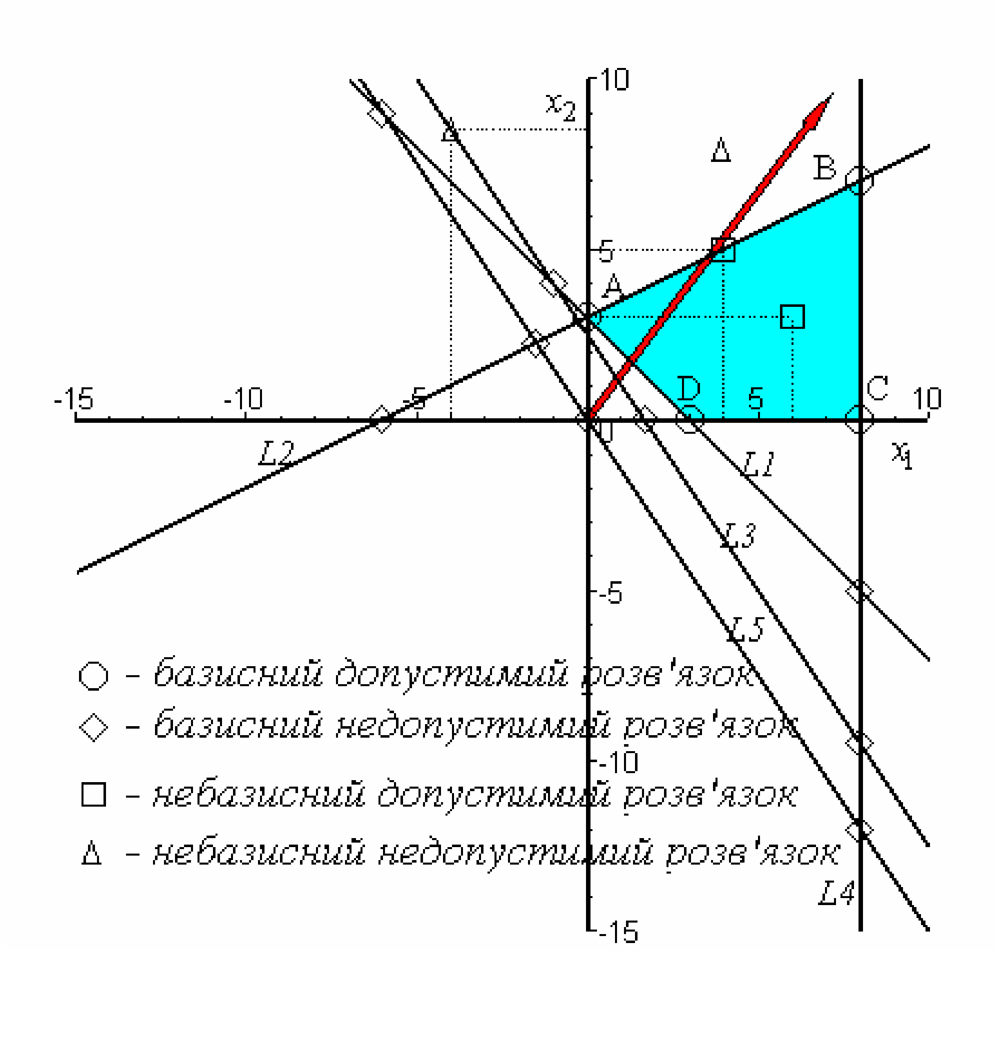
В. М. Михалевич

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ РАЗОМ З MAPLE

Частина І

Методи розв'язування задач лінійного програмування



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. М. Михалевич

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ РАЗОМ З MAPLE

Частина I

Методи розв'язування задач лінійного програмування

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей. Протокол № 6 від 29 листопада 2007 р.

Вінниця ВНТУ 2008

УДК 519.8+681.3.06
М 76

Рецензенти:

В. О. Капустян, доктор фізико-математичних наук, професор
В.І. Клочко, доктор педагогічних наук, професор
О. М. Роїк, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Михалевич В.М.
М 76 **Математичне програмування разом з Maple. Частина I. Методи розв'язування задач лінійного програмування**. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2008.-158 с.

Подано теоретичні відомості з окремих тем: розв'язання систем лінійних рівнянь, геометричний та симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування. Особливість посібника полягає в широкому використанні системи аналітичних обчислень Maple. Наведено цикл лабораторних робіт для виконання в середовищі DEMO-Maple. В посібник включено 200 варіантів завдань з відповідями для типових розрахунків, які також, можна використовувати для контрольних робіт.

Розрахований на студентів технічних ВНЗ усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 519.8+681.3.06

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник складено за програмою курсу „Математичне програмування” для студентів економічних спеціальностей у вищих навчальних закладах освіти на основі досвіду викладання у Вінницькому національному технічному університеті.

Головна особливість посібника полягає у викладенні математичного програмування із застосуванням інформаційних технологій. Для цього пропонується використовувати середовище математичного пакета Maple. Засоби цієї системи комп’ютерної алгебри дозволили розробити методику викладання математичного програмування, яка акцентує увагу студентів на ключових ідеях понять і методів, що вивчаються, а не на рутинних обчисленнях. Зокрема, ця методика стосовно лінійного програмування дозволила уникнути застосування симплекс-таблиць. На думку автора, симплекс-таблиці дозволяють суттєво зменшити об’єм рутинних обчислень і дають уяву про побудову ефективних обчислювальних схем. Але при цьому в тому вигляді, як це подано в усіх підручниках та навчальних посібниках, з якими мав змогу ознайомитися автор (а це не менше 4-6 десятків книжок), симплекс-таблиці повністю затьмарюють основні ідеї, на яких базується симплекс-метод.

Всі задачі пропонується розв’язувати в середовищі математичного пакета Maple. Причому мова йде не про елементарні рецепти для здобуття відповіді за допомогою однієї стандартної команди, а про свідоме відтворення студентом за допомогою Maple-команд всіх етапів симплекс-алгоритму.

Посібник складається з трьох частин. В першій частині розглядаються задачі лінійної алгебри та лінійного програмування.

Представлено програми, які дають можливість напівавтоматичного знаходження розв’язків двовимірних задач графічним методом. Детально розглянуто симплекс-метод розв’язання задач лінійного програмування. Описані команди Maple, необхідні для реалізації симплекс-методу, та вказано алгоритм їх використання. Наведено приклади конкретних задач, що розв’язані за допомогою представленого прозорого інформаційного симплекс-алгоритму.

Наведено цикл лабораторних робіт із розв’язання задач лінійної алгебри та лінійного програмування в Maple.

В посібник включено 200 варіантів завдань для типових розрахунків, які також можна використовувати для контрольних робіт. Кожне завдання складається з 5 задач. Всі варіанти задач разом з відповідями згенеровано спеціально створеною Excel-VBA-Maple програмою [29] .

Скрізь, де мова йде про використання Maple, перш за все йдеться про DEMO-Maple. Випадки, де використовувалися засоби, які не підтримуються DEMO версією, як правило, обумовлені окремо. Демо-версію пакета Maple V R4 розміром менше 2 Мб, без обмеження на термін дії, і в якій реалізовано переважну більшість наведених в посібнику Maple-програм можна скачати за адресою http://www.exponenta.ru/educat/free/free.asp. Важливо, що вказана демо-версія не має обмеження на термін дії. Наведено ряд рекомендацій, що дозволяють «пом'якшити» деякі суттєві обмеження цієї версії, в середовищі якої заблоковано операції копіювання, вставки, збереження та ін.

Автор намагався навести основні відомості, що стосуються як специфіки роботи в середовищі додатка Maple, так і особливостей використовуваних команд і операторів. В той же час для кращого розуміння та більш ефективного використання наведених у посібнику Maple–програм бажано мати уяву про мови програмування у відповідності з об'ємом курсу інформатики в середній школі. В крайньому разі, «механічний» підхід до використання програм теж може виявитися цілком придатним.

Посібник розрахований на студентів економічних та технічних ВНЗ усіх форм навчання та спеціальностей.

1. КОРОТКІ ВІДОМОСТІ З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ Й ВІДПОВІДНИМ ОБЧИСЛЕННЯМ В MAPLE

1.1. Визначник

Будь-якій квадратній матриці ставиться у відповідність число, яке називається визначником матриці та визначається за елементами матриці згідно з певною формулою.

В Maple формули для обчислення визначників різних порядків можна отримати таким чином.

Розв'язання нових задач рекомендується починати з команди **restart**.

```
> restart:
```

Підключаємо команди пакета лінійної алгебри

```
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Для квадратної матриці другого порядку: задаємо порядок матриці

```
> m:=2:
```

задаємо матрицю другого порядку

```
a:=matrix(m,m):
```

виводимо елементи матриці на екран монітора

```
`A`=evalm(a);
```

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

Оскільки ми створили матрицю, але не присвоїли значення її елементам, Maple позначила елементи матриці за її ім'ям. Слід звернути увагу, що, на відміну від прийнятих в математиці традиційних позначень, в Maple індекси кожного елемента розділяються комою.

Визначник можна обчислити за формулою

```
> `det(A)`=det(a);
```

$$det(A) = a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{1,2}\,a_{2,1}$$

В лівій частині рівності в повернутих лапках указано позначення визначника, а в правій задано команду обчислення визначника. Оскільки елементи визначника матриці A не визначені, Maple вивела відповідну формулу. Якщо в операторі присвоєння **m:=2** змінній **m** присвоїти будь-яке інше ціле позитивне число, то отримаємо формулу для обчислення визначника відповідного порядку.

Якщо елементами матриці є числа, то отримаємо не формулу для обчислення визначника, а його значення:

```
>b:=matrix(3,3[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]):
`B`=evalm(b);
`det(B) `=det(b);
```

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$det(B) = 0$$

Зробимо деякі пояснення щодо використаних команд Maple.

Всі команди в середовищі Maple за замовчуванням зображаються шрифтом червоного кольору.

Команда **restart**: приводить до очищення пам'яті. Виконання цієї команди рівносильно закриттю і новому запуску додатка Maple. Зважаючи на специфіку організації обчислень в Maple, розв'язування всіх нових задач рекомендується починати з команди **restart**:.

Команда with(linalg): виконана для підключення пакета, в якому міститься ряд команд лінійної алгебри, зокрема використовувані далі команди обчислення визначника **det(a)** і рангу **rank(a)** матриці.

За допомогою оператора присвоєння **m:=2:** змінній m присвоюється значення 2, а оператором **a:=matrix(m,m):** створюється матриця розміром (m*m). Оскільки елементи матриці не задані, то їх позначення автоматично згенеровано системою на підставі імені, присвоєного створеній матриці. За традицією, що склалася в математиці, в загальних записах матриці позначають великими буквами, тоді як елементи матриці відповідними маленькими буквами з індексами: перший індекс указує номер рядка, а другий - номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент. У Maple позначення не заданих елементів матриці створюються присвоєнням імені матриці відповідних індексів. Тому матриці присвоєно ім'я маленького a. При виведенні матриці на екран монітора використано запис **`A`=evalm(a);** - при цьому ніякого присвоєння не відбувається. Команда evalm(a) дозволяє представити матрицю не ім'ям, а її елементами. Нагадаємо, якщо команда завершується двокрапкою, то результат виконання команди не виводиться на екран монітора. Якщо команда завершується крапкою з комою, то результат виконання команди відображається на екрані монітора в області виведення шрифтом синього кольору.

Ліва частина запису **`det(A)`=det(a)** відповідає традиційному позначенню визначника, а права частина обчислює даний визначник.

Один із способів створення матриці в Maple:

```
> c:=matrix(2,3[[1,2,3],[4,5,6]]):`C`=evalm(c);
```

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Перше число в круглих дужках (число "2") указує кількість рядків, друге (число "3") - кількість стовпців матриці.

Поняття визначника для прямокутної матриці не існує. Якщо ж ми спробуємо обчислити визначник даної матриці **c**, то одержимо повідомлення, що аргументом команди **det(c)** повинна бути квадратна матриця:

```
> `det(C) `=det(c);
```

Error, (in linalg:-det) expecting a square matrix

1.2. Ранг матриці

Ще одним важливим поняттям, необхідним для дослідження існування розв'язку систем лінійних рівнянь, є поняття рангу матриці.

Припустимо, що дана матриця A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Мінором *k*-го порядку матриці A розмірністю (m×n) називається визначник, складений із будь-яких *k* рядків і *k* стовпців матриці. Очевидно, що повинні виконуватися нерівності: 1=<k<=min(m,n).

Рангом матриці A розмірністю (m×n) називається найвищий порядок відмінного від нуля мінору даної матриці. Наведемо приклад.

```
> d:=matrix(4,3[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9],[0,1-3]]):
`D`=evalm(d);
```

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Матриця **D** складається з чотирьох рядків і трьох стовпців, min(3,4)=3, тому ранг r матриці **D** не може бути більшим за 3 (r<=3). Обчислимо мінор матриці **D**, складений з перших трьох рядків і трьох стовпців. Для цього спочатку створимо відповідну матрицю

```
> d1:=matrix(3,3[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]]):
`D1`=evalm(d1);
`det(D1) `=det(d1);
```

$$D1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$det(D1) = 0$$

Як бачимо складений мінор 3 порядку даної матриці рівний нулю. Проте дана матриця має інші мінори 3-го порядку. Обчислимо мінор матриці **D**, складений з першого, другого і четвертого рядків і трьох стовпців матриці **D**. Для цього спочатку створимо відповідну матрицю

```
> d2:=matrix(3,3[[1,2,3],[7,8,9],[0,1-3]]):
`D2`=evalm(d2);
`det(D2) `=det(d2);
```

$$D2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$det(D2) = 30$$

Одержано мінор 3 -го порядку, не рівний нулю. Це означає, що ранг матриці D рівний 3. Відмітимо, що будя-який відмінний від нуля мінор порядку, рівного рангу матриці, називається **базисним мінором** даної матриці. Рядки і стовпці матриці, на перетині яких стоять елементи базисного мінору, називаються базисними рядками і базисними стовпцями.

Завдання для самостійної роботи:

Перевірте, чи містить матриця D, інший базисний мінор, крім знайденого.

Для обчислення рангу матриці за допомогою Maple зовсім не обов'язково обчислювати всі можливі мінори. Досить скористатися командою **rank(d)**:

```
> `r`=rank(d);
```

$$r = 3$$

Завдання для самостійної роботи:

Пропонуємо читачу переконатися, що ранг заданої нижче матриці E рівний 2.

```
>  e:=matrix(4,3,[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9],[14,16,18]]):
`E`=evalm(e);
```

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$$

Дайте відповіді на такі питання.

1. Чи виходить з цього, що будь-який мінор 3-го порядку даної матриці рівний нулю?
2. Чи виходить з цього, що будь-який мінор 4-го порядку даної матриці рівний нулю?
3. Чи виходить з цього, що існує мінор 2-го порядку даної матриці не рівний нулю?
4. Чи виходить з цього, що будь-який мінор 2-го порядку даної матриці не рівний нулю?

1.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай дана система лінійних рівнянь

```
> eq1:=-3*x[1]+2*x[2]-x[3]= 2;
eq2:=-x[1]+x[2]+x[3] = 0;
eq3:=2*x[1]+x[2]+2*x[3] = 2;
```

$$eq1 := -3\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 = 2$$

$$eq2 := -x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$eq3 := 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 2$$

Відмітимо, що в Maple значенню змінної може бути присвоєно рівняння. В даному випадку значенням змінної **eq1** є перше рівняння системи. Позначення **eq1** пояснюється так: eq - перші дві букви англійського слова equation - рівняння. Позначення можуть бути довільними, але повинні задовольняти вимоги синтаксису Maple. Вибір позначень змінних це, зазвичай, компроміс між інформативністю позначення і довжиною імені.

Розв'язати задану систему рівнянь в Maple надзвичайно просто. Досить використати команду **solve**:

```
> solve({eq1,eq2,eq3},{x[1],x[2],x[3]});
```

$$\{x_3 = -1, x_2 = 2, x_1 = 1\}$$

Розглянемо структуру та синтаксис даної команди для розв’язання системи лінійних рівнянь.

В перших фігурних дужках через кому вказуються всі рівняння системи, а в наступних фігурних дужках через кому вказуються невідомі, які необхідно визначити.

При дійсній простоті задання цієї команди для користувача, мало знайомого з Maple і такого, що не має відповідних твердих математичних знань, можливий цілий ряд непорозумінь. Розглянемо найбільш типові з них.

Якщо в запису команди **solve** допущена синтаксична помилка, наприклад ця команда записана з великої букви - **Solve**, то буде одержано

```
> Solve({eq1,eq2,eq3},{x[1],x[2],x[3]});
```

$$\mathrm{Solve}(\{-x_1+x_2+x_3=0,\ -3\,x_1+2\,x_2-x_3=2,\ 2\,x_1+x_2+2\,x_3=2\},\ \{x_1,x_2,x_3\})$$

Тобто, в рядку виведення продубльовано вираз, введений в командний рядок.

Підступніші ситуації можуть бути в таких випадках: помилково вказано принаймні одне з імен змінних, наприклад, замість **x[1]** вказано **X[1]** (замість малого **x** - велике **X**). В цьому випадку Maple розв'язати систему не може. У подібних випадках ніякого повідомлення не виводиться:

```
> solve({eq1,eq2,eq3},{X[1],x[2],x[3]});
```

Ніякого повідомлення не виводиться і у разі, коли задано не всі змінні, що можуть бути знайдені

```
> solve({eq1,eq2,eq3},{x[2],x[3]});
```

Особливо небезпечними є ситуації, коли в позначеннях замість букви латинського алфавіту використовують букви російського або українського алфавіту, що мають зовнішньо однаковий вигляд: x-х, c-с, y-у, K-К, e-е, H-Н, i-і, B-В, a-а, p-р, o-о, T-Т. Так, наприклад, ніякого повідомлення не з'явиться при виконанні команди

```
> solve({eq1,eq2,eq3},{x[1],x[2],x[3]});
```

якщо в позначенні змінної **x[1]** літера "x" набрана не в латинському, а в російскому алфавиті. Особлива небезпечність тут полягає в тому, що зовні запис виглядає правильним і без певного досвіду такі помилки важко виявляти. По суті ця ситуація аналогічна попереднім, в яких задані не всі змінні.

У подібних випадках Maple просто не може розв’язати задану систему, оскільки не може зрозуміти, що саме вимагається.

Проте розв'язати систему рівнянь Maple не може і у разі, коли, з погляду синтаксису, все задано правильно, але система рівнянь розв'язку не має. Задамо, наприклад, систему, що не має розв'язку

```
> e1:=-3*x[1]+2*x[2]-x[3]= 2;
e2:=-x[1]+x[2]+x[3] = 0;
e3:=lhs(e1)+lhs(e2)=rhs(e1)+rhs(e2)+1;
```

$$e1 := -3\,x_1+2\,x_2-x_3=2$$
$$e2 := -x_1+x_2+x_3=0$$
$$e3 := -4\,x_1+3\,x_2=3$$

{Третє рівняння задане як рівність лінійної комбінації лівих частин рівнянь 1 і 2 (`lhs(e1)` і `lhs(e2)`) величині, не рівній відповідній лінійній комбінації правих частин рівнянь 1 і 2 (`rhs(e1)` і `rhs(e2)`)}.

Спробуємо розв'язати сформульовану систему

```
> solve({e1,e2,e3},{X[1],x[2],x[3]});
```

Як і слід було чекати, Maple не знайшла неіснуючого розв'язку. Але інтелектуальної потужності системи недостатньо, щоб деякими повідомленнями інформувати користувача про відповідну ситуацію.

Ці приклади є наочним уроком, який свідчить про те, що система Maple є тим більш могутнім інструментом, чим вищий математичний рівень її користувача.

Тому розглянемо основні відомості з теорії довільних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Нехай дано систему m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 + & \cdots & +a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

Тут a_{ij}, b_i (i=1, 2,, ..., m; j=1, 2,, ..., n) – дійсні числа.

Розв'язком системи (1.1) називається сукупність значень невідомих $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, …, $x_n=\alpha_n$, при підстановці яких всі рівняння системи обертаються в тотожність. Система, що має принаймні один розв'язок, називається **сумісною**. Система, що не має жодного розв'язку, – **несумісною**.

Важливим питанням дослідження систем лінійних рівнянь є питання про сумісність даної системи, тобто про існування розв'язку. Відповідь на це питання дає теорема Кронекера-Капеллі:

Теорема Кронекера-Капеллі: Для сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи (1.1)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

дорівнював рангу розширеної матриці цієї системи, тобто $r_A=r_{AB}$, де розширена матриця

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

дістається приєднанням до матриці A стовпця вільних членів.

Отже, якщо r_A<r_{AB}, то розв'язку не існує. У випадку r_A=r_{AB} можливі два варіанти:

1. Ранг r_A рівний числу змінних n: r_A =n - в цьому випадку система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок.
2. Ранг r_A менше кількості змінних n: r_A <n - в цьому випадку система лінійних рівнянь має нескінченну кількість розв'язків.

Отже, для з'ясування сумісності системи необхідно обчислити ранги матриці системи і розширеної матриці системи. Створимо вказані матриці для системи рівнянь

```
> eq1:=-3*x[1]+2*x[2]-x[3]= 2;
eq2:=-x[1]+x[2]+x[3] = 0;
eq3:=2*x[1]+x[2]+2*x[3] = 2;
```

$$eq1 := -3\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 = 2$$

$$eq2 := -x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$eq3 := 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 2$$

```
> A:=matrix(3,3[[3,2-1],[-1,1,1],[2,1,2]]);
AB:=matrix(3,4[[3,2-1,2],[-1,1,1,0],[2,1,2,2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Відмітимо, що на основі заданих рівнянь матриці A і AB можна згенерувати програмно

```
> A:='A':A:=matrix(3,3):B:='B':B:=matrix(3,1):
for i from 1 to 3 do
    for j from 1 to 3 do
        A[i,j]:=coeff(lhs(eq||i),x[j])
    od:
    B[i,1]:=rhs(eq||i):
```

```
od:
'A'=evalm(A);'B'=evalm(B);
'AB'=concat(A,B);
```

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Наведений програмний код достатньо прозорий. Команда **coeff(p,x)** повертає коефіцієнт при **x**, де **p** - поліном від **x**. У нашому випадку **p** є лівою частиною *i*-го рівняння системи і визначається командою **lhs(eq||i)**. Права частина *i*-го рівняння системи, тобто вільний коефіцієнт b_1, визначається командою **rhs(eq||i)**. За допомогою оператора **eq||i** отримуються імена **eq1**, **eq2**, **eq3**, … в залежності від числового значення i.

Розширену матрицю одержуємо за допомогою команди **concat(A,B)**, яка повертає об'єднану матрицю з горизонтальним злиттям матриць **A** і **B**. Далі визначаємо ранги матриць **A** і **AB**. Якщо ранги не рівні, то система розв'язку не має. Якщо ж ранги рівні, то подальший порядок знаходження розв'язку такий:

1) Якщо r=n, то система має єдиний розв'язок. В цьому випадку в команді **solve** потрібно вказати всі n невідомих системи.

2) Якщо r<n, то система має нескінченну кількість розв'язків. Цей випадок є характерним для лінійного програмування і його необхідно розглянути детальніше.

Зауваження. Команда **solve** має ширше застосування, ніж розв'язання систем лінійних рівнянь. Докладніше з відомостями про будь-яку Maple-команду можна ознайомитися в довідковій системі. Для цього в командному рядку необхідно ввести знак питання і команду, що цікавить вас, а потім натиснути клавішу "Enter", наприклад

```
> ?solve
```

Після виконання цієї команди в середовищі Maple відкриється сторінка англомовної довідкової системи з інформацією про використання команди **solve**.

Випадок r<n можна розділити на два окремі:

а) всі рівняння системи **лінійно незалежні**;

б) система рівнянь **лінійно залежна**.

У випадку а) жодне з рівнянь системи не можна подати як лінійну комбінацію [9] решти рівнянь системи. При цьому обов'язково виконуватиметься нерівність m<n, тобто кількість рівнянь менше кількості невідомих. Із m лінійно незалежних рівнянь можна визначити рівно m невідомих. За ці невідомі можна взяти будь-які змінні, які розташовані в базисних стовпцях. Подібні питання краще розглядати на конкретному прикладі.

```
> restart:
eq1:=-3*x[1]+2*x[2]-x[3]+5*x[4]+3*x[5] = 35;
eq2:=-24*x[1]+16*x[2]+x[3]-8*x[4]-3*x[5] = -41;
```

$$eq1 := -3\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 + 5\,x_4 + 3\,x_5 = 35$$

$$eq2 := -24\,x_1 + 16\,x_2 + x_3 - 8\,x_4 - 3\,x_5 = -41$$

Знайдемо ранги матриці системи та розширеної матриці

```
> A:=matrix(2,5,[[-3,2,-1,5,3],[-24,16,1,-8,-3]]);
B:=matrix(2,1,[[35],[-41]]);
'rank(A)'=linalg[rank](A);
'rank(AB)'=linalg[rank](linalg[concat](A,B));
```

$$A := \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ -24 & 16 & 1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 35 \\ -41 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(A) = 2$$

$$\mathrm{rank}(AB) = 2$$

Маємо рівність $r_A = r_{AB}$, отже, згідно з теоремою Кронекера-Капеллі, система сумісна. Оскільки r_A =2, знайдеться принаймні один мінор 2–го порядку, відмінний від нуля. Оскільки рядків всього два, то вони і є базисними. Які саме змінні утворюють базисні стовпці потрібно визначати методом підбору. Наприклад, не є базисними 1–ий та 2–ий стовпці і 3–ій та 5–ий, оскільки відповідні коефіцієнти утворюють мінори, що дорівнюють нулю:

```
> matrix(2,2,[seq([coeff(lhs(eq||k),x[1]),
coeff(lhs(eq||k),x[2])],k=1..2)]):
det(evalm(%))=linalg[det](%);
matrix(2,2,[seq([coeff(lhs(eq||k),x[3]),coeff(lhs(eq|
|k),x[5])],k=1..2)]):
det(evalm(%))=linalg[det](%);
```

$$\det\left(\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -24 & 16 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Випадок, коли система лінійних рівнянь складається з лінійно-залежних рівнянь, також найнаочніше розглянути на конкретному прикладі.

Далі розглянемо систему, в якій лінійно-залежними є стовпці: 1-й і 2-й; 3-й і 5-й. Окрім того рівняння **e3**, **e4** і **e5** є лінійними комбінаціями рівнянь **e1** і **e2**.

```
> restart:
e1:=-3*x[1]+2*x[2]-x[3]+5*x[4]+3*x[5] = 35;
e2:=6*x[1]-4*x[2]-x[3]+6*x[4]+3*x[5] = 37;
e3:=3*lhs(e1)-2*lhs(e2)=3*rhs(e1)-2*rhs(e2);
e4:=2*lhs(e1)-3*lhs(e2)=2*rhs(e1)-3*rhs(e2);
e5:=2*lhs(e1)=2*rhs(e1);
```

$$e1 := -3\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 + 5\,x_4 + 3\,x_5 = 35$$

$$e2 := 6\,x_1 - 4\,x_2 - x_3 + 6\,x_4 + 3\,x_5 = 37$$

$$e3 := -21\,x_1 + 14\,x_2 - x_3 + 3\,x_4 + 3\,x_5 = 31$$

$$e4 := -24\,x_1 + 16\,x_2 + x_3 - 8\,x_4 - 3\,x_5 = -41$$

$$e5 := -6\,x_1 + 4\,x_2 - 2\,x_3 + 10\,x_4 + 6\,x_5 = 70$$

Визначимо чи сумісна дана система рівнянь. Для цього створимо матриці коефіцієнтів системи А, вільних членів В та розширену матрицю АВ і обчислимо відповідні ранги:

```
> A:='A':A:=matrix(5,5):B:='B':B:=matrix(5,1):
for i from 1 to 5 do
   for j from 1 to 5 do
     A[i,j]:=coeff(lhs(e||i),x[j])
   od:
   B[i,1]:=rhs(e||i):
od:
'A'=evalm(A);'B'=evalm(B);
'AB'=linalg[concat](A,B);
'rank(A) '=linalg[rank](A);
'rank(AB) '=linalg[rank](linalg[concat](A,B));
```

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 6 & -4 & -1 & 6 & 3 \\ -21 & 14 & -1 & 3 & 3 \\ -24 & 16 & 1 & -8 & -3 \\ -6 & 4 & -2 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 35 \\ 37 \\ 31 \\ -41 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 5 & 3 & 35 \\ 6 & -4 & -1 & 6 & 3 & 37 \\ -21 & 14 & -1 & 3 & 3 & 31 \\ -24 & 16 & 1 & -8 & -3 & -41 \\ -6 & 4 & -2 & 10 & 6 & 70 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(A) = 2$$

$$\mathrm{rank}(AB) = 2$$

Ранги матриці системи та розширеної матриці рівні, отже система сумісна, причому цей ранг дорівнює 2, тобто базисних змінних всього дві. Спробуємо розв'язати систему за допомогою стандартної команди **solve**

```
> S1=solve({e1,e2,e3,e4,e5},{x[1],x[2]});
S2=solve({e1,e2,e3,e4,e5},{x[3],x[5]});
S3=solve({e1,e2,e3,e4,e5},{});
```

$$S1 = (\ )$$

$$S2 = (\ )$$

$$S3 = (\ )$$

Як бачимо, тут Maple не відрізняє випадку грубої синтаксичної помилки користувача (в команді **solve** для **S3** не вказані змінні, які необхідно знайти) від "тоншої" помилки, пов'язаної із заданням як базисних тих змінних, які базисними насправді не є (змінні, які стоять не в базисних стовпцях), - розв'язки **S1** і **S2**.

Ранг матриці системи менший за кількість рівнянь системи, отже система рівнянь є лінійно залежною. В даному випадку необхідно відкинути лінійно залежні рівняння. Для цього можна скласти допоміжну програмку, яка дозволить визначати ранг матриці системи і ранг розширеної матриці системи для заданої системи рівнянь.

```
> Rank_Eq:=proc(EqSys::list,unknown_Var::list)
 local A,B,i,j;
 A:=matrix(nops(EqSys),nops(unknown_Var)):
 B:=matrix(nops(EqSys),1):
  for i from 1 to nops(EqSys) do
    for j from 1 to nops(unknown_Var) do
      A[i,j]:=coeff(lhs(EqSys[i]),unknown_Var[j])
    od:
    B[i,1]:=rhs(EqSys[i]):
  od:
print('A'=evalm(A),'B'=evalm(B),'AB'=linalg[concat](A
,B));
print('rank(A) '=linalg[rank](A),'rank(AB)
'=linalg[rank](linalg[concat](A,B)));
end proc:
```

Як аргументи процедури необхідно задати два списки. Перший список повинен містити лінійні рівняння, а другий список - змінні, що входять в ці рівняння.

Наведена процедура дозволяє визначити ранг матриці системи і ранг розширеної матриці системи для заданої системи рівнянь

```
> Rank_Eq([e1,e2,e3,e4,e5],[x[1],
x[2],x[3],x[4],x[5]]);
```

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 6 & -4 & -1 & 6 & 3 \\ -21 & 14 & -1 & 3 & 3 \\ -24 & 16 & 1 & -8 & -3 \\ -6 & 4 & -2 & 10 & 6 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 35 \\ 37 \\ 31 \\ -41 \\ 70 \end{bmatrix}, \quad AB=\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 5 & 3 & 35 \\ 6 & -4 & -1 & 6 & 3 & 37 \\ -21 & 14 & -1 & 3 & 3 & 31 \\ -24 & 16 & 1 & -8 & -3 & -41 \\ -6 & 4 & -2 & 10 & 6 & 70 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(A)=2,\ \mathrm{rank}(AB)=2$$

Зауваження. Відмінність наведеної процедури від стандартної команди **rank** полягає в тому, що для даної процедури вихідними даними є самі рівняння системи, в той час як для команди **rank** потрібно задавати матрицю коефіцієнтів системи.

Оскільки ранг матриці системи дорівнює 2, то з 5 рівнянь лінійно незалежні всього 2. Ці два рівняння можна знайти методом підбору за допомогою створеної процедури:

```
> Rank_Eq([e1,e5],[x[1],x[2],x[3],x[4],x[5]]);
```

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ -6 & 4 & -2 & 10 & 6 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 35 \\ 70 \end{bmatrix}, AB=\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 5 & 3 & 35 \\ -6 & 4 & -2 & 10 & 6 & 70 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}(A) = 1, \operatorname{rank}(AB) = 1$$

Ранг матриці системи двох лінійних рівнянь рівний 1. Це означає, що рівняння лінійно залежні. Дійсно, рівняння **e5** отримано множенням на 2 рівняння **e1**.

Вибираємо іншу пару рівнянь

```
> Rank_Eq([e1,e4],[x[1],x[2],x[3],x[4],x[5]]);
```

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ -24 & 16 & 1 & -8 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 35 \\ -41 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 5 & 3 & 35 \\ -24 & 16 & 1 & -8 & -3 & -41 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rank}(A) = 2, \operatorname{rank}(AB) = 2$$

Ми отримали систему двох лінійно незалежних рівнянь з 5-ма невідомими. Тепер необхідно вибрати дві змінні за базисні. Оскільки ранг матриці рівний 2, то обов'язково знайдуться дві базисні змінні, але це не означає, що завжди базисними є будь-які дві змінні. Так, наприклад, для даної системи рівнянь змінні x_1, x_2 не є базисними, оскільки визначник, складений з коефіцієнтів при цих змінних, дорівнює нулю. Дійсно

```
> 'det'*matrix([[-3,2],[-24,16]])=
linalg[det](matrix([[-3,2],[-24,16]]));
```

$$det \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -24 & 16 \end{bmatrix} = 0$$

Якщо все ж таки спробувати "примусити" Maple розв'язати систему при неправильному виборі базисних змінних, Maple просто не виведе жодного повідомлення:

```
> solve({e1,e4},{x[1],x[2]});
```

Змінні x_2, x_3 можуть бути вибрані за базисні, оскільки визначник, складений з коефіцієнтів при цих змінних, відмінний від нуля. Дійсно

```
> 'det'*matrix([[2-
1],[16,1]])=linalg[det](matrix([[2-1],[16,1]]));
```

$$det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 16 & 1 \end{bmatrix} = 18$$

Тепер ми можемо легко отримати шуканий загальний розв'язок системи рівнянь

```
> Sols1:=solve({e1,e4},{x[2],x[3]}):
Sols1[1];Sols1[2];
```

$$x_3 = -\frac{107}{3} + \frac{16}{3} x_4 + 3\, x_5$$

$$x_2 = \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}x_4$$

Слід відзначити, якщо при використанні команди **solve** перерахувати всі рівняння, у тому числі і лінійно-залежні, і задати всі змінні, то Maple самостійно знайде змінні, які можна взяти за базисні:

```
> S4:=solve({e1,e2,e3,e4,e5},{seq(x[k],k=1..5)}):
for i to nops(S4) do
  S4[i]
od;
```

$$x_4 = -9\,x_1 + 6\,x_2 + 2$$

$$x_3 = -48\,x_1 + 32\,x_2 - 25 + 3\,x_5$$

$$x_1 = x_1$$

$$x_2 = x_2$$

$$x_5 = x_5$$

В даному випадку Maple за базисні вибрав змінні x_3, x_4. Проте, якщо знадобиться отримати загальний розв'язок системи при іншому виборі базисних змінних, необхідно вміти задавати ці змінні правильно:

```
> S4:=solve({e1,e2,e3,e4,e5},{x[2],x[4]}):
S4[1];S4[2];
```

$$x_4 = \frac{107}{16} + \frac{3}{16}x_3 - \frac{9}{16}x_5$$

$$x_2 = \frac{3}{2}x_1 + \frac{25}{32} + \frac{1}{32}x_3 - \frac{3}{32}x_5$$

Наведені в цьому розділі відомості знадобляться нам для викладення симплекс-методу розв’язання задач лінійного програмування.

2. ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Книг, що присвячені лінійному програмуванню, за останні п'ятдесят років видана велика кількість. Розраховані на різні категорії читачів, вони розрізняються як за характером і стилем викладення, так і за рівнем строгості. Методи розв'язання задач лінійного програмування базуються на фундаментальному математичному апаратові і ефективно працюють при будь-якій кількості невідомих. Багато програмних додатків мають команди, за допомогою яких легко видають шукану відповідь за введеними вхідними даними. Звичайно, користуватися готовим програмним продуктом можна і не вникаючи в зміст реалізованих алгоритмів, проте автор поділяє думку тих фахівців, які вважають, що зрозуміти ключові ідеї, на підставі яких будуються алгоритми розв'язання, не тільки корисно, але й необхідно. Цей посібник відрізняється від багатьох інших саме спробою застосування інформаційних технологій для уникнення рутинних обчислень та зосередження уваги на фундаментальних поняттях та ключових ідеях алгоритмів розв'язання задач лінійного програмування. Таке розуміння дасть фахівцю більше свободи для аналізу незрівнянно складніших реальних обставин, де вивчена раніше проблема виявляє себе лише як одна з багатьох частин.

Далеко не все сказане в цьому розділі підкріплюватиметься наведенням доказів (допитливий читач, при бажанні, зможе знайти строгі обгрунтування зверненням до деяких з книг із списку літератури)

2.1. Приклади задач лінійного програмування

Задачі лінійного програмування, що наведені в даному посібнику, як і в багатьох інших, вимушено спрощені і мінімізовані. В реальному житті моделі лінійного програмування можуть містити тисячі змінних і обмежень.

Задача І. Визначення оптимального плану випуску продукції (використання ресурсів з найбільшим прибутком).

Нехай деяке підприємство випускає продукцію заданого асортименту. Фіксованими та відомими є затрати певного виду ресурсів на випуск одного виробу зі вказаного асортименту, а також повні об'єми наявних ресурсів. Відомий прибуток, що отримується підприємством при виготовленні та реалізації одиниці продукції кожного виду.

Підприємству потрібно скласти такий план випуску продукції, який би був технологічно здійсненним за наявних ресурсів всіх видів і в той же час приносив найбільший прибуток.

Конкретним прикладом подібної задачі є задача, викладена нижче.

Задача про використання сировини з найбільшим прибутком.

Для виготовлення продукції двох видів $П_1$ та $П_2$ використовуються чотири види сировини S_i ($i=\overline{1,4}$), запаси якої обмежені. Їх кількість і необхідність для виготовлення одиниці кожного виду продукції p_{ij} в умовних одиницях відомі: S_1=16 у.о., S_2=12 у.о., S_3=14 у.о., S_4=21 у.о.; p_{11}=4 у.о., p_{12}=2 у.о., p_{21}=2 у.о., p_{22}=2 у.о., p_{31}=3 у.о., p_{32}=0 у.о., p_{41}=0 у.о., p_{42}=3 у.о. Прибуток від реалізації одиниці продукції $П_1$ складає 7 грн., продукції $П_2$ - 6 грн. Визначити оптимальний план випуску продукції, при якому прибуток буде максимальним.

Для наочності поставленої задачі подамо її дані у вигляді таблиці:

Вид продукції / Запаси сировини	$П_1$	$П_2$
S_1=16	p_{11}=4	p_{12}=2
S_2=12	p_{21}=2	p_{22}=2
S_3=15	p_{31}=3	p_{32}=0
S_4=21	p_{41}=0	p_{42}=3
Прибуток від одиниці продукції	7	6

Знайти оптимальний план випуску продукції означає визначити кількість продукції кожного виду, яка випускається, так, щоб прибуток від її реалізації був найбільшим.

Запишемо математичну модель задачі. Позначимо через x_1 та x_2 - кількість продукції, відповідно, кожного виду, тоді за умовою задачі прибуток z від реалізації буде дорівнювати:

$$z=7x_1 + 6x_2. \tag{2.1}$$

Такий вигляд має цільова функція поставленої задачі.

Збільшення аргументів x_1 та x_2 приведе до збільшення прибутку z, але їх збільшення обмежене запасами сировини. Тому на значення x_1 та x_2 потрібно накласти такі обмеження:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 0x_2 \le 14, \\ 0x_1 + 3x_2 \le 21. \end{cases} \tag{2.2}$$

Необхідно відзначити, що крім умов (2.2) невідомі x_1 та x_2 повинні задовольняти вимоги - бути невід’ємними, тобто $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Знаходження найбільшого значення лінійної функції (2.1) за умов (2.2), накладених на її аргументи, і є математичною моделлю поставленої задачі.

Задача про використання ресурсів з найменшими затратами

Два види добового раціону корму для тварин включають три компоненти:

А - не менше 80 од., В - не менше 90 од., С - не менше 40 од. Кожний кілограм корму першого виду містить: А - 4 од., В - 2 од., С - 1 од.; другого виду - відповідно А - 2 од., В - 3 од., С - 2 од. Скільки корму кожного виду на добу треба витратити з найменшими затратами, якщо кілограм корму першого виду коштує 20 грн., другого - 15 грн. (за умови виконання заданого раціону)?

Подамо дані задачі у вигляді таблиці:

Вид корму / Компоненти корму, од.	I	II
A=80	4	2
B=90	2	3
C=40	1	2
Вартість 1 кг корму, грн.	20	15

Позначимо через x_1 та x_2 - кількість кілограмів добової витрати корму першого і другого видів, тоді вартість буде подана такою цільовою функцією

$$z=20x_1 + 15x_2. \tag{2.3}$$

Згідно з вимогами раціону необхідно виконання умов:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geq 80, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 90, \\ 1x_1 + 2x_2 \geq 40. \end{cases} \tag{2.4}$$

Крім цих обмежень вважаємо $x_1 \geq 0$ та $x_2 \geq 0$.

Таким чином, поставлена задача математично може бути сформульована так: із системи нерівностей (2.4) знайти значення x_1 та x_2, при яких функція (2.3) має найменше значення.

Зауваження: Порівнюючи розглянуті приклади двох задач, ми бачимо, що оптимальні значення їхніх цільових функцій протилежні за змістом: в першій визначалося її найбільше значення, а в другій - найменше; знаки нерівностей у системах обмежень також протилежні.

В даному розділі ми розглянули змістовні задачі, що приводять до моделей з двома змінними. Такі моделі мають наочну геометричну інтерпретацію та можуть бути розв’язані графічним методом. Узагальнення графічного методу розв'язання приводить до алгебричного симплекс-методу (підрозділ 2.4).

2.2. Геометричне тлумачення задач лінійного програмування з двома невідомими та графічний метод їх розв'язання

2.2.1 Теоретичні основи графічного методу

Розглянемо випадок, коли цільова функція залежить від двох аргументів

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2, \qquad (2.5)$$

і в системі обмежень також містяться тільки дві змінні:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}, \ m \in N \qquad (2.6)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \qquad (2.7)$$

Потрібно знайти найбільше або найменше значення z за умови, що її аргументи задовольняють умови (2.6), (2.7).

Відомо, що геометрична сукупність точок на площині, координати, яких задовольняють систему лінійних нерівностей, утворюють опуклу область.

Область називається **опуклою**, якщо разом з будь-якими двома точками цієї області їй належать і всі точки відрізка, який з'єднує вказані дві точки. На рис. 1 показані приклади опуклої та неопуклої областей.

