

РАЗДЕЛ I МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 621.7:519.85

Михалевич В. М.
Алиева Л. И.

АППРОКСИМАЦИЯ КРИВЫХ ПРЕДЕЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ СПЛАЙН-ФУНКЦИЯМИ

Накопление данных о свойствах материалов в виде диаграмм пластичности, а именно – зависимости предельной накопленной деформации от показателя напряженного состояния, необходимо для моделирования деформируемости заготовок, что в свою очередь, требуется для проектирования и совершенствования технологических процессов обработки давлением. Эффективность как накопления указанных данных, так и результатов моделирования напрямую зависит от удачности выбора аналитических представлений диаграмм пластичности.

Объектом исследования является зависимость предельной накопленной деформации от показателя напряженного состояния для класса процессов простого деформирования.

Расчетный аппарат оценки деформируемости материалов, заложенный в работах Г. А. Смирнова-Аляева, В. Л. Колмогорова, Г. Д. Деля, В. А. Огородникова и др. [1, 2] получил за последние десятилетия широкое развитие и применение [3, 4, 5]. Однако вопросы, связанные с анализом существующих и конструированием новых аппроксимаций кривых предельной деформации, детального обсуждения в новых работах не получили.

Целью данной работы является анализ существующих аппроксимаций кривых предельной деформации, разработка новых подходов к построению таких аппроксимаций и конструирование новых выражений для формирования банка соответствующих данных.

Для формулировки определения кривой предельной деформации необходимо рассмотреть следующие понятия.

Величину деформации в теории деформируемости традиционно оценивают накопленной пластической деформацией (параметр Удквиста):

$$\varepsilon_u(t) = \int \overline{d\varepsilon_u}, \quad (1)$$

где $\overline{d\varepsilon_u}$ – интенсивность приращений деформаций.

В качестве показателя напряженного состояния используют отношение среднего напряжения σ к интенсивности напряжений s_u :

$$h = \frac{3 \text{ Чс}}{s_u}. \quad (2)$$

Стационарным процессом холодного деформирования будем называть процесс деформации, при котором остаются неизменными компоненты направляющего тензора приращений деформаций, показатель η и параметр Лоде μ [4].

Под кривой предельной деформации при стационарном деформировании, которую обозначим через:

$$\varepsilon_{*c} = \varepsilon_{*c}(\eta), \quad (3)$$

будем понимать зависимость предельной до разрушения материала накопленной деформации от показателя напряженного состояния, полученную при условии стационарного деформирования.

До настоящего времени в литературе обычно такую кривую называют диаграммой пластичности [1, 2, 3] (без приведения точного и компактного определения). Однако такое название представляется не совсем удачным, поскольку не согласуется с названием «кривой длительной прочности» – зависимостью между величиной напряжения и временем до разрушения, понятием, появившемся в механике разрушения задолго до изучения зависимостей (3). Несогласованность терминологии естественно усложняет взаимопонимание специалистов, исследующих и описывающих процессы разрушения с одних и тех же методологических концепций, однако рассматривающих различные прикладные области. В конечном счете, это приводит к искусственному замедлению развития как основ механики непрерывной поврежденности, так и ее приложений.

При необходимости учета третьего инварианта направляющего тензора напряжений или (и) зависимости предельных деформации от скорости деформаций кривая предельной деформации заменяется поверхностью предельных деформации. В данной работе мы ограничимся рассмотрением аппроксимаций кривой предельной деформации согласно приведенному выше определению.

В работе [1] рассмотрены следующие аппроксимации зависимости (3):

$$\varepsilon_{*c} = 2 \cdot \varepsilon_p \cdot e^{-0,72 \cdot \eta}, \quad -1 \leq \eta \leq \sqrt{3}, \quad (4)$$

где $\varepsilon_p = \varepsilon_{*c}(\eta = 1)$ – предельная деформация при растяжении.

Сегалом В. М. [5] получено следующее условие:

$$\frac{2}{\varepsilon_k} = \frac{1}{\varepsilon_p} + \frac{1}{\varepsilon_c}, \quad (5)$$

где $\varepsilon_c = \varepsilon_{*c}(\eta = -1)$, $\varepsilon_k = \varepsilon_{*c}(\eta = 0)$ – предельные деформации при сжатии и кручении соответственно, согласно которому предельная деформация при кручении является средним гармоническим предельных деформаций при сжатии и растяжении.

