

Системный анализ

УДК 681.3

Т. Б. Мартынюк, В. В. Хомюк

МУЛЬТИОБРАБОТКА МАССИВОВ ДАННЫХ ПО РАЗНОСТНЫМ СРЕЗАМ

Ключевые слова: мультиобработка данных, пороговая обработка векторного массива данных, системы алгоритмических алгебр, разностный срез.

Key words: data multiprocessing, threshold processing of vector data array, systems of algorithmic algebras, difference cut.

Введение

Вопросы структурного программирования алгоритмов сортировки достаточно подробно освещены в ряде работ [1-5]. Эти публикации ещё раз подтвердили универсальность аппарата структурированных схем программ, его широкие возможности в плане анализа, классификации и создания новых алгоритмов с оптимальными характеристиками [2-4,6]. Дальнейшее развитие алгебраической алгоритмики способствует созданию и исследованию семейств алгебр, которые адекватны основным парадигмам программирования и предназначены для формализованного описания различных дискретных моделей – логических, теоретико-автоматных, грамматических, алгоритмических [7-9]. В известных публикациях системы алгоритмических алгебр (САА) В. М. Глушкова и их модификации в основном использованы для формализованного представления задач символьной мультиобработки, а именно, различных методов сортировки, которые являются наиболее наглядным и разнообразным примером мультиобработки.

Вместе с тем, одной из распространенных задач мультиобработки массива данных является параллельное суммирование элементов векторного массива [10], которое ещё называют операцией свертки вектора [11] или оператором группового суммирования [12]. Один из вариантов реализации этой операции с использованием разностных срезов рассмотрен в работе [13]. Особенностью такого подхода является дальнейшее развитие

принципа многооперандности обработки векторного массива чисел, а также особое сочетание последовательного и параллельного выполнения базисных операций, что позволяет использовать специфические функциональные возможности разностно-срезовой обработки массивов данных [14,15].

В данной работе представлены результаты описания в базисе модифицированной САА В. М. Глушкова алгоритмов параллельного суммирования элементов векторного массива данных.

Модификация базиса САА В. М. Глушкова

Особенности операции суммирования элементов векторного массива M необходимо учесть, дополняя аппарат модифицированных САА [1-3]. Здесь также определяющим будет понятие размеченного массива M [2,3]. Пусть массив M имеет вид:

$$M = \overset{\uparrow}{\text{ПЛ}} \overset{\downarrow}{\text{ПР}} a_1 a_2 \dots a_n * , \quad (1)$$

где ПЛ, * – специальные маркеры, отмечающие соответственно левый и правый концы размеченного массива; \uparrow – указатель; n – размерность (длина) массива.

По классификации способа обработки элементов массива [1,3] в дальнейшем будет рассмотрена левосторонняя обработка массива M в результате циклического сдвига указателя \uparrow слева направо.

Наряду с такими известными конструкциями структурного программирования, как композиция, альтернатива и цикл [2,7], активно будет использоваться декомпозиция $(A+B)$ как операция параллельного применения операторов A и B , которая нашла применение при описании синхронных алгоритмов сортировки парным обменом [4]. Базисные условия (предикаты) включают известные по работам [2,3], а именно: а) $l \leq r$ – истинное при выполнении указанного отношения для соседних элементов l и r массива; б) $d(*)$ – истинное при достижении указателем \uparrow маркера *, а также новое условие; в) γ – истинное при выполнении соотношения $\min = 0$ для минимального значения в массиве M .

На составе базисных операторов остановимся подробнее. Широко использоваться будут такие известные операторы, как оператор начальной расстановки указателей (НРУ), оператор завершения работы РС (ФИН), оператор сдвига указателя \uparrow на один элемент вправо (\bar{C}). Для описания в терминах регулярных схем алгоритмов разностно-срезовой обработки и, в частности, для параллельного суммирования элементов векторного массива необходимо ввести следующие базисные операторы:

$\hat{C}\hat{O}\hat{I}_2(b, c)$ – суммирование элементов b и c массива;

$\hat{A}\hat{U}\times_2(b, c)$ – вычитание (последовательное) элементов b и c массива;

$\hat{A}\hat{U}\times(M, a)$ – вычитание (параллельное) из всех элементов массива M элемента a ;

$\hat{A}\hat{U}\hat{A}(R)$ – вывод результата.