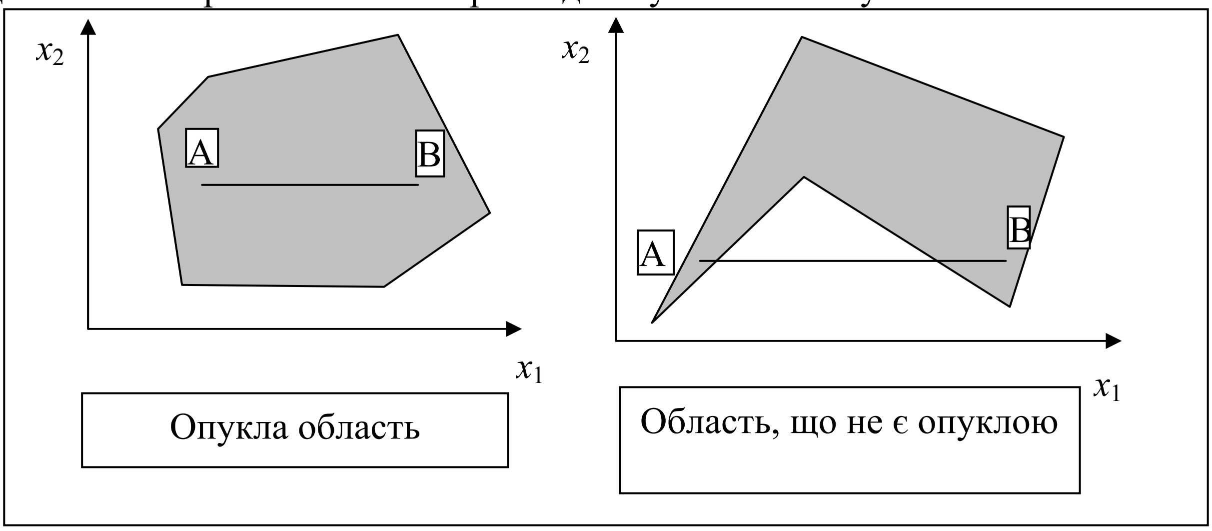


Рис. 1

На рис. 2. зображено **обмежену** та **необмежену** опуклі області, що задаються системою лінійних нерівностей. Якщо система лінійних нерівностей несумісна, то їй відповідає пуста область.

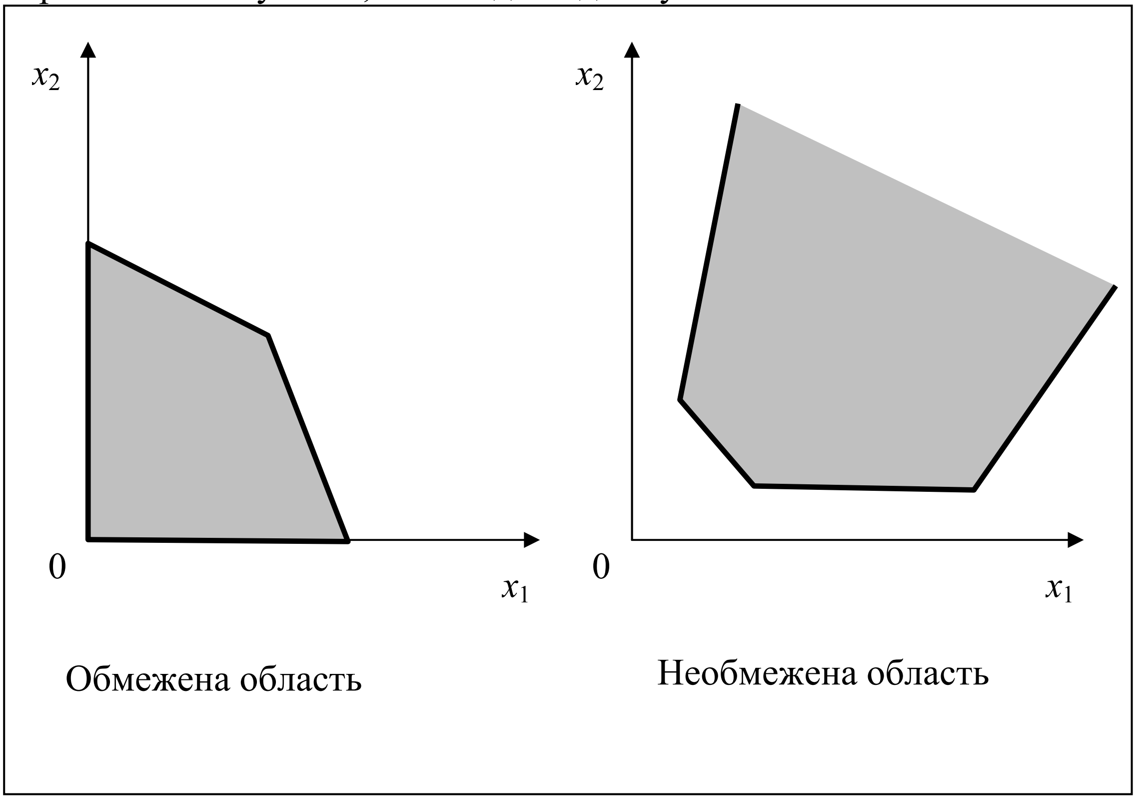


Рис. 2

Отже, опукла область, що визначається системою обмежень задачі лінійного програмування, називається **областю допустимих розв'язків**, або **областю допустимих значень**. У випадку, коли область допустимих значень є непустою та обмеженою, тобто є опуклим многокутником, розв'язок задачі лінійного програмування завжди існує. Якщо область допустимих значень – пуста, то і розв'язку задачі лінійного програмування не існує. У випадку, коли область допустимих значень є непустою та необмеженою, розв'язок задачі лінійного програмування може існувати або не існувати.

Поставленій задачі можна дати таке геометричне тлумачення: на площині Ox_1x_2 серед множини точок області допустимих значень x_1 та x_2, знайти таку, в якій функція (2.5) мала б найбільше (найменше) значення. Фактично має місце задача про найбільше (найменше) значення функції двох змінних в деякій області.

Як відомо, ці значення можуть досягатися або в екстремальних точках в середині області, або на її межі. Необхідні умови екстремуму функції декількох змінних полягають у рівності нулю частинних похідних цієї функції.

Для лінійної функції (2.5) частинні похідні відмінні від нуля в будь-якій точці:

$$z'_{x_1} = \frac{\partial\left(c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2\right)}{\partial x_1} = c_1 \neq 0, \quad z'_{x_2} = \frac{\partial\left(c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2\right)}{\partial x_2} = c_2 \neq 0.$$

Тому оптимальне значення функції z досягається на межі області. (Випадок, коли одночасно $c_1=c_2=0$ очевидний і нецікавий).

З'ясуємо, чи можливе у нашому випадку існування умовних екстремумів вздовж межі області. Розглянемо межу області, що визначається i-тою нерівністю:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i.$$

Розв'яжемо цю рівність відносно x_2

$$x_2 = -\frac{a_{i1}}{a_{i2}}x_1 + \frac{b_i}{a_{i2}}$$

та підставимо останній вираз у цільову функцію

$$z(x_2 = -\frac{a_{i1}}{a_{i2}}x_1 + \frac{b_i}{a_{i2}}) = c_1x_1 + c_2 \cdot \left(-\frac{a_{i1}}{a_{i2}}x_1 + \frac{b_i}{a_{i2}}\right) = \left(c_1 - \frac{c_2 \cdot a_{i1}}{a_{i2}}\right) \cdot x_1 + \frac{c_2 \cdot b_i}{a_{i2}}.$$

Отримана рівність свідчить про те, що лінійна функція двох аргументів вздовж межі, що задана лінійним рівнянням, перетворюється в лінійну функцію одного аргументу. Очевидно, що

$$\frac{\partial z\left(x_2 = -\frac{a_{i1}}{a_{i2}}x_1 + \frac{b_i}{a_{i2}}\right)}{\partial x_1} = c_1 - \frac{c_2 \cdot a_{i1}}{a_{i2}} = const.$$

Тобто, умовний екстремум відсутній. Отже, якщо цільова функція має оптимальні значення, то ці значення досягаються обов'язково в одній із кутових точок області допустимих значень. Це надзвичайно важливий висновок, який залишається справедливим і при збільшенні кількості невідомих і на якому базується аналітичний спосіб розв'язання задачі лінійного програмування - симплекс-метод.

В результаті можна було б запропонувати таку схему розв'язання задачі:

1. Будується область допустимих значень аргументів на площині Ox_1x_2, тобто множина точок, координати яких задовольняють систему нерівностей (2.6), (2.7). Якщо область обмежена, то дістанемо многокутник в першій чверті.
2. Визначаємо координати всіх вершин многокутника. Оскільки будь-яка вершина є точкою перетину двох прямих, то для визначення координати одної з вершин плоского многокутника необхідно розв'язати систему двох лінійних рівнянь. Далі визначаємо значення функції z у кожній вершині і знаходимо ту точку, де функція має оптимальне (найбільше або найменше) значення.

Зауважимо тут, що подібний перебір вершин і покладений в основу ідеї симплекс-методу, про який мова піде нижче.

При графічному методі розв'язання задачі лінійного програмування існує більш красивий та ефективний спосіб визначення потрібної точки, ніж простий перебір вершин.

Скористаємося поняттям градієнта функції. Згадаємо, що градієнт функції $z=f(x_1, x_2)$ в точці (x_{1A}, x_{2A}) є вектор, координати якого дорівнюють значенням частинних похідних в даній точці. Напрям градієнта визначає той напрям зміни координат (x_1, x_2), в якому функція має найбільшу швидкість зростання (в зворотному напрямі, очевидно, - спадання). Для даної цільової функції z, що задана рівнянням (2.5), градієнт має координати:

$$z'_{x_1}=c_1 \text{ і } z'_{x_2}=c_2 \text{ і } \overrightarrow{gradz}=(c_1, c_2). \tag{2.8}$$

Оскільки градієнт є тут постійним вектором, то найбільша швидкість зростання (спадання) буде відбуватися також в одному й тому ж самому напрямі для будь-якої точки області допустимих розв'язків. Відомо, що швидкість зміни функції в напрямі, ортогональному градієнту, дорівнює нулю. Оскільки градієнт є сталим для будь-якої точки області допустимих розв'язків, то вздовж будь-якої прямої, ортогональної градієнту, значення цільової функції будуть незмінні. Звісно, значення цільової функції у будь-якій точці цієї прямої будуть зростати при переміщенні прямої параллельно самій собі у напрямі градієнта.

Тепер легко визначити вершину многокутника, де функція z має найбільше (найменше) значення. Для цього побудуємо на площині Ox_1x_2 градієнт з координатами (c_1, c_2) і пряму M_1M_2 (рис. 3), перпендикулярну до градієнта. Цю пряму називають **опорною**. Переміщуючи опорну пряму паралельно самій собі в напрямі градієнта по області, обмеженій контуром многокутника, в точках її перетину з контуром, ми дістанемо точку з координатами (x_{1C}, x_{2C}), де функція матиме найбільше значення на виході із області в точці с:

$$z_{max}=z_c=c_1x_{1C}+c_2x_{2C}.$$

У зворотному напрямі функція матиме найбільшу швидкість спадання. Тому її найменше значення буде в тій вершині контуру, де опорна пряма входитиме в область:

$$z_{min}=z_A=c_1x_{1A}+c_2x_{2A}.$$

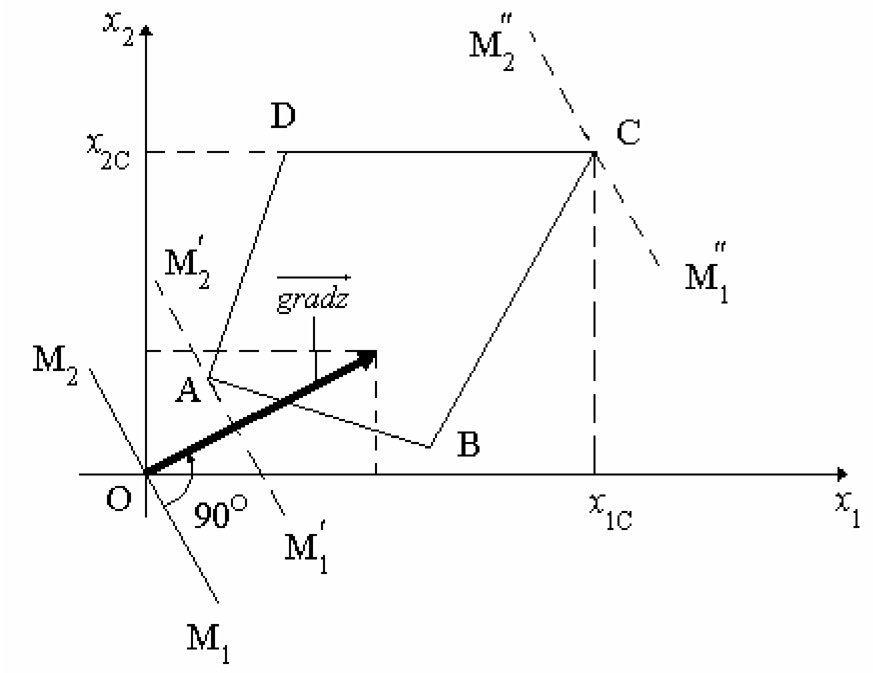


Рис. 3

Проілюструємо геометричний метод на прикладах вище викладених перших двох задач.

Приклад 1. Знайти найбільше значення функції $z= 7x_1 + 6x_2$ при умові, що її аргументи зв'язані співвідношеннями (див. задачу про використання сировини з найбільшим прибутком, п. 2.1) :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \qquad \le 5, \\ \qquad x_2 \le 7; \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\text{для } x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{2.10}$$

Розв'язання.

1. Будуємо область допустимих розв'язків.

Межі цієї області є прямі, рівняння яких дістаємо тоді, коли в нерівностях системи (2.9) та умовах невід'ємності змінних (2.10) знаки нерівностей замінені на знаки точних рівностей.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 \qquad = 5, \\ \qquad x_2 = 7, \\ x_1 \qquad = 0, \\ \qquad x_2 = 0, \end{cases}$$

Накреслимо ці прямі. Кожна з відповідних нерівністей виділяє певну півплощину. Щоб визначити, яка півплощина задовольняє дану нерівність, необхідно перевірити чи задовольняють цю нерівність координати точки початку координат (0, 0) (або якоїсь іншої точки). Наприклад, підставимо координати точки початку координат у нерівність $2x_1 + x_2 \le 8$. Матимемо: $2 \cdot 0 + 0 = 0 \le 8$. Тобто, нерівність задовольняється. Це означає, що дана нерівність визначає ту півплощину, якій належить точка початку координат. Цей факт зручно вказувати стрілками (рис. 4):

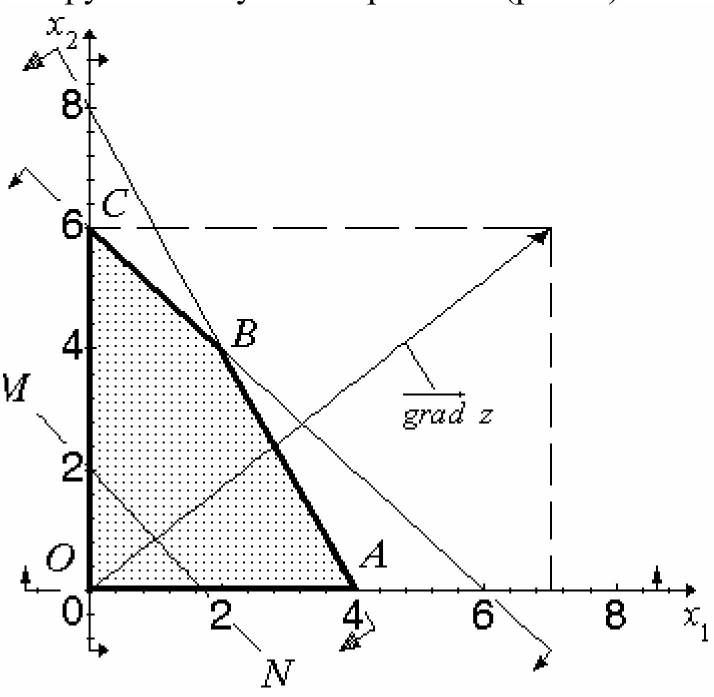


Рис. 4

На рис. 4 область допустимих значень показана затемненою і являє собою многокутник OABC. Цей многокутник є замкненим (точки межі належать області), опуклим та обмеженим.

2. Будуємо градієнт функції z:

$$\overrightarrow{grad}\ z = (7, 6).$$

Оскільки нам потрібен тільки його напрям, то для зручності на рисунку його можна зобразити в масштабі.

3. Накреслимо опорну пряму MN.

Це можна зробити двома способами: а) накреслити за допомогою, наприклад, транспортира, пряму, яка ортогональна градієнту та перетинає область допустимих значень; б) накреслити пряму, що задана рівнянням

$$7x_1 + 6x_2 = c, \qquad (2.11)$$

де значення сталої c підбирається так, щоб пряма перетинала область допустимих значень. Ліва частина рівняння прямої дорівнює цільовій функції, отже, вздовж цієї прямої значення цільової функції будуть дорівнювати сталій *c*.

Пересуваючи опорну пряму паралельно самій собі у напрямі градієнта по області OABC, знайдемо точку виходу її з області - точку B: $z_{max}=z_B$.

4. Точка B є точкою перетину двох прямих: $2x_1+x_2=8$ та $x_1+x_2=6$. Щоб знайти координати цієї точки, потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=8, \\ x_1+x_2=6. \end{cases}$$

В результаті дістанемо: $x_1=2$, $x_2=4$. Тоді $z_{max}=(7x_1+6x_2)\Big|_{(2,4)}=38$.

Зауваження. Цей же результат ми дістали б, обходячи вершини многокутника O, A, B і C, що тільки б ускладнило розв'язання задачі.

Наведемо приклад розв'язання цієї ж задачі в середовищі Maple.

2.2.2 Розв'язання задач лінійного програмування графічним методом в середовищі Maple

```
restart:
> z:= 7*x[1] + 6*x[2]:
'z'=z,`   ->`*max;
```

$$z=7\,x_1+6\,x_2, \quad {->}\ max$$

Змінній `linear_constraints` надаємо значення списку, елементами якого є нерівності системи обмежень.

```
> linear_constraints:=[2*x[1]+x[2]<=8, x[1]+x[2]<=6,
x[1]-0*x[2]<=5, x[2]<=7, x[1]>=0, x[2]>=0]:
```

Для більш наочного виведення на дисплей - кожна нерівність в окремому рядку - застосуємо оператор організації циклу

```
> for i from 1 to nops(linear_constraints) do
    op(i,linear_constraints)
od;
```

$$2\,x_1+x_2\le 8$$

$$x_1+x_2\le 6$$

$$x_1\le 5$$

$$x_2\le 7$$

$$0\le x_1$$

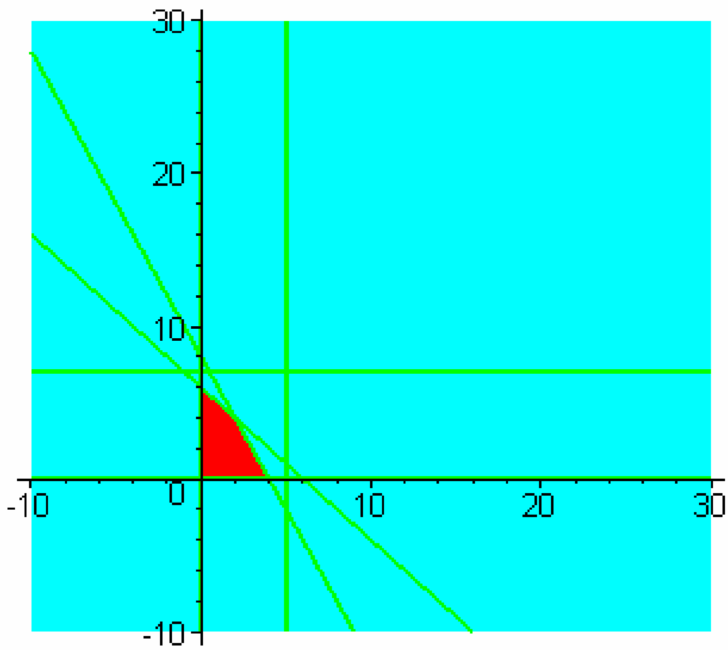
$$0\le x_2$$

Розв'язання. Будуємо область допустимих розв'язків. Як показує практика, цей етап графічного методу розв'язання двовимірної задачі лінійного програмування викликає найбільші технічні труднощі для студентів. В Maple цю роботу може виконати команда **inequal** пакета **plots**. Задаємо межі діапазонів виведення графіка вздовж осей координат

```
> x1:=-10:x2:=30:
y1:=-10:y2:=30:
```

Будуємо область, що обмежена заданими нерівностями

```
> g10:=plots[inequal]( {op(linear_constraints)},
x[1]=x1..x2, x[2]=y1..y2,
optionsfeasible=(color=red),optionsopen=(color=blue,t
hickness=2),
optionsclosed=(color=green, thickness=2),
optionsexcluded=(color=cyan) ): g10;
```

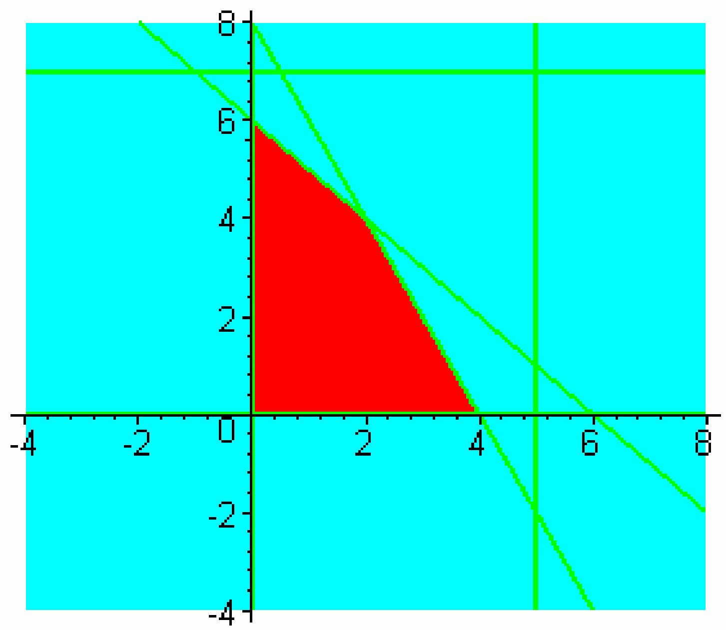


Допустима область виділена на графіку темним кольором. При виконанні команди в середовищі Maple ця область матиме червоний колір згідно з опціями команди **inequal**.

В прийнятому діапазоні змінних x_1 та x_2 допустима область може виявитися або надто малою, як у нашому випадку, або не поміститися на виведеному графіку. В таких випадках потрібно змінити межі діапазонів виведення графіка вздовж осей координат

```
> x1:=-4:x2:=8: y1:=-4:y2:=8:
```

і знову виконати команду побудови графіка:



Далі будуємо градієнт цільової функції та перпендикулярну до нього опорну лінію як рівняння прямої, що проходить через задану точку $\left(x_1^{\text{д}}, x_2^{\text{д}}\right)$

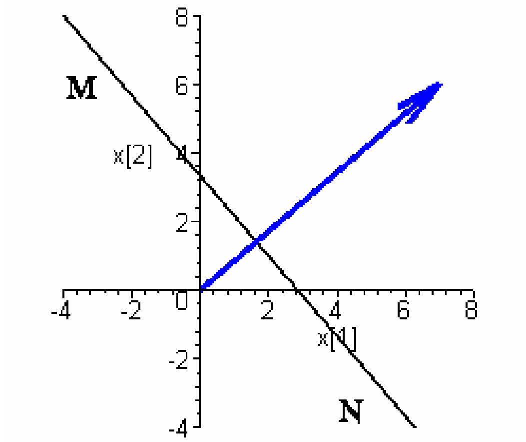
$$x_2 = x_2^{\text{д}} - \left(\frac{c_1}{c_2}\right) \cdot \left(x_1 - x_1^{\text{д}}\right).$$

Очевидно, що області допустимих значень належить т. (2, 1), коефіцієнти цільової функції c_1=7, c_2=6, отже рівняння опорної лінії можемо записати у вигляді x_2=1-(7/6)(x_1-2). Для побудови градієнта автором створена допоміжна процедура `my_arw(x,y,l,w)`, яка формує вираз для побудови радіус-вектора точки (x, y).

```
> my_arw:=(x,y,l,w)->if
add(type(args[k],numeric),k=1..nargs)=4*true then [[0,
0], [x, y]], [[x-x*l-y*l*w, -(-y^2+y^2*l-
x^2+x^2*l+x*(x-x*l-y*l*w))/y], [x, y]], [[x-x*l+y*l*w,
-(-y^2+y^2*l-x^2+x^2*l+x*(x-x*l+y*l*w))/y], [x, y]]
fi:
```

Параметри процедури визначають довжину та ширину стрілочки вектора на графіку.

```
> c1:=7:c2:=6:xd:=2:yd:=1:
g20:=plot([my_arw(c1,c2,0.15,0.2),yd-(c1/c2)*(x[1]-
xd)],x[1]=x1..x2,
x[2]=y1..y2,color=[blue$3,green],thickness=[4$3,2],
scaling=CONSTRAINED):
g30:=PLOT(TEXT([-6,9],
'M',ALIGNLEFT,FONT(TIMES,ROMAN,14)), TEXT([8,-8],
'N',ALIGNLEFT,FONT(TIMES, ROMAN,14))):
plots[display]([g20,g30],scaling=CONSTRAINED);
```

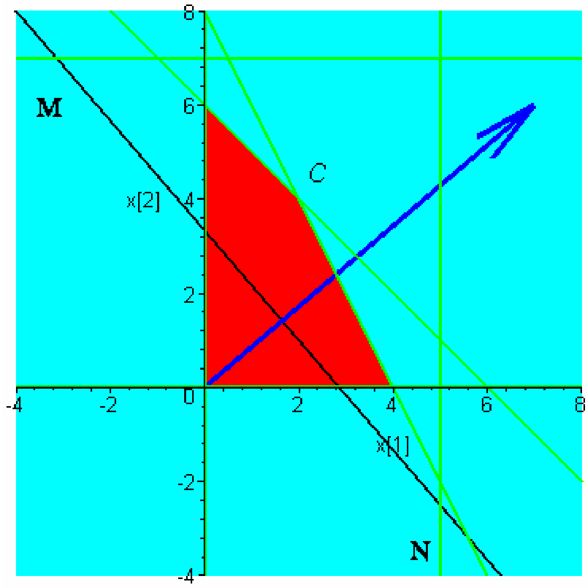


Для отримання графіків використані найпоширеніша стандартна команда побудови графіків **plot** та команда **display** пакета **plots** - для суміщення на одному графіку зображень, що згенеровані різними графічними командами. Більш детальну інформацію про ці команди можна отримати в довідковій системі Maple. Команда **PLOT** використана для нанесення на графік буквених позначень.

Зауваження. Команди **plot** та **PLOT** – різні, система Maple чутлива до регістра.

Суміщаємо графіки області допустимих значень, опорної лінії MN та градієнта на один графік. Як видно із наступного графіка опорна лінія перетинає область допустимих значень, чого ми і прагнули. Для зсуву опорної прямої паралельно самій собі у напрямі градієнта в даній задачі потрібно вибрати іншу точку $\left(x_1^{д}, x_2^{д}\right)$. Візуально крайньою точкою на виході із області допустимих значень уявляється т. C: точка перетину прямих $2x_1 + x_2 = 8$ та $x_1 + x_2 = 6$.

```
> g40:=PLOT(TEXT([2.6,4.6],'C',ALIGNLEFT,
FONT(TIMES,ITALIC,14))):
plots[display]([g10,g20,g30,g40],scaling=CONSTRAINED);
```



Координати т. С знаходимо розв’язанням системи двох лінійних рівнянь

```
> solve({2*x[1]+1*x[2]=8, x[1]+ x[2]=6},{x[1],x[2]});
```

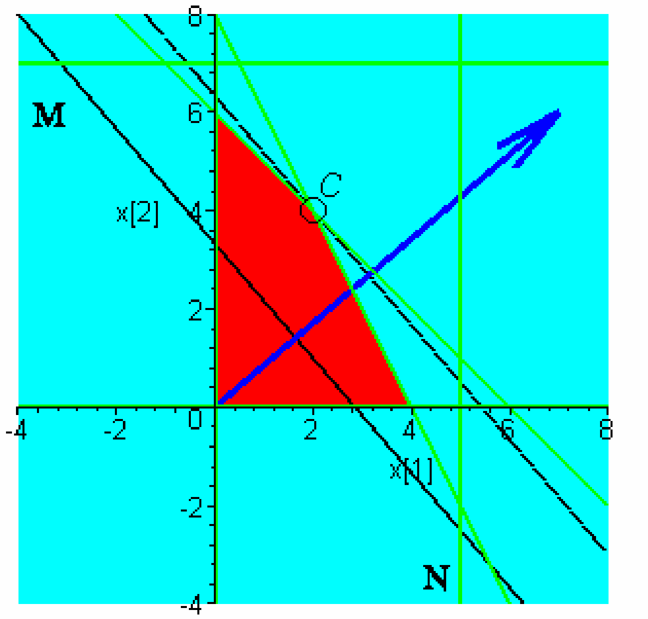
$$\{x_1 = 2, x_2 = 4\}$$

Створюємо графік опорної лінії, яка проходить через т. С, та виділяємо цю точку на графіку круглим символом.

```
xd:=2:yd:=4:
g50:=plot([[[xd,yd]],yd-(c1/c2)*(x[1]-xd)],x[1]=x1..x2,x[2]=y1..y2,
color=black,style=[point,line],symbol=circle,symbolsize=25,linestyle=3, thickness=2,scaling=CONSTRAINED):
```

За допомогою опції `style=[point,line]` будується точка з координатами `[xd,yd]` у вигляді круглого символа (`symbol=circle`) величиною `symbolsize=25` та опорна пряма, що зображається штриховою лінією (`linestyle=3`) певної товщини (`thickness=2`). Колір символа та лінії – чорний (`color=black`). Опція `scaling=CONSTRAINED` задає рівний масштаб по обох координатних осях.

```
> plots[display]([g10,g20,g30,g40,g50]);
```



Як видно з побудованого графіка т. С дійсно є крайньою точкою перетину з опорною прямою на виході із області допустимих значень. Отже, оптимальним розв’язком є x_1=2, x_2=4. Найбільше значення цільової функції

```
> 'z' [max] =subs(x[1]=2,x[2]=4,z);
```

$$z_{max} = 38$$

Конструкція `'z'` дозволяє отримати ім’я змінної, а не вираз, який ця змінна позначає.

2.3. Загальна постановка та форми запису задач лінійного програмування

Загальна задача лінійного програмування.

Задачам лінійного програмування можна надавати різних форм запису: загальної, стандартної, канонічної. Типовою є ситуація, коли змістовна задача формулюється в стандартній або в загальній формі, а для застосування математичного методу її розв’язання перетворюється в канонічну форму запису.

В **розгорнутому вигляді загальна задача лінійного програмування** має такий вигляд.

Знайти найбільше (найменше) значення лінійної функції

$$z(x_1, x_2,\ldots, x_n)=c_1\cdot x_1 + c_2\, x_2 + \ldots + c_n\cdot x_n \qquad (2.3.1)$$

за умови

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n \le b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n \le b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{k1}\cdot x_1 + a_{k2}\cdot x_2 + \ldots + a_{kn}\cdot x_n \le b_k \end{cases}, \qquad (2.3.2)$$

$$\begin{cases} a_{(k+1)1}\cdot x_1 + a_{(k+1)2}\cdot x_2 + \ldots + a_{(k+1)n}\cdot x_n = b_{k+1} \\ a_{(k+2)1}\cdot x_1 + a_{(k+2)2}\cdot x_2 + \ldots + a_{(k+2)n}\cdot x_n = b_{k+2} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}, \qquad (2.3.3)$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ldots,\ x_l\ge 0,\ 0\le l\le n. \qquad (2.3.4)$$

де a_{ij}, b_i, c_j $\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ – задані сталі величини.

Функція (2.3.1) називається **цільовою**, оскільки метою (ціллю) задачі є знаходження її найбільшого (найменшого) значення.

Співвідношення (2.3.2) - (2.3.4) називаються **обмеженнями** задачі, оскільки накладають певні обмеження на можливі значення невідомих x_j, $j=\overline{1,n}$.

Будь-який розв’язок системи обмежень (2.3.2) - (2.3.4) називається **допустимим розв’язком** (або **планом**).

Допустимий $\boldsymbol{X}^*=\left(x_1^*, x_2^*,\ldots,x_n^*\right)$, при якому цільова функція задачі (2.3.1) приймає своє найбільше (найменше) значення, називається **оптимальним розв’язком**.

В загальній задачі частина обмежень може бути заданою у вигляді нерівностей типу (2.3.2), а решта обмежень - у вигляді строгих рівностей (2.3.3). Умови невід’ємності (2.3.4) можуть поширюватися не на всі змінні.

Зауваження. Якщо серед обмежень зустрічаються нерівності типу "$\geq$", то множенням обох частин нерівності на -1 вона обертається в нерівність типу "$\leq$": помножимо обидві частини нерівності $-2x_1+5x_2\geq 20$ на -1, дістанемо еквівалентну нерівність $2x_1-5x_2\leq -20$.

Запишемо **загальну задачу лінійного програмування в компактному вигляді**.

Знайти найбільше (найменше) значення лінійної функції

$$z(x_1, x_2,\ldots, x_n)=\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \tag{2.3.5}$$

за умови

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \quad i=\overline{1,k}, \tag{2.3.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i=\overline{k+1,m} \tag{2.3.7}$$

$$x_j\geq 0, \; j=\overline{1,l}, \qquad l \leq n. \tag{2.3.8}$$

Стандартна (або **симетрична**) **задача лінійного програмування**: частинний випадок загальної, яка полягає в знаходженні найбільшого значення цільової функції (2.3.1) за умови $k=m$ і $l=n$. В **розгорнутому** вигляді матимемо:

Знайти

$$z(x_1, x_2,\ldots, x_n)=c_1\cdot x_1 + c_2\, x_2 + \ldots + c_n\cdot x_n \rightarrow \quad \max \tag{2.3.9}$$

за умови

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n \leq b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n \leq b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n \leq b_m \end{cases}, \tag{2.3.10}$$

$$x_1\geq 0, x_2\geq 0,\ldots, x_m\geq 0. \tag{2.3.11}$$

Стандартна задача лінійного програмування в компактному вигляді: знайти

$$z(x_1, x_2,\ldots, x_n)=\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \rightarrow \quad \max \tag{2.3.12}$$

за умови

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \quad i=\overline{1,m}, \tag{2.3.13}$$

$$x_j\geq 0, \; j=\overline{1,n}. \tag{2.3.14}$$

Зауваження. З якої причини розглянута форма запису називається симетричною стає зрозумілим після розгляду взаємно двоїстих задач лінійного програмування [26, 36].

Канонічна задача: частинний випадок загальної, яка полягає в знаходженні найбільшого значення цільової функції (2.3.1) за умови k=0 і l=n. В **розгорнутому** вигляді матимемо:

Знайти

$$z(x_1, x_2,\ldots, x_n)=c_1\cdot x_1 + c_2\, x_2 + \ldots + c_n\cdot x_n \rightarrow \max \tag{2.3.15}$$

за умови

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}, \tag{2.3.16}$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ldots,\ x_n\geq 0. \tag{2.3.17}$$

Канонічна задача лінійного програмування в компактному вигляді: Знайти

$$z(x_1, x_2,\ldots, x_n)=\sum_{j=1}^{n} c_j\cdot x_j \rightarrow \max \tag{2.3.18}$$

за умови

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j = b_i,\quad i=\overline{1,m}, \tag{2.3.19}$$

$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n}. \tag{2.3.20}$$

Вказані три форми задачі лінійного програмування еквівалентні, оскільки за допомогою нескладних перетворень можна переходити від одної форми запису задачі до іншої. Існують прості стандартні **прийоми переходу від загальної або стандартної задачі лінійного програмування до канонічної**:

1. Для того, щоб від обмеження-нерівності типу

$$a_{i1}\cdot x_1 + a_{i2}\cdot x_2 + \ldots + a_{in}\cdot x_n \leq b_i$$

перейти до строгої рівності, достатньо в ліву частину нерівності ввести **додаткову невід'ємну невідому** $x_{n+i}\geq 0$:

$$a_{i1}\cdot x_1 + a_{i2}\cdot x_2 + \ldots + a_{in}\cdot x_n + x_{n+i} = b_i$$

і для збереження справедливості формальних записів вважати, що додаткові змінні входять в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами.

2. Змінні, для яких не виконується умова невід'ємності, формально замінюються різницею двох невід'ємних змінних, що вводяться додатково:

$$x_r = x_r^{'} - x_r^{''}, \quad x_r^{'} \ge 0, x_r^{''} \ge 0.$$

3. Задача знаходження найбільшого значення цільової функції $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ еквівалентна задачі знаходження найменшого значення функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = - z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. І, навпаки, якщо найменше значення функції $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнює z_{min} і досягається в точці $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, то найбільше значення функції $f=-z$ дорівнює $f_{max}=-z_{min}$ і досягається в тій самій точці.

Приклад. Звести до канонічного виду задачу

$$z=-4x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \le 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 \ge 1, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \le 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

В даному випадку $m=3$, $n=4$.

Змінюємо знак цільової функції.

$$f=4x_1-7x_2-x_3+x_4 \rightarrow max$$

Вводимо додаткові змінні в задані нерівності для перетворення їх у строгі рівності

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_6 = 1, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_7 = 5. \end{cases}$$

Змінна x_6 ввійшла в рівняння зі знаком "-", оскільки ліва частина другої нерівності в заданій системі обмежень більше правої частини. І для того, щоб перетворити її на рівність, від лівої частини потрібно відняти деяку невід'ємну величину, конкретне значення якої невідоме. Із аналогічних міркувань змінні x_5 та x_7 записані зі знаком "+".

Оскільки для змінних x_2, x_4 не вимагається невід'ємність, замінюємо їх відповідно двома різницями: $x_2 = x_2^{'} - x_2^{''}$, $x_4 = x_4^{'} - x_4^{''}$, де $x_2^{'} \ge 0, x_2^{''} \ge 0, x_4^{'} \ge 0, x_4^{''} \ge 0$.

Отже, в канонічній формі задана задача матиме вигляд:

$$f=4x_1 - 7(x_2^{'} - x_2^{''}) - x_3 + (x_4^{'} - x_4^{''}) + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2^{'} - 5x_2^{''} + \quad x_3 - x_4^{'} + \quad x_4^{''} + x_5 \qquad = 3, \\ 3x_1 - 4x_2^{'} + 4x_2^{''} + 2x_3 + 3x_4^{'} - 3x_4^{''} \quad - x_6 \quad = 1, \\ -3x_1 + x_2^{'} - x_2^{''} + \quad x_3 - 3x_4^{'} + \quad 3x_4^{''} \qquad + x_7 = 5, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2^{'} \geq 0,\ x_2^{''} \geq 0,\ x_3 > 0,\ x_4^{'} \geq 0,\ x_4^{''} \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0.$$

Завдання для самостійної роботи: побудувати математичну модель задачі, що наведена нижче. Записати побудовану модель в канонічному вигляді.

Задача [35]. Кредитна політика банку "ДляВас", що надає повний набір банківських послуг, знаходиться в процесі формування портфеля кредитів об'ємом 12 млн. дол. У поданій нижче таблиці наведені можливі типи банківських кредитів.

Тип кредиту	Ставка відсотка	Імовірність безнадійних боргів
Кредити фізичним особам	0,14	0,1
Кредити на купівлю автомобілей	0,13	0,07
Кредити на купівлю житла	0,12	0,03
Сільськогосподарські	0,125	0,05
Комерційні	0,1	0,02

Безнадійні борги вважаються безповоротними, тому вони повинні відніматися з можливого доходу. Конкурентна боротьба з іншими фінансовими інститутами змушує банк не менше 40% капіталу поміщати в сільськогосподарські і комерційні кредити. Для сприяння будівельній індустрії свого регіону банк планує вкласти в кредити на купівлю житла не менше 50% від загальної суми кредитів фізичним особам, на купівлю автомобілів і житла. Банк також підтримує державну політику, яка вказує, що відношення безнадійних боргів до всієї суми кредитів не повинно перевищувати 0,04. Змінні для створюваної моделі можна визначити так: x_1 - кредити фізичним особам; x_2 - кредити на купівлю автомобілів; x_3 - кредити на купівлю житла; x_4 - сільськогосподарські кредити; x_5 - комерційні кредити. Банк "ДляВас", природно, бажає максимізувати чистий прибуток, тобто різницю між доходом від сум, що інвестуються, і сумою неповернених кредитів. Оскільки безнадійні борги вважаються безповоротними, вони віднімаються як із сум, що інвестуються, так і з загального прибутку.

2.4. Симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування

2.4.1. Симплекс-алгоритм

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Симплекс-метод є універсальним у тому смислі, що дозволяє розв'язувати задачі в загальній постановці. Застосування симплекс-методу вимагає зведення задачі до канонічного вигляду.

Знайти такі числові значення аргументів x_1, x_2, ... , x_n, для яких цільова функції

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \qquad (2.4.1)$$

досягає мінімального значення і які задовольняють умови

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2.4.2)$$

та умову невід'ємності

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \dots ,\ x_n \geq 0. \qquad (2.4.3)$$

Якщо у вихідних рівняннях є лінійно залежні, їх потрібно вилучити із системи при подальшому розгляді. Далі будемо вважати, що всі m рівнянь системи є лінійно незалежні.

ПРИКЛАД

```
> `Цільова функція`;
z:=9*x[1]+12*x[2]:
print(`z`=z,`->`*min);
```

Цільова функція

$$z = 9\,x_1 + 12\,x_2, \text{->}\ min$$

```
> `Обмеження:`;
e1:=x[1]+x[2]-x[3]=3;
e2:=-x[1]+2*x[2]+x[4]=6;
e3:=3*x[1]+2*x[2]-x[5]=5;


e4:=x[1] +x[6]= 8;
e5:=3*x[1]+2*x[2]-x[7]=0;
```

Обмеження:

$$e1 := x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$e2 := -x_1 + 2\,x_2 + x_4 = 6$$

$$e3 := 3\,x_1 + 2\,x_2 - x_5 = 5$$

$$e4 := x_1 + x_6 = 8$$

$$e5 := 3\,x_1 + 2\,x_2 - x_7 = 0$$

Розглянемо детально випадок $m<n$. Із системи m рівнянь можна визначити тільки m невідомих. Це можна зробити, якщо решту невідомих перенести в праві частини рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 - a_{1m+1}x_{m+1} - a_{1m+2}x_{m+2} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 - a_{2m+1}x_{m+1} - a_{2m+2}x_{m+2} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = b_m - a_{mm+1}x_{m+1} - a_{mm+2}x_{m+2} - \ldots - a_{mn}x_n. \end{cases} \qquad (2.4.4)$$

В лівих частинах рівнянь залишають невідомі, які називають **базисними** невідомими, в правих – **вільні** невідомі. При запису системи рівнянь (2.4.4), не порушуючи загальних міркувань, припустили, що саме перші m невідомих є базисними. Взагалі із n невідомих m базисних невідомих можна вибирати довільно, але так, щоб визначник матриці системи рівнянь (2.4.4) був відмінний від нуля

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2.4.5)$$

```
> seq(x[i]>=0,i=1..7);
```

$$0 \le x_1,\ 0 \le x_2,\ 0 \le x_3,\ 0 \le x_4,\ 0 \le x_5,\ 0 \le x_6,\ 0 \le x_7$$

Кількість рівнянь – 5 (m=5), загальна кількість змінних – 7 (n=7). Отже, 2 змінні потрібно вибрати за вільні. Вибираємо за вільні змінні x_2, x_7 .