Аппроксимация (4) получена по результатам испытаний на растяжение, сжатие, кручение и изгиб образцов из двенадцати сталей. Соотношение (5) проверено на пятнадцати материалах. Сопоставим результаты, следующие из этих соотношений. Из (5) получим:

$$\varepsilon_k = \frac{2 \cdot \varepsilon_p \cdot \varepsilon_c}{\varepsilon_p + \varepsilon_c}. \quad (6)$$

С учетом значения $\varepsilon_c \approx 4,1 \cdot \varepsilon_p$, которое следует из (4), соотношение (6) преобразуются к виду:

$$\varepsilon_k = 1,6 \cdot \varepsilon_p, \quad (7)$$

из (4) при $\eta = 0$ получим:

$$\varepsilon_k = 2 \cdot \varepsilon_p. \quad (8)$$

Различие между (7) и (8) составляет 25 %. Если же (5) представить в виде:

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_p \cdot \varepsilon_k}{2 \cdot \varepsilon_p - \varepsilon_k}, \quad (9)$$

и определить ε_k , ε_p на основании (4), (8), то $\varepsilon_c \rightarrow \infty$. Из этого следует, что приведенные соотношения не могут претендовать на универсальные закономерности, характерные для большинства материалов. По всей вероятности, по мере совершенствования методов определения предельной накопленной деформации при стационарном деформировании и накоплении соответствующих экспериментальных данных будет возрастать и роль поиска закономерностей, подобных рассмотренным.

Лучшего согласования с экспериментальными данными позволяют получить следующие аппроксимации [1]:

$$\varepsilon_{*c} = A + B \cdot \eta + C \cdot \eta^2, \quad \eta \geq 0, \quad (10)$$

$$\varepsilon_{*c} = \varepsilon_k \cdot e^{a \cdot \eta}, \quad \eta \leq 0, \quad (11)$$

где A , B , C , a – коэффициенты аппроксимации.

Отмечая недостатки приведенных аппроксимаций в [1] предлагается собственный вариант:

$$\varepsilon_{*c} = \frac{\varepsilon_c \cdot \varepsilon_k}{\varepsilon_c + \eta \cdot (\varepsilon_c - e \cdot \varepsilon_k)} \cdot e^{-\eta}, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad (12)$$

которое применимо лишь при $\varepsilon_c > e \cdot \varepsilon_k$, но имеет преимущество в описании предельной деформации материалов, для которых $\varepsilon_c \rightarrow \infty$. В этом случае (12) преобразуется к виду:

$$\varepsilon_{*c} = \frac{\varepsilon_k}{1 + \eta} \cdot e^{-\eta}. \quad (13)$$

Следует отметить, что не все аргументы о недостатках рассмотренных аппроксимаций, изложенные в [1], представляются достаточно убедительными. В частности, использование ε_p в качестве параметра аппроксимаций является скорее свидетельством недостатка не аппроксимации, а указывает на «тонкие» места всего «здания» теории деформируемости, связанные со сложностью определения $\varepsilon_{*c} (\eta = 1)$ для материалов образующих шейку при растяжении.

Построим новые аппроксимации, используя понятие сплайн. Под сплайном (от англ. spline – планка, рейка) обычно понимают кусочно-заданную функцию, совпадающую с функциями более простой природы на каждом элементе разбиения своей области определения. Наиболее известными являются кубические сплайны: функции, представленные на разных участках разными кубическими полиномами, «склеенными» между собой с помощью условий непрерывности первой и второй производной. График подобных функций, фактически состоящих из разных кусков отдельных функций, представляет собой гладкую кривую, на которой незаметны узловые точки.

Рассмотрим аппроксимацию, полученную на основе (11):

$$\varepsilon_{*c} = \varepsilon_k \cdot \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_c} \right)^\eta, \quad -1 \leq \eta \leq 0 \quad (14)$$

и аппроксимацию (4), записанную в виде:

$$\varepsilon_{*c} = \varepsilon_k \cdot e^{-0,72 \cdot \eta}, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (15)$$

Уменьшением области определения каждого из выражений мы достигаем большей достоверности, при этом представление кривой предельной деформации в области $-1 \leq \eta \leq 1$ с помощью двух разных зависимостей позволяет получить непрерывную функцию, однако приводит к излому функции в точке «склейки» при $\eta = 0$, вызванному разрывом первой производной. Усовершенствуем представление (14), (15) так, чтобы избежать отмеченного излома функции.