Представленный математический аппарат позволяет описать в терминах операторных представлений САА и проанализировать все способы (алгоритмы) реализации обработки векторного массива данных с использованием разностных срезов (РС).

Разностно-срезовая обработка

Основным понятием при разностно-срезовой обработке является понятие разностного среза (РС), данное в работе [13], которое определяет его в текущем цикле обработки как векторный массив, каждый элемент которого формируется как разность соответствующего элемента текущего массива и текущего внутреннего порога обработки, в качестве которого может использоваться элемент фиксированной позиции текущего массива, например, наименьший элемент.

В дальнейшем будем рассматривать векторные массивы чисел в качестве РС, обозначать их как A_j , где j – j -й цикл обработки РС, а для исходного РС вида A_0 примем, что все его элементы $a_{i,0}$ ненулевые и положительные числа.

Базовыми операциями для мультиобработки по РС являются [13, 14]:

а) формирование элементов вектора внутреннего порога обработки вида

$$\mathbf{q} = \{q_j\}_{j=1}^N, \quad (2)$$

где N – количество циклов обработки, причем элемент q_j определяется следующим образом:

$$q_j = \min_i A_{j-1} = \min_i \{a_{i,j-1}\}_{i=1}^n, \quad (3)$$

б) формирование текущего РС A_j вида:

$$A_j = A_{j-1} - q_j = \{a_{i,j-1} - q_j\}_{i=1}^n, \quad (4)$$

в) накопление частичных сумм S_j вида [14]:

$$S_N = \sum_{j=1}^N S_j = \sum_{j=1}^N q_j \left(\sum_{i=1}^n f_{i,j} \right), \quad (5)$$

где $f_{i,j}$ - i -й элемент j -го вектора бинарной матрицы \mathbf{F} масок, который формируется одновременно с РС A_j следующим образом [13, 14]:

$$f_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{i,j} \geq 0, \\ 0, & \text{если } a_{i,j} < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Заканчивается процесс многооперандного суммирования элементов исходного РС A_0 при выполнении условия

$$q_j = 0. \quad (7)$$

Последовательное применение указанных базовых алгоритмов позволяет получить следующие результаты:

а) сформировать окончательную сумму элементов исходного РС A_0 как результат мультисуммирования [10]:

$$S_N = \sum_{i=1}^n a_{i,0} \quad (8)$$

в виде векторно-матричного умножения [13, 14]:

$$S_N = (\mathbf{n}^T \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{q}, \quad (9)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор; T – символ транспонирования;

б) отсортировать элементы исходного РС A_0 в порядке возрастания [14]:

$$A_0^s = \mathbf{G}^T \cdot A_0, \quad (10)$$

где \mathbf{G} – матрица сортировки, элементы $g_{i,j}$ которой определяются следующим образом

$$g_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{а́ñëè } a_{i,j} = 0, \\ 0, & \text{а́ñëè } a_{i,j} \neq 0, \end{cases} \quad (11)$$

в) восстановить элементы исходного РС A_0 [14]:

$$A_0 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{q}. \quad (12)$$

Кроме того, учитывая возможность совмещения в каждом j -м цикле операции формирования частичной суммы S_j и сравнения ее с текущим внешним порогом θ_j обработки [13], целесообразно ввести в рассмотрение пороговую функцию активации с формированием выходного сигнала Y вида:

$$\theta_j = \theta_{j-1} - S_j, \quad (13)$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{а́ñëè } S_N \geq \theta_0, \\ 0, & \text{а́ñëè } S_N < \theta_0, \end{cases} \quad (14)$$

где θ_0 – начальный внешний порог обработки.

Соответственно, окончанием пороговой обработки является выполнение условия:

$$\theta_j \leq 0. \quad (15)$$

Таким образом, базовыми операциями разностно-срезовой обработки векторного массива данных являются операции вида (3) – (5), (13) и (14), а базовыми условиями – (7) и (15).