В Maple немає необхідності явно записувати систему рівнянь у вигляді (2.4.4). Але для кращого розуміння покажемо її конкретний вигляд в даному випадку

```
> x[1]-x[3]=3-x[2];
-x[1]+x[4]=6-2*x[2];
3*x[1]-x[5]=5-2*x[2];
x[1] +x[6]= 8;
3*x[1]+2*x[2]=0+x[7];
```

$$x_1 - x_3 = 3 - x_2$$

$$-x_1 + x_4 = 6 - 2\,x_2$$

$$3\,x_1 - x_5 = 5 - 2\,x_2$$

$$x_1 + x_6 = 8$$

$$3\,x_1 + 2\,x_2 = x_7$$

Перевіримо чи можуть бути змінні x_1, x_3, x_4, x_5, x_6

Тільки в цьому випадку система рівнянь (2.4.4) має розв’язок, який можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = B_1 + A_{1m+1}x_{m+1} + A_{1m+2}x_{m+2} + \ldots + A_{1n}x_n, \\ x_2 = B_2 + A_{2m+1}x_{m+1} + A_{2m+2}x_{m+2} + \ldots + A_{2n}x_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_m = B_m + A_{mm+1}x_{m+1} + A_{mm+2}x_{m+2} + \ldots + A_{mn}x_n \end{cases}, \qquad (2.4.6)$$

або в компактному вигляді

$$x_i = B_i + \sum_{k=m+1}^{n} A_{ik}x_k\,, \qquad (2.4.7)$$

Розв’язок (2.4.6) є **загальним розв’язком** системи (2.4.2).

Отже, **базисними невідомими** називають будь-який набір змінних x_i, $i=\overline{1,m}$, для яких визначник, складений із коефіцієнтів при цих змінних, не дорівнює нулю. Решта n-m невідомих називаються **вільними**.

Коефіцієнти A_{ik} та B_i в (2.4.6) виражатимуться через коефіцієнти a_{ij} та b_i ($i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$) з рівнянь (2.4.4).

базисними, тобто чи має система розв'язок при вибраних вільних змінних. Для цього утворимо матрицю коефіцієнтів при базисних змінних та обчислимо її детермінант

```
>A1:=matrix(5,5,[[1,-1,0,0,0],[-
1,0,1,0,0],[3,0,0,-
1,0],[1,0,0,0,1],[3,0,0,0,0]]);
'det(A1)'=linalg[det](A1);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A1) = 3$$

Детермінант матриці коефіцієнтів системи відмінний від нуля, отже система має розв'язок. Знайдемо загальний розв'язок системи рівнянь $e1$, $e2$, $e3$, $e4$, $e5$ при вибраних вільних невідомих

```
>sol1:=solve({e1,e2,e3,e4,e5},{x[1],x[3]
,x[4],x[5],x[6]});
```

$$sol1 := \{x_5 = -5 + x_7,\, x_4 = 6 - \frac{8}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_7,\, x_3 = -3 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_7,$$
$$x_1 = -\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_7,\, x_6 = \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_7 + 8\}$$

У фігурних дужках команди **solve** вказано базисні невідомі: x_1, x_3, x_4, x_5, x_6.

42

Вільним невідомим x_{m+1}, x_{m+2}, ... , x_n в контексті розв'язання системи лінійних рівнянь (2.4.4) можна надавати довільних значень (саме тому їх називають вільними). Знайшовши за допомогою рівнянь (2.4.6) відповідні значення базисних невідомих, матимемо один із нескінченної кількості розв'язків системи (2.4.4). Отже, будь-який набір змінних x_i, $i=\overline{1,n}$, що задовольняє систему рівнянь (2.4.4), (або, що те ж саме – систему рівнянь (2.4.2), називається **частинним розв'язком** або **розв'язком** системи.

Для більшої наочності отриманий загальний розв'язок можна записати так

```
> for i f rom 1 to nops(sol1) do
    sol1[i]
 od;
```

$$x_5 = -5 + x_7$$

$$x_4 = 6 - \frac{8}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_7$$

$$x_3 = -3 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_7$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_7$$

$$x_6 = \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_7 + 8$$

Наданням вільним невідомим x_2, x_7 деяких конкретних числових значень дістанемо один із нескінченної кількості частинних розв'язків вихідної системи рівнянь $e1$, $e2$, $e3$, $e4$, $e5$, наприклад:

```
> Value_x:=x[2]=1,x[7]=-1;
sol_ad:=subs(Value_x,sol1) union
{Value_x};
```

Але, крім обмежень (2.4.2), у нас є умови невід'ємності невідомих (2.4.3). Отже, з урахуванням цих нерівностей вільним невідомим можна надавати тільки невід'ємних значень. Якщо при цьому серед базисних невідомих x_i, $(i=\overline{1,m}\ )$ відсутні від'ємні, то матимемо **допустимий розв'язок**. Отже, **допустимим розв'язком** називається будь-який **розв'язок** системи (2.4.2) **з невід'ємними значеннями невідомих**. Допустимий розв'язок також називають **планом** задачі лінійного програмування. На прикладі двовимірної задачі було показано, що нас цікавить не будь-яка точка із області допустимих значень, а саме вершини многокутника. В теорії доводиться і далі на прикладах в цьому можна буде упевнитися, що будь-якій вершині відповідає частинний розв'язок системи (2.4.2), в якому нульові значення приймають, принаймні, *n-r* невідомих (*n*-кількість невідомих, *r* – ранг матриці системи (2.4.2)). Такий розв'язок називається **базисним**. І йому можна дати таке означення. **Базисним розв'язком** називають будь-який частинний розв'язок системи (2.4.2), в якому кількість невідомих, що відмінні від нуля, не перевищує рангу матриці системи. Оскільки кількість базисних невідомих дорівнює рангу матриці системи, то зручним способом здобуття базисного розв'язку є надання нульових значень вільним невідомим. Саме тому, за симплекс-алгоритмом, вільні невідомі покладають рівними нулю. Згідно з рівнянням (2.4.6), базисний розв'язок матиме вигляд:	$Value\_x := x_2 = 1, x_7 = -1$
	$sol\_ad := \{x_2 = 1, x_7 = -1, x_5 = -6, x_4 = 3, x_3 = -3, x_1 = -1, x_6 = 9$
	Упевнимося в тому, що отримані значення невідомих задовольняють систему рівнянь
	`> subs(sol_ad,{e1, e2, e3, e4, e5 });`
	$\{3 = 3, 0 = 0, 5 = 5, 6 = 6, 8 = 8\}$
	
	Дістанемо базисний розв'язок, для чого надамо вільним невідомим x_2, x_7 нульові значення
	`> Bsol1:=subs(x[2]=0,x[7]=0,sol1);`
	$Bsol1 := \{x_1 = 0, x_3 = -3, x_5 = -5, x_4 = 6, x_6 = 8\}$
	В цьому розв'язку є від'ємні значення, зокрема x_3=-3, **отже, цей базисний розв'язок не є допустимим**. Вибираємо за вільні змінні інші невідомі, наприклад x_1, x_6.
	Утворимо матрицю коефіцієнтів при базисних змінних та обчислимо її детермінант

$$x_1 = B_1, x_2 = B_2, \ldots, x_m = B_m, x_{m+1} = 0, \quad (2.4.8)$$
$$x_{m+2} = 0, \ldots, x_n = 0.$$

Якщо серед значень базисних невідомих у **базисному розв'язку** немає від'ємних, то такий розв'язок називається **допустимим базисним розв'язком**. Частинний розв'язок, який є базисним та допустимим, також називають **опорним планом** (**розв'язком**). Якщо базисний розв'язок виявився недопустимим, це означає, що відповідна точка виявилася не вершиною многокутника допустимих розв'язків, а лежить за межами цього многокутника. В цьому випадку за базисні потрібно вибрати інші невідомі і знайти відповідний базисний розв'язок. Всього із n невідомих m базисних можна вибрати $C_n^m = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ способами. Звісно, з цих варіантів потрібно відкинути такі, для яких не виконується нерівність (2.4.5). Послідовно перебираючи різні варіанти вибору базисних невідомих (або, що те ж саме – вільних невідомих) дістанемо допустимий базисний розв'язок або переконаємося, що допустимого базисного розв'язку не існує. В останньому випадку задача лінійного програмування розв'язку не має. Процес знаходження першого допустимого базисного розв'язку звичайно називається знаходженням

```
> A2:=matrix(5,5,[[1,-1,0,0,0],[2,0,1,0,0],[2,0,0,-1,0],[0,0,0,0,0],[2,0,0,0,-1]]);'det(A2)'=linalg[det](A2);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A2) = 0$$

Детермінант матриці коефіцієнтів системи дорівнює нулю, отже, система не має розв'язку.

Вибираємо за вільні змінні інші невідомі, наприклад x_2, x_6. Утворимо матрицю коефіцієнтів при базисних змінних та обчислимо її детермінант

```
>A3:=matrix(5,5,[[1,-1,0,0,0],[-1,0,1,0,0],[3,0,0,-1,0],[1,0,0,0,0],[3,0,0,0,-1]]);
'det(A3)'=linalg[det](A3);
```

початкового опорного плану. Цей процес можна назвати **першим етапом симплекс-алгоритму**.

Крім найпростішого методу простого перебору різних варіантів наборів вільних невідомих є більш ефективні методи знаходження початкового допустимого розв’язку, зокрема, метод штучного базису, який описано в п. 2.4.4.

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A3) = 1$$

Детермінант матриці коефіцієнтів системи відмінний від нуля, отже, система має розв'язок.

Знайдемо загальний розв'язок системи рівнянь $e1$, $e2$, $e3$, $e4$, $e5$ при вибраних вільних невідомих

```
>sol2:=solve({e1,e2,e3,e4,e5},
{x[1],x[3],x[4],x[5],x[7]});
```

$$sol2 := \{x_1 = -x_6 + 8, x_3 = -x_6 + 5 + x_2, x_7 = -3\,x_6 + 24 + 2\,x_2, x_5 = -3\,x_6 + 19 + 2\,x_2, x_4 = -x_6 + 14 - 2\,x_2\}$$

Знайдемо відповідний базисний розв'язок

```
> Bsol2:=subs(x[2]=0,x[6]=0,sol2);
```

$$Bsol2 := \{x_1 = 8, x_3 = 5, x_7 = 24, x_5 = 19, x_4 = 14\}$$

46

Подальший алгоритм (**другий етап**) розв'язання складається з двох кроків, що повторюються:

1. Перевірка отриманого допустимого розв'язку на оптимальність. **Оптимальним називається опорний план**, при якому цільова функція набуває **найменшого** (**найбільшого**) значення.

У разі отримання негативного результату:

2. Перехід до нового допустимого базисного розв'язку.

Розглянемо детально перший крок. **Для перевірки допустимого розв'язку на оптимальність потрібно виразити цільову функцію через вільні невідомі**.

Для цього у цільову функцію (2.4.1) замість базисних невідомих (якщо такі там є) потрібно підставити їх вирази через вільні невідомі, згідно з рівностями (2.4.6). При цьому цільова функція набуде вигляду

$$z = z_1 + c'_{m+1}x_{m+1} + c'_{m+2}x_{m+2} + \ldots + c'_n x_n . \qquad (2.4.9)$$

Зауважимо, що в базисному допустимому розв'язку значення вільних невідомих дорівнюють нулю.

В цьому розв'язку відсутні від'ємні значення, отже, цей базисний розв'язок є допустимим.

Ми отримали **початковий допустимий базисний розв'язок** (**початковий опорний план**).

Для перевірки отриманого розв'язку на оптимальність потрібно виразити цільову функцію через вільні невідомі. Для цього в цільовій функції замість базисних невідомих підставимо їх вирази через вільні невідомі. Іншими словами, у цільову функцію потрібно підставити вирази із загального розв'язку

```
> 'z'=subs(sol2,z);
```

$$z = -9\,x_6 + 72 + 12\,x_2$$

В допустимому базисному розв'язку вільні невідомі дорівнюють нулю. Отже, їх можна тільки збільшувати. Перед змінною x_6 в останьому виразі для цільової функції коефіцієнт дорівнює (-9). Звідси випливає, що отриманий опорний розв'язок не є оптимальним, оскільки, збільшуючи вказану вільну невідому, будемо зменшувати цільову функцію. Перейдемо до наступного опорного розв'язку.

Отже, згідно з представленням (2.4.9), значення цільової функції для даного опорного плану дорівнює z_1. Перевірка ж оптимальності знайденого розв'язку дуже проста. Суть її полягає в тому, що оскільки вільні невідомі дорівнюють нулю, то змінювати їх можна тільки збільшуючи (зменшувати вільні невідомі не дозволяють обмеження (2.4.3). Для конкретності розглядатимемо задачу знаходження **найменшого** значення цільової функції. Якщо серед коефіцієнтів $c'_{m+1}, c'_{m+2}, ..., c'_n$ у (2.4.9) немає від'ємних, то збільшення вільних невідомих приведе до збільшення цільової функції, отже, це свідчить про здобуття оптимального розв'язку. (Пропонується навести відповідні міркування стосовно задачі знаходження **найбільшого** значення цільової функції). Якщо серед коефіцієнтів $c'_{m+1}, c'_{m+2}, ..., c'_n$ у (2.4.9) є від'ємні, то збільшенням вільних невідомих, перед якими стоять від'ємні коефіцієнти, можна досягти зменшення цільової функції, а значить знайдений опорний розв'язок не є оптимальним.

В останньому випадку потрібно перейти до наступного допустимого базисного розв'язку так, щоб значення цільової функції наближалося до оптимального. Отже ми підійшли до детального

48

розгляду другого кроку: перехід до нового допустимого базисного розв'язку.

На цьому кроці симплекс-алгоритм полягає у тому, що вибирається одна з вільних невідомих, перед якими у виразі для цільової функції стоять від’ємні коефіцієнти. Ця невідома, яку позначимо через x_λ ($m+1 \le \lambda \le n$), збільшується, а **решта вільних невідомих залишається рівними нулю**. Звичайно, чим більшим буде значення вибраної вільної невідомої, тим меншим буде значення цільової функції. Але ж не потрібно забувати, що зміна значень вільних невідомих, згідно з рівняннями (2.4.6), приводить до зміни значень базисних невідомих. В цьому випадку рівняння (2.4.6) набудуть вигляду

$$\begin{cases} x_1 = B_1 + A_{1\lambda}x_\lambda, \\ x_2 = B_2 + A_{2\lambda}x_\lambda, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_m = B_m + A_{m\lambda}x_\lambda \end{cases}. \qquad (2.4.10)$$

Збільшувати вільну невідому x_λ можна доти, поки одна з базисних невідомих не стане рівною нулю. (Подальше збільшення вільної невідомої приведе до появи від’ємного значення, принаймні одної з базисних невідомих, тобто виходу за межі допустимої області).

В даному випадку тільки перед вільною невідомою x_6 стоїть знак \`-\`, **тому будемо збільшувати цю невідому** ($x_\lambda = x_6$). **Решту вільних невідомих, а лишилась тільки одна вільна невідома –** x_2, **залишаємо рівною нулю:** $x_2=0$.

З урахуванням цього вирази базисних невідомих через вільні набудуть вигляду:

```
> for i from 1 to nops(sol2) do
subs(x[2]=0,sol2[i]) od;
```

$$x_1 = -x_6 + 8$$
$$x_3 = -x_6 + 5$$
$$x_7 = -3\,x_6 + 24$$
$$x_5 = -3\,x_6 + 19$$
$$x_4 = -x_6 + 14$$

Збільшувати вільну невідому можна доти, поки одна з базисних невідомих не стане рівною нулю. Знайдемо найбільш можливе значення вільної невідомої з кожного рівняння

```
> x[1] = -x[6]+8,x[1]=0,`->`,x[6]=8;
x[3] = -x[6]+5,x[3]=0,`->`,x[6]=5;
```

Якщо в рівняннях (2.4.10) всі коефіцієнти $A_{i\lambda}\geq 0$ (i=1, 2, …, m), то жодне з рівнянь не обмежує збільшення змінної x_λ. Це означає, що покращувати (в даному випадку – зменшувати) цільову функцію можна необмежено, тобто у цьому випадку робимо висновок, що поставлена задача лінійного програмування розв'язку не має. В противному разі для всіх рівностей системи (2.4.10), в яких $A_{i\lambda}<0$, знаходимо значення вільної змінної $x_{\lambda i}$, при якому відповідне значення базисної змінної стає рівним нулю. Серед отриманих значень вибирають найменше (чому?). Для вибраного значення вільної невідомої за рівностями (2.4.10) обчислюють значення всіх базисних невідомих. При цьому, принаймні, одна з базисних невідомих, наприклад x_μ, дорівнюватиме нулю. Отже приходимо до нового допустимого базисного розв'язку, в якому, порівняно з попереднім, вільна невідома x_λ стала базисною, а базисна x_μ стала вільною.

```
x[4] = -x[6]+14,x[4]=0,`->`,x[6]=14;
x[5] = -3*x[6]+19,x[5]=0,`->`,x[6]=19/3;
x[7] = -3*x[6]+24,x[7]=0,`->`,x[6]=24/3;
```

$$x_1 = -x_6 + 8,\ x_1 = 0,\ ->,\ x_6 = 8$$
$$x_3 = -x_6 + 5,\ x_3 = 0,\ ->,\ x_6 = 5$$
$$x_4 = -x_6 + 14,\ x_4 = 0,\ ->,\ x_6 = 14$$
$$x_5 = -3\,x_6 + 19,\ x_5 = 0,\ ->,\ x_6 = \frac{19}{3}$$
$$x_7 = -3\,x_6 + 24,\ x_7 = 0,\ ->,\ x_6 = 8$$

Із отриманих значень x_6, серед невід'ємних, вибираємо найменше: для того, щоб задовольнити умову невід'ємності невідомих. Отже: x_6=5. І маємо такий допустимий розв'язок:

```
> Op2sol2:=subs(x[2]=0,x[6]=5,sol2):
{x[2]=0,x[6]=5} union Op2sol2;
```

$$\{x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_6 = 5,\ x_1 = 3,\ x_7 = 9,\ x_5 = 4,\ x_4 = 9\}$$

В останьому операторі застосовано команду `union` – для об'єднання множин.

Порівняно с попереднім опорним розв'язком в отриманому опорному розв'язку вільна змінна x_6 стала базисною, а базисна змінна x_3 (x_μ=x_3) стала вільною.

На практиці зручно робити так: ліві частини рівностей (2.4.10) приймають рівними нулю і знаходять відповідні значення $(x_\lambda)_i$ (i=1, 2, …, m). Якщо всі отримані значення менше нуля – задача розв’язку не має, якщо серед отриманих значень є, принаймні, одне нульове – маємо вироджену задачу, про яку мова піде в п. 2.4.3. В противному разі серед всіх додатних значень x_λ вибираємо найменше.

Одержаний базисний розв’язок знову перевіряється на оптимальність, для цього цільову функцію виражають через нові вільні невідомі. Зміна базисних невідомих приведе до відповідної перебудови системи (2.4.6). Після декількох таких кроків дістанемо оптимальний розв’язок, для якого значення цільової функції буде найменшим, або упевнимося, що оптимального розв’язку не існує.

Перевіримо отриманий допустимий розв'язок на оптимальність. Для цього розв'яжемо вихідну систему відносно нових вільних невідомих x_2, x_3

```
>sol3:=solve({e1,e2,e3,e4,e5},{x[1],x[4],
x[5],x[6],x[7]});
```

$$sol3 := \{x_1 = 3 - x_2 + x_3, x_4 = 9 - 3\,x_2 + x_3, x_5 = 4 - x_2 + 3\,x_3, x_7 = 9 - x_2 + 3\,x_3, x_6 = 5 + x_2 - x_3\}$$

Після заміщення базисних невідомих в цільовій функції на їх вирази через вільні невідомі цільова функція матиме вигляд:

```
> 'z'=subs(sol3,z);
```

$$z = 27 + 3\,x_2 + 9\,x_3$$

В допустимому базисному розв'язку вільні невідомі дорівнюють нулю. Отже, їх можна тільки збільшувати. Перед вільними невідомими стоять коефіцієнти зі знаком "+". Із зростанням вільних невідомих буде зростати цільова функція. Отже отриманий розв’язок

```
> subs(x[2]=0,x[3]=0,sol3):
{x[2]=0,x[3]=0} union ";
```

$$\{x_3 = 0, x_2 = 0, x_6 = 5, x_1 = 3, x_7 = 9, x_5 = 4, x_4 = 9\}$$

є оптимальним. Мінімальне значення цільової функції

```
> Z[min]=subs(x[1] = 3,x[2] = 0,z);
```

$$Z_{min} = 27$$

51

2.4.2 Геометрична інтерпретація допустимих, недопустимих, базисних, опорних розв'язків

В симплекс-методі використовується поняття частинних розв'язків систем лінійних рівнянь: допустимий розв'язок, недопустимий розв'язок, базисний розв'язок, небазисний розв'язок, опорний розв'язок, оптимальний розв'язок.

Зрозуміти ідеї, покладені в основу симплекс-алгоритму, неможливо без чіткого уявленя про геометричну інтерпретацію кожного з розв'язків.

Розглянемо задачу лінійного програмування.

Знайти розв'язок задачі

$$z=9x_1 + 12x_2 \quad \to \quad \max, \tag{2.4.11}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ x_1 \leq 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 0, \end{cases} \tag{2.4.12}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \tag{2.4.13}$$

Область допустимих значень задачі є багатокутником ABCD, що зображено на рис. 1.

Запишему систему обмежень (2.4.12) в канонічному вигляді

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 = 5, \\ x_1 + x_6 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_7 = 0. \end{cases} \tag{2.4.14}$$

В табл. 1 наведено дані про рівняння прямих та їх позначення на рис. 1.

Знайдемо загальний розв'язок системи (2.4.14). Робитимемо це за допомогою Maple.

```
> eq1:=x[1]+x[2]-x[3]=3;
eq2:=-x[1]+2*x[2]+x[4]=6;
eq3:=3*x[1]+2*x[2]-x[5]=5;
eq4:=x[1] +x[6]= 8;
eq5:=3*x[1]+2*x[2]-x[7]=0;
```

$$eq1 := x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

$$eq2 := -x_1 + 2\, x_2 + x_4 = 6$$

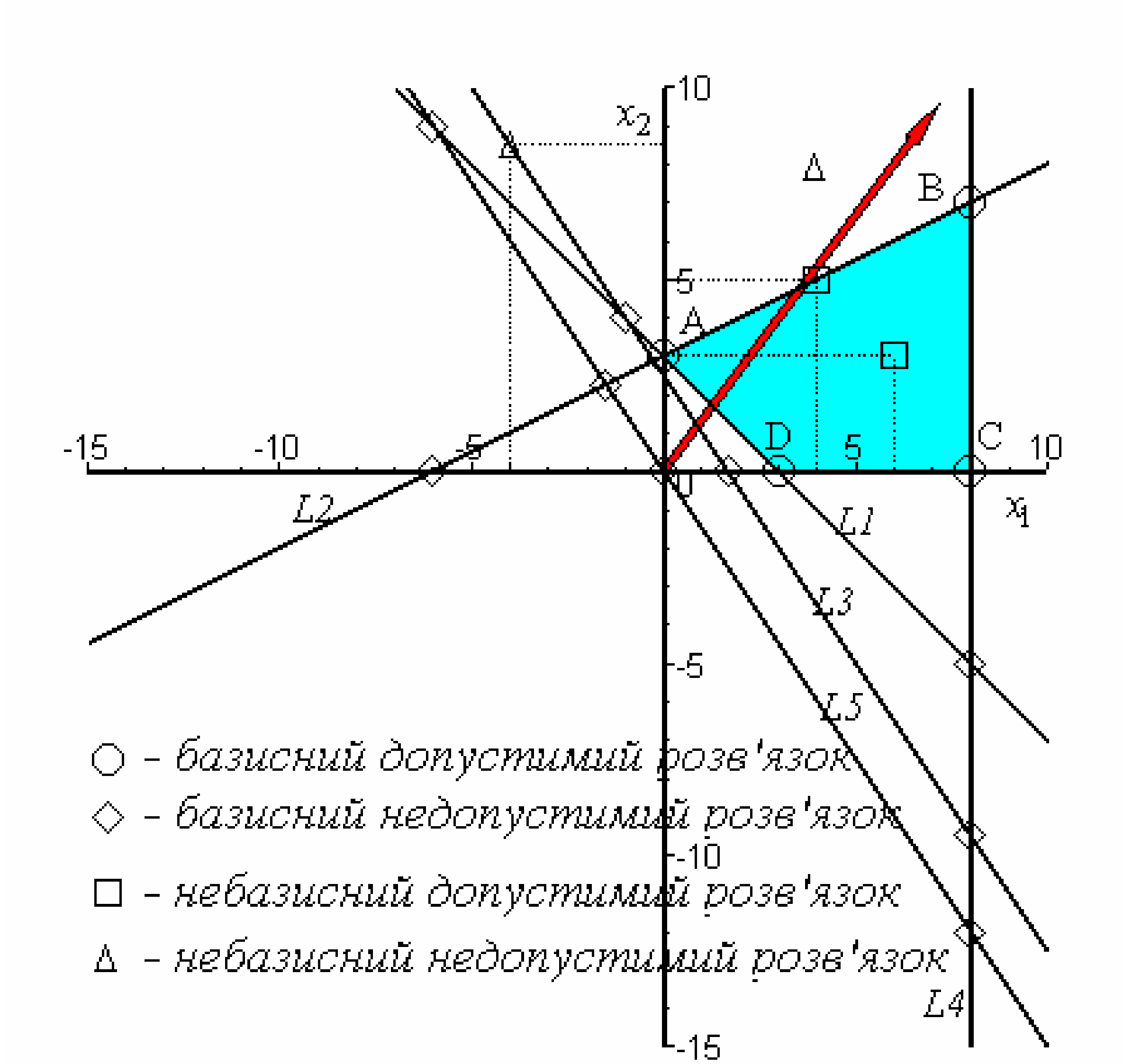


Рис. 1. Геометрична інтерпретація частинних розв'язків систем лінійних рівнянь

Таблиця 1

Позначення прямої	Сторона багатокутника ABCD, що належить прямій	Відповідне рівняння прямої	Змінна, яка дорівнює нулю в будь-якій точці прямої
L1	AD	$x_1 + x_2 = 3$	x_3
L2	AB	$-x_1 + 2 \cdot x_2 = 6$	x_4
L3		$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 5$	x_5
L4	BC	$x_1=8$	x_6
L5		$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 0$	x_7
		$x_1=0$	x_1
	CD	$x_2=0$	x_2

$$eq3 := 3\,x_1 + 2\,x_2 - x_5 = 5$$
$$eq4 := x_1 + x_6 = 8$$
$$eq5 := 3\,x_1 + 2\,x_2 - x_7 = 0$$

За вільні виберемо змінні x_1, x_2:

```
> Vilni:=x[1],x[2];
sols_g1:=solve({seq(eq||k,k=1..5)},{x[k]$ k=1..7}
minus {Vilni});
```

$$Vilni := x_1, x_2$$
$$sols\_g1 := \{x_6 = -x_1 + 8, x_7 = 3\,x_1 + 2\,x_2, x_3 = x_1 + x_2 - 3,$$
$$x_4 = x_1 - 2\,x_2 + 6, x_5 = 3\,x_1 + 2\,x_2 - 5\}$$

Зауваження. Вилученням із множини всіх змінних

```
> {x[k]$ k=1..7};
```

$$\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_1\}$$

множини вільних змінних $\{x_1, x_2\}$ дістаємо множину базисних змінних:

```
{x[k]$ k=1..7} minus {Vilni};
```

$$\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$$

Такий спосіб визначення базисних змінних зручний, якщо їх кількість значно перевищує кількість вільних змінних.

На основі отриманого загального розв'язку базисний розв'язок простіше всього отримати покладанням нулю вільних змінних x_1=0 та x_2=0

```
> sols_Baz0:=subs(x[1] = 0, x[2] = 0,sols_g1)union
{x[1] = 0, x[2] = 0};
```

$$sols\_Baz0 :=$$
$$\{x_7 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_6 = 8, x_4 = 6, x_5 = -5, x_3 = -3\}$$

В отриманому базисному розв'язку є від'ємні значення змінних: x_3=-3, x_5=-5, отже маємо недопустимий базисний розв'язок. Будь-якому базисному розв'язку на графіку відповідає точка перетину принаймні двох прямих, що відповідають нерівностям (2.4.12), (2.4.13). Розв'язок `sols_Baz0` відповідає початку координат. Оскільки через початок координат крім координатних осей, які задаються рівняннями x_1=0, x_2=0, проходить ще й пряма L5, то в даному базисному розв'язку нульове значення має і змінна x_7, яка дорівнює нулю в будь-якій точці цієї прямої (див. табл. 1).

Слід зауважити, що надання нульових значень вільним змінним це не обов'язковий і не єдиний спосіб отримання базисного розв'язку. Наприклад, якщо отримати загальний розв'язок, що відповідає вільним невідомим x_4, x_6 та надати їм значення x_4=6, x_6=8, то дістанемо базисний розв'язок `sols_Baz0`:

```
> Vilni:=x[4],x[6];
```

```
sols_g2:=solve({seq(eq||k,k=1..5)},{x[k]$ k=1..7}
minus {Vilni});
sols_Baz0:=subs(x[4] = 6, x[6] = 8,sols_g2)union
{x[4] = 6, x[6] = 8};
```

$$Vilni := x_4, x_6$$

$$sols\_g2 := \{x_1 = -x_6 + 8, x_3 = -\frac{3}{2}x_6 + 12 - \frac{1}{2}x_4, x_7 = -4\,x_6 + 38 - x_4, x_5 = -4\,x_6 + 33 - x_4, x_2 = -\frac{1}{2}x_6 + 7 - \frac{1}{2}x_4\}$$

$$sols\_Baz0 := \{x_7 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0, x_6 = 8, x_4 = 6, x_5 = \text{-}5, x_3 = \text{-}3\}$$

Взагалі із загального розв'язку, незалежно від того, які змінні вибрані за вільні, можна отримати будь-який частинний розв'язок, в тому числі і будь-який базисний розв'язок. Це випливає з означення базисного розв'язку. Але очевидно, що вгадати ненульові значення вільних змінних, що відповідають тому або іншому базисному розв'язку, незрівнянно складніше, ніж отримувати базисні розв'язки наданням нульових значень певній сукупності змінних, які називаємо вільними. Отже, надання вільним невідомим нульових значень є зручний спосіб здобуття базисного розв'язку. Деякі автори дають означення базисного розв'яку на основі зручного способу його отримання. Це може збити з пантелику вдумливого читача.

Припустимо, нам потрібно дістати розв'язок, що відповідає т. B (рис. 1). Вибираємо за вільні ті змінні, які дорівнюють нулю в цій точці. Точка B є перетином двох прямих L2, L2. Отже, згідно з даними табл. 1 за вільні приймаємо невідомі x_4, x_6. Загальний розв'язок **sols_g2**, що відповідає такому вибору вільних невідомих, у нас уже є. Знайдемо відповідний базисний розв'язок:

```
> sols_Baz_B:=subs(x[4] = 0, x[6] = 0,sols_g1)union
{x[4] = 0, x[6] = 0};
```

$$sols\_Baz\_B := \{x_6 = 0, x_4 = 0, x_1 = 8, x_3 = 12, x_7 = 38, x_5 = 33, x_2 = 7\}$$

Звідси, зокрема, можемо отримати координати т. B (x_1=8, x_2=7).

Користуючись тим, що ми маємо геометричну інтерпретацію задачі (2.4.11) - (2.4.13) отримаємо на основі загального розв'язку декілька частинних розв'язків та охарактеризуємо їх.

Дані зведемо в табл. 2. Кожний розв'язок, що визначається значеннями змінних x_1, x_2, отримували за допомогою команди

```
> subs(x[1] = x1, x[2] = x2,sols_g1)union {x[1] = x1,
x[2] = x2};
```

де **x1**, **x2** – значення змінних x_1, x_2, які наведені в табл. 2.

Таблиця 2

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	**Характер розв'язку**	**Відповідна точка на рис. 1**
1.	0	0	-3	6	-5	8	0	Базисний недопустимий	Початок координат
2.	8	7	12	0	33	0	38	Базисний допустимий, оптимальний	B
3.	4	5	6	0	17	4	22	Небазисний допустимий	Належить відрізку AB
4.	6	3	6	6	19	2	24	Небазисний допустимий	Лежить в середині багатокутника ABCD
5.	4	8	9	-6	23	4	28	Небазисний недопустимий	Лежить поза межами багатокутника ABCD
6.	-4	8,5	1,5	-15	0	12	5	Небазисний недопустимий	Лежить поза межами багатокутника ABCD, належить прямій L3
7.	-6	0	-9	0	-23	14	-18	Базисний недопустимий	Точка перетину прямої L2 та осі абсцис
8.	8	-12	-7	38	-5	0	0	Базисний недопустимий	Точка перетину прямих L4 та L5

В підрозділі 2.2 було зазначено, якщо цільова функція має оптимальні значення, то ці значення досягаються обов'язково в одній із кутових точок області допустимих значень. Але це не означає, що оптимального значення цільова функція не може набувати в точці, що не є кутовою. Якщо цільову функцію задачі (2.4.11) - (2.4.13) замінити новою $z=-x_1 + 2x_2$, то опорна лінія нової задачі буде параллельною відрізку AB і оптимальний розв'язок цільова функція буде набувати в будь-якій точці цього відрізка, а не тільки в кутових точках A та B. Тобто оптимальними будуть і всі небазисні розв'язки, що відповідають точкам відрізка AB.

2.2.3 Вироджена задача: особливості симплекс-алгоритму, геометрична інтерпретація

Опорний план задачі лінійного програмування, в якому принаймні одна базисна змінна дорівнює нулю, називається виродженим. Задача лінійного програмування, яка має принаймні один вироджений опорний план, називається виродженою.

Перехід згідно з симплекс-алгоритмом від одного опорного розв'язку до іншого геометрично означає перехід вздовж ребра багатогранника допустимих значень від одної вершини до сусідньої (що розташована на тому самому ребрі). Якщо через деяку вершину багатогранника допустимих значень проходить одна або більше площин, що не є гранями цього багатогранника, це означає, що даній вершині відповідає вироджений опорний план.

Оскільки вироджений опорний розв'язок має нульові базисні змінні, то йому відповідають різні набори вільних невідомих. Саме тому при розв'язанні виродженої задачі лінійного програмування нерідко виникає явище зациклювання. Отримавши вироджений опорний план та визначивши за симплекс-методом новий набір вільних змінних ми можемо отримати фактично той самий опорний план. І при подальшому визначенні наступного набору вільних змінних дістаємо той набір, що уже був. Всі наступні кроки симплекс-алгоритму відповідають послідовному вибору серед двох наборів вільних змінних, які відповідають одній і тій самій вершині багатогранника.

Розглянемо проблему виродженості на конкретному прикладі двовимірної задачі лінійного програмування.

Знайти розв'язок задачі

$$z=4x_1+2x_2 \to \min, \tag{2.4.15}$$

$$\begin{cases} 18x_1-5x_2\le 265, \\ -x_1+11x_2\le 189, \\ x_1+x_2\ge 2, \\ -13x_1+9x_2\le 45, \\ x_1-13x_2\le 2, \\ x_1+2x_2\ge 2, \\ x_1-5x_2\le 2, \end{cases} \tag{2.4.16}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0. \tag{2.4.17}$$

Область допустимих значень задачі є багатокутником ABCDEF, що зображений на рис. 1.

Запишему систему обмежень (2.4.16) в канонічному вигляді

$$
\begin{cases}
18x_1 - 5x_2 + x_3 = 265, \\
-x_1 + 11x_2 + x_4 = 189, \\
x_1 + x_2 - x_5 = 2, \\
-13x_1 + 9x_2 + x_6 = 45, \\
x_1 - 13x_2 + x_7 = 2, \\
x_1 + 2x_2 - x_8 = 2, \\
x_1 - 5x_2 + x_9 = 2,
\end{cases} \tag{2.4.18}
$$

В табл. 3 наведено дані про рівняння прямих та їх позначення на рис. 2.

Порівняємо рівняння прямої DE з першим рівнянням системи (2.4.18):

$$
\begin{cases}
18x_1 - 5x_2 = 265 \\
18x_1 - 5x_2 + x_3 = 265
\end{cases}.
$$

Очевидно, що для всіх точок прямої DE, тобто за виконання першої рівності останньої системи, буде справджуватися рівність x_3=0.

Як видно з рис. 2, у вершині C багатокутника допустимих значень перетинаються крім двох сторін BC та CD цього багатокутника ще три прямих: L1, L2 та x_2=0. Це означає, що в опорному розв'язку, який відповідає т. C, три базисних змінних дорівнюватимуть нулю.

Знайдемо загальний розв'язок системи (2.4.14). Робитимемо це за допомогою Maple.

```
> z:=4*x[1]+2*x[2]:
eq1:=18*x[1]-5*x[2]+x[3] = 265;
eq2:=-x[1]+11*x[2]+x[4] = 189;
eq3:=x[1]+x[2]-x[5] = 2;
eq4:=-13*x[1]+9*x[2]+x[6] = 45;
eq5:=x[1]-13*x[2]+x[7] = 2;
eq6:=x[1]+2*x[2]-x[8] = 2;
eq7:=x[1]-5*x[2]+x[9] = 2;
```

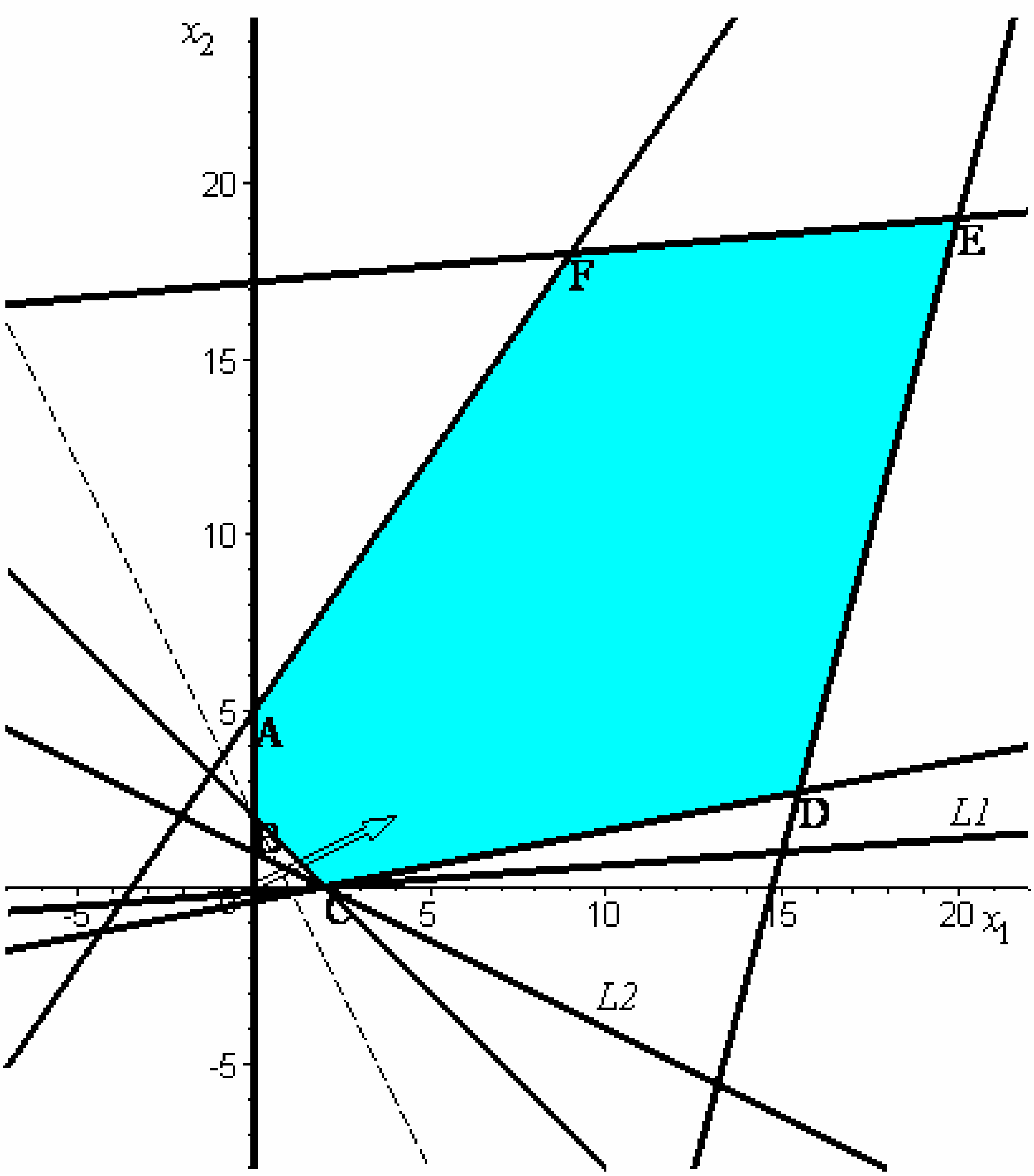


Рис. 2. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування (2.4.15) - (2.4.17)

$$eq1 := 18\,x_1 - 5\,x_2 + x_3 = 265$$
$$eq2 := -x_1 + 11\,x_2 + x_4 = 189$$
$$eq3 := x_1 + x_2 - x_5 = 2$$
$$eq4 := -13\,x_1 + 9\,x_2 + x_6 = 45$$
$$eq5 := x_1 - 13\,x_2 + x_7 = 2$$
$$eq6 := x_1 + 2\,x_2 - x_8 = 2$$
$$eq7 := x_1 - 5\,x_2 + x_9 = 2$$

Таблиця 3

Позначення прямої	Сторона багатокутника ABCD, що належить прямій	Відповідне рівняння прямої	Змінна, яка дорівнює нулю в будь-якій точці прямої
	DE	$18 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 = 265$	x_3
	EF	$-x_1 + 11 \cdot x_2 = 189$	x_4
	BC	$x_1 + x_2 = 2$	x_5
	AF	$-13 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 = 45$	x_6
L1		$x_1 - 13 \cdot x_2 = 2$	x_7
L2		$x_1 + 2 \cdot x_2 = 2$	x_8
	CD	$x_1 - 5 \cdot x_2 = 2$	x_9
	AB	x_1=0	x_1
		x_2=0	x_2

За m-n=9-7=2 вільних візьмемо змінні, які обертаються в нуль в точці C. В цій точці обертаються в нуль змінні x_2, x_5, x_7, x_8, x_9, тобто всі змінні із останього стовпця табл. 2, які дорівнюють нулю в будь-якій точці кожної прямої, що проходить через т. C. За вільні змінні можна вибрати будь-які дві змінні з перелічених, наприклад x_7, x_9:

```
> Vilni:=x[7],x[9];
sols:=solve({seq(eq||k,k=1..7)},{x[k]$k=1..9} minus
{Vilni});
sols_B1:=subs(x[7]=0,x[9]=0,sols) union
{x[7]=0,x[9]=0};
```

$$Vilni := x_7, x_9$$

$$sols := \{x_6 = 71 - 20\,x_9 + 7\,x_7, x_3 = 229 + \frac{229}{8}x_9 - \frac{85}{8}x_7,$$
$$x_4 = 191 - \frac{1}{4}x_9 - \frac{3}{4}x_7, x_5 = \frac{3}{4}x_7 - \frac{7}{4}x_9, x_8 = \frac{7}{8}x_7 - \frac{15}{8}x_9,$$
$$x_2 = \frac{1}{8}x_7 - \frac{1}{8}x_9, x_1 = 2 + \frac{5}{8}x_7 - \frac{13}{8}x_9\}$$

$$sols\_B1 := \{x_7 = 0, x_5 = 0, x_2 = 0, x_9 = 0, x_8 = 0, x_6 = 71, x_3 = 229,$$
$$x_4 = 191, x_1 = 2\}$$

Як і повинно бути в отриманому опорному плані всі змінні x_2, x_5, x_7, x_8 та x_9 дорівнюють нулю. Превіримо цей план на оптимальність

```
> 'z'=subs(sols,z);
```

$$z = 4 + \frac{5}{2}x_7 - \frac{9}{2}x_9$$

Покращити цільову функцію можна тільки збільшенням змінної x_9, отже покладемо x_7=0 та знайдемо залежності базисних невідомих від x_9

```
> for i in sols do subs(x[7]=0,i) od;
```

$$x_8 = -\frac{15}{8}x_9$$

$$x_2 = -\frac{1}{8}x_9$$

$$x_1 = 2 - \frac{13}{8}x_9$$

$$x_6 = 71 - 20\,x_9$$

$$x_3 = 229 + \frac{229}{8}x_9$$

$$x_4 = 191 - \frac{1}{4}x_9$$

$$x_5 = -\frac{7}{4}x_9$$

Рівняння для кожної із змінних x_2, x_5, x_8 унеможливлює зростання змінної x_9 (подумайте – чому?), отже є три варіанти вибору вільних змінних: [x_2, x_7]; [x_5, x_7]; [x_8, x_7].