Модифицируем аппроксимацию (15) следующим образом:

$$\varepsilon_{*c} = \varepsilon_k \cdot e^{-0,72 \cdot \eta + \eta \cdot (1-\eta) \cdot b}, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (16)$$

Поскольку введенное слагаемое $\eta \cdot (1-\eta) \cdot b$ принимает нулевые значения в узловых точках при $\eta = 0, \eta = 1$, очевидно, что предложенное выражение принимает одинаковые значения с аппроксимацией (15) в указанных точках. Неизвестную b найдем из условия равенства первых производных в точке $\eta = 0$ для аппроксимаций (14), (16). Для этого найдем соответствующие производные:

$$\frac{d \left(\varepsilon_k \cdot \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_c} \right)^\eta \right)}{d\eta} = \varepsilon_k \cdot \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_c} \right)^\eta \cdot \ln \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_c} \right), \quad (17)$$

$$\frac{d \left(\varepsilon_k \cdot e^{-0,72 \cdot \eta + \eta \cdot (1-\eta) \cdot b} \right)}{d\eta} = \varepsilon_k \cdot [-0,72 + b \cdot (1 - 2 \cdot \eta)] \cdot e^{-0,72 \cdot \eta + \eta \cdot (1-\eta) \cdot b} \quad (18)$$

и приравняем их значения в точке $\eta = 0$, получим выражение:

$$\varepsilon_k \cdot \ln \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_c} \right) = \varepsilon_k \cdot (-0,72 + b), \quad (19)$$

откуда следует:

$$b = 0,72 + \ln \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_c} \right). \quad (20)$$

С учетом полученного выражения модифицированная аппроксимация (16) в результате несложных преобразований принимает окончательный вид:

$$\varepsilon_{*c} = \varepsilon_k \cdot e^{-0,72 \cdot \eta^2} \cdot \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_c} \right)^{\eta \cdot (1-\eta)}, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (21)$$

На рис. 1 представлены результаты сопоставления аппроксимации кривой предельной деформации с помощью двух разных зависимостей (14), (15) (рис. 1, а, в) с ярко выраженным изломом в точке $\eta = 0$ и сплайн-функцией (14), (21) (рис. 1, б, г), представляющую собой гладкую кривую. Значения $\varepsilon_k, \varepsilon_c$ заимствованы в [1].