Описание алгоритмов разностно-срезовой обработки в терминах САА В. М. Глушкова

Принимая во внимание то, что в данной работе будут рассмотрены из выше перечисленных только процедуры мультисуммирования (8), мультисортировки (10) и пороговой обработки (14), а также базовая операция формирования РС (4), то целесообразно определить соответствующие составные операторы, которые базируются на использовании

который включает в себя проверку условия отрицательного результата r вычитания (13) и соответствующую установку выходного сигнала Y (14).

Поскольку формирование разностного среза РС A_j в каждом j -м цикле мультисуммирования является базовой операцией, то запишем эту операцию с помощью составных и базовых операторов следующим образом:

$$\tilde{N}D\hat{A}\zeta(\overline{a_1, a_n}) ::= \hat{I} D\hat{O} \times \hat{I} \hat{E}\hat{I}_2(\overline{a_1, a_n}) \times (\hat{A}\hat{U} \times (M, \min) + \hat{I} \hat{A}\tilde{N}\hat{E}\hat{A}(\overline{a_1, a_n})) \quad (20)$$

с учётом одного оператора последовательного действия (16) и двух операторов параллельного действия - $\hat{A}\hat{U} \times (M, \min)$ и (18), которые выполняются одновременно.

Алгоритм сортировки элементов исходного РС A_0 в процессе мультисуммирования, который формирует дополнительный результат (отсортированный массив) по отношению к основному результату (сумме элементов массива), можно представить следующим образом:

$$\tilde{N}\hat{I} D\hat{O}^n(\overline{a_1, a_n}) ::= [\gamma] \left\{ \hat{I} D\hat{O} \times \hat{I} \hat{E}\hat{I}_2(\overline{a_1, a_n}) \times \hat{I} D\hat{O} \times (\hat{A}\hat{U} \times (M, \min) + \hat{I} \hat{A}\tilde{N}\hat{E}\hat{A}(\overline{a_1, a_n}) + \hat{I} \hat{A}\hat{E}\hat{I}_2(\overline{a_1, a_n})) \times \hat{A}\hat{U}\hat{A}(S) \right\} \times \hat{O}\hat{E}\hat{I} . \quad (21)$$

В записи (21) используется оператор $\hat{A}\hat{U}\hat{A}(S)$ для вывода результата операции накопления в каждом j -м цикле обработки. Выходом из процесса сортировки является выполнение условия (7), представленное базовым предикатом γ .

Базовый алгоритм формирования суммы элементов исходного РС A_0 можно представить в виде такой записи:

$$\tilde{N}\hat{O}\hat{I} \hat{I} \hat{A}^n(\overline{a_1, a_n}) ::= [\gamma] \left\{ \hat{I} D\hat{O} \times \hat{I} \hat{E}\hat{I}_2(\overline{a_1, a_n}) \times (\hat{A}\hat{U} \times (M, \min) + \hat{I} \hat{A}\tilde{N}\hat{E}\hat{A}(\overline{a_1, a_n})) \times \hat{I} D\hat{O} \times \hat{I} \hat{A}\hat{E}\hat{I}_2(\overline{a_1, a_n}) \times \tilde{N}\hat{O}\hat{I}_2(R, S) \right\} \times \hat{A}\hat{U}\hat{A}(R) \times \hat{O}\hat{E}\hat{I} , \quad (22)$$

которую можно сократить, воспользовавшись операцией $\tilde{N}D\hat{A}\zeta(\overline{a_1, a_n})$ вида (20):

$$\tilde{N}\hat{O}\hat{I} \hat{I} \hat{A}^n(\overline{a_1, a_n}) ::= [\gamma] \left\{ \tilde{N}D\hat{A}\zeta(\overline{a_1, a_n}) \times \hat{I} D\hat{O} \times \hat{I} \hat{A}\hat{E}\hat{I}_2(\overline{a_1, a_n}) \times \tilde{N}\hat{O}\hat{I}_2(R, S) \right\} \times \hat{A}\hat{U}\hat{A}(R) \times \hat{O}\hat{E}\hat{I} . \quad (23)$$

Это первый вариант алгоритма суммирования, в котором постепенно за N циклов накапливаются текущие частичные суммы S_j вида (5).