Виберемо за вільні x_2, x_7

```
> Vilni:=x[2],x[7];
sols:=solve({seq(eq||k,k=1..7)},{x[k]$k=1..9} minus {Vilni});
'z'=subs(sols,z);
```

$$Vilni := x_2, x_7$$

$$sols := \{x_4 = 191 + 2\,x_2 - x_7, x_6 = 71 + 160\,x_2 - 13\,x_7, x_3 = 229 - 229\,x_2 + 18\,x_7, x_8 = 15\,x_2 - x_7, x_5 = 14\,x_2 - x_7, x_1 = 2 + 13\,x_2 - x_7, x_9 = -8\,x_2 + x_7\}$$

$$z = 8 + 54\,x_2 - 4\,x_7$$

Покращити цільову функцію можна тільки збільшенням змінної x_7, отже покладемо x_2=0 та знайдемо залежності базисних невідомих від x_7

```
> for i in sols do subs(x[2]=0,i) od;
```

$$x_4 = 191 - x_7$$

$$x_6 = 71 - 13\,x_7$$

$$x_3 = 229 + 18\,x_7$$

$$x_8 = -x_7$$

$$x_5 = -x_7$$

$$x_1 = 2 - x_7$$

$$x_9 = x_7$$

Будь-яка з рівностей для змінної x_5 або x_8 робить збільшення змінної x_7 неможливим. Це ознаає, що за симплекс-алгоритмом ми не можемо перейти до наступної вершини багатогранника допустимих розв’язків. Аналогічну ситуацію матимемо і при виборі за вільні змінних x_8, x_7. Виберемо за вільні змінні останній варіант x_5, x_7:

```
> Vilni:=x[5],x[7];
sols:=solve({seq(eq||k,k=1..7)},{x[k]$k=1..9} minus
{Vilni});
'z'=subs(sols,z);
```

$$Vilni := x_5, x_7$$

$$sols := \{x_3 = 229 - \frac{229}{14}x_5 + \frac{23}{14}x_7, x_6 = 71 + \frac{80}{7}x_5 - \frac{11}{7}x_7,$$
$$x_4 = 191 + \frac{1}{7}x_5 - \frac{6}{7}x_7, x_8 = \frac{15}{14}x_5 + \frac{1}{14}x_7, x_9 = -\frac{4}{7}x_5 + \frac{3}{7}x_7,$$
$$x_2 = \frac{1}{14}x_5 + \frac{1}{14}x_7, x_1 = 2 + \frac{13}{14}x_5 - \frac{1}{14}x_7\}$$

$$z = 8 + \frac{27}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_7$$

Покращити цільову функцію можна тільки збільшенням змінної x_7, отже покладемо x_5=0 та знайдемо залежності базисних невідомих від x_7

```
> for i in sols do subs(x[5]=0,i) od;
```

$$x_3 = 229 + \frac{23}{14}x_7$$

$$x_6 = 71 - \frac{11}{7}x_7$$

$$x_4 = 191 - \frac{6}{7}x_7$$

$$x_8 = \frac{1}{14}x_7$$

$$x_9 = \frac{3}{7}x_7$$

$$x_2 = \frac{1}{14}x_7$$

$$x_1 = 2 - \frac{1}{14}x_7$$

Після вилучення всіх рівностей, які не накладають обмежень на зростання змінної x_7, дістанемо

$$x_6 = 71 - \frac{11}{7}x_7$$

$$x_4 = 191 - \frac{6}{7}x_7$$

$$x_1 = 2 - \frac{1}{14} x_7$$

Знайдемо найбільш можливі значення змінної x_7 для кожного рівняння

```
> [x[6]=0],71-11/7*x[7]=0,`-->`*x[7]= solve(71-
11/7*x[7]=0,x[7]);
[x[4]=0],191-6/7*x[7]=0,`-->`*x[7]= solve(191-
6/7*x[7]=0,x[7]);
[x[1]=0],2-1/14*x[7]=0,`-->`*x[7]= solve(2-
1/14*x[7]=0,x[7]);
```

$$[x_6 = 0],\ 71 - \frac{11}{7} x_7 = 0,\ \text{-->}\ x_7 = \frac{497}{11}$$

$$[x_4 = 0],\ 191 - \frac{6}{7} x_7 = 0,\ \text{-->}\ x_7 = \frac{1337}{6}$$

$$[x_1 = 0],\ 2 - \frac{1}{14} x_7 = 0,\ \text{-->}\ x_7 = 28$$

Із отриманих значень знайдемо мінімальне

```
> min(497/11,1337/6,28);
```

$$28$$

Отже замість змінної x_7 у вільні переводимо змінну x_1.

```
> Vilni:=x[1],x[5];
sols:=solve({seq(eq||k,k=1..7)},{x[k]$k=1..9} minus
{Vilni});
'z'=subs(sols,z);
```

$$Vilni := x_1, x_5$$

$$sols := \{x_2 = -x_1 + x_5 + 2,\ x_8 = -x_1 + 2\,x_5 + 2,$$
$$x_9 = -6\,x_1 + 5\,x_5 + 12,\ x_6 = 22\,x_1 - 9\,x_5 + 27,$$
$$x_7 = -14\,x_1 + 13\,x_5 + 28,\ x_3 = -23\,x_1 + 5\,x_5 + 275,$$
$$x_4 = 12\,x_1 - 11\,x_5 + 167\}$$

$$z = 2\,x_1 + 2\,x_5 + 4$$

Умови оптимальності виконуються, отже дістали оптимальний розв’язок даної задачі

```
> sols_OPT:=subs(x[1]=0,x[5]=0,sols) union
{x[1]=0,x[5]=0};
```

$$sols\_OPT := \{x_1 = 0,\ x_5 = 0,\ x_2 = 2,\ x_8 = 2,\ x_9 = 12,\ x_6 = 27,$$
$$x_7 = 28,\ x_3 = 275,\ x_4 = 167\}$$

Оптимальному розв’язку відповідає т. B (x_1=0, x_2=2), що видно також і з графічного розв’язку, наведеного на рис. 2.

Наведені роз'яснення та алгоритм не потрібно розглядати як рецепт для побудови ефективних обчислювальних схем для уникнення зациклювання, вони призначені для розкриття сутності поняття виродженості задачі лінійного програмування і проблем, які при цьому виникають.

2.2.4 Метод штучного базису знаходження початкового опорного плану

Розглянемо задачу лінійного програмування в канонічній формі

$$z=\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \quad \to \quad \max \tag{2.4.19}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i=\overline{1,m}, \tag{2.4.20}$$

$$x_j \geq 0, \ j=\overline{1,n}. \tag{2.4.21}$$

Перший етап симплекс-алгоритму розв'язання цієї задачі полягає в знаходженні початкового опорного плану. В попередньому прикладі початковий опорний план ми знаходили методом простого перебору різних варіантів наборів вільних змінних. В ряді окремих випадків початковий опорний план можна знайти безпосередньо, наприклад, коли система обмежень задачі містить m лінійно незалежних одиничних векторів. В загальному випадку вдаються до спеціальних методів, одним з яких є метод штучного базису. Цікавим є те, що сам цей метод також базується на симплекс-методі.

Запишемо систему (2.4.20) у вигляді

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = 0, \quad i=\overline{1,m}. \tag{2.4.22}$$

Без обмеження загальності можна вважати, що $b_i \geq 0$ (якщо $b_i < 0$, то множимо i–е рівняння на -1), $i=\overline{1,m}$. Для знаходження початкового опорного розв'язку складаємо допоміжну задачу

$$f=\sum_{i=1}^{m} v_i \to \min, \tag{2.4.23}$$

$$v_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j, \qquad i=\overline{1,m}, \tag{2.4.24}$$

$$x_j \geq 0, \ \mathrm{j}=\overline{1,n}, \ \ v_i \geq 0, \ i=\overline{1,m}, \tag{2.4.25}$$

де v_i - допоміжні невідомі.

Допоміжна задача має три важливі властивості.

1. Розв'язок

$$\boldsymbol{T}=(x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0, v_1=b_1, v_2=b_2, \ldots, v_m=b_m) \qquad (2.4.26)$$

є опорним, тобто допустимим базисним розв'язком задачі (2.4.23) - (2.4.25).

2. Допоміжна задача (2.4.23) - (2.4.25) завжди має оптимальний розв'язок.

3. Нехай $\boldsymbol{T_0}=(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, v_1^0, v_2^0, ..., v_m^0)$ – оптимальний опорний розв'язок допоміжної задачі (2.4.23)-(2.4.25). Тоді: 1) якщо $v_1^0=0, v_2^0=0, ..., v_m^0=0$, то $\boldsymbol{X_0}=(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ – шуканий опорний розв'язок вихідної задачі (2.4.19) - (2.4.21); 2) якщо серед чисел $v_1^0, v_2^0, ..., v_m^0$ є додатні, вихідна задача (2.4.19) - (2.4.21) взагалі не має допустимих розв'язків.

Перша властивість випливає із припущення, що $b_i \geq 0$. В розв'язку $\boldsymbol{T}=(x_1=0, x_2=0, \ldots, x_n=0, v_1=b_1, v_2=b_2, \ldots, v_m=b_m)$ змінні x_i вибрані за вільні, v_i – за базисні. Друга властивість також очевидна, оскільки цільова функція f обмежена знизу нулем.

Щодо третьої властивості: оптимальний опорний розв'язок допоміжної задачі (2.4.23) - (2.4.25)

$$\boldsymbol{T_0}=\boldsymbol{T_{0б}}=(x_1^0, x_2^0, ..., x_{n-1}^0=0, x_n^0=0, v_1^0=0, v_2^0=0, ..., v_m^0=0)$$

є одним із допустимих базисних розв'язків, тобто серед $n+m$ змінних допоміжної задачі, принаймні (n+m) - m = n змінних повинні бути рівними нулю в цьому розв'язку. За умовою в оптимальному розв'язку допоміжної задачі рівні нулю всі m допоміжних змінних v_i, отже рівними нулю повинні бути ще n-m змінних x_j вихідної задачі, а це і означає, що розв'язок $\boldsymbol{X_0}=(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ системи (2.4.20) є не тільки допустимим, а ще і базисним.

Якщо ж серед чисел $v_1^0, v_2^0, ..., v_m^0$ є додатні, то це означає, що принаймні одне з рівнянь системи обмежнь (2.4.20) не виконується, тобто вихідна задача має пусту область допустимих значень.

Важливо, що для допоміжної задачі початковий опорний план завжди відомий. Отже, допоміжну задачу можна розв'язати симплекс-методом. Таким чином, методом штучного базису завжди можна знайти початковий опорний план вихідної задачі, або встановити її нерозв'язність.

Приклад 2. Застосувавши метод штучного базису для відшукання початкового опорного плану, знайти розв'язок задачі

$$z=7x_1+6x_2 \rightarrow \max, \qquad (2.4.27)$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3 = 8, \\ x_1+x_2+5x_4 = 6, \\ x_1+x_5=5, \\ 2x_2-2x_6=1, \end{cases} \qquad (2.4.28)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \qquad (2.4.29)$$

Розв'язання. Розв'язуватимемо задачу за допомогою Maple.

```
> `Цільова функція`;
z:=7*x[1]+6*x[2]:
print('z'=z,`->`*max);
```

Цільова функція

$$z = 7\,x_1 + 6\,x_2, \text{->}\ max$$

Запишемо систему обмежень (2.4.28)

```
> e1:=2*x[1]+1*x[2]-x[3]=8;
e2:=1*x[1]+1*x[2]+5*x[4]=6;
e3:=x[1]-0*x[2]+x[5]=5;
e4:=0*x[1]+2*x[2]-2*x[6]=1;
```

$$e1 := 2\,x_1 + x_2 - x_3 = 8$$

$$e2 := x_1 + x_2 + 5\,x_4 = 6$$

$$e3 := x_1 + x_5 = 5$$

$$e4 := 2\,x_2 - 2\,x_6 = 1$$

Перепишемо систему обмежень у вигляді (2.4.22)

```
> n:=6:m:=4:
sys:=map(zz->rhs(zz)-lhs(zz)=0,[seq(e||k,k=1..4)]):
for i in sys do
 i
od;
```

$$8 - 2\,x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$6 - x_1 - x_2 - 5\,x_4 = 0$$

$$5 - x_1 - x_5 = 0$$

$$1 - 2\,x_2 + 2\,x_6 = 0$$

Складемо допоміжну задачу (2.4.23)- (2.4.25)

```
> f:=v[1]+v[2]+v[3]+v[4]:
print('f'=f,`->`*min);
for i from 1 to m do
 eq||i:=v[i]=lhs(sys[i])
od;
```

$$f = v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \text{->}\ min$$

$$eq1 := v_1 = 8 - 2\,x_1 - x_2 + x_3$$

$$eq2 := v_2 = 6 - x_1 - x_2 - 5\,x_4$$

$$eq3 := v_3 = 5 - x_1 - x_5$$

$$eq4 := v_4 = 1 - 2\,x_2 + 2\,x_6$$

Виберемо допоміжні змінні v_i за базисні та знайдемо загальний розв'язок допоміжної задачі

```
> solsV1:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4},
{v[1],v[2],v[3],v[4]});
```

$$solsV1 := \{v_1 = 8 - 2\,x_1 - x_2 + x_3,\ v_2 = 6 - x_1 - x_2 - 5\,x_4,$$
$$v_3 = 5 - x_1 - x_5,\ v_4 = 1 - 2\,x_2 + 2\,x_6\}$$

Початковий опорний план (2.4.26) допоміжної задачі має вигляд

```
> T:=subs(seq(x[k]=0,k=1..6),solsV1) union
{seq(x[k]=0,k=1..6)};
```

$$T := \{x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0,\ v_1 = 8,\ v_2 = 6,$$
$$v_3 = 5,\ v_4 = 1\}$$

Перевіримо знайдений опорний план на оптимальність. Для цього виразимо цільову функцію допоміжної задачі через вільні невідомі

```
> 'f'=subs(solsV1,f);
```

$$f = 20 - 4\,x_1 - 4\,x_2 + x_3 - 5\,x_4 - x_5 + 2\,x_6$$

Збільшенням вільних змінних, які входять в останній вираз із від'ємними коефіцієнтами, можна зменшити (тобто покращити) цільову функцію, отже поточний опорний розв'язок не є оптимальним. Виводити з вільних будемо змінну x_4, оскільки коефіцієнт перед цією функцією від'ємний та більший за модулем. Всі вільні змінні, окрім x_4, покладемо рівними нулю та знайдемо відповідні вирази для базисних змінних

```
> for i from 1 to m do
 subs(x[1]=0, x[2]=0, x[3]=0, x[5]=0, x[6]=0,
solsV1[i])
od;
```

$$v_1 = 8$$
$$v_2 = 6 - 5\,x_4$$
$$v_3 = 5$$
$$v_4 = 1$$

Збільшення змінної x_4 обмежує тільки змінна v_2, причому збільшувати x_4 можна аж доки v_2 не стане рівною нулю. Отже, вільна змінна x_4 переводиться в базисні замість v_2. Знайдемо відповідний загальний розв'язок та перевіримо його на оптимальність

```
> solsV2:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4},
{v[1],x[4],v[3],v[4]});
'f'=subs(solsV2,f);
```

$$solsV2 := \{v_1 = 8 - 2\,x_1 - x_2 + x_3,\ v_3 = 5 - x_1 - x_5,$$
$$v_4 = 1 - 2\,x_2 + 2\,x_6,\ x_4 = -\frac{1}{5}\,v_2 + \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\,x_1 - \frac{1}{5}\,x_2\}$$

$$f = 14 - 3\,x_1 - 3\,x_2 + x_3 + v_2 - x_5 + 2\,x_6$$

Знову ж таки маємо від'ємні коефіцієнти перед вільними змінними, тобто опорний план не оптимальний. Виводитимемо із вільних змінну x_1. Щоб визначити замість якої з базисних змінних буде введено x_1, знаходимо вирази для базисних змінних в поточному розв'язку при нульових значеннях всіх вільних невідомих, окрім x_1:

```
> for i from 1 to m do
 eqv[i]:=subs(x[2]=0, x[3]=0,  x[5]=0, x[6]=0,v[2]=0,
solsV2[i])
od;
```

$$eqv_1 := v_1 = 8 - 2\,x_1$$

$$eqv_2 := v_3 = 5 - x_1$$

$$eqv_3 := v_4 = 1$$

$$eqv_4 := x_4 = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\,x_1$$

Всі праві частини отриманих рівнянь, які залежать від x_1, прирівняємо до нуля та знайдемо відповідні значення x_1

```
> [v[1]=0],rhs(eqv[1])=0,`-->`*x[1]=
solve(rhs(eqv[1])=0,x[1]);
[v[2]=0],rhs(eqv[2])=0,`-->`*x[1]=
solve(rhs(eqv[2])=0,x[1]);
[lhs(eqv[4])=0],rhs(eqv[4])=0,`-->`*x[1]=
solve(rhs(eqv[4])=0,x[1]);
```

$$[v_1 = 0],\, 8 - 2\,x_1 = 0,\, \text{-->}\; x_1 = 4$$

$$[v_2 = 0],\, 5 - x_1 = 0,\, \text{-->}\; x_1 = 5$$

$$[v_4 = 0],\, \frac{6}{5} - \frac{1}{5}\,x_1 = 0,\, \text{-->}\; x_1 = 6$$

Із отриманих значень x_1 серед невід'ємних вибираємо найменше – "4". Це означає, що при x_1=4 → v_1=0 і подальше збільшення x_1 неможливе, оскільки v_1 стане від'ємною, тобто вийде за межі області допустимих значень. Отже змінна x_1 вводиться в базисні змінні замість v_1:

```
> solsV3:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4},
{x[1],x[4],v[3],v[4]});
```

$$solsV3 := \{v_4 = 1 - 2\,x_2 + 2\,x_6,$$

$$x_4 = -\frac{1}{5}\,v_2 + \frac{2}{5} - \frac{1}{10}\,x_2 + \frac{1}{10}\,v_1 - \frac{1}{10}\,x_3,$$

$$v_3 = \frac{1}{2}\,v_1 + 1 - x_5 + \frac{1}{2}\,x_2 - \frac{1}{2}\,x_3,\, x_1 = -\frac{1}{2}\,v_1 + 4 - \frac{1}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_3\}$$

Звернемо увагу, значення змінної x_1=4 в базисному розв'язку, який дістаємо із отриманого загального при нульових значення вільних змінних x_2, x_3, x_5, x_6, v_1, v_2 обумовлено саме тим, що у вільні переведена змінна v_1.

```
> 'f'=subs(solsV3,f);
```

$$f=\frac{3}{2}v_1+v_2+2-x_5-\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+2\,x_6$$

Отриманий опорний план не оптимальний. Вводитимемо в базисні змінну x_2

```
> for i from 1 to m do
 eqv[i]:=subs( x[3]=0,  x[5]=0, x[6]=0,v[1]=0,v[2]=0,
solsV3[i])
od;
```

$$eqv_1 := v_4 = 1-2\,x_2$$

$$eqv_2 := x_4 = \frac{2}{5}-\frac{1}{10}x_2$$

$$eqv_3 := x_1 = 4-\frac{1}{2}x_2$$

$$eqv_4 := v_3 = 1+\frac{1}{2}x_2$$

Розв'язанням відповідних рівнянь, дістанемо

```
> for i in [1,2,3,4] do
 print([lhs(eqv[i])=0],rhs(eqv[i])=0,`-->`*x[1]=
solve(rhs(eqv[i])=0,x[2]))
end do:
```

$$[v_4=0],\ 1-2\,x_2=0,\ \text{-->}\ x_1=\frac{1}{2}$$

$$[x_4=0],\ \frac{2}{5}-\frac{1}{10}x_2=0,\ \text{-->}\ x_1=4$$

$$[x_1=0],\ 4-\frac{1}{2}x_2=0,\ \text{-->}\ x_1=8$$

$$[v_3=0],\ 1+\frac{1}{2}x_2=0,\ \text{-->}\ x_1=\text{-}2$$

Серед додатних найменше значення x_2=1/2. Отже вільна змінна x_2 вводиться в базисні змінні замість невідомої v_4:

```
> solsV4:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4},
{x[1],x[4],v[3],x[2]});
'f'=subs(solsV4,f);
```

$$solsV4 := \{x_4=-\frac{1}{5}v_2+\frac{7}{20}-\frac{1}{10}x_3+\frac{1}{20}v_4-\frac{1}{10}x_6+\frac{1}{10}v_1,$$
$$v_3=\frac{1}{2}v_1+\frac{5}{4}+\frac{1}{2}x_6-x_5-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{4}v_4,\ x_2=-\frac{1}{2}v_4+\frac{1}{2}+x_6,$$
$$x_1=-\frac{1}{2}v_1+\frac{15}{4}-\frac{1}{2}x_6+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{4}v_4\}$$

$$f=\frac{3}{2}v_1+v_2+\frac{5}{4}+\frac{1}{2}x_6-x_5-\frac{1}{2}x_3+\frac{3}{4}v_4$$

Виводитимемо з вільних змінну x_3:

```
> for i from 1 to m do
 eqv[i]:=subs( x[5]=0, x[6]=0,v[1]=0,v[2]=0,v[4]=0,
solsV4[i])
od;
```

$$eqv_1 := x_4 = \frac{7}{20} - \frac{1}{10} x_3$$

$$eqv_2 := x_1 = \frac{15}{4} + \frac{1}{2} x_3$$

$$eqv_3 := x_2 = \frac{1}{2}$$

$$eqv_4 := v_3 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} x_3$$

```
> for i in [1,2,4] do
 print([lhs(eqv[i])=0],rhs(eqv[i])=0,`-->`*x[3]=
solve(rhs(eqv[i])=0,x[3]))
end do:
```

$$[x_4 = 0], \frac{7}{20} - \frac{1}{10} x_3 = 0, \text{-->}\ x_3 = \frac{7}{2}$$

$$[x_1 = 0], \frac{15}{4} + \frac{1}{2} x_3 = 0, \text{-->}\ x_3 = \frac{-15}{2}$$

$$[v_3 = 0], \frac{5}{4} - \frac{1}{2} x_3 = 0, \text{-->}\ x_3 = \frac{5}{2}$$

Найменше серед додатних значень x_3 – число “5/2”, отже змінна x_3 замінить в базисі невідому v_3.

```
> solsV5:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4},
{x[1],x[4],x[3],x[2]});
'f'=subs(solsV5,f);
```

$$solsV5 := \{x_1 = -v_3 + 5 - x_5, x_2 = -\frac{1}{2} v_4 + \frac{1}{2} + x_6,$$

$$x_4 = -\frac{1}{5} v_2 + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} v_3 + \frac{1}{5} x_5 + \frac{1}{10} v_4 - \frac{1}{5} x_6,$$

$$x_3 = v_1 + \frac{5}{2} - 2\, v_3 - 2\, x_5 - \frac{1}{2} v_4 + x_6\}$$

$$f = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

Отримано оптимальний план допоміжної задачі, причому всі допоміжні змінні виведені у вільні.

Значення базисних невідомих в початковому опорному плані вихідної задачі

```
> X1:=subs(x[5]=0,x[6]=0,v[1]=0,v[2]=0,v[3]=0,v[4]=0,
solsV5);
```

$$X1 := \{x_2 = \frac{1}{2}, x_1 = 5, x_3 = \frac{5}{2}, x_4 = \frac{1}{10}\}$$

Знайдемо загальний розв'язок вихідної задачі, що відповідає вільним змінним x_5, x_6,

```
> Vilni:=x[5],x[6];
sols1:=solve({e1,e2,e3,e4},{x[1],x[2],x[3],x[4]});
```

$$Vilni := x_5, x_6$$

$$sols1 := \{ x_1 = 5 - x_5, x_4 = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} x_5 - \frac{1}{5} x_6, x_3 = \frac{5}{2} - 2\,x_5 + x_6, x_2 = \frac{1}{2} + x_6 \}$$

та перевіримо його на оптимальність

```
> 'z'=subs(sols1,z);
```

$$z = 38 - 7\,x_5 + 6\,x_6$$

Пам'ятаємо, що вихідна задача, на відміну від допоміжної, сформульована на знаходження z_{max}. Отже, збільшуючи вільну змінну x_6, будемо покращувати цільову функцію. Покладаємо x_5=0:

```
> for i from 1 to m do
 eq[i]:=subs( x[5]=0,sols1[i])
od;
```

$$eq_1 := x_1 = 5$$

$$eq_2 := x_4 = \frac{1}{10} - \frac{1}{5} x_6$$

$$eq_3 := x_3 = \frac{5}{2} + x_6$$

$$eq_4 := x_2 = \frac{1}{2} + x_6$$

граничні значення змінної x_6

```
> [x[1]=0],rhs(eq[1])=0,`-->`*x[6]=
solve(rhs(eq[1])=0,x[6]);
> [x[4]=0],rhs(eq[2])=0,`-->`*x[6]=
solve(rhs(eq[2])=0,x[6]);
> [x[3]=0],rhs(eq[3])=0,`-->`*x[6]=
solve(rhs(eq[3])=0,x[6]);
> [x[2]=0],rhs(eq[4])=0,`-->`*x[6]=
solve(rhs(eq[4])=0,x[6]);
```

$$[x_1 = 0], 5 = 0, \text{-->}\ x_6 = (\ )$$

$$[x_4 = 0], \frac{1}{10} - \frac{1}{5} x_6 = 0, \text{-->}\ x_6 = \frac{1}{2}$$

$$[x_3 = 0],\ \frac{5}{2} + x_6 = 0,\ \text{-->}\ x_6 = \frac{-5}{2}$$

$$[x_2 = 0],\ \frac{1}{2} + x_6 = 0,\ \text{-->}\ x_6 = \frac{-1}{2}$$

Обмеження на збільшення змінної x_6 накладає тільки рівняння для змінної x_4, отже вільну змінну x_6 переводимо в базисні замість змінної x_4.

```
> sols2:=solve({e1,e2,e3,e4},{x[1],x[2],x[3],x[6]});
'z'=subs(sols2,z);
```

$$Vilni := x_4, x_5$$

$$sols2 := \{x_1 = 5 - x_5, x_3 = -5\,x_4 + 3 - x_5, x_2 = -5\,x_4 + 1 + x_5, x_6 = \frac{1}{2} - 5\,x_4 + x_5\}$$

$$z = 41 - x_5 - 30\,x_4$$

Умови оптимальності виконуються. Запишемо оптимальний опорний розв'язок

```
> subs(x[4]=0,x[5]=0,sols2) union {x[4]=0,x[5]=0};
```

$$\{x_4 = 0, x_5 = 0, x_1 = 5, x_6 = \frac{1}{2}, x_3 = 3, x_2 = 1\}$$

Наведений приклад показує, що знаходження початкового опорного плану методом штучного базису є самостійною задачею лінійного програмування, розв'язання якої нерідко приводить до значних обчислювальних витрат. М-метод [15, 18, 26, 37] дозволяє об'єднати етап знаходження початкового опорного розв'язку методом штучного базису з етапом розв'язання самої вихідної задачі.

3. ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

Всі лабораторні роботи підготовлені в форматі Maple–сторінок та придатні для роботи у всіх версіях, включаючи і DEMO-Maple.

Завдання для різних варіантів генеруються програмою в середовищі додатка Maple.

Лабораторні роботи № 3-5 присвячені окремим послідовним етапам розв'язання за допомогою симплекс-алгоритму однієї і тої самої задачі.

Maple–файли лабораторних робіт можна скачати з головної інтернет-сторінки.

Далі наведено Maple–сторінки лабораторних робіт, збережених у форматі *.rtf.

3.1. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1. Розв'язування систем лінійних рівнянь

Мета роботи: навчитися розв'язувати загальні системи лінійних рівнянь у середовищі Maple.

Задача 1. Знаходження розв'язку системи **n** лінійних рівнянь з **n** невідомими.

Введіть номер вашого варіанта

```
> restart:with(linalg):

#*********************************
#                                *
#                                *
`*`:   `Мій варіант`:=500:      #*
#                                *
#                                *
#*********************************

printf(`                                  З а д а ч а
1`);
print('`Мій варіант`'=`Мій варіант`);
n:=4:
die := rand(-6..6):
for i from 1 to `Мій варіант` do
    MA:=linalg[matrix](n,n,[seq(die(),k=1..n*n)]);
    MX:=linalg[matrix](1,n,[seq(die(),k=1..n)]);
od:
#evalm(MA);evalm(MX);
for i from 1 to n do
  eq.i:=add( MA[i,k]*x[k], k=1..n )=add(
MA[i,k]*MX[1,k], k=1..n );
```

```
od:
printf(`
СИСТЕМА ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ`);
for i from 1 to n do
  eq.i;
od;
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
    З а д а ч а  1

                   Мій варіант:=500
СИСТЕМА ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ
```

$$6\,x_1 - 4\,x_2 + 3\,x_3 - 5\,x_4 = \text{-}35$$

$$2\,x_1 - 4\,x_2 + 3\,x_3 - 6\,x_4 = \text{-}15$$

$$-6\,x_1 - x_2 - 3\,x_3 = 45$$

$$3\,x_2 + 3\,x_3 + 2\,x_4 = \text{-}13$$

Послідовність виконання роботи:

1. Перевірити умову існування розв'язку, застосувавши команду det(MA) , де MA - матриця коефіцієнтів системи. {Вивести матрицю MA на екран дисплея можна за допомогою команди evalm(MA)}

2. Знайти розв'язок системи, застосувавши команду **`solve`**.

3. Перевірити правильність розв’язання, підставивши знайдені значення x_1, x_2, x_3, x_4 у вихідні рівняння. Для цього застосувати команду **subs**.

Примітки: 1. Приклад запису команд *solve* та *subs* дивись у додатку.

2. Необхідно знати описання всіх команд Maple, які використовуються в цій лабораторній роботі.

Задача 2. Знаходження розв'язку системи **m** лінійних рівнянь З **n** невідомими (**m<n**).

```
> restart:with(linalg):

#**********************************
#                                *
#                                *
`*`:    `Мій варіант`:=500:     #*
#                                *
#                                *
#**********************************
```

```
printf(`                                 З а д а ч а
2`);
print('`Мій варіант`'=`Мій варіант`);
m:=3:n:=4:
die := rand(-3..6):
for i from 1 to `Мій варіант` do
    MA:=linalg[matrix](m,n,[seq(die(),k=1..m*n)]);
    MX:=linalg[matrix](1,n,[seq(die(),k=1..n)]);
od:
#evalm(MA);evalm(MX);
for i from 1 to m do
  eq.i:=add( MA[i,k]*x[k], k=1..n )=add(
MA[i,k]*MX[1,k], k=1..n );
od:
printf(`
СИСТЕМА ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ`);
for i from 1 to m do
  eq.i;
od;
die := rand(1..4):j:=die():
#MAb:=delcols(MA, j..j):
```

```
    З а д а ч а  2
                  Мій варіант:=500
СИСТЕМА ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ
```

$$5\,x_1-2\,x_2+x_3-2\,x_4=31$$
$$3\,x_1+6\,x_2+x_3+3\,x_4=33$$
$$4\,x_1+x_2+4\,x_3+4\,x_4=31$$

```
> printf(`Виберіть за вільну невідому `);x[j];
Виберіть за вільну невідому
```

$$x_1$$

Послідовність виконання роботи.
Що потрібно зробити:
1. Перевірити, що базисний мінор відмінний від нуля.
2. Знайти загальний розв'язок системи, застосувавши команду **solve**.
3. Пересвідчитись у правильності знайденого розв'язку.
Додатки

```
#*****************************************************
#`РОЗВ'ЯЗОК1`:=solve({eq1,eq2,eq3,eq4},
{x[1],x[2],x[3],x[4]});
#subs(`РОЗВ'ЯЗОК1`,{eq1,eq2,eq3,eq4});
#*****************************************************
```

Питання до захисту лабораторної роботи № 1

1. Що називається рангом матриці?
2. Які змінні називаються базисними?
3. Які змінні називаються вільними? Чому їх так називають?
4. Як за допомогою визначника матриці визначити існування розв'язку системи лінійних рівнянь?
5. Дати означення загальному, частинному, базисному та невід'ємному розв'язкам системи лінійних рівнянь.
6. Як можна перевірити правильність знайденого розв'язку системи лінійних рівнянь?

```
#****************************************************
```

3.2. ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2. Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування

Мета роботи**: навчитися розв'язувати двовимірні задачі лінійного програмування.**

Задача. Знайти найбільше значення функції

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

при заданих обмеженнях на аргументи x_1 та x_2.

Введіть номер вашого варіанта

```
> restart:with(linalg):

#*********************************
#                                *
#                                *
`*`:    `Мій варіант`:=500;     #*
#                                *
#                                *
#*********************************

die := rand(1..12):
for i from 1 to `Мій варіант` do
    z:=die()*x[1]+die()*x[2];
od:
Set:=[[0, 5], [0, 1], [2, 0], [6, 0], [10, 1], [17,
3], [20, 10], [19, 16],[17,20],[13,23], [7, 21], [2,
15]]:
Nmin:=5:die2:= rand(Nmin..nops(Set)-1):
for i from 1 to `Мій варіант` do
    nP:=die2();
od:
die1:= rand(1..nops(Set)):
```

```
nSet1:={}:
for i while nops(nSet1)<nops(Set)-nP do
 nSet1:={op(nSet1),die1()}
od:'nSet1'=nSet1:#'nSet1'=nSet1;
S2:={$ 1..nops(Set)} minus nSet1:
S2:=convert(S2,'list'):S2:=sort(S2):
Set1:=[]:
for i in S2 do
 Set1:=[op(Set1),Set[i]]
od:
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

Мій варіант:=500

```
> L2p := ( M1, M2)->
    if M1[1]<>M2[1] and M1[2]<>M2[2] then
      (x[1]-M1[1])/(M2[1]-M1[1])-(x[2]-M1[2])/(M2[2]-
M1[2])
   elif M1[1]=M2[1] and M1[2]<>M2[2] then
      x[1]-M1[1]
   elif M1[2]=M2[2] and M1[1]<>M2[1] then
      x[2]-M1[2]
   else
      print(`Coincide points`);
   fi:
expr_n:=(x,x1,x2)->if 1>0 then

EX:=[coeffs(x)];EX:=denom(EX);EX:=lcm(op(EX));

(coeff(x,x1)*x1+coeff(x,x2)*x2)*EX>=(-
x+coeff(x,x1)*x1+coeff(x,x2)*x2)*EX
                     fi:#expr_n(5*x[1]+2*x[2]-10);
kj:=(j,k)->j-trunc((j-1)/k)*k:

> Set_uneq := LC->if 1>0 then
 uns:={}:
 for i from 1 to nops(LC) do
 j:=i+2:
   ui:=L2p(LC[kj(i,nops(LC))],LC[kj(i+1,nops(LC))]);
 while
subs(x[1]=LC[kj(j,nops(LC))][1],x[2]=LC[kj(j,nops(LC)
)][2],ui)=0 and j<2*nops(LC) do
    j := j + 1
 od;
```

```
jxr:=subs(x[1]=LC[kj(j,nops(LC))][1],x[2]=LC[kj(j,nop
s(LC))][2],ui):
   if jxr>0 then
     uns:=uns union {expr_n(ui,x[1],x[2])}
   elif jxr<0 then
     uns:=uns union
{lhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))>=rhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))
}
   else
     uns:=uns union
{lhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))=rhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))}
   fi;
 od;
 ui:=convert(uns,list);
 map(zx->`if`(type(lhs(zx),numeric),-rhs(zx)<=-
lhs(zx),zx),ui);
 fi:
linear_constraints:=[op({op(Set_uneq(Set1))} minus {-
x[1] <= 0,-x[2] <= 0,x[1] >= 0,x[2] >= 0})]:
Warning, `EX` is implicitly declared local to procedure `expr_n`

Warning, `uns` is implicitly declared local to procedure `Set_uneq`

Warning, `i` is implicitly declared local to procedure `Set_uneq`

Warning, `j` is implicitly declared local to procedure `Set_uneq`

Warning, `ui` is implicitly declared local to procedure `Set_uneq`

Warning, `jxr` is implicitly declared local to procedure `Set_uneq`

> printf(`                              ЦІЛЬОВА
ФУНКЦІЯ`);
MaxMin:=`if`(frac(My_variant/2)=0,`max`,`min`):
'z'=z,`->`*MaxMin;

printf(`                    О  Б  М  Е  Ж  Е  Н  Н
Я`);
map(print,linear_constraints):
```

ЦІЛЬОВА ФУНКЦІЯ

$$z = 9\,x_1 + 6\,x_2, \text{->}\ min$$

О Б М Е Ж Е Н Н Я

$$15\,x_1 - 17\,x_2 \le -85$$

$$-x_1 + 3\,x_2 \le 56$$

$$-6\,x_1 + 5\,x_2 \le 63$$

$$-5\,x_1 + x_2 \le 5$$

$$3\,x_1 + 4\,x_2 \le 131$$

Послідовність виконання роботи:
(Всі пункти, які не відмічено зірочкою, автоматично виконуються Maple-програмою, пункти, що відмічені зірочкою *, потрібно виконати самостійно).

1. Доповнити обмеження умовами невід'ємності невідомих;
2. Побудувати область, обмежену заданими нерівностями;
3. **Підібрати значення меж x1, x2, y1, y2 - для виведення графіка;** *
4. Задати значення коефіцієнтів цільової функції c_1 та c_2; *
5. Побудувати пряму лінію, що параллельна градієнту цільової функції. Рівняння прямої:

$$x_2 = \frac{c_2\,x_1}{c_1};$$

6. Побудувати опорну лінію, що перпендикулярна до градієнта цільової функції. Рівняння прямої:

$$x_2 = -\frac{c_1\,x_1}{c_2} + b;$$

7. Значення b **для опорної лінії необхідно підібрати таким чином, щоб опорна лінія перетинала область допустимих значень;** *
8. **Вивести область допустимих значень, опорну линію та лінію дії градієнта на один графік;**
9. Перенести рисунок у зошит або роздрукувати його, вказати на ньому напрям градієнта та рівняння всіх прямих; *
10. Знайти точки на графіку, у яких цільова функція набуває найбільшого та найменшого значень. *
11. Визначити координати цих точок та відповідні значення цільової функції. *