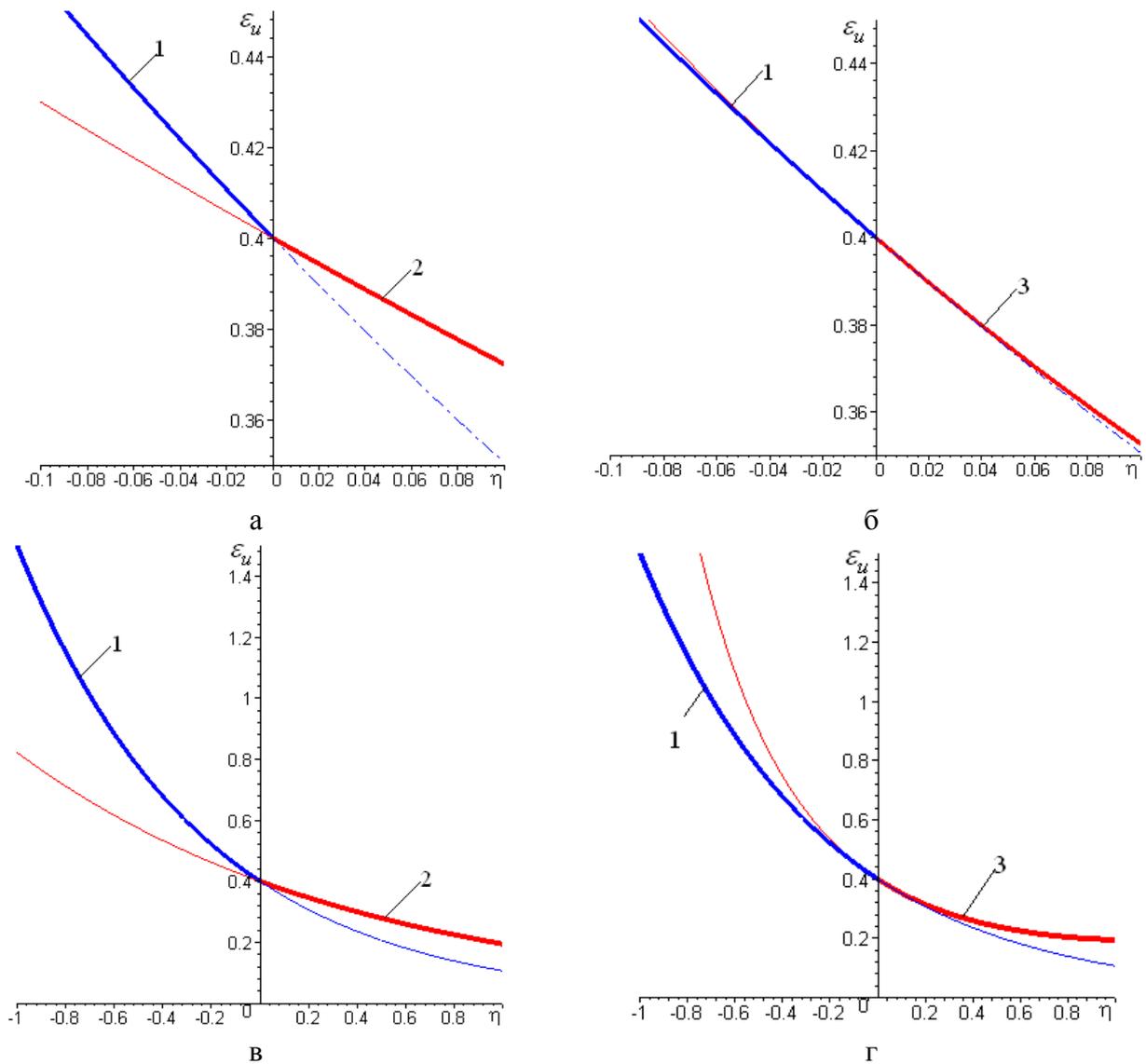


Рис. 1. Кривая предельной деформации дюралюминия Д16:
1 – (14); 2 – (15); 3 – (21)

Если, кроме $\varepsilon_c, \varepsilon_k$ известно, также ε_p , функция (14), (21) может быть обобщена следующим образом. Вместо (21) запишем следующее выражение:

$$\varepsilon_{*c} = \varepsilon_k \cdot e^{\eta \cdot \left(\ln \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_k} \right) + (1-\eta) \cdot b \right)}, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \tag{22}$$

и определив его производную, приравняем ее значение в точке $\eta = 0$ значению, полученному на основе (14):

$$\varepsilon_k \cdot \ln \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_c} \right) = \varepsilon_k \cdot \left(\ln \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_k} \right) + b \right), \tag{23}$$

откуда следует:

$$b = \ln \left(\frac{\varepsilon_k^2}{\varepsilon_c \cdot \varepsilon_p} \right). \tag{24}$$

С учетом полученного соотношения, выражение (22) после несложных преобразований принимает вид:

$$\varepsilon_{*c} = \varepsilon_k \cdot \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_k} \right)^{\eta^2} \cdot \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_c} \right)^{\eta \cdot (1-\eta)}, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (25)$$

В частном случае, при $\varepsilon_p = \varepsilon_k \cdot e^{-0,72}$, последнее соотношение преобразуется к аппроксимации (21).

Следует отметить, что если по аналогии с выражением (22) обобщить (14):

$$\varepsilon_{*c} = \varepsilon_k \cdot e^{\eta \cdot \left(\ln \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_c} \right) + (1-\eta) \cdot c \right)}, \quad -1 \leq \eta \leq 0 \quad (26)$$

и наложить на выражения (22), (26) условия непрерывности первой и второй производных в точке $\eta = 0$, то получим аппроксимацию кривой предельной деформации в виде единого аналитического выражения:

$$\varepsilon_{*c} = \varepsilon_k \cdot \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_c} \right)^{\frac{\eta}{2}} \cdot \left(\frac{\varepsilon_p \cdot \varepsilon_c}{\varepsilon_k^2} \right)^{\frac{\eta^2}{2}}, \quad -1 \leq \eta \leq 1. \quad (27)$$

Подобным образом построена и аппроксимация:

$$\varepsilon_{*c} = a_2 \cdot \exp \left(-\eta \cdot \ln \left(\frac{(1-\eta) \cdot a_1}{2 \cdot a_2} + \frac{(1+\eta) \cdot a_2}{2 \cdot a_3} \right) \right), \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad (28)$$