Второй вариант для алгоритма суммирования можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{N}O\dot{I} \dot{I} \dot{A}^n(\overline{a_1, a_n}) ::= [\gamma] \{ & \dot{I} \dot{D}O \times (\dot{I} \dot{E}\dot{I} \dot{I}_2(\overline{a_1, a_n}) + \dot{I} \dot{A}\dot{E}\dot{I} \dot{I}_2(\overline{a_1, a_n})) \times \\ & \times (\hat{A}\hat{U} \times (M, \min) + \dot{I} \dot{A}\tilde{N}\dot{E}\dot{A}(\overline{a_1, a_n}) + \tilde{N}O\dot{I} \dot{I}_2(R, S)) \} \times \hat{A}\hat{U}\hat{A}(R) \times \hat{O}\hat{E}\hat{I} . \end{aligned} \quad (24)$$

Для второго варианта характерным является наличие в первом цикле двух «пустых» операций: $\dot{I} \dot{A}\dot{E}\dot{I} \dot{I}_2(\overline{a_1, a_n})$ и $\tilde{N}O\dot{I} \dot{I}_2(R, S)$, поскольку они выполняются в данном случае с опережением.

Для третьего варианта алгоритма суммирования характерна запись вида:

$$\begin{aligned} \tilde{N}O\dot{I} \dot{I} \dot{A}^n(\overline{a_1, a_n}) ::= \tilde{N}\dot{D}\dot{A}\dot{C}(\overline{a_1, a_n}) \times [\gamma] \{ & \dot{I} \dot{D}O \times \dot{I} \dot{A}\dot{E}\dot{I} \dot{I}_2(\overline{a_1, a_n}) \times \\ & \times \tilde{N}O\dot{I} \dot{I}_2(R, S) \times \tilde{N}\dot{D}\dot{A}\dot{C}(\overline{a_1, a_n}) \} \times \hat{A}\hat{U}\hat{A}(R) \times \hat{O}\hat{E}\hat{I} , \end{aligned} \quad (25)$$

в которой операция формирования первого РС выведена за пределы цикла.

Четвёртый вариант записи алгоритма суммирования имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{N}O\dot{I} \dot{I} \dot{A}^n(\overline{a_1, a_n}) ::= \dot{I} \dot{D}O \times \dot{I} \dot{E}\dot{I} \dot{I}_2(\overline{a_1, a_n}) \times [\gamma] \{ & (\hat{A}\hat{U} \times (M, \min) + \\ & + \dot{I} \dot{A}\tilde{N}\dot{E}\dot{A}(\overline{a_1, a_n}) + \tilde{N}O\dot{I} \dot{I}_2(R, S)) \times \dot{I} \dot{D}O \times (\dot{I} \dot{E}\dot{I} \dot{I}_2(\overline{a_1, a_n}) + \\ & + \dot{I} \dot{A}\dot{E}\dot{I} \dot{I}_2(\overline{a_1, a_n})) \} \times \hat{A}\hat{U}\hat{A}(R) \times \hat{O}\hat{E}\hat{I} , \end{aligned} \quad (26)$$

где за пределы цикла выведена операция определения минимального элемента в исходном РС A_0 .

Таким образом, все четыре варианта записи в терминах САА В.М.Глушкова алгоритма суммирования с использованием разностных срезов отличаются только последовательностью применения введённых базисных и составных операторов и предикатов в пределах и за пределами цикла обработки.