```
> #1.Доповнення обмежень умовами невід'ємності невідомих:
linear_constraints1:=convert(linear_constraints,set)
union {x[1]>=0,x[2]>=0}:
map(print,linear_constraints1):
```

$$0 \le x_1$$
$$0 \le x_2$$
$$15\,x_1 - 17\,x_2 \le -85$$
$$-x_1 + 3\,x_2 \le 56$$

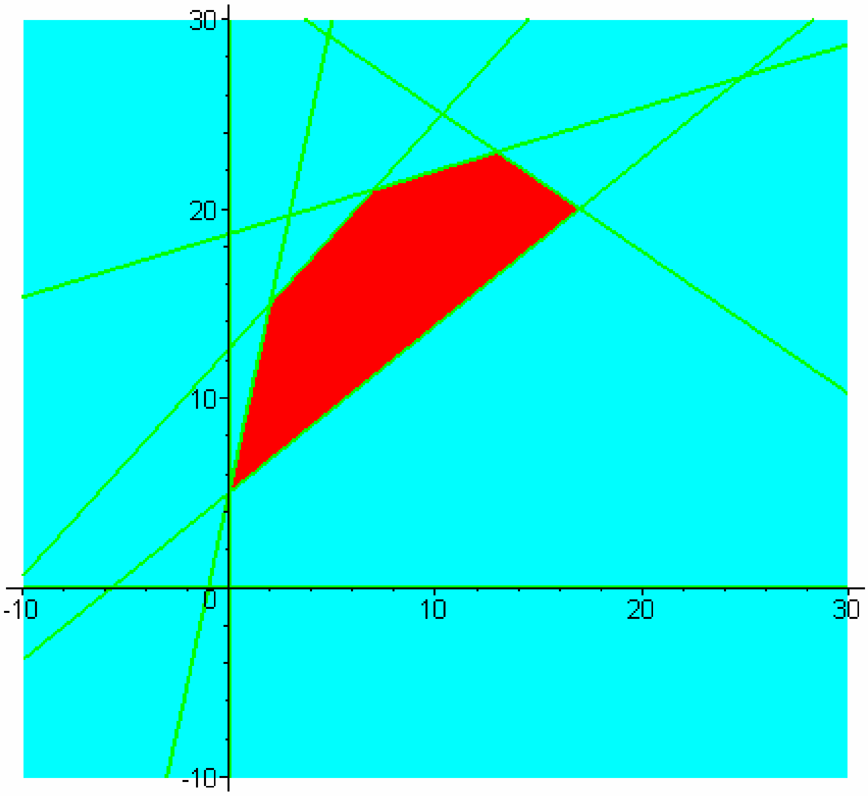
$$-6x_1 + 5x_2 \le 63$$

$$-5x_1 + x_2 \le 5$$

$$3x_1 + 4x_2 \le 131$$

> #2. Побудова області, що обмежена заданими нерівностями
#3.

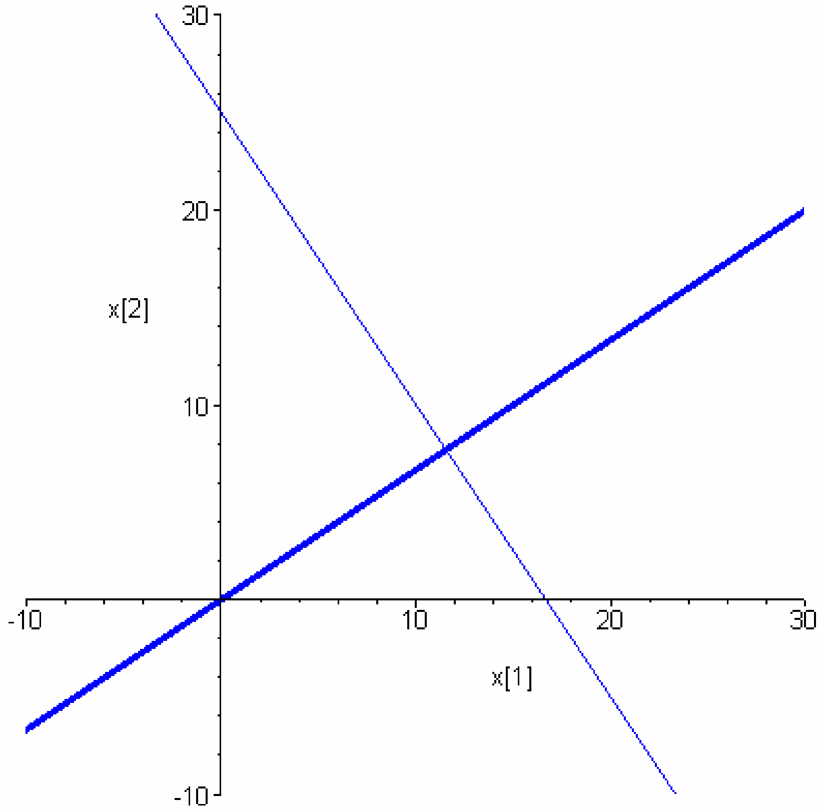
```
x1:=-10:x2:=30:
y1:=-10:y2:=30:
g10:=plots[inequal]( linear_constraints1,
x[1]=x1..x2, x[2]=y1..y2,
optionsfeasible=(color=red),
optionsopen=(color=blue,thickness=2),
optionsclosed=(color=green, thickness=2),
optionsexcluded=(color=cyan) ):
g10;
```



> **#4, 5, 6, 7. Задання значень коефіцієнтів цільової функції та побудова прямої лінії, що паралельна градієнту цільової функції, і побудова опорної лінії**

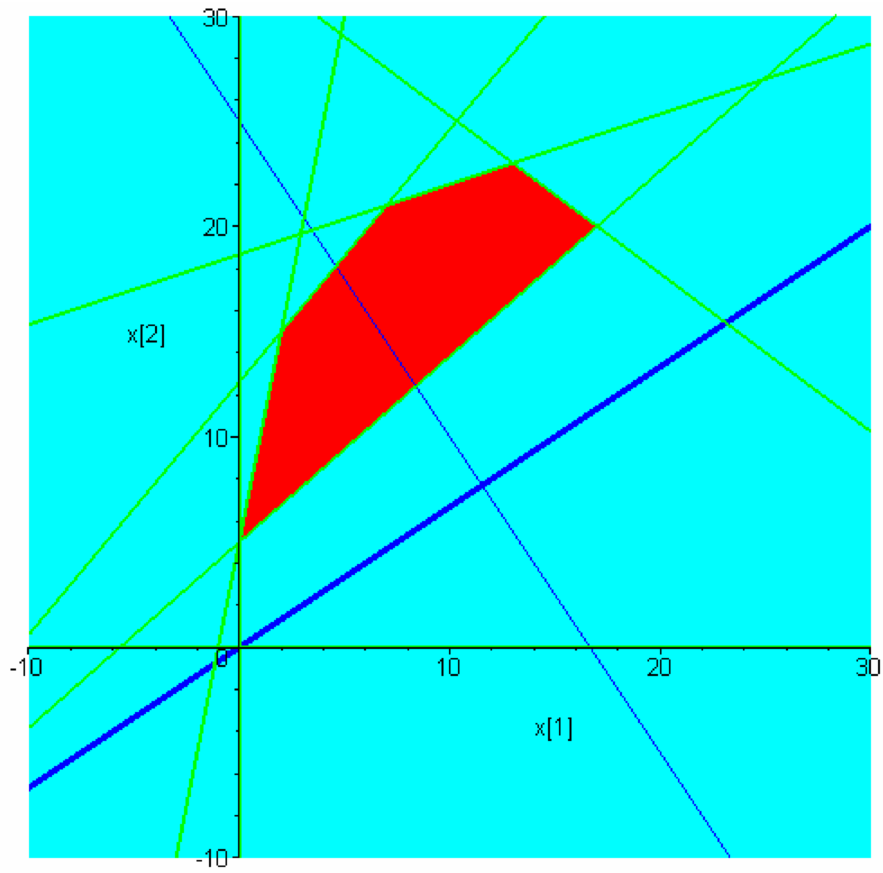
```
c[1]:=9:c[2]:=6:b:=25:
g20:=plot([c[2]*x[1]/c[1],-
c[1]*x[1]/c[2]+b],x[1]=x1..x2,
x[2]=y1..y2,color=blue,thickness=[4,1],scaling=CONSTR
AINED):
```

```
g20;
```



> # 8. Виведення області допустимих значень, опорної лінії та лінії дії градієнта на один графік

```
plots[display]([g10,g20],scaling=CONSTRAINED);
```



Питання до захисту лабораторної роботи № 2

1. Які задачі лінійного програмування можна, а які не можна розв'язувати графічним методом? Чому?
2. Геометричний зміст умов невід'ємності.
3. Яка область є розв'язком нерівності $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$?
4. Як визначити півплощину, що є розв'язком нерівності $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$?
5. Що називається областю допустимих значень? Яку форму має ця область?
6. Дати геометричне тлумачення випадків, у яких розв'язок задачі лінійного програмування не існує.
7. Координати яких точок області допустимих значень не можуть бути розв'язком задачі лінійного програмування?
8. Що називається градієнтом функції та його властивості?
9. Звідки випливає, що величина та напрямок градієнта цільової функції задачі лінійного програмування є одним й тим самими для будь-якої точки площини?
10. Чому дорівнюють координати градієнта цільової функції?
11. Яка важлива умова виконується для всіх точок опорної лінії при лінійній цільовій функції?
12. Як визначити координати оптимальної вершини?
13. У яких випадках маємо нескінченну множину розв'язків задачі лінійного програмування?
14. Із всіх варіантів відповіді вкажіть можливі випадки.
    Кількість різних оптимальних значень цільової функції може бути рівна:
    а) 1; б) 1 або 2; с) 1 або ∞; д) 0.
15. Із всіх варіантів відповіді вкажіть можливі випадки.
    Кількість точок, в яких цільова функція набуває оптимального значення, може бути рівна:
    а) 1; б) скінченному цілому числу; с) ∞; д) 0.

#***

3.3 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3. Симплекс–метод: знаходження початкового опорного розв’язку

Мета роботи: навчитися зводити задачу лінійного програмування до канонічного вигляду та, користуючись командами Maple, знаходити початковий опорний план.

Задача. Знайти найбільше (найменше) значення функції

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

при заданих обмеженнях на аргументи x_1 та x_2.

Введіть номер вашого варіанта

```
> restart:with(linalg):

#*********************************
#                                *
#                                *
`*`:   `Мій варіант`:=500:      #*
#                                *
#                                *
#*********************************

die := rand(1..12):
for i from 1 to `Мій варіант` do
    z:=die()*x[1]+die()*x[2];
od:
Set:=[[0, 5], [0, 1], [2, 0], [6, 0], [10, 1], [17,
3], [20, 10], [19, 16],[17,20],[13,23], [7, 21], [2,
15]]:
Nmin:=5:die2:= rand(Nmin..nops(Set)-1):
for i from 1 to `Мій варіант` do
    nP:=die2();
od:
die1:= rand(1..nops(Set)):
nSet1:={}:
for i while nops(nSet1)<nops(Set)-nP do
 nSet1:={op(nSet1),die1()}
od:'nSet1'=nSet1:#'nSet1'=nSet1;
S2:={$ 1..nops(Set)} minus nSet1:
S2:=convert(S2,'list'):S2:=sort(S2):
Set1:=[]:
for i in S2 do
 Set1:=[op(Set1),Set[i]]
od:
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace

                   Мій варіант:=500

> L2p := ( M1, M2)->
    if M1[1]<>M2[1] and M1[2]<>M2[2] then
      (x[1]-M1[1])/(M2[1]-M1[1])-(x[2]-M1[2])/(M2[2]-
M1[2])
   elif M1[1]=M2[1] and M1[2]<>M2[2] then
      x[1]-M1[1]
   elif M1[2]=M2[2] and M1[1]<>M2[1] then
      x[2]-M1[2]
   else
```

```
      print(`Coincide points`);
   fi:
expr_n:=(x,x1,x2)->if 1>0 then

EX:=[coeffs(x)];EX:=denom(EX);EX:=lcm(op(EX));

(coeff(x,x1)*x1+coeff(x,x2)*x2)*EX>=(-
x+coeff(x,x1)*x1+coeff(x,x2)*x2)*EX
                 fi:#expr_n(5*x[1]+2*x[2]-10);
kj:=(j,k)->j-trunc((j-1)/k)*k:
Set_uneq := LC->if 1>0 then
 uns:={}:
 for i from 1 to nops(LC) do
 j:=i+2:
   ui:=L2p(LC[kj(i,nops(LC))],LC[kj(i+1,nops(LC))]);
 while
subs(x[1]=LC[kj(j,nops(LC))][1],x[2]=LC[kj(j,nops(LC)
)][2],ui)=0 and j<2*nops(LC) do
    j := j + 1
 od;

jxr:=subs(x[1]=LC[kj(j,nops(LC))][1],x[2]=LC[kj(j,nop
s(LC))][2],ui):
   if jxr>0 then
     uns:=uns union {expr_n(ui,x[1],x[2])}
   elif jxr<0 then
     uns:=uns union
{lhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))>=rhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))
}
   else
     uns:=uns union
{lhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))=rhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))}
   fi;
 od;
 ui:=convert(uns,list);
 map(zx->`if`(type(lhs(zx),numeric),-rhs(zx)<=-
lhs(zx),zx),ui);
 fi:
linear_constraints:=[op({op(Set_uneq(Set1))} minus {-
x[1] <= 0,-x[2] <= 0,x[1] >= 0,x[2] >= 0})]:
Warning, `EX` is implicitly declared local
Warning, `uns` is implicitly declared local
Warning, `i` is implicitly declared local
Warning, `j` is implicitly declared local
Warning, `ui` is implicitly declared local
Warning, `jxr` is implicitly declared local
```

```
> printf(`                                ЦІЛЬОВА
ФУНКЦІЯ`);
MaxMin:=`if`(frac(My_variant/2)=0,`max`,`min`):
'z'=z,`->`*MaxMin;

printf(`                    О  Б  М  Е  Ж  Е  Н  Н
Я`);
map(print,linear_constraints):
```

ЦІЛЬОВА ФУНКЦІЯ

$$z = 9\,x_1 + 6\,x_2, \text{->}\ min$$

О Б М Е Ж Е Н Н Я

$$-5\,x_1 + x_2 \le 5$$

$$3\,x_1 + 4\,x_2 \le 131$$

$$-6\,x_1 + 5\,x_2 \le 63$$

$$-x_1 + 3\,x_2 \le 56$$

$$15\,x_1 - 17\,x_2 \le \text{-}85$$

Послідовність виконання роботи:

1. Записати задачу лінійного програмування в **канонічному вигляді**.

2. Знайти початковий опорний розв'язок (план) користуючись командами Maple (solve, subs) :

а) визначити кількість вільних невідомих в системі обмежень;

б) вибрати вільні невідомі;

с) знайти загальний розв'язок системи обмежень;

д) знайти базисний розв'язок та визначити чи є він допустими**м**;

Зауваження: завдання пунктів б), в), д) виконувати послідовно, аж поки у пункті д) не буде отримано позитивну відповідь.

3. Для знайденого початкового опорного розв'язку визначити рівняння прямих, координати точки перетину яких дорівнюють значенням невідомих x_1, x_2. Побудувати графік для вказаних прямих.

Примітка: Вихідні дані для виконання цієї лабораторної роботи рекомендується підготовувати в текстовому файлі.

Інструкція з підготовки програмного коду в текстовому файлі та роботи з цим файлом в середовищі Maple.

Текст програми (або зміст робочого листа Maple) в синтаксисі Maple набирається в будь-якому текстовому редакторі і зберігається у форматі *.txt. З DEMO версії виконуємо команду відкриття файлу. В стандартному віконці, що з'явилося, вибираємо тип файлу Maple Text, вибираємо заздалегідь підготовлений текстовий файл і натискуємо кнопку OK.

В результаті з'являється наступне віконце, в якому з двох запропонованих текстових форматів Maple Text і Text необхідно вибрати Text. В результаті на робочому листі Maple з'явиться зміст текстового файлу. Далі необхідно виділити текст Maple-команд, клацнути правою кнопкою мишки і з контекстного меню, що з'явилося, вибрати Convert to -> Maple Input. Зліва з'являється позначення: "DEMO >", а колір шрифту стає червоним, тобто текст, перетворений в командний рядок, готовий до виконання.

```
>#**************************************************
```

Питання до захисту лабораторної роботи № 3

1. Як звести лінійну нерівність $a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 \le b_1$ або $b_1 \le a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2$ до еквівалентної рівності?
2. Як визначити кількість вільних невідомих в системі лінійних рівнянь?
3. Як вибрати вільні або базисні невідомі?
4. Як знайти базисний розв'язок?
5. Як визначити чи є базисний розв'язок допустимим?
6. Що робити, якщо знайдений базисний розв'язок виявився недопустимим?
7. Дати геометричну інтерпретацію базисних, допустимих та опорних розв'язків.

```
#*****************************************************
```

3.4 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4. Симплекс–метод: перевірка поточного опорного розв’язку на оптимальність та перехід до наступного опорного розв’язку

Мета роботи: навчитися перевіряти заданий опорний план на оптимальність та переходити до наступного опорного плану.

Задача. Знайти найбільше (найменше) значення функції

$$z = c_1\,x_1 + c_2\,x_2$$

при заданих обмеженнях на аргументи x_1 та x_2.

Введіть номер вашого варіанта

```
> restart:with(linalg):

#*********************************
#                               *
#                               *
`*`:   `Мій варіант`:=500;      #*
#                               *
#                               *
#*********************************
```

```
die := rand(1..12):
for i from 1 to `Мій варіант` do
    z:=die()*x[1]+die()*x[2];
od:
Set:=[[0, 5], [0, 1], [2, 0], [6, 0], [10, 1], [17,
3], [20, 10], [19, 16],[17,20],[13,23], [7, 21], [2,
15]]:
Nmin:=5:die2:= rand(Nmin..nops(Set)-1):
for i from 1 to `Мій варіант` do
    nP:=die2();
od:
die1:= rand(1..nops(Set)):
nSet1:={}:
for i while nops(nSet1)<nops(Set)-nP do
 nSet1:={op(nSet1),die1()}
od:'nSet1'=nSet1:#'nSet1'=nSet1;
S2:={$ 1..nops(Set)} minus nSet1:
S2:=convert(S2,'list'):S2:=sort(S2):
Set1:=[]:
for i in S2 do
 Set1:=[op(Set1),Set[i]]
od:
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

Мій варіант:=500

```
> L2p := ( M1, M2)->
    if M1[1]<>M2[1] and M1[2]<>M2[2] then
      (x[1]-M1[1])/(M2[1]-M1[1])-(x[2]-M1[2])/(M2[2]-
M1[2])
   elif M1[1]=M2[1] and M1[2]<>M2[2] then
      x[1]-M1[1]
   elif M1[2]=M2[2] and M1[1]<>M2[1] then
      x[2]-M1[2]
   else
      print(`Coincide points`);
   fi:
expr_n:=(x,x1,x2)->if 1>0 then

EX:=[coeffs(x)];EX:=denom(EX);EX:=lcm(op(EX));

 (coeff(x,x1)*x1+coeff(x,x2)*x2)*EX>=(-
x+coeff(x,x1)*x1+coeff(x,x2)*x2)*EX
                      fi:#expr_n(5*x[1]+2*x[2]-10);
kj:=(j,k)->j-trunc((j-1)/k)*k:
Set_uneq := LC->if 1>0 then
```

```
 uns:={}:
 for i from 1 to nops(LC) do
 j:=i+2:
   ui:=L2p(LC[kj(i,nops(LC))],LC[kj(i+1,nops(LC))]);
 while
subs(x[1]=LC[kj(j,nops(LC))][1],x[2]=LC[kj(j,nops(LC)
)][2],ui)=0 and j<2*nops(LC) do
    j := j + 1
 od;

jxr:=subs(x[1]=LC[kj(j,nops(LC))][1],x[2]=LC[kj(j,nop
s(LC))][2],ui):
   if jxr>0 then
     uns:=uns union {expr_n(ui,x[1],x[2])}
   elif jxr<0 then
     uns:=uns union
{lhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))>=rhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))
}
   else
     uns:=uns union
{lhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))=rhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))}
   fi;
 od;
 ui:=convert(uns,list);
 map(zx->`if`(type(lhs(zx),numeric),-rhs(zx)<=-
lhs(zx),zx),ui);
 fi:
linear_constraints:=[op({op(Set_uneq(Set1))} minus {-
x[1] <= 0,-x[2] <= 0,x[1] >= 0,x[2] >= 0})]:
Warning, `EX` is implicitly declared local
Warning, `uns` is implicitly declared local
Warning, `i` is implicitly declared local
Warning, `j` is implicitly declared local
Warning, `ui` is implicitly declared local
Warning, `jxr` is implicitly declared local
> printf(`                              ЦІЛЬОВА
ФУНКЦІЯ`);
MaxMin:=`if`(frac(My_variant/2)=0,`max`,`min`):
'z'=z,`->`*MaxMin;

printf(`                  О  Б  М  Е  Ж  Е  Н  Н
Я`);
map(print,linear_constraints):
```

ЦІЛЬОВА ФУНКЦІЯ

$$z = 9\, x_1 + 6\, x_2, \text{->}\ min$$

О Б М Е Ж Е Н Н Я

$$15\,x_1 - 17\,x_2 \le -85$$
$$-x_1 + 3\,x_2 \le 56$$
$$-6\,x_1 + 5\,x_2 \le 63$$
$$-5\,x_1 + x_2 \le 5$$
$$3\,x_1 + 4\,x_2 \le 131$$

Послідовність виконання роботи:

1. Перевірити на оптимальність початковий опорний розв'язок, знайдений в лабораторній роботі № 3:
   а) виразити цільову функцію через вільні невідомі;
   б) визначити значення цільової функції для даного опорного розв'язку;
   в) проаналізувати можливість покращення цільової функції.
2. Перейти до нового опорного розв'язку, користуючись командами Maple:
   а) визначити вільну невідому, яку потрібно збільшувати;
   б) знайти максимально можливе значення цієї невідомої;
   с) знайти опорний розв'язок, що відповідає новому значенню цієї невідомої;

д) в отриманому опорному розв'язку визначити нові вільні невідомі;

Зауваження: якщо початковий опорний розв'язок виявився оптимальним, звернутися до викладача для змінення умов задачі.

Примітки: 1. Вихідні дані для виконання цієї лабораторної роботи рекомендується підготовувати в текстовому файлі.

2. Для виконання роботи потрібно скористатися командами solve та subs.

#**

Питання до захисту лабораторної роботи № 4

1. Як можна виразити цільову функцію через вільні невідомі?
2. Як визначити значення цільової функції для поточного опорного розв'язку?
3. Як визначається оптимальність або неоптимальність поточного опорного розв'язку?
4. Як визначити вільну невідому, яку потрібно збільшувати для переходу до наступного опорного розв'язку?
5. Як знайти максимально можливе значення цієї невідомої?
6. Як знайти опорний розв'язок, що відповідає новому значенню цієї невідомої?

#**

3.5 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5. Симплекс–метод: знаходження оптимального розв'язку та відповідного значення цільової функції

Мета роботи: навчитися знаходити та аналізувати оптимальний розв'язок.
Задача. Знайти найбільше (найменше) значення функції

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

при заданих обмеженнях на аргументи x_1 та x_2.

Введіть номер вашого варіанта

```
> restart:with(linalg):
#********************************
#                              *
#                              *
`*`:    `Мій варіант`:=500;      #*
#                              *
#                              *
#********************************
die := rand(1..12):
for i from 1 to `Мій варіант` do
    z:=die()*x[1]+die()*x[2];
od:
Set:=[[0, 5], [0, 1], [2, 0], [6, 0], [10, 1], [17,
3], [20, 10], [19, 16],[17,20],[13,23], [7, 21], [2,
15]]:
Nmin:=5:die2:= rand(Nmin..nops(Set)-1):
for i from 1 to `Мій варіант` do
    nP:=die2();
od:
die1:= rand(1..nops(Set)):
nSet1:={}:
for i while nops(nSet1)<nops(Set)-nP do
 nSet1:={op(nSet1),die1()}
od:'nSet1'=nSet1:#'nSet1'=nSet1;
S2:={$ 1..nops(Set)} minus nSet1:
S2:=convert(S2,'list'):S2:=sort(S2):
Set1:=[]:
for i in S2 do
 Set1:=[op(Set1),Set[i]]
od:
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

Мій варіант:=500

```
> L2p := ( M1, M2)->
    if M1[1]<>M2[1] and M1[2]<>M2[2] then
```

```
      (x[1]-M1[1])/(M2[1]-M1[1])-(x[2]-M1[2])/(M2[2]-
M1[2])
   elif M1[1]=M2[1] and M1[2]<>M2[2] then
      x[1]-M1[1]
   elif M1[2]=M2[2] and M1[1]<>M2[1] then
      x[2]-M1[2]
   else
      print(`Coincide points`);
   fi:
expr_n:=(x,x1,x2)->if 1>0 then

EX:=[coeffs(x)];EX:=denom(EX);EX:=lcm(op(EX));

(coeff(x,x1)*x1+coeff(x,x2)*x2)*EX>=(-
x+coeff(x,x1)*x1+coeff(x,x2)*x2)*EX
                  fi:#expr_n(5*x[1]+2*x[2]-10);
kj:=(j,k)->j-trunc((j-1)/k)*k:
Set_uneq := LC->if 1>0 then
 uns:={}:
 for i from 1 to nops(LC) do
 j:=i+2:
   ui:=L2p(LC[kj(i,nops(LC))],LC[kj(i+1,nops(LC))]);
 while
subs(x[1]=LC[kj(j,nops(LC))][1],x[2]=LC[kj(j,nops(LC)
)][2],ui)=0 and j<2*nops(LC) do
     j := j + 1
 od;

jxr:=subs(x[1]=LC[kj(j,nops(LC))][1],x[2]=LC[kj(j,nop
s(LC))][2],ui):
   if jxr>0 then
     uns:=uns union {expr_n(ui,x[1],x[2])}
   elif jxr<0 then
     uns:=uns union
{lhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))>=rhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))
}
   else
     uns:=uns union
{lhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))=rhs(expr_n(ui,x[1],x[2]))}
   fi;
 od;
 ui:=convert(uns,list);
 map(zx->`if`(type(lhs(zx),numeric),-rhs(zx)<=-
lhs(zx),zx),ui);
 fi:
```

```
linear_constraints:=[op({op(Set_uneq(Set1))} minus {-x[1] <= 0,-x[2] <= 0,x[1] >= 0,x[2] >= 0})]:
Warning, `EX` is implicitly declared local
Warning, `uns` is implicitly declared local
Warning, `i` is implicitly declared local
Warning, `j` is implicitly declared local
Warning, `ui` is implicitly declared local
Warning, `jxr` is implicitly declared local
> printf(`                              ЦІЛЬОВА ФУНКЦІЯ`);
MaxMin:=`if`(frac(My_variant/2)=0,`max`,`min`):
'z'=z,`->`*MaxMin;