которая после определения параметров a_i ($i = 1, 2, 3$) принимает следующий вид [7]:

$$\varepsilon_{*c} = \varepsilon_k \cdot \left(\frac{(1-\eta) \cdot \varepsilon_c}{2 \cdot \varepsilon_k} + \frac{(1+\eta) \cdot \varepsilon_k}{2 \cdot \varepsilon_p} \right)^{-\eta}, \quad -1 \leq \eta \leq 1. \quad (29)$$

Очевидно, что по предложенной методике можно строить различные аппроксимации кривой предельной деформации. Однако весьма закономерно возникает вопрос о целесообразности развития новых подходов и конструирования на их основе множества аппроксимаций. Обсудим две задачи, решение которых вызывает необходимость использования различных аппроксимаций.

Сравним ряд аппроксимаций: квадратичный полином:

$$\varepsilon_{*c} = \varepsilon_k + \left(\frac{\varepsilon_p - \varepsilon_c}{2} \right) \cdot \eta + \left(\frac{\varepsilon_p + \varepsilon_c}{2} - \varepsilon_k \right) \cdot \eta^2, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad (30)$$

и следующие сплайн-функции: (14), (25);

$$\varepsilon_{*c} = \begin{cases} \varepsilon_k \cdot \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_c} \right)^{\eta}, & -1 \leq \eta \leq 0 \\ \varepsilon_k \cdot \left(1 - \eta \cdot \ln \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_k} \right) \right) + \left[\varepsilon_p - \varepsilon_k \cdot \left(1 - \ln \left[\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_k} \right] \right) \right] \cdot \eta^2, & 0 \leq \eta \leq 1, \end{cases} \quad (31)$$

$$\varepsilon_{*c} = \begin{cases} \varepsilon_k \cdot \left(1 + \eta \cdot \ln \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_k} \right) \right) + \left[\varepsilon_c - \varepsilon_k \cdot \left(1 - \ln \left[\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_k} \right] \right) \right] \cdot \eta^2, & -1 \leq \eta \leq 0, \\ \varepsilon_{*c} = \varepsilon_k \cdot \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_k} \right)^\eta, & 0 \leq \eta \leq 1 \end{cases} \quad (32)$$

Сопоставление этих аппроксимаций, построенных по одним и тем же экспериментальным данным, приведено на рис. 2.

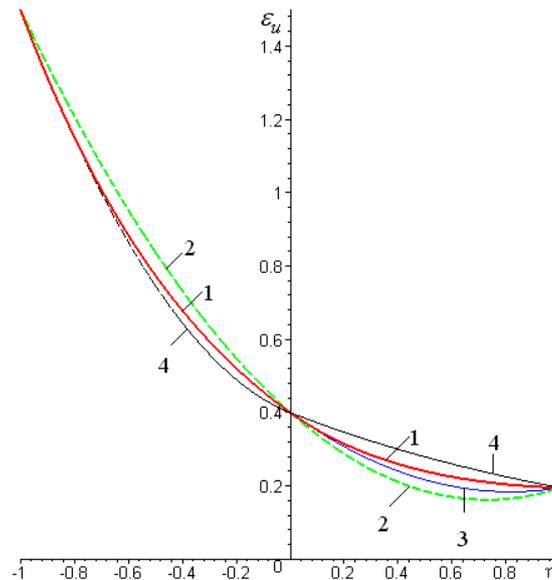


Рис. 2. Кривая предельной деформации дюралюминия Д16:
1 – (14), (25); 2 – (30); 3 – (31); 4 – (32)

Как видно различие, скорее всего, в пределах погрешности экспериментальных данных, причем в области, где получение значений ε_{*c} требует сложных экспериментов и специального оборудования. Однако следует помнить, что получение аппроксимации кривой предельной деформации является не самоцелью, а необходимым элементом при решении более сложной задачи определения предельной деформации при нестационарном деформировании [4], которую можно назвать основной задачей теории деформируемости.

