. Неперервна випадкова величина T.
23. Нестаціонарний потік подій.
24. Випадкова величина $X(t_0,\ \tau)$.
25. Закон розподілу випадкової величини $X(t_0,\ \tau)$. Розрахунок математичного сподівання випадкової величини $X(t_0,\ \tau)$.
26. Випадкова величина $T(t_0)$. Закон розподілу величини $T(t_0)$.

27. Потік з обмеженою післядією.
28. Потік Пальма.
29. Потік Ерланга k-го порядку. Формула закону розподілу Ерланга k-го порядку.
30. Зв'язок інтенсивності потоку Ерланга k-го порядку і найпростішого потоку, з якого одержаний даний потік Ерланга.
31. Означення нормованого потоку Ерланга k-го порядку.
32. Перехід системи з одного стану в інший під впливом потоку подій.
33. Зв'язок густини ймовірності переходу $\lambda_{ij}(t)$ з i-го стану в j-тий в момент часу t системи, в якій протікає дискретний марківський процес з неперервним часом, з інтенсивністю $\lambda(t)$ в той же момент часу t пуасонівського потоку подій, під дією якого проходить цей перехід.
34. Зв'язок пуасонівського потоку подій і дискретного марківського процесу з неперервним часом.
35. Фінальний стаціонарний режим протікання випадкового процесу в системі.
36. Фінальні ймовірності станів системи. Необхідні та достатні умови фінальних ймовірностей.
37. Означення регулярності марківського ланцюга. Чи є регулярність однорідного марківського ланцюга необхідною умовою існування фінальних ймовірностей?
38. Фінальні ймовірності станів системи, в якій протікає дискретний однорідний марківський процес з неперервним часом. Яким чином фінальні ймовірності інтерпретуються в термінах середнього часу?
39. Процеси загибелі та народження. Характеристична ознаки структури графа станів системи, в якій протікає процес загибелі та народження.
40. Матриця густини ймовірностей переходів для процесів загибелі та народження.
41. Розрахунок фінальних ймовірностей для процесу загибелі та народження.
42. Система з декількох вузлів.
43. Потік відмов вузлів. Потік відновлення вузлів.
44. Нумерація станів системи, що складається з декількох вузлів. Розрахунок густини ймовірностей переходів системи зі стану в стан.
45. Інтерпретація процесів загибелі та народження в системі, що складається з декількох вузлів.
46. Циклічний процес. В якому випадку циклічний процес співпадає з процесом загибелі та народження? Система диференціальних рівнянь для циклічного процесу.
47. Матриця густини ймовірностей переходів системи зі стану в стан, якщо в ній протікає циклічний процес.
48. Фінальні ймовірності станів, якщо відома густина ймовірностей переходів. Вираження фінальних ймовірностей через середній час перебування системи в станах.
49. Розгалужений циклічний процес.

50. Залежність густини ймовірності розгалужених переходів від ймовірностей цих переходів. Типовий граф станів системи, в якій протікає розгалужуваний циклічний процес.
51. Розрахунок фінальний ймовірностей станів системи, в якій протікає розгалужуваний циклічний однорідний марківський процес з неперервним часом.
52. Обґрунтування необхідності заміни немарківських процесів марківськими.
53. Пуасонівський потік подій.
54. Потік подій Ерланга *k*-го порядку.
55. Формула розподілу випадкового проміжку часу між сусідніми подіями в потоці Ерланга *k*-го порядку.
56. Основна ідея методу псевдостанів.
57. Матриця вартостей. Розрахунок винагороди на *k*-ому кроці.
58. Розв'язок задачі відшукання оптимальної стратегії, що максимізує очікуваний прибуток, з використанням математичного апарату марківських процесів аналітичним шляхом.
59. Розв'язок задачі відшукання оптимальної стратегії, що максимізує очікуваний прибуток, з використанням математичного апарату марківських процесів чисельними методами з використанням ЕОМ.

Література

1. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математический методы моделирования экономических систем: Учебн. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с.
2. Введение в исследование операций. – 6-е изд: Пер. с англ. / Хемди А. Таха – М.: Вильямс, 2001. – 668 с.
3. Вероятностное моделирование в финансово-экономической области / Лабскер Л.Г. – М., 2002. – 224 с.
4. Вища математика для економістів: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. Рекомендовано Мін. освіти і науки України для студентів екон. вузів / Валєєв К.Г. – К., 1999. – 396 с.
5. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2-х ч. – Ч.І. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.
6. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2-х ч. – Ч.ІІ. Математична статистика. – К.: КНЕУ, 2000. – 336 с.
7. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М., 2001. – 407 с.
8. Квєтний Р.Н. Методи комп'ютерних обчислень. Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2001. – 148 с.
9. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для вузов / Гмурман В.Е. – М., 2002. – 405 с.

10. Статистика: Підручник для ВНЗ. – 2-ге вид., перероб. і доп. Допущено Мін. освіти України / Герасименко С.С., Єріна А.М., Кальян З.О. – К., 2002. – 476 с.
11. Теория вероятностей: Учеб.для вузов / Вентцель Е.С.– М., 2001.– 576 с.
12. Берник О.В. Завдання до практичних робіт з курсу „Теорія випадкових процесів” для студентів спеціальності 6.050.100 „Економічна кібернетика”. – Вінниця: ВДАУ, 2004. – 28 с.