printf(`                     О  Б  М  Е  Ж  Е  Н  Н  Я`);
map(print,linear_constraints):
```

ЦІЛЬОВА ФУНКЦІЯ

$$z = 9\,x_1 + 6\,x_2, \text{-> } min$$

О Б М Е Ж Е Н Н Я

$$15\,x_1 - 17\,x_2 \le \text{-}85$$
$$-x_1 + 3\,x_2 \le 56$$
$$-6\,x_1 + 5\,x_2 \le 63$$
$$-5\,x_1 + x_2 \le 5$$
$$3\,x_1 + 4\,x_2 \le 131$$

Послідовність виконання роботи:

1. Згідно з алгоритмом пунктів 1, 2 лабораторної роботи № 4 знайти оптимальний розв'язок **задачі лінійного програмування та відповідне значення цільової функціїі.**
2. Порівняти отриманий оптимальний розв'язок з розв'язком, знайденим в лабораторній роботі № 2.

Питання до захисту лабораторної роботи № 5

1. В чому полягає сутність симплекс-методу розв'язання задач лінійного програмування?
2. Чи є інші методи знаходження початкового опорного розв'язку крім простого перебору сукупностей вільних невідомих?
3. Який розв’язок називається виродженим? Яка задача лінійного програмування називається виродженою?
4. Яка ознака згідно з симплекс-алгоритмом свідчить про відсутність розв’язку задачі лінійного програмування?

4. ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ

Варіанти завдань та відповіді до них згенеровано спеціально створеною Excel-VBA-Maple програмою [29]. Вказана програма розміщує згенеровані завдання безпосередньо на Excel-сторінки. Тому краще завдання брати з Excel–файлу „Завдання для типових розрахунків.xls”, який можна скачати з головної інтернет-сторінки.

Всього наведено 200 варіантів. За п’ять років роботи не виявлено жодної помилки. Внесення помилки при підготовці даного посібника нехтовно мало. Далі наведено копії відповідних Excel–сторінок у word - файл.

Задача № 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь.

Примітка: для кожного варіанта в окремому стовпці дано відповіді. Наприклад, для варіанта № 1: 4, 4, 0 (x_1=4, x_2=4, x_3=0).

1) $+3x_1+1x_2+1x_3=16$	4	2) $+7x_1+6x_2-7x_3=15$	2	3) $+5x_1+5x_2+1x_3=2$	3
$-3x_1+4x_2-7x_3=4$	4	$-2x_1+0x_2+4x_3=-8$	-1	$+6x_1-4x_2+3x_3=36$	-3
$+5x_1+3x_2-7x_3=32$	0	$+1x_1+0x_2-3x_3=5$	-1	$-4x_1+1x_2-6x_3=-27$	2
4) $-6x_1-6x_2+4x_3=32$	-2	5) $-1x_1-1x_2+3x_3=-7$	4	6) $+6x_1+2x_2+2x_3=8$	0
$-7x_1-3x_2-2x_3=16$	-2	$+2x_1-4x_2-5x_3=13$	0	$-6x_1+1x_2+3x_3=6$	3
$+7x_1+7x_2-1x_3=-30$	2	$-6x_1-1x_2+6x_3=-30$	-1	$+5x_1-7x_2+1x_3=-20$	1
7) $+0x_1-1x_2-2x_3=1$	-2	8) $+2x_1+1x_2-5x_3=15$	4	9) $-6x_1-6x_2-3x_3=0$	1
$-3x_1-7x_2-4x_3=3$	1	$+2x_1+0x_2-2x_3=12$	-3	$-7x_1+1x_2+2x_3=-11$	0
$-7x_1-2x_2-2x_3=14$	-1	$+4x_1-1x_2+4x_3=11$	-2	$+5x_1-6x_2-5x_3=15$	-2
10) $+3x_1+6x_2+0x_3=24$	-2	11) $-1x_1-3x_2+6x_3=-8$	-1	12) $-2x_1-7x_2+0x_3=-35$	0
$+4x_1-1x_2-1x_3=-10$	5	$-3x_1+3x_2-4x_3=10$	1	$+5x_1+1x_2+4x_3=-3$	5
$-4x_1-3x_2-6x_3=11$	-3	$-7x_1-3x_2+4x_3=0$	-1	$-3x_1+1x_2-6x_3=17$	-2
13) $+6x_1+2x_2-2x_3=-2$	1	14) $+5x_1+3x_2+3x_3=8$	1	15) $-4x_1+2x_2+0x_3=8$	0
$+0x_1-4x_2+7x_3=28$	0	$-2x_1+0x_2-1x_3=-3$	0	$+6x_1-2x_2-3x_3=-11$	4
$-7x_1-2x_2+1x_3=-3$	4	$-5x_1-1x_2+1x_3=-4$	1	$-5x_1+0x_2-4x_3=-4$	1
16) $-5x_1+3x_2+4x_3=-5$	0	17) $-6x_1-5x_2-7x_3=-17$	3	18) $+3x_1-7x_2-1x_3=-33$	0
$+4x_1-5x_2+5x_3=-15$	1	$+0x_1+1x_2-4x_3=-11$	-3	$-3x_1+7x_2+5x_3=25$	5
$+7x_1-7x_2-7x_3=7$	-2	$+4x_1+4x_2-2x_3=-4$	2	$-1x_1+4x_2-3x_3=26$	-2

19) $+2x_1-2x_2-6x_3=-4$	0	20) $-5x_1+0x_2+7x_3=3$	-2	21) $+4x_1-7x_2+0x_3=-43$	-2
$-6x_1-1x_2+7x_3=8$	-1	$+6x_1+2x_2-1x_3=-13$	-1	$+5x_1-3x_2+7x_3=3$	5
$+0x_1+7x_2-4x_3=-11$	1	$-7x_1+4x_2+3x_3=7$	-1	$+3x_1+6x_2+6x_3=48$	4
22) $+3x_1-1x_2-7x_3=-11$	-2	23) $-3x_1+4x_2-4x_3=-23$	1	24) $-4x_1-4x_2-5x_3=12$	0
$-5x_1+0x_2-1x_3=10$	5	$-4x_1+6x_2+2x_3=-2$	-1	$-7x_1+4x_2+5x_3=-12$	-3
$-3x_1+2x_2+5x_3=16$	0	$-2x_1+5x_2+1x_3=-3$	4	$+3x_1-1x_2+5x_3=3$	0
25) $-2x_1+3x_2-3x_3=5$	2	26) $-4x_1+5x_2-6x_3=49$	-3	27) $+2x_1+6x_2-4x_3=-20$	0
$-5x_1+1x_2+7x_3=9$	5	$+4x_1-4x_2-2x_3=-28$	5	$+5x_1-1x_2+0x_3=2$	-2
$+7x_1-6x_2+7x_3=-2$	2	$+0x_1-3x_2+1x_3=-17$	-2	$+5x_1-2x_2-5x_3=-6$	2
28) $-6x_1-4x_2+3x_3=-25$	4	29) $-7x_1-5x_2-2x_3=-46$	4	30) $-1x_1+1x_2+5x_3=-6$	-3
$-5x_1+7x_2+0x_3=-34$	-2	$+7x_1+6x_2+1x_3=51$	4	$-4x_1-4x_2-2x_3=12$	1
$-1x_1-3x_2+4x_3=-10$	-3	$-5x_1-4x_2-7x_3=-29$	-1	$-2x_1+0x_2-1x_3=8$	-2
31) $+7x_1+6x_2+7x_3=-18$	3	32) $-3x_1-2x_2+1x_3=-1$	2	33) $+2x_1+0x_2-4x_3=-26$	-3
$-1x_1+5x_2+7x_3=-39$	-3	$-3x_1+5x_2-3x_3=-21$	0	$+4x_1-1x_2+6x_3=19$	-1
$-5x_1+3x_2-7x_3=-3$	-3	$-1x_1+5x_2-1x_3=-7$	5	$+3x_1+6x_2-3x_3=-30$	5
34) $+4x_1+1x_2+2x_3=13$	3	35) $+7x_1+7x_2+1x_3=39$	2	36) $-1x_1-7x_2-3x_3=26$	-2
$+0x_1+4x_2+5x_3=4$	1	$+2x_1-6x_2-5x_3=-5$	4	$+0x_1+1x_2-3x_3=0$	-3
$+1x_1-1x_2-6x_3=2$	0	$-7x_1-5x_2-1x_3=-31$	-3	$+4x_1+1x_2-1x_3=-10$	-1
37) $+4x_1+7x_2-2x_3=-17$	2	38) $+7x_1-7x_2+7x_3=-7$	1	39) $-3x_1-6x_2-1x_3=0$	3
$+4x_1-7x_2+4x_3=37$	-3	$-3x_1+1x_2+5x_3=5$	3	$+4x_1+1x_2+2x_3=16$	-2
$-4x_1+2x_2+6x_3=-2$	2	$-7x_1+1x_2-3x_3=-7$	1	$-1x_1+4x_2+3x_3=-2$	3
40) $-6x_1-4x_2+7x_3=-37$	3	41) $+5x_1+3x_2+6x_3=34$	2	42) $-1x_1-5x_2+0x_3=10$	0
$-4x_1-5x_2-4x_3=-23$	3	$-2x_1+1x_2-2x_3=-4$	4	$+4x_1-2x_2+0x_3=4$	-2
$-4x_1-4x_2+3x_3=-27$	-1	$+1x_1+2x_2-5x_3=0$	2	$+3x_1-7x_2+2x_3=14$	0
43) $+4x_1-2x_2-1x_3=6$	2	44) $-3x_1+4x_2-5x_3=-26$	3	45) $+5x_1+1x_2+2x_3=-2$	-1
$-1x_1+3x_2+0x_3=-5$	-1	$-6x_1+0x_2-1x_3=-23$	2	$+6x_1-3x_2+2x_3=-7$	1
$-3x_1-6x_2+7x_3=28$	4	$-7x_1-3x_2-5x_3=-52$	5	$+4x_1+3x_2+3x_3=2$	1

46) $+1x_1-3x_2-1x_3=4$	-2	47) $-6x_1+2x_2+3x_3=0$	3	48) $-4x_1+0x_2+6x_3=6$	-3
$+7x_1+0x_2+1x_3=-14$	-2	$-1x_1-2x_2+3x_3=3$	3	$-1x_1-1x_2-2x_3=2$	3
$-7x_1-2x_2-5x_3=18$	0	$-7x_1+6x_2-7x_3=-31$	4	$+5x_1+1x_2+1x_3=-13$	-1
49) $-7x_1-3x_2+7x_3=12$	-1	50) $+2x_1-6x_2-7x_3=14$	-3	51) $+2x_1+7x_2-3x_3=31$	0
$+2x_1-2x_2-2x_3=-12$	3	$-4x_1-2x_2+1x_3=12$	-1	$+6x_1-6x_2+1x_3=-25$	4
$-4x_1-4x_2-1x_3=-10$	2	$+5x_1+6x_2+0x_3=-21$	-2	$+2x_1+3x_2+5x_3=7$	-1
52) $+3x_1-2x_2+5x_3=4$	1	53) $-5x_1+2x_2+2x_3=23$	-3	54) $+0x_1-7x_2+3x_3=-8$	-1
$+5x_1-4x_2+3x_3=0$	2	$-2x_1-7x_2+0x_3=-8$	2	$+7x_1-3x_2-2x_3=-17$	2
$-4x_1+7x_2+7x_3=17$	1	$-2x_1-1x_2-3x_3=-2$	2	$-2x_1-4x_2+1x_3=-4$	2
55) $+7x_1+6x_2-4x_3=44$	2	56) $+2x_1+4x_2+4x_3=14$	5	57) $-1x_1+0x_2-7x_3=-13$	-1
$+4x_1-1x_2+2x_3=-1$	3	$-6x_1+0x_2+1x_3=-31$	2	$-1x_1+7x_2-3x_3=-26$	-3
$+0x_1-6x_2+7x_3=-39$	-3	$-1x_1-6x_2-5x_3=-12$	-1	$+0x_1-2x_2+0x_3=6$	2
58) $-2x_1+1x_2+6x_3=19$	-2	59) $+5x_1+0x_2+5x_3=-20$	-2	60) $-1x_1+2x_2+1x_3=2$	-2
$+1x_1-2x_2-7x_3=-17$	-3	$+0x_1-6x_2+2x_3=-28$	4	$-6x_1-3x_2-7x_3=12$	0
$-5x_1-5x_2+4x_3=37$	3	$-3x_1+3x_2-1x_3=20$	-2	$+6x_1-3x_2-4x_3=-12$	0
61) $-3x_1+7x_2+1x_3=-10$	3	62) $+2x_1+1x_2-1x_3=4$	0	63) $-4x_1+5x_2-6x_3=-39$	0
$-5x_1+6x_2-7x_3=-8$	0	$+4x_1-7x_2-5x_3=-40$	5	$+7x_1+5x_2+5x_3=5$	-3
$+3x_1-4x_2+7x_3=2$	-1	$-7x_1+1x_2+7x_3=12$	1	$-4x_1+2x_2+2x_3=2$	4
64) $-5x_1-4x_2+2x_3=1$	1	65) $-2x_1-1x_2-2x_3=-10$	-1	66) $+7x_1-3x_2-1x_3=-25$	-2
$+0x_1+6x_2+1x_3=-21$	-3	$-5x_1-1x_2-5x_3=-19$	4	$+6x_1+0x_2+6x_3=0$	3
$+4x_1-1x_2+4x_3=-5$	-3	$-3x_1-7x_2+5x_3=-5$	4	$-1x_1+5x_2+3x_3=23$	2
67) $+6x_1+5x_2+4x_3=29$	0	68) $+7x_1-1x_2+4x_3=25$	4	69) $-7x_1+6x_2+7x_3=23$	-3
$+0x_1+4x_2+1x_3=21$	5	$-6x_1+6x_2+1x_3=-31$	-1	$+1x_1-2x_2-4x_3=-7$	-2
$-3x_1+0x_2+6x_3=6$	1	$+5x_1+4x_2+6x_3=10$	-1	$-6x_1+2x_2+1x_3=16$	2
70) $-1x_1-3x_2+5x_3=27$	2	71) $-7x_1-5x_2-3x_3=2$	-2	72) $+5x_1-4x_2-4x_3=-15$	1
$+7x_1-2x_2+4x_3=36$	-3	$-1x_1+5x_2-7x_3=24$	3	$+2x_1+2x_2-6x_3=-28$	0
$+2x_1-2x_2+1x_3=14$	4	$-4x_1-7x_2+4x_3=-17$	-1	$-2x_1-2x_2-7x_3=-37$	5

73) $-4x_1+1x_2-7x_3=17$	0	74) $-1x_1+5x_2+1x_3=-1$	5	75) $-5x_1+0x_2-7x_3=-55$	4
$+0x_1+1x_2-2x_3=7$	3	$-3x_1-6x_2+2x_3=-7$	0	$+5x_1-3x_2-1x_3=24$	-3
$+3x_1-4x_2-4x_3=-4$	-2	$+3x_1-2x_2+2x_3=23$	4	$-7x_1+2x_2+7x_3=1$	5
76) $+7x_1+3x_2+3x_3=5$	-1	77) $+3x_1+5x_2-6x_3=-23$	-2	78) $-4x_1-3x_2-6x_3=6$	0
$-5x_1+7x_2+3x_3=37$	5	$+5x_1-4x_2-6x_3=-18$	-1	$+7x_1+4x_2-1x_3=1$	0
$-6x_1-5x_2-3x_3=-16$	-1	$-6x_1+2x_2-1x_3=8$	2	$-1x_1+5x_2-1x_3=1$	-1
79) $-4x_1-6x_2+4x_3=-10$	5	80) $+2x_1-2x_2+7x_3=15$	3	81) $+5x_1-5x_2+4x_3=-6$	-2
$-3x_1-1x_2+7x_3=12$	1	$-3x_1-4x_2+4x_3=-1$	-1	$+1x_1-6x_2-7x_3=-9$	0
$+0x_1+5x_2-2x_3=-3$	4	$-6x_1+6x_2+2x_3=-22$	1	$+7x_1-7x_2+2x_3=-12$	1
82) $+6x_1-5x_2+5x_3=-32$	-2	83) $-5x_1-3x_2+4x_3=10$	-1	84) $+2x_1-2x_2+2x_3=10$	5
$-4x_1-7x_2+6x_3=-21$	5	$-4x_1-2x_2+6x_3=4$	-3	$+3x_1-5x_2-7x_3=27$	-1
$+3x_1-7x_2-7x_3=-48$	1	$-1x_1+1x_2-5x_3=3$	-1	$-5x_1+7x_2-5x_3=-27$	-1
85) $+4x_1+4x_2-2x_3=-26$	-3	86) $-7x_1+5x_2-6x_3=-55$	4	87) $+0x_1+4x_2-1x_3=-8$	2
$+1x_1-6x_2-3x_3=-12$	-1	$-3x_1+6x_2-7x_3=-44$	-3	$-5x_1+3x_2+3x_3=-1$	-1
$+3x_1-1x_2+1x_3=-3$	5	$+0x_1+6x_2-1x_3=-20$	2	$+0x_1+7x_2+5x_3=13$	4
88) $+4x_1-2x_2-6x_3=36$	5	89) $+3x_1+5x_2-3x_3=-20$	-1	90) $-4x_1-5x_2-5x_3=-6$	-1
$-6x_1+3x_2-3x_3=-30$	-2	$+4x_1-2x_2+1x_3=2$	-1	$-5x_1+0x_2+7x_3=40$	-3
$+2x_1+1x_2+1x_3=6$	-2	$+0x_1+0x_2+1x_3=4$	4	$-3x_1+3x_2-4x_3=-26$	5
91) $-3x_1+3x_2+7x_3=38$	-2	92) $-7x_1-3x_2+3x_3=-11$	2	93) $-1x_1+4x_2-5x_3=-26$	5
$-2x_1-1x_2+3x_3=20$	-1	$-3x_1-5x_2-3x_3=-33$	3	$-3x_1-6x_2-3x_3=-36$	1
$+6x_1+4x_2-1x_3=-21$	5	$+6x_1-7x_2+4x_3=7$	4	$-5x_1+6x_2-5x_3=-44$	5
94) $-1x_1+4x_2+3x_3=19$	-1	95) $-5x_1+7x_2+5x_3=13$	2	96) $-3x_1+2x_2-2x_3=11$	-1
$-5x_1+2x_2+7x_3=25$	3	$-6x_1-1x_2-6x_3=-10$	4	$+2x_1+2x_2-5x_3=9$	3
$+1x_1-2x_2-3x_3=-13$	2	$+4x_1-1x_2-7x_3=11$	-1	$+7x_1+4x_2+7x_3=-2$	-1
97) $+7x_1+7x_2+5x_3=-7$	-2	98) $+1x_1-7x_2-2x_3=-18$	1	99) $-6x_1-2x_2-4x_3=-28$	5
$-5x_1+6x_2-6x_3=16$	1	$-6x_1-4x_2-6x_3=-12$	3	$-3x_1+2x_2-1x_3=-22$	-3
$+3x_1+7x_2-1x_3=1$	0	$-4x_1+4x_2+7x_3=1$	-1	$-1x_1-1x_2+2x_3=0$	1

100) $-7x_1+2x_2-5x_3=-16$	4	101) $+6x_1+0x_2+7x_3=-33$	-2	102) $+6x_1-7x_2+0x_3=-9$	2
$-1x_1+7x_2+1x_3=1$	1	$+7x_1+5x_2-3x_3=5$	2	$-6x_1-6x_2-2x_3=-30$	3
$-3x_1+6x_2+5x_3=-16$	-2	$-1x_1+3x_2-3x_3=17$	-3	$+7x_1+7x_2+1x_3=35$	0
103) $+1x_1-5x_2+3x_3=-5$	3	104) $+2x_1-3x_2-1x_3=2$	-2	105) $-1x_1-3x_2+2x_3=13$	0
$+1x_1+5x_2+1x_3=27$	4	$-6x_1-6x_2+7x_3=-3$	-1	$+7x_1+3x_2-7x_3=-38$	-1
$-2x_1+2x_2-5x_3=-18$	4	$+6x_1+1x_2-5x_3=2$	-3	$-2x_1+1x_2-4x_3=-21$	5
106) $+3x_1+7x_2+0x_3=-7$	0	107) $+7x_1+2x_2+5x_3=0$	2	108) $+2x_1-6x_2+7x_3=-4$	4
$+5x_1-7x_2-6x_3=1$	-1	$-3x_1+5x_2+1x_3=-18$	-2	$+6x_1+5x_2+7x_3=34$	2
$-4x_1-2x_2+4x_3=6$	1	$+1x_1-7x_2+6x_3=4$	-2	$+5x_1-2x_2-1x_3=16$	0
109) $-5x_1+3x_2-6x_3=-30$	0	110) $-2x_1-2x_2+7x_3=38$	-2	111) $+0x_1-1x_2-2x_3=0$	-2
$-3x_1+1x_2-2x_3=-10$	0	$-4x_1-4x_2+2x_3=28$	-3	$+7x_1+1x_2-3x_3=-19$	-2
$+1x_1-3x_2-4x_3=-20$	5	$+6x_1-1x_2+1x_3=-5$	4	$-2x_1+5x_2+3x_3=-3$	1
112) $-6x_1-5x_2+0x_3=-22$	2	113) $+0x_1+0x_2-2x_3=-6$	5	114) $+1x_1-2x_2+0x_3=-1$	1
$+3x_1+4x_2-7x_3=-21$	2	$+5x_1+6x_2+2x_3=31$	0	$+3x_1+0x_2-7x_3=17$	1
$+1x_1+7x_2+4x_3=36$	5	$-5x_1+6x_2+7x_3=-4$	3	$+6x_1-3x_2-1x_3=5$	-2
115) $+1x_1-4x_2+0x_3=4$	4	116) $-6x_1+5x_2-2x_3=47$	-3	117) $-4x_1+2x_2-5x_3=-4$	-1
$-7x_1+1x_2-1x_3=-27$	0	$-4x_1-2x_2+6x_3=-10$	5	$+0x_1-4x_2-6x_3=-16$	1
$-4x_1+2x_2-3x_3=-13$	-1	$-4x_1-6x_2-3x_3=-12$	-2	$-5x_1-5x_2-7x_3=-14$	2
118) $+3x_1-1x_2-3x_3=20$	4	119) $+3x_1+5x_2-2x_3=-22$	-3	120) $-4x_1-6x_2+1x_3=7$	1
$+7x_1+0x_2-5x_3=43$	1	$+3x_1+2x_2+6x_3=-21$	-3	$-3x_1+2x_2-7x_3=-40$	-1
$-5x_1-5x_2+2x_3=-31$	-3	$-4x_1+6x_2+5x_3=-11$	-1	$-6x_1+1x_2+1x_3=-2$	5
121) $-3x_1-1x_2+6x_3=9$	0	122) $+6x_1+4x_2+2x_3=-14$	-2	123) $-3x_1-2x_2+6x_3=15$	-1
$+4x_1-6x_2-4x_3=-26$	3	$+7x_1-3x_2-3x_3=-8$	1	$-4x_1-6x_2-2x_3=-20$	3
$-6x_1-4x_2-7x_3=-26$	2	$+7x_1+7x_2+3x_3=-16$	-3	$+7x_1+2x_2+0x_3=-1$	3
124) $-5x_1+3x_2-5x_3=-28$	4	125) $+5x_1+3x_2+0x_3=14$	1	126) $-1x_1+4x_2+4x_3=-19$	3
$+0x_1-3x_2+6x_3=12$	4	$+2x_1-6x_2-4x_3=-20$	3	$-2x_1-6x_2+1x_3=11$	-3
$+2x_1+5x_2-3x_3=16$	4	$-7x_1-2x_2-7x_3=-20$	1	$-2x_1+2x_2+2x_3=-14$	-1

127) $+3x_1+3x_2+5x_3=14$	2	128) $-2x_1-2x_2-3x_3=-16$	1	129) $+0x_1+5x_2+0x_3=10$	0
$-7x_1+3x_2+6x_3=-5$	1	$+5x_1-2x_2-6x_3=-15$	4	$-2x_1-5x_2-6x_3=-34$	2
$+2x_1+1x_2+4x_3=9$	1	$+2x_1+4x_2-1x_3=16$	2	$-6x_1-4x_2-6x_3=-32$	4
130) $+1x_1+7x_2+7x_3=33$	-2	131) $+4x_1+0x_2-6x_3=-22$	-1	132) $+5x_1+6x_2-1x_3=2$	-3
$-1x_1+2x_2+2x_3=12$	4	$-7x_1-3x_2-2x_3=-2$	1	$-2x_1+4x_2+5x_3=23$	3
$+5x_1-2x_2+1x_3=-17$	1	$+5x_1-7x_2+3x_3=-3$	3	$-1x_1-3x_2-5x_3=-11$	1
133) $+5x_1+6x_2+3x_3=-24$	-3	134) $+3x_1+6x_2-6x_3=12$	2	135) $+3x_1+1x_2-7x_3=8$	4
$-5x_1-3x_2+5x_3=39$	-3	$+3x_1+4x_2-4x_3=10$	5	$+2x_1+1x_2-4x_3=7$	3
$+4x_1-7x_2-2x_3=3$	3	$+1x_1-7x_2+0x_3=-33$	4	$+2x_1+7x_2-2x_3=27$	1
136) $-4x_1-3x_2-6x_3=-16$	-2	137) $+0x_1+4x_2+0x_3=12$	-2	138) $-4x_1+2x_2+7x_3=26$	-3
$+5x_1-7x_2+4x_3=-30$	4	$-2x_1-3x_2+4x_3=-5$	3	$+4x_1+7x_2-6x_3=-24$	0
$-1x_1+4x_2+2x_3=22$	2	$+2x_1-1x_2-6x_3=-7$	0	$-4x_1-5x_2+4x_3=20$	2
139) $+0x_1+5x_2+6x_3=-22$	4	140) $-2x_1-3x_2-7x_3=-51$	5	141) $+3x_1-3x_2-6x_3=-18$	-3
$+4x_1+6x_2+2x_3=0$	-2	$+7x_1+7x_2+3x_3=64$	2	$+0x_1-5x_2-5x_3=-10$	1
$-3x_1-5x_2+4x_3=-10$	-2	$-2x_1-2x_2+2x_3=-4$	5	$+4x_1+6x_2-3x_3=-9$	1
142) $-3x_1-7x_2-3x_3=-15$	1	143) $+2x_1-4x_2+7x_3=41$	5	144) $-1x_1+4x_2+7x_3=-16$	4
$+5x_1-6x_2-7x_3=-23$	0	$+2x_1+5x_2+2x_3=25$	1	$+4x_1+0x_2-5x_3=16$	-3
$+6x_1+4x_2+6x_3=30$	4	$-1x_1-2x_2+4x_3=13$	5	$+7x_1+2x_2+0x_3=22$	0
145) $-4x_1-6x_2+1x_3=-29$	0	146) $+1x_1+5x_2+4x_3=18$	0	147) $-5x_1+4x_2+3x_3=-20$	5
$-7x_1-6x_2-1x_3=-31$	5	$-7x_1-1x_2-6x_3=-14$	2	$-6x_1-4x_2+6x_3=-8$	-1
$+5x_1+1x_2-6x_3=-1$	1	$-1x_1+4x_2+1x_3=10$	2	$+0x_1+5x_2-2x_3=-11$	3
148) $-1x_1-7x_2+7x_3=12$	2	149) $-6x_1-1x_2-2x_3=-19$	3	150) $-7x_1-1x_2+3x_3=15$	-1
$-5x_1+3x_2+3x_3=2$	1	$-4x_1-5x_2+6x_3=15$	-3	$-6x_1-7x_2+0x_3=-22$	4
$+0x_1+2x_2-3x_3=-7$	3	$-1x_1+4x_2-7x_3=-29$	2	$+6x_1+3x_2-2x_3=-2$	4
151) $-1x_1+0x_2+2x_3=0$	-2	152) $+5x_1+2x_2+4x_3=30$	4	153) $-2x_1-6x_2+3x_3=-12$	-3
$+4x_1-3x_2-3x_3=4$	-3	$+5x_1+2x_2+2x_3=22$	-3	$+7x_1-2x_2+1x_3=-27$	2
$+1x_1-3x_2+0x_3=7$	-1	$+0x_1+7x_2+2x_3=-13$	4	$-3x_1-3x_2+4x_3=-5$	-2

154)	$-4x_1+1x_2-7x_3=-23$	5	155)	$-4x_1+0x_2+2x_3=18$	-2	156)	$-7x_1-6x_2+5x_3=-7$	2
	$-1x_1-4x_2-3x_3=7$	-3		$+6x_1-1x_2-5x_3=-41$	4		$-2x_1+2x_2-5x_3=-23$	3
	$-6x_1-7x_2+6x_3=-9$	0		$+6x_1-4x_2+0x_3=-28$	5		$-3x_1-6x_2+6x_3=6$	5
157)	$-4x_1-7x_2+6x_3=-26$	1	158)	$+7x_1-4x_2+6x_3=27$	3	159)	$+0x_1+2x_2+3x_3=16$	3
	$-5x_1+3x_2+3x_3=10$	4		$-2x_1-1x_2+2x_3=-5$	-3		$-3x_1-1x_2-2x_3=-18$	5
	$-7x_1+7x_2+6x_3=27$	1		$+6x_1+6x_2-5x_3=5$	-1		$+2x_1-2x_2+0x_3=-4$	2
160)	$-6x_1-4x_2+6x_3=40$	-3	161)	$-6x_1+5x_2-4x_3=-8$	0	162)	$+6x_1-5x_2-6x_3=-3$	2
	$-2x_1-2x_2-2x_3=-8$	2		$-3x_1-3x_2+0x_3=0$	0		$+0x_1-5x_2+4x_3=-15$	3
	$+2x_1-3x_2+3x_3=3$	5		$+1x_1+3x_2+1x_3=2$	2		$-2x_1+3x_2-5x_3=5$	0
163)	$-2x_1-5x_2-2x_3=-31$	5	164)	$+1x_1+2x_2+1x_3=15$	5	165)	$+1x_1-1x_2-1x_3=2$	3
	$-1x_1-6x_2+7x_3=-2$	3		$+0x_1-7x_2+5x_3=-18$	4		$-4x_1-3x_2+4x_3=-1$	-1
	$+4x_1-3x_2-4x_3=-1$	3		$-1x_1-2x_2+5x_3=-3$	2		$+2x_1+7x_2-6x_3=-13$	2
166)	$-2x_1-1x_2+7x_3=24$	1	167)	$-3x_1+6x_2-6x_3=-15$	3	168)	$-2x_1-6x_2+2x_3=8$	1
	$+2x_1+1x_2-5x_3=-16$	2		$+5x_1+6x_2-5x_3=10$	0		$-7x_1+4x_2+0x_3=-11$	-1
	$+7x_1-5x_2+1x_3=1$	4		$+7x_1+2x_2-6x_3=15$	1		$+5x_1+5x_2+6x_3=12$	2
169)	$+0x_1+1x_2-1x_3=-7$	0	170)	$+6x_1+7x_2+3x_3=21$	3	171)	$-5x_1+7x_2-3x_3=-5$	1
	$-3x_1+1x_2+5x_3=23$	-2		$+2x_1-2x_2+6x_3=12$	0		$+7x_1+6x_2-6x_3=7$	0
	$+1x_1-1x_2+1x_3=7$	5		$+3x_1+5x_2-2x_3=7$	1		$+0x_1+7x_2+4x_3=0$	0
172)	$-1x_1+2x_2+5x_3=2$	1	173)	$-6x_1+6x_2-3x_3=-9$	-1	174)	$+2x_1+6x_2-4x_3=-20$	0
	$-7x_1-4x_2-2x_3=-21$	4		$-1x_1+4x_2-1x_3=-4$	0		$+3x_1-1x_2-4x_3=-20$	0
	$+7x_1-1x_2+5x_3=-2$	-1		$-2x_1+4x_2-7x_3=-33$	5		$+6x_1-2x_2+0x_3=0$	5
175)	$+2x_1+6x_2-4x_3=22$	2	176)	$-3x_1+7x_2+4x_3=39$	3	177)	$-7x_1+2x_2-4x_3=-33$	5
	$+4x_1-6x_2-5x_3=-10$	3		$+4x_1+2x_2-7x_3=-15$	4		$+5x_1+5x_2+4x_3=16$	-1
	$+1x_1+6x_2-7x_3=20$	0		$+7x_1+3x_2-5x_3=8$	5		$-7x_1+3x_2-7x_3=-31$	-1
178)	$+6x_1+1x_2-2x_3=-7$	0	179)	$-2x_1+6x_2-2x_3=-10$	1	180)	$+5x_1-2x_2-2x_3=-6$	0
	$+6x_1-2x_2-2x_3=-16$	3		$-3x_1+5x_2+5x_3=-23$	-2		$-4x_1+7x_2+7x_3=21$	3
	$-2x_1+0x_2-6x_3=-30$	5		$-1x_1-6x_2-2x_3=15$	-2		$-3x_1-7x_2-5x_3=-21$	0

181) $-7x_1 -1x_2 -4x_3=-21$	2	182) $-1x_1 -1x_2 -2x_3=-1$	-3	183) $+1x_1 -4x_2 +5x_3=-2$	0
$+7x_1 +1x_2 -1x_3=16$	3	$+2x_1 +4x_2 +3x_3=0$	0	$+3x_1 +1x_2 -6x_3=10$	-2
$-7x_1 +0x_2 +6x_3=-8$	1	$-7x_1 -7x_2 +5x_3=31$	2	$-4x_1 +4x_2 -1x_3=-6$	-2
184) $-3x_1 +6x_2 -7x_3=26$	-1	185) $+6x_1 +0x_2 +1x_3=35$	5	186) $-3x_1 +0x_2 -7x_3=-35$	0
$-7x_1 -6x_2 -4x_3=-27$	5	$-6x_1 -2x_2 +6x_3=4$	-2	$-6x_1 +7x_2 -4x_3=-34$	-2
$+1x_1 +1x_2 -5x_3=-1$	1	$-4x_1 -1x_2 +0x_3=-18$	5	$+2x_1 -6x_2 +1x_3=17$	5
187) $-1x_1 -6x_2 -3x_3=-34$	4	188) $+6x_1 +5x_2 +3x_3=6$	2	189) $-5x_1 -7x_2 +4x_3=17$	-3
$-3x_1 +6x_2 +3x_3=18$	5	$+2x_1 -7x_2 +2x_3=31$	-3	$-7x_1 +2x_2 -1x_3=21$	2
$+7x_1 +1x_2 +3x_3=33$	0	$-5x_1 -6x_2 -1x_3=5$	3	$+2x_1 +5x_2 -6x_3=-20$	4
190) $+3x_1 +2x_2 -4x_3=6$	-2	191) $+2x_1 -6x_2 -7x_3=-2$	0	192) $-3x_1 -4x_2 +1x_3=-7$	1
$-6x_1 +5x_2 +5x_3=27$	4	$-6x_1 +2x_2 +0x_3=-4$	-2	$-2x_1 -6x_2 +5x_3=-8$	1
$+2x_1 +4x_2 -5x_3=17$	-1	$+3x_1 +0x_2 +4x_3=8$	2	$+1x_1 -6x_2 -4x_3=-5$	0
193) $+6x_1 +1x_2 +4x_3=15$	5	194) $+0x_1 +3x_2 -2x_3=-6$	0	195) $-4x_1 +0x_2 -4x_3=-12$	5
$+2x_1 +3x_2 +2x_3=-5$	-3	$+2x_1 +1x_2 +4x_3=-2$	-2	$-3x_1 +1x_2 +6x_3=-28$	-1
$-6x_1 +7x_2 +2x_3=-57$	-3	$+2x_1 +6x_2 +0x_3=-12$	0	$+1x_1 -6x_2 -3x_3=17$	-2
196) $-2x_1 -5x_2 +1x_3=-7$	0	197) $+1x_1 -4x_2 +1x_3=-16$	0	198) $-3x_1 -4x_2 -3x_3=-8$	-2
$+1x_1 +3x_2 +7x_3=-11$	1	$-3x_1 +4x_2 +6x_3=16$	4	$+6x_1 -1x_2 +5x_3=-27$	5
$+0x_1 -2x_2 +6x_3=-14$	-2	$+3x_1 +1x_2 +6x_3=4$	0	$+0x_1 +6x_2 -7x_3=44$	-2
199) $-5x_1 +0x_2 -2x_3=-33$	5	200) $+2x_1 +0x_2 +0x_3=4$	2		
$+2x_1 +5x_2 +0x_3=15$	1	$+7x_1 +2x_2 -6x_3=42$	5		
$-6x_1 +7x_2 +6x_3=1$	4	$+4x_1 +1x_2 -2x_3=19$	-3		

Задача № 2. Знайти всі розв'язки системи двох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

(Взяти перші два рівняння із відповідного варіанта задачі № 1)

Задача № 3. Знайти геометричним методом найбільше та найменше значення цільової функції z при заданих обмеженнях.

1) *Цільова функція:* $z=-44x_1+13x_2$ *Обмеження:* $-x_1-9x_2<=-40$ $-x_1-3x_2<=-16$ $-x_1+5x_2<=24$ $5x_1-3x_2<=56$ *Відповідь:* *Zmax*=21; $x_1=1$; $x_2=5$ *Zmin*=-600; $x_1=16$; $x_2=8$	2) *Цільова функція:* $z=-3x_1-47x_2$ *Обмеження:* $-x_2<=-1$ $-2x_1-x_2<=-13$ $-4x_1-x_2<=-17$ $2x_1+3x_2<=41$ $x_1-2x_2<=10$ *Відповідь:* *Zmax*=-65; $x_1=6$; $x_2=1$ *Zmin*=-614; $x_1=1$; $x_2=13$	3) *Цільова функція:* $z=-22x_1+46x_2$ *Обмеження:* $-x_2<=-1$ $-x_1+5x_2<=68$ $16x_1+x_2<=289$ $-3x_1-x_2<=-13$ $-10x_1-x_2<=-34$ *Відповідь:* *Zmax*=600; $x_1=2$; $x_2=14$ *Zmin*=-350; $x_1=18$; $x_2=1$
4) *Цільова функція:* $z=7x_1+11x_2$ *Обмеження:* $-19x_1+11x_2<=-27$ $9x_1+5x_2<=217$ $x_1<=18$ $3x_1-10x_2<=24$ $-x_1-6x_2<=-8$ *Відповідь:* *Zmax*=311; $x_1=13$; $x_2=20$ *Zmin*=25; $x_1=2$; $x_2=1$	5) *Цільова функція:* $z=43x_1-25x_2$ *Обмеження:* $-3x_1-5x_2<=-38$ $-x_1<=-1$ $4x_1+19x_2<=194$ $6x_1-x_2<=114$ $-x_1-8x_2<=-19$ *Відповідь:* *Zmax*=817; $x_1=19$; $x_2=0$ *Zmin*=-207; $x_1=1$; $x_2=10$	6) *Цільова функція:* $z=-10x_1-12x_2$ *Обмеження:* $-5x_1-x_2<=-13$ $5x_1+9x_2<=131$ $x_1-3x_2<=7$ $-x_2<=-1$ $-2x_1-3x_2<=-13$ $-x_1<=-1$ *Відповідь:* *Zmax*=-56; $x_1=2$; $x_2=3$ *Zmin*=-238; $x_1=19$; $x_2=4$

7) *Цільова функція:* $z=29x_1+22x_2$ *Обмеження:* $-5x_1-x_2<=-16$ $-2x_1-7x_2<=-43$ $-x_1-3x_2<=-20$ $5x_1+6x_2<=96$ *Відповідь:* *Zmax*=544; $x_1=18$; $x_2=1$ *Zmin*=190; $x_1=2$; $x_2=6$	8) *Цільова функція:* $z=-26x_1+16x_2$ *Обмеження:* $-7x_1+9x_2<=20$ $x_1<=19$ $8x_1-17x_2<=-1$ $-2x_1-x_2<=-5$ *Відповідь:* *Zmax*=22; $x_1=1$; $x_2=3$ *Zmin*=-350; $x_1=19$; $x_2=9$	9) *Цільова функція:* $z=24x_1+6x_2$ *Обмеження:* $-x_1<=-1$ $17x_1+8x_2<=161$ $-2x_1-3x_2<=-21$ $-x_1-x_2<=-8$ *Відповідь:* *Zmax*=222; $x_1=9$; $x_2=1$ *Zmin*=66; $x_1=1$; $x_2=7$
10) *Цільова функція:* $z=-45x_1+40x_2$ *Обмеження:* $3x_1+8x_2<=190$ $-4x_1+9x_2<=140$ $5x_1-6x_2<=18$ $-14x_1-5x_2<=-94$ $x_1<=18$ *Відповідь:* *Zmax*=595; $x_1=1$; $x_2=16$ *Zmin*=-330; $x_1=18$; $x_2=12$	11) *Цільова функція:* $z=19x_1-15x_2$ *Обмеження:* $5x_1+9x_2<=167$ $x_1<=19$ $2x_1-x_2<=33$ $-x_2<=-1$ $-2x_1-5x_2<=-17$ $-x_1<=-1$ *Відповідь:* *Zmax*=308; $x_1=17$; $x_2=1$ *Zmin*=-251; $x_1=1$; $x_2=18$	12) *Цільова функція:* $z=23x_1-7x_2$ *Обмеження:* $-x_1+1<=1$ $9x_1+8x_2<=152$ $-x_1-10x_2<=-26$ $-x_1-2x_2<=-10$ $-x_1-x_2<=-7$ $-7x_1-x_2<=-13$ *Відповідь:* *Zmax*=361; $x_1=16$; $x_2=1$ *Zmin*=-133; $x_1=0$; $x_2=19$

13) *Цільова функція:* $z=-43x_1-44x_2$ *Обмеження:* $-x_1-x_2<=-10$ $-11x_1-4x_2<=-75$ $3x_1-13x_2<=-34$ $11x_1+4x_2<=237$ $2x_1+7x_2<=156$ $-4x_1+7x_2<=108$ *Відповідь:* *Zmax*=-434; $x_1=6$; $x_2=4$ *Zmin*=-1437; $x_1=15$; $x_2=18$	14) *Цільова функція:* $z=35x_1-42x_2$ *Обмеження:* $x_1+2x_2<=51$ $13x_1+3x_2<=272$ $x_1<=20$ $-x_2+1<=1$ $-5x_1-x_2<=-5$ $-14x_1+13x_2<=65$ *Відповідь:* *Zmax*=700; $x_1=20$; $x_2=0$ *Zmin*=-343; $x_1=13$; $x_2=19$	15) *Цільова функція:* $z=-32x_1+2x_2$ *Обмеження:* $x_1<=20$ $-x_1-11x_2<=-28$ $-x_1-x_2<=-8$ $-7x_1-2x_2<=-31$ $-5x_1+19x_2<=223$ $2x_1-3x_2<=31$ *Відповідь:* *Zmax*=-8; $x_1=1$; $x_2=12$ *Zmin*=-634; $x_1=20$; $x_2=3$
16) *Цільова функція:* $z=-49x_1+3x_2$ *Обмеження:* $18x_1+5x_2<=113$ $-x_1-x_2<=-7$ $-2x_1-x_2<=-11$ $-x_1<=-1$ *Відповідь:* *Zmax*=8; $x_1=1$; $x_2=19$ *Zmin*=-291; $x_1=6$; $x_2=1$	17) *Цільова функція:* $z=14x_1-7x_2$ *Обмеження:* $-12x_1-x_2<=-29$ $5x_1+6x_2<=107$ $x_1-7x_2<=5$ $-x_1-6x_2<=-18$ $-3x_1-4x_2<=-26$ *Відповідь:* *Zmax*=252; $x_1=19$; $x_2=2$ *Zmin*=-105; $x_1=1$; $x_2=17$	18) *Цільова функція:* $z=-23x_1-5x_2$ *Обмеження:* $-5x_1-2x_2<=-24$ $-x_1-2x_2<=-13$ $-2x_1-3x_2<=-24$ $-3x_1-4x_2<=-34$ $x_1+x_2<=12$ *Відповідь:* *Zmax*=-60; $x_1=0$; $x_2=12$ *Zmin*=-258; $x_1=11$; $x_2=1$

19) *Цільова функція:* $z=-5x_1+7x_2$ *Обмеження:* $-x_1<=-1$ $5x_1+9x_2<=167$ $x_1<=19$ $4x_1-3x_2<=61$ $-x_2<=-1$ $-x_1-14x_2<=-29$ *Відповідь:* *Zmax*=121; $x_1=1$; $x_2=18$ *Zmin*=-73; $x_1=16$; $x_2=1$	20) *Цільова функція:* $z=-15x_1+18x_2$ *Обмеження:* $x_1+2x_2<=55$ $x_1+16x_2<=321$ $-10x_1-x_2<=-30$ $4x_1-5x_2<=12$ $5x_1-3x_2<=41$ *Відповідь:* *Zmax*=345; $x_1=1$; $x_2=20$ *Zmin*=-51; $x_1=13$; $x_2=8$	21) *Цільова функція:* $z=10x_1+16x_2$ *Обмеження:* $-x_1<=-1$ $17x_1+3x_2<=74$ $-x_1-2x_2<=-8$ $-2x_1-x_2<=-7$ *Відповідь:* *Zmax*=314; $x_1=1$; $x_2=19$ *Zmin*=68; $x_1=2$; $x_2=3$
22) *Цільова функція:* $z=-3x_1-17x_2$ *Обмеження:* $-5x_1+4x_2<=16$ $x_1+4x_2<=88$ $-2x_1-5x_2<=-20$ $5x_1+2x_2<=116$ $7x_1-x_2<=132$ $x_1-9x_2<=10$ *Відповідь:* *Zmax*=-30; $x_1=10$; $x_2=0$ *Zmin*=-359; $x_1=12$; $x_2=19$	23) *Цільова функція:* $z=-19x_1+10x_2$ *Обмеження:* $-7x_1-3x_2<=-27$ $-x_1-2x_2<=-7$ $x_1-11x_2<=-6$ $x_1-x_2<=14$ $4x_1+19x_2<=171$ *Відповідь:* *Zmax*=90; $x_1=0$; $x_2=9$ *Zmin*=-311; $x_1=19$; $x_2=5$	24) *Цільова функція:* $z=26x_1-26x_2$ *Обмеження:* $x_1+x_2<=15$ $-x_2<=-2$ $-4x_1-3x_2<=-22$ $-x_1<=-1$ *Відповідь:* *Zmax*=286; $x_1=13$; $x_2=2$ *Zmin*=-338; $x_1=1$; $x_2=14$

25) *Цільова функція:* $z=-23x_1-13x_2$ *Обмеження:* $-x_1-2x_2<=-7$ $-x_1-6x_2<=-11$ $-11x_1-x_2<=-35$ $x_1-x_2<=11$ $x_1+9x_2<=119$ $4x_1-3x_2<=47$ *Відповідь:* *Zmax*=-95; $x_1=3$; $x_2=2$ *Zmin*=-603; $x_1=20$; $x_2=11$	26) *Цільова функція:* $z=29x_1+8x_2$ *Обмеження:* $9x_1+16x_2<=169$ $x_1-4x_2<=13$ $-x_1-6x_2<=-13$ $-x_1<=-1$ *Відповідь:* *Zmax*=501; $x_1=17$; $x_2=1$ *Zmin*=45; $x_1=1$; $x_2=2$	27) *Цільова функція:* $z=-44x_1+32x_2$ *Обмеження:* $-x_1-3x_2<=-14$ $-2x_1-x_2<=-13$ $-7x_1-2x_2<=-32$ $7x_1+4x_2<=64$ *Відповідь:* *Zmax*=512; $x_1=0$; $x_2=16$ *Zmin*=-288; $x_1=8$; $x_2=2$
28) *Цільова функція:* $z=-42x_1+21x_2$ *Обмеження:* $5x_1-9x_2<=21$ $-3x_1-2x_2<=-20$ $5x_1+3x_2<=142$ $8x_1-5x_2<=90$ $-12x_1+11x_2<=53$ $x_2<=19$ *Відповідь:* *Zmax*=63; $x_1=2$; $x_2=7$ *Zmin*=-546; $x_1=20$; $x_2=14$	29) *Цільова функція:* $z=26x_1-3x_2$ *Обмеження:* $8x_1+17x_2<=170$ $2x_1-11x_2<=12$ $-x_1-x_2<=-6$ $-2x_1-x_2<=-10$ *Відповідь:* *Zmax*=436; $x_1=17$; $x_2=2$ *Zmin*=-30; $x_1=0$; $x_2=10$	30) *Цільова функція:* $z=-10x_1+46x_2$ *Обмеження:* $-x_2<=-2$ $-x_1<=-1$ $-x_1+5x_2<=39$ $3x_1-4x_2<=4$ *Відповідь:* *Zmax*=358; $x_1=1$; $x_2=8$ *Zmin*=52; $x_1=4$; $x_2=2$

31) *Цільова функція:* $z=-7x_1-14x_2$ *Обмеження:* $-6x_1-x_2<=-14$ $-x_2<=-1$ $-x_1-7x_2<=-16$ $-11x_1+17x_2<=125$ $18x_1+x_2<=343$ *Відповідь:* *Zmax*=-42; $x_1=2$; $x_2=2$ *Zmin*=-392; $x_1=18$; $x_2=19$	32) *Цільова функція:* $z=11x_1+10x_2$ *Обмеження:* $-x_1-3x_2<=-14$ $-7x_1-4x_2<=-47$ $-5x_1-x_2<=-15$ $16x_1-3x_2<=237$ $-x_1+9x_2<=135$ $-x_2<=-1$ *Відповідь:* *Zmax*=368; $x_1=18$; $x_2=17$ *Zmin*=85; $x_1=5$; $x_2=3$	33) *Цільова функція:* $z=-25x_1+3x_2$ *Обмеження:* $-14x_1-x_2<=-15$ $-x_1-18x_2<=-19$ $14x_1+19x_2<=285$ $x_1<=19$ *Відповідь:* *Zmax*=45; $x_1=0$; $x_2=15$ *Zmin*=-475; $x_1=19$; $x_2=0$
34) *Цільова функція:* $z=3x_1+13x_2$ *Обмеження:* $-x_2<=-1$ $-5x_1-3x_2<=-28$ $-13x_1-2x_2<=-38$ $11x_1+x_2<=227$ $x_1<=20$ $x_1+19x_2<=361$ *Відповідь:* *Zmax*=291; $x_1=19$; $x_2=18$ *Zmin*=28; $x_1=5$; $x_2=1$	35) *Цільова функція:* $z=39x_1-9x_2$ *Обмеження:* $5x_1+x_2<=106$ $4x_1-x_2<=74$ $-x_2<=-2$ $-3x_1-14x_2<=-73$ $-8x_1+17x_2<=77$ $2x_1+x_2<=49$ *Відповідь:* *Zmax*=726; $x_1=20$; $x_2=6$ *Zmin*=-6; $x_1=1$; $x_2=5$	36) *Цільова функція:* $z=22x_1-8x_2$ *Обмеження:* $-5x_1-3x_2<=-56$ $3x_1-5x_2<=15$ $-6x_1-11x_2<=-156$ $x_1+6x_2<=103$ $5x_1+x_2<=109$ *Відповідь:* *Zmax*=368; $x_1=20$; $x_2=9$ *Zmin*=-114; $x_1=1$; $x_2=17$

37) *Цільова функція:* $z=34x_1-23x_2$ *Обмеження:* $-x_2<=-2$ $-3x_1-17x_2<=-85$ $17x_1-x_2<=321$ $-4x_1+13x_2<=167$ $-10x_1+7x_2<=35$ *Відповідь:* *Zmax*=600; $x_1=19$; $x_2=2$ *Zmin*=-115; $x_1=0$; $x_2=5$	38) *Цільова функція:* $z=-12x_1-9x_2$ *Обмеження:* $3x_1+8x_2<=107$ $x_1-x_2<=10$ $2x_1-5x_2<=14$ $-2x_1-5x_2<=-14$ $-11x_1-x_2<=-24$ *Відповідь:* *Zmax*=-42; $x_1=2$; $x_2=2$ *Zmin*=-267; $x_1=17$; $x_2=7$	39) *Цільова функція:* $z=22x_1-3x_2$ *Обмеження:* $-4x_1-5x_2<=-29$ $-x_2<=-1$ $x_1+8x_2<=41$ $x_1-x_2<=14$ *Відповідь:* *Zmax*=365; $x_1=17$; $x_2=3$ *Zmin*=7; $x_1=1$; $x_2=5$
40) *Цільова функція:* $z=47x_1+28x_2$ *Обмеження:* $x_1+x_2<=30$ $-3x_1-7x_2<=-52$ $8x_1+x_2<=121$ $-x_1+x_2<=6$ *Відповідь:* *Zmax*=1087; $x_1=13$; $x_2=17$ *Zmin*=243; $x_1=1$; $x_2=7$	41) *Цільова функція:* $z=47x_1+44x_2$ *Обмеження:* $x_1-x_2<=18$ $-x_2+1<=1$ $-7x_1-5x_2<=-42$ $-x_1<=-1$ $7x_1+18x_2<=151$ *Відповідь:* *Zmax*=937; $x_1=19$; $x_2=1$ *Zmin*=282; $x_1=6$; $x_2=0$	42) *Цільова функція:* $z=8x_1-34x_2$ *Обмеження:* $-x_2<=-1$ $16x_1+17x_2<=289$ $-3x_1-x_2<=-13$ $-7x_1-x_2<=-17$ *Відповідь:* *Zmax*=102; $x_1=17$; $x_2=1$ *Zmin*=-578; $x_1=0$; $x_2=17$

43) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-28x_1+43x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $x_1-x_2<=1$ $7x_1-5x_2<=15$ $x_1<=10$ $-17x_1+8x_2<=-26$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=494; $x_1=10$; $x_2=18$ *Zmin*=-13; $x_1=2$; $x_2=1$	44) <u>*Цільова функція:*</u> $z=31x_1+22x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-2x_1-7x_2<=-20$ $-10x_1-x_2<=-32$ $-x_1<=-2$ $x_1+9x_2<=119$ $7x_1-x_2<=129$ $4x_1-9x_2<=40$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=862; $x_1=20$; $x_2=11$ *Zmin*=137; $x_1=3$; $x_2=2$	45) <u>*Цільова функція:*</u> $z=6x_1+29x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1-12x_2<=-12$ $3x_1-x_2<=49$ $2x_1-5x_2<=24$ $7x_1+19x_2<=285$ $-x_1+1<=1$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=435; $x_1=0$; $x_2=15$ *Zmin*=29; $x_1=0$; $x_2=1$
46) <u>*Цільова функція:*</u> $z=37x_1+12x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1-6x_2<=-17$ $-2x_1-x_2<=-12$ $-x_2<=-1$ $4x_1-x_2<=75$ $x_1<=20$ $x_2<=10$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=860; $x_1=20$; $x_2=10$ *Zmin*=157; $x_1=1$; $x_2=10$	47) <u>*Цільова функція:*</u> $z=15x_1+6x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-7x_1+18x_2<=209$ $x_1<=19$ $2x_1-x_2<=29$ $2x_1-15x_2<=-13$ $-x_1<=-1$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=399; $x_1=19$; $x_2=19$ *Zmin*=21; $x_1=1$; $x_2=1$	48) <u>*Цільова функція:*</u> $z=38x_1-13x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1-5x_2<=-41$ $x_1+8x_2<=163$ $3x_1-2x_2<=21$ $-11x_1+10x_2<=69$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=488; $x_1=19$; $x_2=18$ *Zmin*=-66; $x_1=1$; $x_2=8$

49) *Цільова функція:* $z=49x_1+26x_2$ *Обмеження:* $-9x_1-8x_2<=-106$ $x_1+x_2<=21$ $-x_2<=-2$ $-x_1<=-2$ *Відповідь:* *Zmax*=983; $x_1=19$; $x_2=2$ *Zmin*=384; $x_1=2$; $x_2=11$	50) *Цільова функція:* $z=32x_1-17x_2$ *Обмеження:* $-x_2+1<=1$ $-8x_1-3x_2<=-32$ $-8x_1-x_2<=-16$ $3x_1+20x_2<=320$ $13x_1-2x_2<=234$ *Відповідь:* *Zmax*=576; $x_1=18$; $x_2=0$ *Zmin*=-272; $x_1=0$; $x_2=16$	51) *Цільова функція:* $z=50x_1-49x_2$ *Обмеження:* $4x_1+x_2<=79$ $-x_1-4x_2<=-46$ $-8x_1+13x_2<=127$ *Відповідь:* *Zmax*=557; $x_1=18$; $x_2=7$ *Zmin*=-439; $x_1=2$; $x_2=11$
52) *Цільова функція:* $z=16x_1+8x_2$ *Обмеження:* $-x_1-11x_2<=-15$ $-x_1<=-4$ $x_1-2x_2<=15$ $14x_1+15x_2<=296$ *Відповідь:* *Zmax*=320; $x_1=19$; $x_2=2$ *Zmin*=72; $x_1=4$; $x_2=1$	53) *Цільова функція:* $z=-46x_1-27x_2$ *Обмеження:* $-9x_1-x_2<=-17$ $-x_2+1<=1$ $-8x_1-x_2<=-16$ $x_1-8x_2<=8$ $5x_1-4x_2<=76$ $11x_1+20x_2<=340$ *Відповідь:* *Zmax*=-92; $x_1=2$; $x_2=0$ *Zmin*=-1082; $x_1=20$; $x_2=6$	54) *Цільова функція:* $z=21x_1+50x_2$ *Обмеження:* $-x_2+1<=1$ $-11x_1-4x_2<=-55$ $-4x_1+9x_2<=95$ $19x_1-7x_2<=228$ *Відповідь:* *Zmax*=1349; $x_1=19$; $x_2=19$ *Zmin*=105; $x_1=5$; $x_2=0$

55) *Цільова функція:* $z=-48x_1-48x_2$ *Обмеження:* $9x_1+2x_2<=190$ $6x_1+13x_2<=290$ $-17x_1-3x_2<=-145$ $5x_1-2x_2<=90$ $-3x_1-10x_2<=-54$ *Відповідь:* *Zmax*$=-528$; $x_1=8$; $x_2=3$ *Zmin*$=-1536$; $x_1=18$; $x_2=14$	56) *Цільова функція:* $z=37x_1+29x_2$ *Обмеження:* $-x_1<=-2$ $-3x_1-x_2<=-18$ $x_1-12x_2<=6$ $x_1+x_2<=19$ *Відповідь:* *Zmax*$=695$; $x_1=18$; $x_2=1$ *Zmin*$=222$; $x_1=6$; $x_2=0$	57) *Цільова функція:* $z=28x_1+35x_2$ *Обмеження:* $19x_1+9x_2<=209$ $-x_2+1<=1$ $-x_1-x_2<=-5$ $-17x_1-x_2<=-53$ *Відповідь:* *Zmax*$=721$; $x_1=2$; $x_2=19$ *Zmin*$=140$; $x_1=5$; $x_2=0$
58) *Цільова функція:* $z=15x_1-15x_2$ *Обмеження:* $-3x_1-5x_2<=-55$ $-2x_1+x_2<=11$ $5x_1+7x_2<=153$ $x_1-12x_2<=-90$ $-x_2<=-8$ *Відповідь:* *Zmax*$=135$; $x_1=18$; $x_2=9$ *Zmin*$=-225$; $x_1=4$; $x_2=19$	59) *Цільова функція:* $z=23x_1+35x_2$ *Обмеження:* $-x_1+1<=1$ $-5x_1-2x_2<=-24$ $-9x_1-2x_2<=-32$ $x_1-7x_2<=-10$ $16x_1+11x_2<=209$ *Відповідь:* *Zmax*$=665$; $x_1=0$; $x_2=19$ *Zmin*$=162$; $x_1=4$; $x_2=2$	60) *Цільова функція:* $z=-34x_1+27x_2$ *Обмеження:* $-x_1+19x_2<=190$ $3x_1-x_2<=46$ $x_1-4x_2<=8$ $-x_1-4x_2<=-8$ $-9x_1-4x_2<=-40$ *Відповідь:* *Zmax*$=270$; $x_1=0$; $x_2=10$ *Zmin*$=-490$; $x_1=16$; $x_2=2$

61) *Цільова функція:* $z=-28x_1+43x_2$ *Обмеження:* $x_1-3x_2<=5$ $10x_1+3x_2<=215$ $5x_1+14x_2<=295$ $-7x_1+2x_2<=19$ $-4x_1-7x_2<=-39$ $-x_1<=-1$ *Відповідь:* *Zmax*$=776$; $x_1=3$; $x_2=20$ *Zmin*$=-345$; $x_1=20$; $x_2=5$	62) *Цільова функція:* $z=11x_1+14x_2$ *Обмеження:* $-x_1<=-2$ $x_1-14x_2<=-54$ $4x_1-x_2<=59$ $3x_1+4x_2<=106$ $-7x_1+12x_2<=94$ *Відповідь:* *Zmax*$=380$; $x_1=18$; $x_2=13$ *Zmin*$=78$; $x_1=2$; $x_2=4$	63) *Цільова функція:* $z=-23x_1+12x_2$ *Обмеження:* $-2x_1-x_2<=-4$ $-5x_1-x_2<=-7$ $x_1+6x_2<=42$ $x_1-2x_2<=10$ $2x_1-7x_2<=14$ $-x_2+1<=1$ *Відповідь:* *Zmax*$=84$; $x_1=0$; $x_2=7$ *Zmin*$=-366$; $x_1=18$; $x_2=4$
64) *Цільова функція:* $z=41x_1+2x_2$ *Обмеження:* $-2x_1-x_2<=-9$ $-9x_1-2x_2<=-28$ $-x_1-5x_2<=-13$ $-2x_1-5x_2<=-21$ $14x_1+13x_2<=182$ *Відповідь:* *Zmax*$=533$; $x_1=13$; $x_2=0$ *Zmin*$=28$; $x_1=0$; $x_2=14$	65) *Цільова функція:* $z=7x_1-12x_2$ *Обмеження:* $3x_1+5x_2<=133$ $x_1<=16$ $8x_1-3x_2<=104$ $-2x_1-x_2<=-26$ $-2x_1+3x_2<=38$ *Відповідь:* *Zmax*$=91$; $x_1=13$; $x_2=0$ *Zmin*$=-163$; $x_1=11$; $x_2=20$	66) *Цільова функція:* $z=-40x_1+45x_2$ *Обмеження:* $-14x_1+3x_2<=-30$ $2x_1+5x_2<=102$ $10x_1-3x_2<=118$ $-x_2<=-4$ *Відповідь:* *Zmax*$=570$; $x_1=6$; $x_2=18$ *Zmin*$=-340$; $x_1=13$; $x_2=4$

67) *<u>Цільова функція:</u>* $z=33x_1-16x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $-x_1-5x_2<=-13$ $-x_2+1<=1$ $-3x_1-2x_2<=-13$ $-x_1<=-1$ $5x_1+8x_2<=117$ $4x_1-x_2<=64$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=528; $x_1=16$; $x_2=0$ *Zmin*=-191; $x_1=1$; $x_2=14$	68) *<u>Цільова функція:</u>* $z=-3x_1+13x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $-15x_1-x_2<=-18$ $-x_1+1<=1$ $-x_1-4x_2<=-13$ $2x_1+x_2<=19$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=247; $x_1=0$; $x_2=19$ *Zmin*=-14; $x_1=9$; $x_2=1$	69) *<u>Цільова функція:</u>* $z=-29x_1+16x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $2x_1-x_2<=25$ $x_1-12x_2<=-22$ $-9x_1-x_2<=-20$ $-8x_1+17x_2<=179$ $10x_1-x_2<=161$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=147; $x_1=1$; $x_2=11$ *Zmin*=-358; $x_1=14$; $x_2=3$
70) *<u>Цільова функція:</u>* $z=47x_1+6x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $x_1-3x_2<=9$ $-2x_1-3x_2<=-27$ $-7x_1-3x_2<=-57$ $x_1-2x_2<=11$ $9x_1+14x_2<=195$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=817; $x_1=17$; $x_2=3$ *Zmin*=213; $x_1=3$; $x_2=12$	71) *<u>Цільова функція:</u>* $z=-4x_1+11x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $-x_2<=-1$ $-x_1<=-2$ $4x_1+9x_2<=143$ $6x_1-x_2<=113$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=157; $x_1=2$; $x_2=15$ *Zmin*=-65; $x_1=19$; $x_2=1$	72) *<u>Цільова функція:</u>* $z=37x_1-39x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $7x_1+x_2<=141$ $x_1-16x_2<=4$ $-5x_1-2x_2<=-20$ $-7x_1+17x_2<=170$ $9x_1+2x_2<=187$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=701; $x_1=20$; $x_2=1$ *Zmin*=-390; $x_1=0$; $x_2=10$