Для пороговой обработки по РС первый вариант соответствующего алгоритма имеет вид:

$$\tilde{I} \hat{I} \hat{D} \hat{I} \tilde{A}^n(\overline{a_1, a_n}) := \tilde{N} \hat{O} \hat{I} \hat{I} \hat{A}^n(\overline{a_1, a_n}) \times \hat{A} \hat{U} \times_2(\theta, R) \times \hat{A} \hat{E} \hat{O} \hat{E} \hat{A}(\theta, R) \times \hat{A} \hat{U} \hat{A}(Y) \times \hat{O} \hat{E} \hat{I} \quad (27)$$

или при детальном описании с использованием записи (23)

$$\begin{aligned} \tilde{I} \hat{I} \hat{D} \hat{I} \tilde{A}^n(\overline{a_1, a_n}) &::= [\gamma] \left\{ \tilde{N} \hat{D} \hat{A} \hat{C}(\overline{a_1, a_n}) \times \hat{I} \hat{D} \hat{O} \times \hat{I} \hat{A} \hat{E} \hat{I} \hat{I}_2(\overline{a_1, a_n}) \times \right. \\ &\left. \times \tilde{N} \hat{O} \hat{I}_2(R, S) \right\} \times \hat{A} \hat{U} \times_2(\theta, R) \times \hat{A} \hat{E} \hat{O} \hat{E} \hat{A}(\theta, R) \times \hat{A} \hat{U} \hat{A}(Y) \times \hat{O} \hat{E} \hat{I} . \end{aligned} \quad (28)$$

Поскольку при обработке по РС возможно совмещённое выполнение некоторых операций пороговой обработки, то ниже приведены ещё три возможных варианта представления алгоритма пороговой обработки.

Второй вариант:

$$\begin{aligned} \tilde{I} \hat{I} \hat{D} \hat{I} \tilde{A}^n(\overline{a_1, a_n}) &::= [\gamma] \left\{ \hat{I} \hat{D} \hat{O} \times \left(\hat{I} \hat{E} \hat{I}_2(\overline{a_1, a_n}) + \hat{I} \hat{A} \hat{E} \hat{I} \hat{I}_2(\overline{a_1, a_n}) \right) \times \right. \\ &\times \left(\hat{A} \hat{U} \times (M, \min) + \hat{I} \hat{A} \hat{N} \hat{E} \hat{A}(\overline{a_1, a_n}) + \tilde{N} \hat{O} \hat{I}_2(R, S) + \hat{A} \hat{U} \times_2(\theta, R) \right) \times \\ &\left. \times \hat{A} \hat{E} \hat{O} \hat{E} \hat{A}(\theta, R) \right\} \times \hat{A} \hat{U} \hat{A}(Y) \times \hat{O} \hat{E} \hat{I} , \end{aligned} \quad (29)$$

третий вариант:

$$\begin{aligned} \tilde{I} \hat{I} \hat{D} \hat{I} \tilde{A}^n(\overline{a_1, a_n}) &::= \tilde{N} \hat{D} \hat{A} \hat{C}(\overline{a_1, a_n}) \times [\gamma] \left\{ \hat{I} \hat{D} \hat{O} \times \hat{I} \hat{A} \hat{E} \hat{I} \hat{I}_2(\overline{a_1, a_n}) \times \right. \\ &\times \left(\tilde{N} \hat{O} \hat{I}_2(R, S) + \hat{A} \hat{U} \times_2(\theta, S) \right) \times \left(\tilde{N} \hat{D} \hat{A} \hat{C}(\overline{a_1, a_n}) + \hat{A} \hat{E} \hat{O} \hat{E} \hat{A}(\theta, S) \right) \left\} \times \right. \\ &\left. \times \hat{A} \hat{U} \hat{A}(Y) \times \hat{O} \hat{E} \hat{I} , \end{aligned} \quad (30)$$

четвёртый вариант:

$$\begin{aligned} \tilde{I} \hat{I} \hat{D} \hat{I} \tilde{A}^n(\overline{a_1, a_n}) &::= \hat{I} \hat{D} \hat{O} \times \hat{I} \hat{E} \hat{I}_2(\overline{a_1, a_n}) \times [\gamma] \left\{ \left(\hat{A} \hat{U} \times (M, \min) + \right. \right. \\ &+ \hat{I} \hat{A} \hat{N} \hat{E} \hat{A}(\overline{a_1, a_n}) + \hat{A} \hat{U} \times_2(\theta, S) + \tilde{N} \hat{O} \hat{I}_2(R, S) \left. \right) \times \hat{I} \hat{D} \hat{O} \times \left(\hat{I} \hat{E} \hat{I}_2(\overline{a_1, a_n}) + \right. \\ &\left. \left. + \hat{I} \hat{A} \hat{E} \hat{I} \hat{I}_2(\overline{a_1, a_n}) + \hat{A} \hat{E} \hat{O} \hat{E} \hat{A}(\theta, R) \right) \right\} \times \hat{A} \hat{U} \hat{A}(Y) \times \hat{O} \hat{E} \hat{I} . \end{aligned} \quad (31)$$