В [8] построена модель предельной деформации на боковой поверхности цилиндрической заготовки при осесимметричной осадке с различными условиями трения на торцах, которую запишем в следующем виде:

$$\frac{m}{\varepsilon_k} \cdot \int_0^{\varepsilon_*} \frac{\sqrt{1+3 \cdot \cos^4(x)}}{\cos^2(x)} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_p} + \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_k} + \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_p} - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_k} \right) \cdot \frac{1-3 \cdot \cos^2(x)}{\sqrt{1+3 \cdot \cos^4(x)}} \right) \right)^{\frac{1-3 \cdot \cos^2(x)}{\sqrt{1+3 \cdot \cos^4(x)}}} \cdot dx = 1. \quad (33)$$

Данная модель получена на основании аппроксимации (29). При использовании (30), получим аналогичное выражение:

$$m \cdot \int_0^{\varepsilon_*} \frac{\sqrt{1+3 \cdot \cos^4(x)}}{\cos^2(x) \cdot \left(\varepsilon_k + \frac{(\varepsilon_p - \varepsilon_c) \cdot (1-3 \cdot \cos^2(x))}{2 \cdot \sqrt{1+3 \cdot \cos^4(x)}} + \frac{(\varepsilon_p + \varepsilon_c - 2 \cdot \varepsilon_k) \cdot (1-3 \cdot \cos^2(x))^2}{2 \cdot (1+3 \cdot \cos^4(x))} \right)} \cdot dx = 1. \quad (34)$$

Если результаты решения основной задачи теории деформируемости окажутся мало чувствительны к выбору аппроксимации зависимости (3), то это следует рассматривать как одно из звеньев в цепочке доказательства достоверности полученных результатов. Если же указанные результаты будут отличаться заметно, это явится свидетельством необходимости проведения дополнительных экспериментов для уточнения зависимости (3).

Модели типа (33), (34) в совокупности с аналитическим представлением траектории деформаций в координатах $\eta - \varepsilon_u$ представляют собой очередное продвижение в направлении аналитического представления предельной деформации при нестационарном деформировании. Аналитическое исследование подобных моделей необходимо для получения более общих закономерностей изменения предельной деформации при нестационарном деформировании. Естественно, что эффективность подобного исследования зависит от того насколько удачно подобрано аппроксимирующее выражение зависимости (3).

ВЫВОДЫ

Предложенный подход к построению аппроксимаций кривой предельной деформации при стационарном деформировании, основанный на конструировании сплайн-функций, является удобным средством получения новых аналитических выражений. Наличие множества указанных аппроксимаций необходимо как для повышения эффективности аналитического исследования основной задачи теории деформируемости, так и для доказательства достоверности результатов ее решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дель Г. Д. *Технологическая механика* / Г. Д. Дель. – М.: Машиностроение, 1978. – 174 с.
2. Огородников В. А. *Оценка деформируемости металлов при обработке давлением* / В. А. Огородников. – К.: Выща шк., 1983. – 173 с.
3. Матвийчук В. А. *Совершенствование процессов локальной ротационной обработки давлением на основе анализа деформируемости металлов: монография* / В. А. Матвийчук, И. С. Алиев. – Краматорск: ДГМА, 2009. – 268 с.
4. Михалевиц В. М. *Тензорні моделі накопичення пошкоджень* / В. М. Михалевиц. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1998. – 195 с.
5. Михалевиц В. М. *Математичне моделювання механіки формоутворення при холодному торцевому розкочуванні* / В. М. Михалевиц, В. О. Краєвський. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 188 с.
6. Сегал В. М. *Структурные параметры в континуальной модели вязкого разрушения* / В. М. Сегал // *Пробл. прочности*. – 1983. – № 4. – С. 47–50.
7. *Dependence of plastic ultimate strain from a friction at end faces at axisymmetric compression* / Mikhalevich V. M., Dobranuk Y. V., Kraevsky V. A., Mikhalevich O. V. // *Bulet. Inst. Politehnic Din Iasi*. – Iasi. – 2008. – Tomul LIV(LVIII), Fasc. 3–4. – P. 49–53.
8. Михалевиц В. М. *Побудова ефективних обчислювальних схем у Maple під час розв'язання задачі визначення граничних деформацій за умов складного деформування [Електронний ресурс]* / В. М. Михалевиц, Ю. В. Добранюк, О. В. Михалевиц // *Наукові праці Вінницького національного технічного університету*. – Київ: Національна бібліотека ім. В. І. Вернадського. – 2009. – № 2. – 7 с. – Режим доступу: http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2009_2/2009-2.htm.

Михалевиц В. М. – д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой ВНТУ;

Алиева Л. И. – канд. техн. наук, ст. преп. кафедры ОМД ДГМА.

ВНТУ – Винницкий национальный технический университет, г. Винница;

ДГМА – Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск.

E-mail: vmykhal@gmail.com