Анализ представлений алгоритма пороговой обработки (27) – (31) свидетельствует о том, что в них задействованы все ранее рассмотренные варианты (22) – (26) алгоритма суммирования как основной составляющей мультиобработки по РС.

Выводы

1. Функциональная мощность базиса САА В.М. Глушкова позволяет на его основе, дополнив его базисными и составными операторами и предикатами, учитывающими

специфику обработки данных, представить в терминах регулярных схем любой алгоритм мультиобработки и, в частности, с использованием разностных срезов.

2. Всё многообразие реализаций любого алгоритма мультиобработки в модифицированном базисе САА В.М. Глушкова можно представить в компактной и наглядной форме, что не только упрощает процесс анализа таких представлений, но и способствует их дальнейшему развитию (оптимизации и модернизации).

Литература

1. Цейтлин Г.Е. Структурное программирование задач символьной мультиобработки // Кибернетика. – 1983. – № 5. – С. 22-30.
2. Цейтлин Г.Е. Проектирование последовательных алгоритмов сортировки: классификация, трансформация, синтез // Программирование. – 1989. – № 3. – С. 3-24.
3. Цейтлин Г.Е. Распараллеливание алгоритмов сортировки // Кибернетика. – 1989. – № 6. – С. 67-74.
4. Кожемяко В.П., Мартынюк Т.Б., Хомюк В.В. Особенности структурного программирования синхронных алгоритмов сортировки // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 5. – С. 122 – 133.
5. Яценко Е.А. Регулярные схемы алгоритмов адресной сортировки и поиска // Управляющие системы и машины. – 2004. – № 5. – С. 61 – 66.
6. Цейтлин Г.Е., Амонс А.А., Головин О.В., Зубцов А.Ю. Интегрированный инструментарий проектирования и синтеза классов алгоритмов и программ // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 3. – С. 165 – 169.
7. Цейтлин Г.Е. Алгебры Глушкова и теория клонов // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 4. – С. 48 – 58.
8. Борисов Е.С. Полуавтоматическая система декомпозиции последовательных программ для параллельных вычислителей с распределённой памятью // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 3. – С. 139 – 150.

9. Цейтлин Г.Е., Иванов Е.А. Специализированные информационные технологии для лиц с физическими ограничениями // Управляющие системы и машины. – 2008. – № 5. – С. 62 – 69, 74.
10. Мартинюк Т.Б., Хом'юк В.В. Методи та засоби паралельних перетворень векторних масивів даних. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2005. – 203 с. – ISBN 966-641-114-8.
11. Ни Л.М., Джейн А.К. Двухуровневый конвейерный систолический массив для кластерного анализа / В кн. СБИС для распознавания образов и обработки изображений: Пер. с англ./Под ред. К. Фу.– М.: Мир, 1988. – 248с.
12. Справочник по цифровой вычислительной технике / Под ред. В.Н. Малиновского. – К.: Техніка, 1980. – 320 с.
13. Мартынюк Т.Б. Модель порогового нейрона на основе параллельной обработки по разностным срезам // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 4. – С. 78 – 89.
14. Мартинюк Т.Б. Рекурсивні алгоритми багатооперандної обробки інформації. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2000. – 216 с. – ISBN 966-7199-98-3.
15. Васюра А.С., Мартинюк Т.Б., Куперштейн Л.М. Методі та засоби нейроподібної обробки даних для систем керування. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця, 2008. – 175 с. – ISBN 978-966-641-279-2.

1) «В печать»;

2) «На перевод на английский язык согласен».