73) <ins>*Цільова функція:*</ins> $z=-6x_1+23x_2$ <ins>*Обмеження:*</ins> $-x_1<=-1$ $-8x_1-x_2<=-20$ $-x_1-2x_2<=-10$ $7x_1+9x_2<=178$ $x_1-3x_2<=4$ $x_1-5x_2<=-4$ <ins>*Відповідь:*</ins> *Zmax*=431; $x_1=1$; $x_2=19$ *Zmin*=-4; $x_1=16$; $x_2=4$	74) <ins>*Цільова функція:*</ins> $z=22x_1+26x_2$ <ins>*Обмеження:*</ins> $-8x_1+5x_2<=12$ $8x_1+7x_2<=228$ $9x_1-2x_2<=138$ $2x_1-15x_2<=-13$ $-x_1<=-1$ <ins>*Відповідь:*</ins> *Zmax*=762; $x_1=11$; $x_2=20$ *Zmin*=48; $x_1=1$; $x_2=1$	75) <ins>*Цільова функція:*</ins> $z=27x_1-15x_2$ <ins>*Обмеження:*</ins> $16x_1+17x_2<=289$ $-x_2<=-1$ $-3x_1-7x_2<=-31$ $-13x_1-x_2<=-17$ <ins>*Відповідь:*</ins> *Zmax*=444; $x_1=17$; $x_2=1$ *Zmin*=-255; $x_1=0$; $x_2=17$
76) <ins>*Цільова функція:*</ins> $z=-40x_1-8x_2$ <ins>*Обмеження:*</ins> $9x_1-17x_2<=18$ $3x_1+5x_2<=134$ $7x_1+x_2<=142$ $-x_1+3x_2<=44$ $-15x_1-x_2<=-30$ <ins>*Відповідь:*</ins> *Zmax*=-80; $x_1=2$; $x_2=0$ *Zmin*=-848; $x_1=18$; $x_2=16$	77) <ins>*Цільова функція:*</ins> $z=-20x_1+7x_2$ <ins>*Обмеження:*</ins> $3x_1-4x_2<=35$ $-x_2<=-1$ $-x_1-2x_2<=-5$ $-x_1<=-1$ $4x_1+17x_2<=157$ $x_1-x_2<=13$ <ins>*Відповідь:*</ins> *Zmax*=43; $x_1=1$; $x_2=9$ *Zmin*=-325; $x_1=18$; $x_2=5$	78) <ins>*Цільова функція:*</ins> $z=-46x_1+49x_2$ <ins>*Обмеження:*</ins> $-7x_1-15x_2<=-140$ $-2x_1-x_2<=-17$ $-7x_1+17x_2<=207$ $20x_1+x_2<=400$ <ins>*Відповідь:*</ins> *Zmax*=545; $x_1=2$; $x_2=13$ *Zmin*=-920; $x_1=20$; $x_2=0$

79) *Цільова функція:* $z=-x_1-20x_2$ *Обмеження:* $-5x_1-14x_2<=-104$ $13x_1+4x_2<=238$ $x_1+7x_2<=112$ $-x_1-x_2<=-10$ $-x_1+1<=1$ *Відповідь:* *Zmax*=-38; $x_1=18$; $x_2=1$ *Zmin*=-320; $x_1=0$; $x_2=16$	80) *Цільова функція:* $z=9x_1+45x_2$ *Обмеження:* $-6x_1-x_2<=-12$ $2x_1+3x_2<=77$ $x_1<=16$ $x_1-6x_2<=4$ $x_1-8x_2<=2$ $-11x_1+12x_2<=61$ *Відповідь:* *Zmax*=882; $x_1=13$; $x_2=17$ *Zmin*=18; $x_1=2$; $x_2=0$	81) *Цільова функція:* $z=40x_1+18x_2$ *Обмеження:* $17x_1+16x_2<=306$ $-x_2+1<=1$ $-x_1-4x_2<=-15$ $-3x_1-2x_2<=-25$ $-4x_1-x_2<=-25$ *Відповідь:* *Zmax*=720; $x_1=18$; $x_2=0$ *Zmin*=290; $x_1=5$; $x_2=5$
82) *Цільова функція:* $z=16x_1+18x_2$ *Обмеження:* $-x_1+1<=1$ $-x_2<=-1$ $-x_1-x_2<=-6$ $x_1-3x_2<=5$ $x_1-x_2<=11$ $3x_1+16x_2<=128$ *Відповідь:* *Zmax*=346; $x_1=16$; $x_2=5$ *Zmin*=98; $x_1=5$; $x_2=1$	83) *Цільова функція:* $z=-x_1-38x_2$ *Обмеження:* $5x_1+x_2<=95$ $6x_1-7x_2<=32$ $2x_1-9x_2<=-16$ $-13x_1+15x_2<=17$ *Відповідь:* *Zmax*=-77; $x_1=1$; $x_2=2$ *Zmin*=-586; $x_1=16$; $x_2=15$	84) *Цільова функція:* $z=-38x_1-31x_2$ *Обмеження:* $-x_2+1<=1$ $-7x_1-x_2<=-14$ $x_2<=14$ $8x_1-3x_2<=102$ $5x_1-2x_2<=63$ $x_1-8x_2<=5$ *Відповідь:* *Zmax*=-76; $x_1=2$; $x_2=0$ *Zmin*=-1118; $x_1=18$; $x_2=14$

85) *Цільова функція:* $z=48x_1+46x_2$ *Обмеження:* $-4x_1-x_2<=-17$ $-2x_1-x_2<=-11$ $-x_2<=-1$ $4x_1+3x_2<=35$ *Відповідь:* *Zmax*=510; $x_1=2$; $x_2=9$ *Zmin*=286; $x_1=5$; $x_2=1$	86) *Цільова функція:* $z=-34x_1-43x_2$ *Обмеження:* $-3x_1-4x_2<=-23$ $-3x_1+2x_2<=7$ $4x_1+3x_2<=87$ $2x_1+x_2<=37$ $x_1<=14$ $2x_1-9x_2<=-8$ *Відповідь:* *Zmax*=-249; $x_1=1$; $x_2=5$ *Zmin*=-1037; $x_1=9$; $x_2=17$	87) *Цільова функція:* $z=13x_1-4x_2$ *Обмеження:* $x_1-4x_2<=6$ $-x_2+1<=1$ $-x_1<=-1$ $x_1+x_2<=16$ *Відповідь:* *Zmax*=174; $x_1=14$; $x_2=2$ *Zmin*=-47; $x_1=1$; $x_2=15$
88) *Цільова функція:* $z=-27x_1-29x_2$ *Обмеження:* $15x_1+x_2<=304$ $-x_1+9x_2<=152$ $-x_2+1<=1$ $-x_1-6x_2<=-8$ $4x_1-x_2<=76$ $-16x_1-x_2<=-33$ *Відповідь:* *Zmax*=-83; $x_1=2$; $x_2=1$ *Zmin*=-1064; $x_1=19$; $x_2=19$	89) *Цільова функція:* $z=14x_1-37x_2$ *Обмеження:* $9x_1+20x_2<=280$ $x_1-2x_2<=10$ $2x_1-9x_2+9<=9$ $-4x_1-3x_2<=-42$ *Відповідь:* *Zmax*=104; $x_1=18$; $x_2=4$ *Zmin*=-518; $x_1=0$; $x_2=14$	90) *Цільова функція:* $z=-47x_1-5x_2$ *Обмеження:* $-x_1+x_2<=11$ $x_1+8x_2<=151$ $x_1+2x_2<=49$ $7x_1-2x_2<=103$ $-x_1-5x_2<=-20$ $-12x_1+5x_2<=20$ *Відповідь:* *Zmax*=-20; $x_1=0$; $x_2=4$ *Zmin*=-968; $x_1=19$; $x_2=15$

91) *<u>Цільова функція:</u>* $z=-11x_1+33x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $15x_1+19x_2<=342$ $-x_1-3x_2<=-16$ $-x_2<=-3$ $-7x_1-2x_2<=-36$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=594; $x_1=0$; $x_2=18$ *Zmin*=-110; $x_1=19$; $x_2=3$	92) *<u>Цільова функція:</u>* $z=-12x_1+4x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $-3x_1+2x_2<=22$ $8x_1+15x_2<=287$ $5x_1-14x_2<=-31$ $-x_2<=-4$ $-7x_1-2x_2<=-22$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=44; $x_1=0$; $x_2=11$ *Zmin*=-192; $x_1=19$; $x_2=9$	93) *<u>Цільова функція:</u>* $z=-35x_1-2x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $x_1<=20$ $x_1-2x_2<=10$ $x_1-6x_2<=2$ $-x_1<=-2$ $-x_1+5x_2<=78$ $2x_1+x_2<=53$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=-70; $x_1=2$; $x_2=0$ *Zmin*=-726; $x_1=20$; $x_2=13$
94) *<u>Цільова функція:</u>* $z=-29x_1+8x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $-8x_1-x_2<=-11$ $-x_2<=-1$ $-2x_1-7x_2<=-23$ $x_1-3x_2<=9$ $3x_1+5x_2<=55$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=88; $x_1=0$; $x_2=11$ *Zmin*=-419; $x_1=15$; $x_2=2$	95) *<u>Цільова функція:</u>* $z=-21x_1-27x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $x_1-2x_2<=11$ $-3x_1-10x_2<=-33$ $-x_1<=-1$ $-9x_1+14x_2<=89$ $3x_1+4x_2<=109$ $5x_1-x_2<=82$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=-102; $x_1=1$; $x_2=3$ *Zmin*=-750; $x_1=19$; $x_2=13$	96) *<u>Цільова функція:</u>* $z=-31x_1-50x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $-5x_1-x_2<=-16$ $x_1-5x_2<=15$ $-x_1-11x_2<=-15$ $-5x_1-2x_2<=-22$ $-9x_1+19x_2<=200$ $x_1<=20$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=-174; $x_1=4$; $x_2=1$ *Zmin*=-1620; $x_1=20$; $x_2=20$

97) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-34x_1+47x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_2<=-1$ $-x_1<=-1$ $x_1-5x_2<=1$ $x_1+5x_2<=21$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=154; $x_1=1$; $x_2=4$ *Zmin*=-280; $x_1=11$; $x_2=2$	98) <u>*Цільова функція:*</u> $z=44x_1+2x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-5x_1+7x_2<=85$ $2x_1+7x_2<=162$ $17x_1+2x_2<=342$ $-2x_1-7x_2<=-47$ $-4x_1-3x_2<=-61$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=882; $x_1=20$; $x_2=1$ *Zmin*=206; $x_1=4$; $x_2=15$	99) <u>*Цільова функція:*</u> $z=49x_1+42x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1<=-1$ $-x_1-8x_2<=-25$ $3x_1-x_2<=53$ $-x_1-9x_2<=-27$ $16x_1-x_2<=300$ $-8x_1+19x_2<=220$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=1820; $x_1=20$; $x_2=20$ *Zmin*=175; $x_1=1$; $x_2=3$
100) <u>*Цільова функція:*</u> $z=42x_1-x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $x_1+6x_2<=42$ $4x_1-3x_2<=60$ $-x_2+1<=1$ $-x_1+1<=1$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=752; $x_1=18$; $x_2=4$ *Zmin*=-7; $x_1=0$; $x_2=7$	101) <u>*Цільова функція:*</u> $z=36x_1-20x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1-3x_2<=-22$ $-4x_1-5x_2<=-53$ $-7x_1-x_2<=-23$ $5x_1+6x_2<=101$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=664; $x_1=19$; $x_2=1$ *Zmin*=-284; $x_1=1$; $x_2=16$	102) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-50x_1-33x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1+1<=1$ $-x_1-x_2<=-5$ $-3x_1-8x_2<=-35$ $5x_1+6x_2<=90$ $-x_1-9x_2<=-18$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=-165; $x_1=0$; $x_2=5$ *Zmin*=-900; $x_1=18$; $x_2=0$

103) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-32x_1+22x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-13x_1-8x_2<=-128$ $2x_1-3x_2<=7$ $x_2<=16$ $7x_1+4x_2<=155$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=352; $x_1=0$; $x_2=16$ *Zmin*=-346; $x_1=17$; $x_2=9$	104) <u>*Цільова функція:*</u> $z=23x_1+7x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1+1<=1$ $-5x_1+17x_2<=204$ $3x_1+x_2<=68$ $13x_1-4x_2<=178$ $-x_1-14x_2<=-28$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=512; $x_1=18$; $x_2=14$ *Zmin*=14; $x_1=0$; $x_2=2$	105) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-41x_1-23x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $x_2<=16$ $-5x_1-16x_2<=-80$ $11x_1-x_2<=204$ $5x_1-3x_2<=80$ $-x_1+1<=1$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=-115; $x_1=0$; $x_2=5$ *Zmin*=-1188; $x_1=20$; $x_2=16$
106) <u>*Цільова функція:*</u> $z=27x_1-41x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1-4x_2<=-11$ $2x_1-x_2<=32$ $-x_1-9x_2<=-16$ $7x_1+18x_2<=241$ $-8x_1-x_2<=-21$ $-3x_1-x_2<=-11$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=432; $x_1=16$; $x_2=0$ *Zmin*=-506; $x_1=1$; $x_2=13$	107) <u>*Цільова функція:*</u> $z=10x_1-23x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-3x_1+2x_2<=17$ $-x_1+9x_2<=139$ $3x_1+2x_2<=76$ $5x_1-12x_2<=-42$ $-4x_1-5x_2<=-54$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=-73; $x_1=18$; $x_2=11$ *Zmin*=-318; $x_1=5$; $x_2=16$	108) <u>*Цільова функція:*</u> $z=30x_1-2x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1<=-1$ $-8x_1-x_2<=-19$ $-x_1-2x_2<=-8$ $10x_1+3x_2<=46$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=116; $x_1=4$; $x_2=2$ *Zmin*=6; $x_1=1$; $x_2=12$

109) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-12x_1-25x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1-x_2<=-7$ $-4x_1-x_2<=-13$ $x_1+3x_2<=28$ $2x_1-9x_2<=11$ $-x_2<=-1$ $-3x_1-4x_2<=-25$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=-109; $x_1=7$; $x_2=1$ *Zmin*=-303; $x_1=19$; $x_2=3$	110) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-6x_1-23x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-4x_1+3x_2<=9$ $7x_1+4x_2<=160$ $4x_1+x_2<=76$ $-x_2<=-8$ $-x_1-x_2<=-24$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=-280; $x_1=16$; $x_2=8$ *Zmin*=-509; $x_1=12$; $x_2=19$	111) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-46x_1-10x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1-2x_2<=-10$ $15x_1+7x_2<=127$ $-x_1<=-1$ $-3x_1-5x_2<=-28$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=-96; $x_1=1$; $x_2=5$ *Zmin*=-378; $x_1=8$; $x_2=1$
112) <u>*Цільова функція:*</u> $z=33x_1+7x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1<=-1$ $11x_1-x_2<=205$ $x_1-2x_2<=11$ $-x_2<=-1$ $5x_1+19x_2<=385$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=765; $x_1=20$; $x_2=15$ *Zmin*=40; $x_1=1$; $x_2=1$	113) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-47x_1+43x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-11x_1+10x_2<=90$ $x_1+3x_2<=70$ $17x_1-16x_2<=51$ $-3x_1-x_2<=-9$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=390; $x_1=10$; $x_2=20$ *Zmin*=-162; $x_1=19$; $x_2=17$	114) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-5x_1-21x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1+1<=1$ $x_1-6x_2<=-8$ $-2x_1-x_2<=-10$ $8x_1-x_2<=124$ $-x_1+17x_2<=187$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=-62; $x_1=4$; $x_2=2$ *Zmin*=-337; $x_1=17$; $x_2=12$

115) *<u>Цільова функція:</u>* $z=22x_1-27x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $-x_1-10x_2<=-18$ $-x_1-7x_2<=-15$ $-15x_1-x_2<=-17$ $-x_1+1<=1$ $10x_1+9x_2<=180$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=396; $x_1=18$; $x_2=0$ *Zmin*=-540; $x_1=0$; $x_2=20$	116) *<u>Цільова функція:</u>* $z=47x_1+7x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $x_1-7x_2<=-4$ $-7x_1-x_2<=-22$ $-x_1<=-2$ $-3x_1+4x_2<=34$ $8x_1+7x_2<=192$ $x_1<=17$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=855; $x_1=17$; $x_2=8$ *Zmin*=148; $x_1=3$; $x_2=1$	117) *<u>Цільова функція:</u>* $z=41x_1+3x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $-9x_1+11x_2<=72$ $x_1-2x_2<=11$ $-9x_1-8x_2<=-99$ $3x_1-4x_2<=35$ $8x_1+5x_2<=202$ $3x_1-x_2<=47$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=809; $x_1=19$; $x_2=10$ *Zmin*=150; $x_1=3$; $x_2=9$
118) *<u>Цільова функція:</u>* $z=-29x_1-28x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $10x_1-3x_2<=158$ $x_1-x_2<=13$ $x_1-7x_2<=7$ $-2x_1-7x_2<=-14$ $-x_1+1<=1$ $-x_1+10x_2<=120$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=-56; $x_1=0$; $x_2=2$ *Zmin*=-972; $x_1=20$; $x_2=14$	119) *<u>Цільова функція:</u>* $z=-48x_1-17x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $-x_1+1<=1$ $-x_1-2x_2<=-10$ $-3x_1-4x_2<=-26$ $-x_1-x_2<=-7$ $7x_1+4x_2<=60$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=-119; $x_1=0$; $x_2=7$ *Zmin*=-401; $x_1=8$; $x_2=1$	120) *<u>Цільова функція:</u>* $z=-9x_1-12x_2$ *<u>Обмеження:</u>* $x_1-8x_2<=-19$ $3x_1-x_2<=35$ $-2x_1+7x_2<=97$ $-x_1+x_2<=6$ $-13x_1+5x_2<=-50$ *<u>Відповідь:</u>* *Zmax*=-81; $x_1=5$; $x_2=3$ *Zmin*=-390; $x_1=18$; $x_2=19$

121) *Цільова функція:* $z=-13x_1-37x_2$ *Обмеження:* $12x_1+x_2<=232$ $2x_1-15x_2<=-22$ $-8x_1-3x_2<=-38$ $-x_1<=-1$ $x_2<=16$ *Відповідь:* *Zmax*=-126; $x_1=4$; $x_2=2$ *Zmin*=-826; $x_1=18$; $x_2=16$	122) *Цільова функція:* $z=32x_1+2x_2$ *Обмеження:* $9x_1+17x_2<=188$ $x_1-3x_2<=16$ $-3x_1-11x_2<=-48$ $-7x_1-3x_2<=-44$ *Відповідь:* *Zmax*=610; $x_1=19$; $x_2=1$ *Zmin*=84; $x_1=2$; $x_2=10$	123) *Цільова функція:* $z=-15x_1+46x_2$ *Обмеження:* $-3x_1+10x_2<=130$ $-3x_1-8x_2<=-30$ $4x_1-9x_2<=40$ $4x_1+3x_2<=88$ $-9x_1-x_2<=-13$ $-x_1-x_2<=-5$ *Відповідь:* *Zmax*=598; $x_1=0$; $x_2=13$ *Zmin*=-150; $x_1=10$; $x_2=0$
124) *Цільова функція:* $z=12x_1+46x_2$ *Обмеження:* $-x_1-2x_2<=-14$ $-3x_1-x_2<=-12$ $-x_1<=-1$ $-x_1+18x_2<=323$ $x_1<=19$ $x_1-11x_2<=-25$ *Відповідь:* *Zmax*=1102; $x_1=19$; $x_2=19$ *Zmin*=234; $x_1=8$; $x_2=3$	125) *Цільова функція:* $z=-27x_1+6x_2$ *Обмеження:* $x_1-8x_2<=3$ $-13x_1-2x_2<=-39$ $-2x_1+19x_2<=245$ $x_1<=20$ $10x_1-x_2<=188$ *Відповідь:* *Zmax*=51; $x_1=1$; $x_2=13$ *Zmin*=-501; $x_1=19$; $x_2=2$	126) *Цільова функція:* $z=-14x_1+21x_2$ *Обмеження:* $-6x_1-x_2<=-12$ $-x_1<=-1$ $2x_1-7x_2<=10$ $-x_2+1<=1$ $13x_1+11x_2<=178$ *Відповідь:* *Zmax*=301; $x_1=1$; $x_2=15$ *Zmin*=-126; $x_1=12$; $x_2=2$

<table>
<tr>
<td>127) <u>Цільова функція:</u> $z=33x_1+7x_2$
<u>Обмеження:</u>
$3x_1-x_2<=40$
$4x_1-7x_2<=25$
$x_1-3x_2<=5$
$-4x_1-x_2<=-20$
$-5x_1+7x_2<=8$
<u>Відповідь:</u>
Zmax=692; $x_1=18$; $x_2=14$
Zmin=160; $x_1=4$; $x_2=4$</td>
<td>128) <u>Цільова функція:</u> $z=-6x_1+7x_2$
<u>Обмеження:</u>
$x_1-x_2<=11$
$-x_2<=-2$
$-11x_1-x_2<=-35$
$-4x_1+17x_2<=213$
$4x_1-x_2<=59$
<u>Відповідь:</u>
Zmax=79; $x_1=2$; $x_2=13$
Zmin=-64; $x_1=13$; $x_2=2$</td>
<td>129) <u>Цільова функція:</u> $z=-31x_1+36x_2$
<u>Обмеження:</u>
$x_1<=19$
$x_1+9x_2<=136$
$7x_1-15x_2<=-17$
$-4x_1-x_2<=-19$
<u>Відповідь:</u>
Zmax=509; $x_1=1$; $x_2=15$
Zmin=-229; $x_1=19$; $x_2=10$</td>
</tr>
<tr>
<td>130) <u>Цільова функція:</u> $z=-46x_1-32x_2$
<u>Обмеження:</u>
$-x_1-3x_2<=-14$
$3x_1+7x_2<=176$
$-x_1-8x_2<=-19$
$-8x_1+5x_2<=4$
$x_1<=19$
<u>Відповідь:</u>
Zmax=-220; $x_1=2$; $x_2=4$
Zmin=-1418; $x_1=19$; $x_2=17$</td>
<td>131) <u>Цільова функція:</u> $z=8x_1+17x_2$
<u>Обмеження:</u>
$x_1+x_2<=26$
$10x_1+x_2<=143$
$-x_1-8x_2<=-38$
$-3x_1-5x_2<=-38$
$-7x_1+11x_2<=70$
<u>Відповідь:</u>
Zmax=334; $x_1=12$; $x_2=14$
Zmin=116; $x_1=6$; $x_2=4$</td>
<td>132) <u>Цільова функція:</u> $z=-7x_1-22x_2$
<u>Обмеження:</u>
$x_1-2x_2<=4$
$-x_1-5x_2<=-11$
$x_1+x_2<=31$
$2x_1-x_2<=26$
$-17x_1+11x_2<=5$
<u>Відповідь:</u>
Zmax=-51; $x_1=1$; $x_2=2$
Zmin=-502; $x_1=12$; $x_2=19$</td>
</tr>
</table>

133) *Цільова функція:* $z=-20x_1+17x_2$ *Обмеження:* $3x_1-19x_2<=-19$ $x_2<=19$ $15x_1+8x_2<=317$ $-14x_1+x_2<=1$ $-4x_1+5x_2<=71$ *Відповідь:* *Zmax*=235; $x_1=1$; $x_2=15$ *Zmin*=-312; $x_1=19$; $x_2=4$	134) *Цільова функція:* $z=2x_1-37x_2$ *Обмеження:* $-x_1-7x_2<=-11$ $-x_1-2x_2<=-6$ $-3x_1+19x_2<=57$ $3x_1-x_2<=51$ $x_1-2x_2<=12$ $2x_1-5x_2<=22$ *Відповідь:* *Zmax*=22; $x_1=11$; $x_2=0$ *Zmin*=-184; $x_1=19$; $x_2=6$	135) *Цільова функція:* $z=50x_1-38x_2$ *Обмеження:* $-2x_1-3x_2<=-18$ $-3x_1-x_2<=-13$ $-2x_1-5x_2<=-22$ $13x_1+11x_2<=143$ *Відповідь:* *Zmax*=550; $x_1=11$; $x_2=0$ *Zmin*=-494; $x_1=0$; $x_2=13$
136) *Цільова функція:* $z=-8x_1+6x_2$ *Обмеження:* $6x_1+x_2<=127$ $x_1<=20$ $x_1-20x_2+20<=20$ $-17x_1+18x_2-18<=-18$ $4x_1+x_2<=89$ *Відповідь:* *Zmax*=0; $x_1=0$; $x_2=0$ *Zmin*=-154; $x_1=20$; $x_2=1$	137) *Цільова функція:* $z=-34x_1-36x_2$ *Обмеження:* $x_1<=20$ $-x_1-14x_2<=-34$ $-11x_1-3x_2<=-72$ $-7x_1+11x_2<=122$ $x_1+3x_2<=74$ *Відповідь:* *Zmax*=-276; $x_1=6$; $x_2=2$ *Zmin*=-1328; $x_1=20$; $x_2=18$	138) *Цільова функція:* $z=26x_1-32x_2$ *Обмеження:* $-4x_1-9x_2<=-48$ $1-x_2<=1$ $3x_1-4x_2<=42$ $-7x_1-2x_2<=-29$ $11x_1-x_2<=195$ $-x_1+6x_2<=65$ *Відповідь:* *Zmax*=372; $x_1=18$; $x_2=3$ *Zmin*=-326; $x_1=1$; $x_2=11$

139) *Цільова функція:* $z=36x_1-46x_2$ *Обмеження:* $-x_2<=-1$ $-x_1-12x_2<=-25$ $-x_1<=-1$ $x_2<=20$ $x_1+2x_2<=53$ $16x_1-x_2<=287$ *Відповідь:* *Zmax*=602; $x_1=18$; $x_2=1$ *Zmin*=-884; $x_1=1$; $x_2=20$	140) *Цільова функція:* $z=-39x_1+15x_2$ *Обмеження:* $-x_1<=-3$ $19x_1+8x_2<=209$ $1-x_2<=1$ $-x_1-3x_2<=-8$ $-3x_1-2x_2<=-17$ *Відповідь:* *Zmax*=168; $x_1=3$; $x_2=19$ *Zmin*=-429; $x_1=11$; $x_2=0$	141) *Цільова функція:* $z=13x_1+x_2$ *Обмеження:* $-x_1<=-1$ $x_1-6x_2<=1$ $4x_1-5x_2<=23$ $3x_1-x_2<=42$ $3x_1+5x_2<=132$ $x_2<=18$ *Відповідь:* *Zmax*=262; $x_1=19$; $x_2=15$ *Zmin*=13; $x_1=1$; $x_2=0$
142) *Цільова функція:* $z=x_1+38x_2$ *Обмеження:* $-9x_1+5x_2<=46$ $4x_1+7x_2<=164$ $x_1<=20$ $3x_1-8x_2<=-4$ $-3x_1-x_2<=-14$ *Відповідь:* *Zmax*=766; $x_1=6$; $x_2=20$ *Zmin*=80; $x_1=4$; $x_2=2$	143) *Цільова функція:* $z=17x_1+37x_2$ *Обмеження:* $4x_1-x_2<=57$ $-x_1-x_2<=-18$ $-9x_1-2x_2<=-99$ $3x_1+11x_2<=219$ *Відповідь:* *Zmax*=861; $x_1=18$; $x_2=15$ *Zmin*=366; $x_1=15$; $x_2=3$	144) *Цільова функція:* $z=-22x_1-24x_2$ *Обмеження:* $-6x_1-x_2<=-17$ $-2x_1-x_2<=-13$ $-9x_1-7x_2<=-81$ $2x_1-7x_2<=18$ $5x_1-4x_2<=72$ $x_1+2x_2<=34$ *Відповідь:* *Zmax*=-198; $x_1=9$; $x_2=0$ *Zmin*=-608; $x_1=20$; $x_2=7$

145) *Цільова функція:* $z=48x_1-36x_2$ *Обмеження:* $2x_1+x_2<=44$ $5x_1+2x_2<=104$ $2x_1-5x_2<=1$ $-2x_1-x_2<=-7$ $-7x_1+x_2<=-2$ $-2x_1+13x_2<=152$ *Відповідь:* *Zmax*=612; $x_1=18$; $x_2=7$ *Zmin*=-336; $x_1=2$; $x_2=12$	146) *Цільова функція:* $z=15x_1-5x_2$ *Обмеження:* $-3x_1-x_2<=-14$ $-x_2<=-2$ $x_1-2x_2<=12$ $-x_1<=-1$ $10x_1+17x_2<=231$ *Відповідь:* *Zmax*=255; $x_1=18$; $x_2=3$ *Zmin*=-50; $x_1=1$; $x_2=13$	147) *Цільова функція:* $z=-11x_1-25x_2$ *Обмеження:* $-3x_1-x_2<=-8$ $-2x_1-x_2<=-6$ $x_1-4x_2<=3$ $x_1+3x_2<=24$ *Відповідь:* *Zmax*=-33; $x_1=3$; $x_2=0$ *Zmin*=-240; $x_1=15$; $x_2=3$
148) *Цільова функція:* $z=12x_1-8x_2$ *Обмеження:* $2x_1-5x_2<=23$ $-5x_1-x_2<=-16$ $-4x_1+17x_2<=272$ $4x_1+x_2<=88$ $x_1<=19$ $-x_2<=-1$ *Відповідь:* *Zmax*=204; $x_1=19$; $x_2=3$ *Zmin*=-128; $x_1=0$; $x_2=16$	149) *Цільова функція:* $z=-8x_1+15x_2$ *Обмеження:* $x_1+x_2<=20$ $-x_2<=-1$ $-x_1<=-1$ $-x_1-7x_2<=-15$ *Відповідь:* *Zmax*=277; $x_1=1$; $x_2=19$ *Zmin*=-137; $x_1=19$; $x_2=1$	150) *Цільова функція:* $z=-18x_1-39x_2$ *Обмеження:* $-x_1<=-1$ $x_1-19x_2<=-18$ $x_1<=20$ $14x_1+x_2<=285$ $x_1+14x_2<=285$ $x_2<=20$ *Відповідь:* *Zmax*=-57; $x_1=1$; $x_2=1$ *Zmin*=-1083; $x_1=19$; $x_2=19$

151) *Цільова функція:* $z=-26x_1-11x_2$ *Обмеження:* $-x_1<=-1$ $-2x_1-x_2<=-6$ $18x_1+11x_2<=227$ $-x_1-10x_2<=-22$ *Відповідь:* *Zmax*$=-70$; $x_1=1$; $x_2=4$ *Zmin*$=-323$; $x_1=12$; $x_2=1$	152) *Цільова функція:* $z=29x_1-28x_2$ *Обмеження:* $7x_1+x_2<=135$ $x_1-4x_2<=11$ $-x_1-11x_2<=-11$ $-15x_1+17x_2<=17$ *Відповідь:* *Zmax*$=495$; $x_1=19$; $x_2=2$ *Zmin*$=-28$; $x_1=0$; $x_2=1$	153) *Цільова функція:* $z=-38x_1+11x_2$ *Обмеження:* $-x_1<=-3$ $-x_1-6x_2<=-24$ $-x_1-x_2<=-9$ $17x_1+15x_2<=321$ *Відповідь:* *Zmax*$=84$; $x_1=3$; $x_2=18$ *Zmin*$=-673$; $x_1=18$; $x_2=1$
154) *Цільова функція:* $z=31x_1+45x_2$ *Обмеження:* $x_1+5x_2<=102$ $15x_1-x_2<=238$ $-x_1-8x_2<=-32$ $-x_1-x_2<=-11$ $-8x_1+x_2<=-34$ $-2x_1+3x_2<=30$ *Відповідь:* *Zmax*$=1292$; $x_1=17$; $x_2=17$ *Zmin*$=383$; $x_1=8$; $x_2=3$	155) *Цільова функція:* $z=-50x_1+44x_2$ *Обмеження:* $-x_1+1<=1$ $-x_2<=-1$ $13x_1-3x_2<=218$ $-12x_1+5x_2<=40$ $x_2<=20$ $2x_1+x_2<=54$ *Відповідь:* *Zmax*$=630$; $x_1=5$; $x_2=20$ *Zmin*$=-806$; $x_1=17$; $x_2=1$	156) *Цільова функція:* $z=-8x_1-48x_2$ *Обмеження:* $-x_1<=-1$ $-x_2<=-1$ $-x_1-2x_2<=-9$ $11x_1-2x_2<=163$ $x_1+8x_2<=113$ *Відповідь:* *Zmax*$=-104$; $x_1=7$; $x_2=1$ *Zmin*$=-712$; $x_1=17$; $x_2=12$

157) *Цільова функція:* $z=23x_1-46x_2$ *Обмеження:* $-x_1-x_2<=-4$ $-x_1+2x_2<=8$ $11x_1-8x_2<=80$ $-x_1-6x_2<=-14$ *Відповідь:* *Zmax*=138; $x_1=8$; $x_2=1$ *Zmin*=-184; $x_1=16$; $x_2=12$	158) *Цільова функція:* $z=-17x_1-22x_2$ *Обмеження:* $-x_2+1<=1$ $-13x_1-x_2<=-13$ $x_1-9x_2<=8$ $12x_1+17x_2<=221$ *Відповідь:* *Zmax*=-17; $x_1=1$; $x_2=0$ *Zmin*=-311; $x_1=17$; $x_2=1$	159) *Цільова функція:* $z=-9x_1+30x_2$ *Обмеження:* $-x_2+1<=1$ $-x_1<=-4$ $-3x_1-5x_2<=-30$ $-8x_1-x_2<=-43$ $2x_1-5x_2<=28$ $16x_1+15x_2<=334$ *Відповідь:* *Zmax*=504; $x_1=4$; $x_2=18$ *Zmin*=-126; $x_1=14$; $x_2=0$
160) *Цільова функція:* $z=19x_1-13x_2$ *Обмеження:* $-x_1<=-1$ $-x_1+18x_2<=143$ $3x_1-x_2<=48$ $5x_1-7x_2<=48$ $-x_2<=-1$ *Відповідь:* *Zmax*=264; $x_1=18$; $x_2=6$ *Zmin*=-85; $x_1=1$; $x_2=8$	161) *Цільова функція:* $z=-7x_1-49x_2$ *Обмеження:* $-x_2+1<=1$ $-2x_1-3x_2<=-10$ $-7x_1-x_2<=-16$ $x_1+x_2<=10$ *Відповідь:* *Zmax*=-35; $x_1=5$; $x_2=0$ *Zmin*=-448; $x_1=1$; $x_2=9$	162) *Цільова функція:* $z=-11x_1+31x_2$ *Обмеження:* $-7x_1+17x_2<=204$ $3x_1+x_2<=70$ $15x_1+x_2<=286$ $x_1-9x_2<=10$ $-3x_1-2x_2<=-24$ $-3x_1-4x_2<=-30$ *Відповідь:* *Zmax*=402; $x_1=17$; $x_2=19$ *Zmin*=-178; $x_1=19$; $x_2=1$

163) *Цільова функція:* $z=12x_1+20x_2$ *Обмеження:* $-x_1-2x_2<=-16$ $-x_1+1<=1$ $-x_1+3x_2<=48$ $5x_1+6x_2<=180$ $7x_1-2x_2<=96$ *Відповідь:* *Zmax*=544; $x_1=12$; $x_2=20$ *Zmin*=160; $x_1=0$; $x_2=8$	164) *Цільова функція:* $z=-29x_1+22x_2$ *Обмеження:* $x_1<=17$ $7x_1-4x_2<=71$ $x_1-2x_2<=3$ $-6x_1-7x_2<=-56$ $-11x_1+17x_2<=136$ *Відповідь:* *Zmax*=176; $x_1=0$; $x_2=8$ *Zmin*=-267; $x_1=13$; $x_2=5$	165) *Цільова функція:* $z=-28x_1+19x_2$ *Обмеження:* $-x_1+1<=1$ $-x_1-4x_2<=-15$ $-15x_1-7x_2<=-119$ $x_1+x_2<=19$ $-x_1-8x_2<=-19$ *Відповідь:* *Zmax*=361; $x_1=0$; $x_2=19$ *Zmin*=-532; $x_1=19$; $x_2=0$
166) *Цільова функція:* $z=-x_1+36x_2$ *Обмеження:* $-x_1+1<=1$ $17x_1+2x_2<=36$ $-x_1-x_2<=-3$ $-6x_1-x_2<=-8$ *Відповідь:* *Zmax*=648; $x_1=0$; $x_2=18$ *Zmin*=34; $x_1=2$; $x_2=1$	167) *Цільова функція:* $z=25x_1+3x_2$ *Обмеження:* $-x_1+1<=1$ $x_1-3x_2<=16$ $-x_1-15x_2<=-16$ $-8x_1-x_2<=-9$ $13x_1+19x_2<=266$ *Відповідь:* *Zmax*=478; $x_1=19$; $x_2=1$ *Zmin*=27; $x_1=0$; $x_2=9$	168) *Цільова функція:* $z=33x_1+25x_2$ *Обмеження:* $-14x_1+17x_2<=3$ $2x_1+x_2<=51$ $12x_1-x_2<=215$ $-x_2<=-1$ *Відповідь:* *Zmax*=969; $x_1=18$; $x_2=15$ *Zmin*=58; $x_1=1$; $x_2=1$

169) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-37x_1+6x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $x_2<=18$ $3x_1+x_2<=72$ $x_1<=19$ $2x_1-3x_2<=23$ $-8x_1-11x_2<=-115$ $-3x_1+2x_2<=12$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=-20; $x_1=2$; $x_2=9$ *Zmin*=-673; $x_1=19$; $x_2=5$	170) <u>*Цільова функція:*</u> $z=22x_1-18x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $5x_1-x_2<=90$ $-x_1-9x_2<=-18$ $-x_1-5x_2<=-14$ $-5x_1-2x_2<=-24$ $-7x_1+20x_2<=240$ $14x_1-x_2<=261$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=396; $x_1=18$; $x_2=0$ *Zmin*=-216; $x_1=0$; $x_2=12$	171) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-23x_1+16x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1<=-1$ $-x_1-2x_2<=-5$ $-x_2<=-1$ $3x_1-4x_2<=29$ $6x_1+7x_2<=118$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=233; $x_1=1$; $x_2=16$ *Zmin*=-281; $x_1=15$; $x_2=4$
172) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-21x_1+12x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1+1<=1$ $-12x_1+11x_2<=77$ $5x_1+4x_2<=131$ $8x_1-3x_2<=125$ $-x_1-4x_2<=-8$ $-x_2<=-1$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=84; $x_1=0$; $x_2=7$ *Zmin*=-324; $x_1=16$; $x_2=1$	173) <u>*Цільова функція:*</u> $z=37x_1-15x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-11x_1-3x_2<=-48$ $x_2<=16$ $7x_1+4x_2<=169$ $7x_1-4x_2<=97$ $-x_1-4x_2<=-23$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=568; $x_1=19$; $x_2=9$ *Zmin*=-240; $x_1=0$; $x_2=16$	174) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-26x_1-9x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-5x_1-6x_2<=-54$ $-x_1-6x_2<=-30$ $2x_1-x_2<=34$ $5x_1+19x_2<=171$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=-81; $x_1=0$; $x_2=9$ *Zmin*=-530; $x_1=19$; $x_2=4$

175) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-14x_1+41x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $10x_1-x_2<=176$ $2x_1-5x_2<=16$ $x_1-12x_2<=-11$ $-x_1<=-1$ $x_1+6x_2<=103$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=683; $x_1=1$; $x_2=17$ *Zmin*=-100; $x_1=13$; $x_2=2$	176) <u>*Цільова функція:*</u> $z=4x_1-4x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-4x_1-11x_2<=-70$ $3x_1-x_2<=34$ $11x_1+12x_2<=203$ $-x_1<=-1$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=40; $x_1=12$; $x_2=2$ *Zmin*=-60; $x_1=1$; $x_2=16$	177) <u>*Цільова функція:*</u> $z=13x_1-22x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-14x_1-3x_2<=-51$ $-x_1-8x_2<=-19$ $-x_1-4x_2<=-15$ $17x_1+19x_2<=323$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=247; $x_1=19$; $x_2=0$ *Zmin*=-374; $x_1=0$; $x_2=17$
178) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-33x_1-39x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $3x_1-x_2<=44$ $-2x_1-15x_2<=-45$ $-11x_1+15x_2<=45$ $10x_1+x_2<=164$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=-117; $x_1=0$; $x_2=3$ *Zmin*=-1041; $x_1=15$; $x_2=14$	179) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-22x_1+27x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $x_1-11x_2<=-8$ $-10x_1-3x_2<=-33$ $-x_1+1<=1$ $13x_1+20x_2<=320$ $x_1-6x_2<=2$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=432; $x_1=0$; $x_2=16$ *Zmin*=-359; $x_1=20$; $x_2=3$	180) <u>*Цільова функція:*</u> $z=13x_1+18x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-6x_1-x_2<=-42$ $x_1+x_2<=27$ $2x_1-3x_2<=14$ $-4x_1+x_2<=-18$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=441; $x_1=9$; $x_2=18$ *Zmin*=91; $x_1=7$; $x_2=0$

181) <u>*Цільова функція:*</u> $z=18x_1+23x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $4x_1+5x_2<=95$ $-4x_1-x_2<=-8$ $-x_1+1<=1$ $x_1-6x_2<=2$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=437; $x_1=0$; $x_2=19$ *Zmin*=36; $x_1=2$; $x_2=0$	182) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-21x_1-34x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-x_1+1<=1$ $-3x_1+19x_2<=152$ $5x_1-x_2<=84$ $3x_1-8x_2<=6$ $-x_1-6x_2<=-28$ $-x_1-4x_2<=-20$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=-170; $x_1=0$; $x_2=5$ *Zmin*=-773; $x_1=19$; $x_2=11$	183) <u>*Цільова функція:*</u> $z=29x_1+29x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $x_1+4x_2<=83$ $-3x_1+2x_2<=3$ $13x_1+3x_2<=246$ $-4x_1-15x_2<=-102$ $x_1<=18$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=928; $x_1=15$; $x_2=17$ *Zmin*=261; $x_1=3$; $x_2=6$
184) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-41x_1+7x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $14x_1+15x_2<=210$ $-x_2+1<=1$ $-x_1-12x_2<=-14$ $-3x_1-2x_2<=-8$ $-x_1+1<=1$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=98; $x_1=0$; $x_2=14$ *Zmin*=-615; $x_1=15$; $x_2=0$	185) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-14x_1+47x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-7x_1+18x_2<=180$ $4x_1+x_2<=89$ $3x_1-2x_2<=42$ $-2x_1-13x_2<=-28$ $-8x_1-x_2<=-10$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=547; $x_1=18$; $x_2=17$ *Zmin*=-196; $x_1=14$; $x_2=0$	186) <u>*Цільова функція:*</u> $z=-11x_1+49x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-19x_1+16x_2-16<=-16$ $-x_2+1<=1$ $3x_1+x_2<=67$ $x_1<=19$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=755; $x_1=16$; $x_2=19$ *Zmin*=-209; $x_1=19$; $x_2=0$

187) *Цільова функція:* $z=43x_1-24x_2$ *Обмеження:* $-7x_1-3x_2<=-64$ $-2x_1-5x_2<=-39$ $x_1-6x_2<=-6$ $13x_1+5x_2<=254$ $x_1+6x_2<=115$ *Відповідь:* *Zmax*=678; $x_1=18$; $x_2=4$ *Zmin*=-413; $x_1=1$; $x_2=19$	188) *Цільова функція:* $z=-32x_1-39x_2$ *Обмеження:* $-x_1+6x_2<=84$ $4x_1+x_2<=89$ $11x_1-x_2<=196$ $x_1-15x_2<=-12$ $-x_1-x_2<=-4$ $-x_1+1<=1$ *Відповідь:* *Zmax*=-135; $x_1=3$; $x_2=1$ *Zmin*=-1239; $x_1=18$; $x_2=17$	189) *Цільова функція:* $z=-35x_1+2x_2$ *Обмеження:* $-x_2+1<=1$ $-2x_1-x_2<=-8$ $8x_1-x_2<=144$ $7x_1+x_2<=141$ $5x_1+2x_2<=120$ $-3x_1+4x_2<=32$ *Відповідь:* *Zmax*=16; $x_1=0$; $x_2=8$ *Zmin*=-649; $x_1=19$; $x_2=8$
190) *Цільова функція:* $z=-39x_1+5x_2$ *Обмеження:* $2x_1-5x_2<=20$ $-3x_1-11x_2<=-67$ $-x_1-x_2<=-9$ $-x_1<=-1$ $-x_1+19x_2<=303$ $x_1<=20$ *Відповідь:* *Zmax*=41; $x_1=1$; $x_2=16$ *Zmin*=-760; $x_1=20$; $x_2=4$	191) *Цільова функція:* $z=-14x_1-3x_2$ *Обмеження:* $-x_1<=-1$ $-x_1-x_2<=-5$ $-9x_1-2x_2<=-31$ $3x_1+2x_2<=39$ $x_1-2x_2<=5$ *Відповідь:* *Zmax*=-47; $x_1=1$; $x_2=11$ *Zmin*=-163; $x_1=11$; $x_2=3$	192) *Цільова функція:* $z=17x_1+28x_2$ *Обмеження:* $-2x_1+7x_2<=49$ $5x_1-x_2<=59$ $-3x_1-2x_2<=-14$ $-x_2<=-1$ *Відповідь:* *Zmax*=546; $x_1=14$; $x_2=11$ *Zmin*=96; $x_1=4$; $x_2=1$

193) *Цільова функція:* $z=48x_1-18x_2$ *Обмеження:* $-4x_1-x_2<=-7$ $-3x_1+19x_2<=133$ $9x_1-x_2<=161$ $x_1-x_2<=17$ $-x_1-7x_2<=-17$ $-x_1-2x_2<=-7$ *Відповідь:* *Zmax*$=846$; $x_1=18$; $x_2=1$ *Zmin*$=-126$; $x_1=0$; $x_2=7$	194) *Цільова функція:* $z=45x_1-18x_2$ *Обмеження:* $11x_1+18x_2<=324$ $x_1<=18$ $2x_1-x_2<=32$ $x_1-4x_2<=9$ $-x_1+1<=1$ $-x_2<=-1$ *Відповідь:* *Zmax*$=738$; $x_1=18$; $x_2=4$ *Zmin*$=-324$; $x_1=0$; $x_2=18$	195) *Цільова функція:* $z=-28x_1+19x_2$ *Обмеження:* $-x_2<=-4$ $11x_1+5x_2<=174$ $x_1+4x_2<=69$ $-13x_1-9x_2<=-166$ *Відповідь:* *Zmax*$=295$; $x_1=1$; $x_2=17$ *Zmin*$=-316$; $x_1=14$; $x_2=4$
196) *Цільова функція:* $z=-35x_1-x_2$ *Обмеження:* $-x_1-x_2<=-14$ $-6x_1-7x_2<=-92$ $3x_1-7x_2<=25$ $-9x_1+13x_2<=72$ $13x_1+2x_2<=270$ *Відповідь:* *Zmax*$=-184$; $x_1=5$; $x_2=9$ *Zmin*$=-705$; $x_1=20$; $x_2=5$	197) *Цільова функція:* $z=41x_1+24x_2$ *Обмеження:* $6x_1-x_2<=105$ $x_1-4x_2<=6$ $-x_2<=-1$ $-3x_1-2x_2<=-17$ $-6x_1-x_2<=-13$ $4x_1+19x_2<=247$ *Відповідь:* *Zmax*$=995$; $x_1=19$; $x_2=9$ *Zmin*$=209$; $x_1=1$; $x_2=7$	198) *Цільова функція:* $z=-x_1-34x_2$ *Обмеження:* $-5x_1-2x_2<=-21$ $-10x_1-x_2<=-18$ $x_1-11x_2<=-30$ $5x_1-6x_2<=46$ $9x_1+20x_2<=360$ *Відповідь:* *Zmax*$=-105$; $x_1=3$; $x_2=3$ *Zmin*$=-612$; $x_1=0$; $x_2=18$

199) <u>*Цільова функція:* </u>$z=-36x_1+36x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $6x_1-x_2<=97$ $3x_1-5x_2<=26$ $-x_2<=-2$ $-7x_1-3x_2<=-62$ $5x_1+16x_2<=266$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=504; $x_1=2$; $x_2=16$ *Zmin*=-432; $x_1=17$; $x_2=5$	200) <u>*Цільова функція:* </u>$z=-20x_1+38x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $-15x_1-x_2<=-35$ $15x_1+16x_2<=335$ $x_1-3x_2<=2$ $-x_1-3x_2<=-14$ $-2x_1-3x_2<=-19$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=740; $x_1=1$; $x_2=20$ *Zmin*=-150; $x_1=17$; $x_2=5$	201) <u>*Цільова функція:* </u>$z=47x_1-26x_2$ <u>*Обмеження:*</u> $x_1-8x_2<=-15$ $6x_1-x_2<=98$ $x_1+3x_2<=67$ $-3x_1+x_2<=-1$ <u>*Відповідь:*</u> *Zmax*=695; $x_1=17$; $x_2=4$ *Zmin*=-191; $x_1=7$; $x_2=20$

Задача № 4. Знайти симплекс-методом найбільше та найменше значення цільової функції *z* при заданих обмеженнях. (Дані взяти із відповідного варіанта задачі № 3).

5. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ

Титульна сторінка має вигляд

ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Типові розрахунки
з математичного програмування

Тема: "Лінійне програмування"

Варіант № 300

Виконав: ст. гр. МО-07
Іванченко П.І.

Вінниця 20______ р.

Задача 1.
Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 7\,x_1 + 3\,x_2 + 3\,x_3 = 5 \\ -5\,x_1 + 7\,x_2 + 3\,x_3 = 37 \\ -6\,x_1 - 5\,x_2 - 3\,x_3 = -16 \end{cases}$$

Прямий хід методу виключення Гаусса - схема єдиного ділення.
Вихідні дані

$$\begin{bmatrix} -4 & 5 & -6 & -39 \\ 7 & 5 & 5 & 5 \\ -4 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Крок1

$$\begin{bmatrix} -4 & 5 & -6 & -39 \\ 0 & -55 & 22 & 253 \\ 0 & 12 & -32 & -164 \end{bmatrix}$$

Крок1.1

$$\begin{bmatrix} -4 & 5 & -6 & -39 \\ 0 & -5 & 2 & 23 \\ 0 & 3 & -8 & -41 \end{bmatrix}$$

Крок2

$$\begin{bmatrix} -4 & 5 & -6 & -39 \\ 0 & -5 & 2 & 23 \\ 0 & 0 & 34 & 136 \end{bmatrix}$$

Крок2.1

$$\begin{bmatrix} -4 & 5 & -6 & -39 \\ 0 & -5 & 2 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$sol := [0, -3, 4]$$

Розв'язання системи лінійних рівнянь за допомогою Maple-команди solve:

```
> solve({-4*x[1]+5*x[2]-6*x[3] = -39,
7*x[1]+5*x[2]+5*x[3] = 5, -4*x[1]+2*x[2]+2*x[3] =
2},{x[1],x[2],x[3]});
```

$$\{x_1 = 0, x_3 = 4, x_2 = -3\}$$

Задача 2.
Знайти всі розв'язки системи двох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} -4\,x_1 + 5\,x_2 - 6\,x_3 = -39 \\ 7\,x_1 + 5\,x_2 + 5\,x_3 = 5 \end{cases}$$

Ранг матриці системи A

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -6 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(A) = 2$$

дорівнює рангу розширеної матриці системи A|B

$$A|B = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -6 & -39 \\ 7 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$rank(A|B) = 2$$

Згідно з теоремою Кронекера-Капеллі: система сумісна. Оскільки визначник

$$det \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = 55$$

відмінний від нуля, то за вільну невідому можна прийняти

$$x_1$$

Розв'яжемо задану систему лінійних рівнянь відносно цієї вільної невідомої. Надамо вільній невідомій довільного значення C:

x_1=C.

Дістанемо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = C \\ x_2 = -\dfrac{2\,C}{5} - 3 \\ x_3 = -C + 4 \end{cases}$$

Базисний розв'язок системи:

$$X = [x_1 = 0, x_2 = -3, x_3 = 4]$$

Задача 3.

Знайти найбільше значення функції

$$z = -40\,x_1 - 8\,x_2, \quad \text{-> } max$$

за умови, що її аргументи пов'язані співвідношеннями:

$$9\,x_1 - 17\,x_2 \le 18$$
$$3\,x_1 + 5\,x_2 \le 134$$
$$7\,x_1 + x_2 \le 142$$
$$-x_1 + 3\,x_2 \le 44$$
$$-15\,x_1 - x_2 \le -30$$

Розв'язання.

Будуємо область допустимих значень. Для цього перш за все врахуємо знаки рівностей і побудуємо прямі:

$$\begin{cases} 9x_1 - 17x_2 = 18 \\ 3x_1 + 5x_2 = 134 \\ 7x_1 + x_2 = 142 \\ -x_1 + 3x_2 = 44 \\ -15x_1 - x_2 = -30 \end{cases}$$

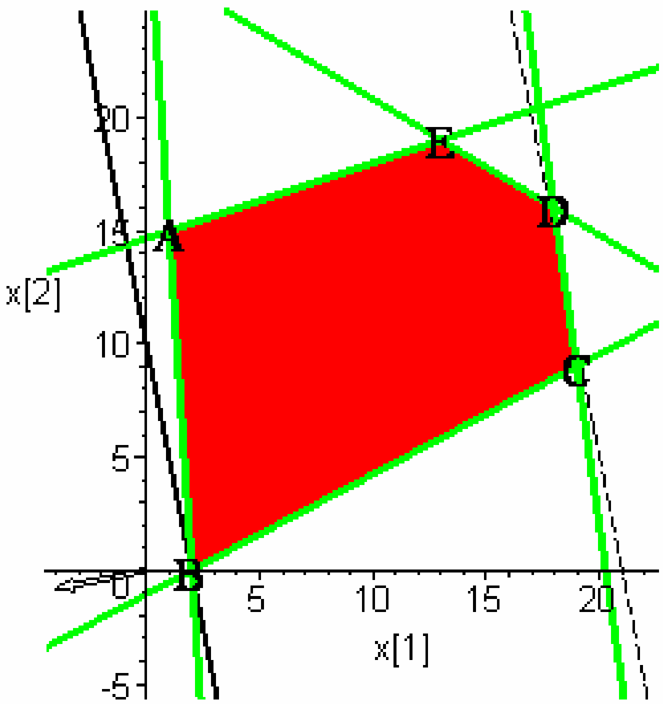
а потім врахуємо знаки нерівностей. Область допустимих значень є многокутником ABCDE (рис. поданий нижче).

2. Запишемо координати градієнта функції z:

$$grad(z) = [-40, -8]$$

Оскільки нам потрібен тільки напрям градієнта, то його довжина не має значення при зображенні градієнта на графіку.

3. Проводимо опорну пряму (чорна жирна лінія).



Складемо таблицю відповідності найменувань відрізків рівнянням прямих, до яких належать ці відрізки:

$$\begin{cases} AB: & 15x_1 + x_2 = 30 \\ BC: & 9x_1 - 17x_2 = 18 \\ CD: & 7x_1 + x_2 = 142 \\ DE: & 3x_1 + 5x_2 = 134 \\ AE: & x_1 - 3x_2 = -44 \end{cases}$$

4. Пересуваючи опорну пряму в напрямі градієнта паралельно самій собі по області ABCDE, знайдемо точку виходу її з області допустимих значень - точку B:

$$z_{max} = z_B$$

5. Розв'язавши систему із двох лінійних рівнянь, які зображають прямі, що перетинаються в точці B,

$$\begin{cases} -15\,x_1 - x_2 = -30 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

дістанемо:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ B\,(2,\,0)$$

Тоді

$$Zmax = -40*(2)-8*(0) = -80$$

Зауваження. Цей же результат ми дістали б, обходячи всі вершини многокутника ABCDE, що тільки б ускладнило розв'язання задачі.

Задача 4а. Знайти найменше значення функції

$$z = -40\,x_1 - 8\,x_2$$

за умови, що її аргументи зв'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} 9\,x_1 - 17\,x_2 \le 18 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 \le 134 \\ 7\,x_1 + x_2 \le 142 \\ -x_1 + 3\,x_2 \le 44 \\ -15\,x_1 - x_2 \le -30 \end{cases}$$
$$0 \le x_1,\ 0 \le x_2$$

Розв'язання.
Вводимо балансні невідомі:

$$x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7$$

та приводимо систему обмежень до стандартного вигляду:

$$\begin{cases} 9\,x_1 - 17\,x_2 + x_3 = 18 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 + x_4 = 134 \\ 7\,x_1 + x_2 + x_5 = 142 \\ -x_1 + 3\,x_2 + x_6 = 44 \\ -15\,x_1 - x_2 + x_7 = -30 \end{cases}$$

Кількість рівнянь=5, загальна кількість змінних=7. Отже 2 змінні потрібно вибрати за вільні. Вибираємо за вільні змінні

$$x_6, x_7$$

та покладаємо їх рівними нулю:

$$x_6 = 0, x_7 = 0$$

При цьому система канонічних рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} 9\,x_1 - 17\,x_2 + x_3 = 18 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 + x_4 = 134 \\ 7\,x_1 + x_2 + x_5 = 142 \\ -x_1 + 3\,x_2 = 44 \\ -15\,x_1 - x_2 = -30 \end{cases}$$

А розв'язком останньої системи є:

$$x_3 = 264$$

$$x_2 = 15$$

$$x_1 = 1$$

$$x_4 = 56$$

$$x_5 = 120$$

Оскільки розв'язок

$$[x_1 = 1, x_2 = 15, x_3 = 264, x_4 = 56, x_5 = 120, x_6 = 0, x_7 = 0]$$

не має від'ємних значень, маємо перший допустимий розв'язок. Подальший алгоритм розв'язання складається з двох кроків, що повторюються:

1. Перевірка отриманого допустимого розв'язку на оптимальність.
2. Перехід до нового допустимого розв'язку (у разі отримання негативної відповіді на першому кроці).

Для перевірки на оптимальність потрібно виразити цільову функцію через вільні невідомі. Це можна зробити, розв'язавши вихідну систему стандартних рівнянь відносно вільних невідомих у алгебричному вигляді.

Перевіримо отриманий допустимий розв'язок на оптимальність.

Розв'яжемо вихідну систему відносно вільних невідомих:

$$
\begin{cases}
x_2 = -\dfrac{15}{46}x_6 + 15 + \dfrac{1}{46}x_7 \\
x_5 = \dfrac{4}{23}x_6 + 120 - \dfrac{11}{23}x_7 \\
x_3 = -\dfrac{132}{23}x_6 + 264 - \dfrac{5}{23}x_7 \\
x_4 = \dfrac{36}{23}x_6 + 56 - \dfrac{7}{23}x_7 \\
x_1 = \dfrac{1}{46}x_6 + 1 + \dfrac{3}{46}x_7
\end{cases}
$$

Після заміщення аргументів цільової функції на їх вирази через вільні невідомі цільова функція матиме вигляд:

$$z = \frac{40}{23}x_6 - 160 - \frac{64}{23}x_7$$

В допустимому розв'язку вільні невідомі дорівнюють нулю. Отже, їх можна тільки збільшувати. Перед x_7 в останньому виразі коефіцієнт =-64/23. Звідси випливає, що отриманий допустимий розв'язок не є оптимальним, оскільки, збільшуючи вказану вільну невідому, будемо зменшувати цільову функцію. Перейдемо до наступного допустимого розв'язку. Будемо збільшувати вільну невідому x_7. Решту вільних невідомих (або одну вільну невідому) залишаємо рівними нулю. З урахуванням цього вирази базисних невідомих через вільні набудуть вигляду:

$$x_1 = 1 + \frac{3}{46}x_7$$

$$x_5 = 120 - \frac{11}{23}x_7$$

$$x_3 = 264 - \frac{5}{23}x_7$$

$$x_4 = 56 - \frac{7}{23}x_7$$

$$x_2 = 15 + \frac{1}{46}x_7$$

Збільшувати вільну невідому можна доти, поки одна з базисних невідомих не стане рівною нулю. Знайдемо найбільш можливе значення вільної невідомої з кожного рівняння:

$$x_1 = 0, \text{->} \quad x_7 = \frac{-46}{3}$$

$$x_5 = 0, \text{->} \quad x_7 = \frac{2760}{11}$$

$$x_3 = 0, \text{->} \quad x_7 = \frac{6072}{5}$$

$$x_4 = 0, \text{->} \quad x_7 = 184$$

$$x_2 = 0, \text{->} \quad x_7 = \text{-}690$$

Із отриманих значень, серед невід'ємних, вибираємо найменше для того, щоб задовольнити умову невід'ємності невідомих. Отже, $x_7=184$ і маємо такий допустимий розв'язок:

$$X2 = [x_1 = 13, x_2 = 19, x_3 = 224, x_4 = 0, x_5 = 32, x_6 = 0, x_7 = 184]$$

Перевіримо отриманий допустимий розв'язок на оптимальність. Розв'яжемо вихідну систему відносно вільних невідомих:

$$\begin{cases} x_7 = \frac{36}{7}x_6 + 184 - \frac{23}{7}x_4 \\ x_2 = -\frac{3}{14}x_6 + 19 - \frac{1}{14}x_4 \\ x_5 = -\frac{16}{7}x_6 + 32 + \frac{11}{7}x_4 \\ x_3 = -\frac{48}{7}x_6 + 224 + \frac{5}{7}x_4 \\ x_1 = \frac{5}{14}x_6 + 13 - \frac{3}{14}x_4 \end{cases}$$

Після заміщення аргументів цільової функції на їх вирази через вільні невідомі цільова функція матиме вигляд:

$$z = \frac{64}{7}x_4 - \frac{88}{7}x_6 - 672$$

В допустимому розв'язку вільні невідомі дорівнюють нулю. Отже, їх можна тільки збільшувати. Перед x_6 в останньому виразі коефіцієнт =-88/7. Звідси випливає, що отриманий допустимий розв'язок не є оптимальним, оскільки, збільшуючи вказану вільну невідому, будемо зменшувати цільову функцію. Перейдемо до наступного допустимого розв'язку. Будемо збільшувати вільну невідому x_6. Решту вільних невідомих (або одну вільну невідому) залишаємо рівними нулю. З урахуванням цього вирази базисних невідомих через вільні набудуть вигляду:

$$x_7 = \frac{36}{7} x_6 + 184$$

$$x_2 = -\frac{3}{14} x_6 + 19$$

$$x_5 = -\frac{16}{7} x_6 + 32$$

$$x_3 = -\frac{48}{7} x_6 + 224$$

$$x_1 = \frac{5}{14} x_6 + 13$$

Збільшувати вільну невідому можна доти, поки одна з базисних невідомих не стане рівною нулю. Знайдемо найбільш можливе значення вільної невідомої з кожного рівняння:

$$x_7 = 0, \text{->} \quad x_6 = \frac{-322}{9}$$

$$x_2 = 0, \text{->} \quad x_6 = \frac{266}{3}$$

$$x_5 = 0, \text{->} \quad x_6 = 14$$

$$x_3 = 0, \text{->} \quad x_6 = \frac{98}{3}$$

$$x_1 = 0, \text{->} \quad x_6 = \frac{-182}{5}$$

Із отриманих значень, серед невід'ємних, вибираємо найменше для того, щоб задовольнити умову невід'ємності невідомих. Отже, $x_6=14$ і маємо такий допустимий розв'язок:

$$X3 = [x_1 = 18, x_2 = 16, x_3 = 128, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 14, x_7 = 256]$$

Перевіримо отриманий допустимий розв'язок на оптимальність. Розв'яжемо вихідну систему відносно вільних невідомих:

$$\begin{cases} x_1 = 18 + \frac{1}{32}x_4 - \frac{5}{32}x_5 \\ x_3 = 128 - 4\,x_4 + 3\,x_5 \\ x_6 = 14 + \frac{11}{16}x_4 - \frac{7}{16}x_5 \\ x_7 = 256 - \frac{9}{4}x_5 + \frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = 16 - \frac{7}{32}x_4 + \frac{3}{32}x_5 \end{cases}$$

Після заміщення аргументів цільової функції на їх вирази через вільні невідомі цільова функція матиме вигляд:

$$z = \frac{1}{2}x_4 + \frac{11}{2}x_5 - 848$$

В допустимому розв'язку вільні невідомі дорівнюють нулю. Отже, їх можна тільки збільшувати. Перед вільними невідомими стоять коефіцієнти зі знаком "+". Із зростанням вільних невідомих буде зростати цільова функція. Отже, отриманий розв'язок

$$[x_1 = 18, x_2 = 16, x_3 = 128, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 14, x_7 = 256]$$

є оптимальним. Мінімальне значення цільової функції z=-848.

Задача 4б: Знайти симплекс-методом найбільше значення цільової функції *z* при заданих обмеженях.

Цільова функція

$$z = -40\,x_1 - 8\,x_2, \quad \text{->}\ max$$

при умові, що аргументи цільової функції зв'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} 9\,x_1 - 17\,x_2 \le 18 \\ 3\,x_1 + 5\,x_2 \le 134 \\ 7\,x_1 + x_2 \le 142 \\ -x_1 + 3\,x_2 \le 44 \\ -15\,x_1 - x_2 \le -30 \end{cases}$$
$$0 \le x_1,\ 0 \le x_2$$

Вводимо балансні невідомі:

$$x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$$

та приводимо систему обмежень до стандартного вигляду:

$$\begin{cases} 9x_1 - 17x_2 + x_3 = 18 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 134 \\ 7x_1 + x_2 + x_5 = 142 \\ -x_1 + 3x_2 + x_6 = 44 \\ -15x_1 - x_2 + x_7 = -30 \end{cases}$$

Кількість рівнянь=5, загальна кількість змінних=7. Отже, 2 змінні потрібно вибрати за вільні. Вибираємо за вільні змінні

$$x_4, x_5$$

та покладаємо їх рівними нулю:

$$x_4 = 0, x_5 = 0$$

При цьому система канонічних рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} 9x_1 - 17x_2 + x_3 = 18 \\ -x_1 + 3x_2 + x_6 = 44 \\ -15x_1 - x_2 + x_7 = -30 \\ 3x_1 + 5x_2 = 134 \\ 7x_1 + x_2 = 142 \end{cases}$$

А розв'язком останньої системи є:

$$x_1 = 18$$
$$x_2 = 16$$
$$x_3 = 128$$
$$x_6 = 14$$
$$x_7 = 256$$

Оскільки розв'язок

$$[x_1 = 18, x_2 = 16, x_3 = 128, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 14, x_7 = 256]$$

не має від'ємних значень, маємо перший допустимий розв'язок.

Подальший алгоритм розв'язання складається з двох кроків, що повторюються:

1. Перевірка отриманого допустимого розв'язку на оптимальність.
2. Перехід до нового допустимого розв'язку (у разі отримання негативної відповіді на першому кроці).

Перевіримо отриманий допустимий розв'язок на оптимальність.

Розв'яжемо вихідну систему відносно базисних невідомих:

$$\begin{cases} x_1 = 18 + \frac{1}{32}x_4 - \frac{5}{32}x_5 \\ x_2 = 16 - \frac{7}{32}x_4 + \frac{3}{32}x_5 \\ x_3 = 128 - 4x_4 + 3x_5 \\ x_6 = 14 + \frac{11}{16}x_4 - \frac{7}{16}x_5 \\ x_7 = 256 - \frac{9}{4}x_5 + \frac{1}{4}x_4 \end{cases}$$

Після заміщення аргументів цільової функції на їх вирази через вільні невідомі цільова функція матиме вигляд:

$$z = \frac{1}{2}x_4 + \frac{11}{2}x_5 - 848$$

В допустимому розв'язку вільні невідомі дорівнюють нулю. Отже, їх можна тільки збільшувати. Перед x_4 в останньому виразі коефіцієнт =1/2 Звідси випливає, що отриманий допустимий розв'язок не є оптимальним, оскільки, збільшуючи вказану вільну невідому, будемо збільшувати цільову функцію. Перейдемо до наступного допустимого розв'язку. Будемо збільшувати вільну невідому x_4. Решту вільних невідомих (або одну вільну невідому) залишаємо рівними нулю. З урахуванням цього вирази базисних невідомих через вільні набудуть вигляду:

$$x_1 = 18 + \frac{1}{32}x_4$$

$$x_2 = 16 - \frac{7}{32}x_4$$

$$x_3 = 128 - 4x_4$$

$$x_6 = 14 + \frac{11}{16}x_4$$

$$x_7 = 256 + \frac{1}{4}x_4$$

Збільшувати вільну невідому можна аж поки одна з базисних невідомих не стане рівною нулю. Вилучимо із системи всі рівняння, які не обмежують збільшення вільної невідомої. Це такі рівняння, права частина яких або не містить вільної невідомої, або містить вільну невідому з додатним коефіцієнтом. Дістанемо:

$$x_2 = 16 - \frac{7}{32} x_4$$
$$x_3 = 128 - 4\, x_4$$

Збільшувати вільну невідому можна аж поки одна з базисних невідомих не стане рівною нулю. Знайдемо найбільше можливе значення вільної невідомої для кожного із рівнянь, що залишилися

$$x_2 = 0, \text{->} \quad x_4 = \frac{512}{7}$$

$$x_3 = 0, \text{->} \quad x_4 = 32$$

Для того, щоб задовольнити умову невід’ємності невідомих, із отриманих значень вибираємо найменше. Отже, x_4=32. І маємо такий допустимий розв’язок:

$$[x_1 = 19, x_2 = 9, x_3 = 0, x_4 = 32, x_5 = 0, x_6 = 36, x_7 = 264]$$

Перевіримо отриманий допустимий розв’язок на оптимальність. Розв’яжемо вихідну систему відносно базисних невідомих:

$$\begin{cases} x_1 = 19 - \dfrac{17}{128} x_5 - \dfrac{1}{128} x_3 \\ x_2 = 9 - \dfrac{9}{128} x_5 + \dfrac{7}{128} x_3 \\ x_4 = 32 + \dfrac{3}{4} x_5 - \dfrac{1}{4} x_3 \\ x_6 = 36 + \dfrac{5}{64} x_5 - \dfrac{11}{64} x_3 \\ x_7 = 264 - \dfrac{33}{16} x_5 - \dfrac{1}{16} x_3 \end{cases}$$

Після заміщення аргументів цільової функції на їх вирази через вільні невідомі цільова функція матиме вигляд:

$$z = -\frac{1}{8} x_3 + \frac{47}{8} x_5 - 832$$

В допустимому розв’язку вільні невідомі дорівнюють нулю. Отже, їх можна тільки збільшувати. Перед x_5 в останньому виразі коефіцієнт =47/8. Звідси випливає, що отриманий допустимий розв’язок не є оптимальним, оскільки, збільшуючи вказану вільну невідому, будемо збільшувати цільову функцію. Перейдемо до наступного допустимого розв’язку. Будемо збільшувати вільну невідому x_5. Решту вільних невідомих (або одну вільну невідому) залишаємо рівними нулю. З урахуванням цього вирази базисних невідомих через вільні набудуть вигляду:

$$x_1 = 19 - \frac{17}{128}x_5$$
$$x_2 = 9 - \frac{9}{128}x_5$$
$$x_4 = 32 + \frac{3}{4}x_5$$
$$x_6 = 36 + \frac{5}{64}x_5$$
$$x_7 = 264 - \frac{33}{16}x_5$$

Збільшувати вільну невідому можна аж поки одна з базисних невідомих не стане рівною нулю. Вилучимо із системи всі рівняння, які не обмежують збільшення вільної невідомої. Це такі рівняння, права частина яких або не містить вільної невідомої, або містить вільну невідому з додатним коефіцієнтом. Дістанемо:

$$x_1 = 19 - \frac{17}{128}x_5$$
$$x_2 = 9 - \frac{9}{128}x_5$$
$$x_7 = 264 - \frac{33}{16}x_5$$

Збільшувати вільну невідому можна аж поки одна з базисних невідомих не стане рівною нулю. Знайдемо найбільше можливе значення вільної невідомої для кожного із рівнянь, що залишилися,

$$x_1 = 0, \text{->} \quad x_5 = \frac{2432}{17}$$
$$x_2 = 0, \text{->} \quad x_5 = 128$$
$$x_7 = 0, \text{->} \quad x_5 = 128$$

Для того, щоб задовольнити умову невід’ємності невідомих, із отриманих значень вибираємо найменше.

Отже, x_5=128. І маємо такий допустимий розв'язок:

$$[x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 128, x_5 = 128, x_6 = 46, x_7 = 0]$$

Перевіримо отриманий допустимий розв'язок на оптимальність. Розв'яжемо вихідну систему відносно базисних невідомих:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{17}{264}x_7 - \dfrac{1}{264}x_3 + 2 \\ x_2 = \dfrac{3}{88}x_7 + \dfrac{5}{88}x_3 \\ x_4 = 128 - \dfrac{3}{11}x_3 - \dfrac{4}{11}x_7 \\ x_5 = 128 - \dfrac{1}{33}x_3 - \dfrac{16}{33}x_7 \\ x_6 = 46 - \dfrac{5}{132}x_7 - \dfrac{23}{132}x_3 \end{cases}$$

Після заміщення аргументів цільової функції на їх вирази через вільні невідомі цільова функція матиме вигляд:

$$z = -\frac{10}{33}x_3 - \frac{94}{33}x_7 - 80$$

В допустимому розв'язку вільні невідомі дорівнюють нулю. Отже, їх можна тільки збільшувати. Перед вільними невідомими стоять коефіцієнти зі знаком "-". Із зростанням вільних невідомих буде спадати цільова функція.Отже, отриманий розв'язок

$$[x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 128, x_5 = 128, x_6 = 46, x_7 = 0]$$

є оптимальним. Максимальне значення цільової функції z=-80.

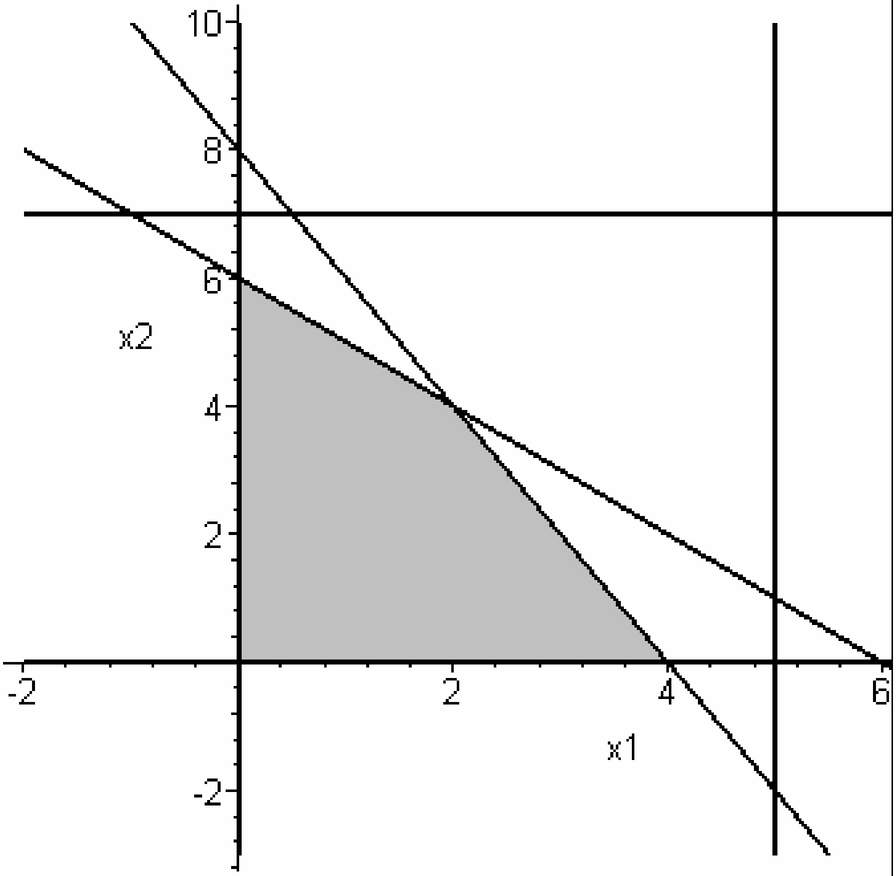
6. СТИСЛІ ВІДОМОСТІ ПРО КОМАНДИ ТА ОПЕРАТОРИ MAPLE, ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ В ПОСІБНИКУ

Система Maple має ядро та значну кількість спеціалізованих пакетів. При завантаженні додатка Maple доступними є всі команди ядра. Для того, щоб отримати доступ до команд деякого пакета, потрібно підключити цей пакет. Наприклад, всі команди пакета linalg стають доступними після виконання команди with(linalg). Скористатися конкретною командою пакета можна і без підключення всього пакета, наприклад, обчислити визначник квадратної матриці A можна за допомогою команди det пакета linalg з таким синтаксисом: linalg[det](A).

Restart	Ця команда очищує внутрішню пам'ять – все відбувається так, нібито додаток Maple запускається заново. З команди restart: рекомендується починати розв'язання будь-якої нової задачі в Maple.
with(linalg)	Команда **with** підключає команди одного із пакетів. В даному випадку підключаються команди пакета **linalg**.
Множини та дії над ними	Множина - неупорядкована послідовність виразів, взята у фігурні дужки. > {2*x[1]+x[2]<=8,x[1]+x[2]<=6, x[1]-0*x[2]<=5,x[2]<=7,x[1]>=0,x[2]>=0}; $\{2\,x_1+x_2\le 8, x_1+x_2\le 6, x_1\le 5, x_2\le 7, 0\le x_1, 0\le x_2\}$ На відміну від списку, порядок, в якому записані елементи множини, не обов'язково збігається з порядком, в якому їх сприймає Maple, до того ж елементам, що повторюються в множині, буде відповідати тільки один елемент: > {x[1],x[2],x[3],x[4],x[1]}; $\{x_3, x_4, x_1, x_2\}$ Для того, щоб замінити в множині елемент x[4] на елемент x[5], потрібно спочатку вилучити елемент x[4] за допомогою команди minus, а потім додати елемент x[5] допомогою команди union: > {x[1],x[2],x[3],x[4]} minus {x[4]} union {x[5]}; $\{x_3, x_5, x_1, x_2\}$

<table>
<tr><td>Списки</td><td>Список - упорядкована послідовність виразів, взята у фігурні дужки.
> L:=[x[1],x[2],x[3],x[4],x[1]];
$$L := [x_1, x_2, x_3, x_4, x_1]$$
В списку, як і в множині, можна отримати будь-який елемент за допомогою індекса. Замінити в списку елемент, наприклад - x[4] на елемент x[5], простіше ніж в множині:
> L[4];L[4]:=x[5];L;
$$x_4$$
$$L_4 := x_5$$
$$[x_1, x_2, x_3, x_5, x_1]$$</td></tr>
<tr><td>map</td><td>Команда map() дозводяє застосувати функцію, оператор або команду, задану першим параметром до всіх елементів списку (множини)
> uneqs:={2*x[1]+x[2]<=8,x[1]+x[2]<=6,
x[1]-0*x[2]<=5,x[2]<=7,x[1]>=0,x[2]>=0};
eqs:=map(z->lhs(z)=rhs(z),uneqs);
>map(z->`if`(has(z,x[2]),isolate(z,x[2]),z),eqs);
$$uneqs := \{2\,x_1 + x_2 \le 8, x_1 + x_2 \le 6, x_1 \le 5, x_2 \le$$
$$0 \le x_1, 0 \le x_2\}$$
$$eqs := \{2\,x_1 + x_2 = 8, x_1 + x_2 = 6, x_1 = 5, x_2 = 7,$$
$$0 = x_1, 0 = x_2\}$$
$$\{x_1 = 5, x_2 = 7, 0 = x_1, x_2 = 8 - 2\,x_1, x_2 = 6 - x_1,$$
$$x_2 = 0\}$$
Елементами множини uneqs є нерівності. Оператор z->lhs(z)=rhs(z) формально записує кожну нерівність як рівність її лівої і правої частин. Оператор z->`if`(has(z,x[2]),x[2]=solve(z,x[2]),z перевіряє присутність в елементі z (поточній рівності множини) змінної x[2] (has(z,x[2]), і за допомогою команди solve перетворює форму запису рівняння прямої, або залишає форму запису рівняння незмінною, якщо змінна x[2] відсутня.</td></tr>
</table>

solve	Команда solve є універсальним засобом, що дозволяє розв’язувати рівняння, нерівності та їх системи. Структура цієї команди: solve({},{}) – в перших фігурних дужках записується одне рівняння або послідовність рівнянь (нерівностей), в других дужках записується змінна або послідовність змінних, яку (які) потрібно знайти розв’язанням рівняння (системи рівнянь). > solve({a*x^2+b*x+c},{x}); $\{x = -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\}, \{x = -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\}$ > solve({2*x[1]+x[2]=8,x[1]+x[2]=6},{x[1],x[2]}); $\{x_2 = 4, x_1 = 2\}$
nops	Команда nops(expr) визначає кількість операндів виразу expr: > z:= 7*x[1] + 6*x[2]+x[3];nops(z); $z := 7\,x_1 + 6\,x_2 + x_3$ 3 > uneqs:={2*x[1]+x[2]<=8,x[1]+x[2]<=6, x[1]-0*x[2]<=5,x[2]<=7,x[1]>=0,x[2]>=0}; nops(uneqs); $uneqs := \{2\,x_1 + x_2 \le 8, x_1 + x_2 \le 6, x_1 \le 5, x_2 \le$ $0 \le x_1, 0 \le x_2\}$ 6
op	Команда op(expr) видає послідовність операндів виразу expr: > uneqs:={2*x[1]+x[2]<=8,x[1]+x[2]<=6, x[1]-0*x[2]<=5,x[2]<=7,x[1]>=0,x[2]>=0}; op(uneqs); $uneqs := \{2\,x_1 + x_2 \le 8, x_1 + x_2 \le 6, x_1 \le 5, x_2 \le$ $0 \le x_1, 0 \le x_2\}$ $2\,x_1 + x_2 \le 8, x_1 + x_2 \le 6, x_1 \le 5, x_2 \le 7, 0 \le x_1,$ $0 \le x_2$

	За допомогою цієї команди, що записується у формі op(i, expr), можна виділити i – ий операнд виразу expr: > op(5,uneqs); $$0 \le x_1$$
plots[inequal]	Команда inequal пакета plots дозволяє відображати область, координати точок якої задовольняють розв'язок системи нерівностей: > uneqs:={2*x[1]+x[2]<=8,x[1]+x[2]<=6, x[1]-0*x[2]<=5,x[2]<=7,x[1]>=0,x[2]>=0}: plots[inequal](uneqs, x[1]=-2..7, x[2]=-3..10, optionsfeasible=(color=gray), optionsopen=(color=blue,thickness=2), optionsclosed=(color=black, thickness=2), optionsexcluded=(color=white),labels=[x1,x2]); 
matrix(m,n)	Задання матриці розміром (m×n), причому кількість рядків m та кількість стовпців n повинні бути натуральними числами.
evalm(a)	Виведення на екран монітора елементів матриці **a**.
linalg[det]	Команда det пакета linalg дозволяє обчислити визначник квадратної матриці:

<table>
<tr><td></td><td>

```
> A:=matrix(2,2,[[sin(x),-cos(x)],[cos(x),sin(x)]]);
Det_A:=linalg[det](A);
'Det_A'=simplify(Det_A);
```

$$A := \begin{bmatrix} \sin(x) & -\cos(x) \\ \cos(x) & \sin(x) \end{bmatrix}$$

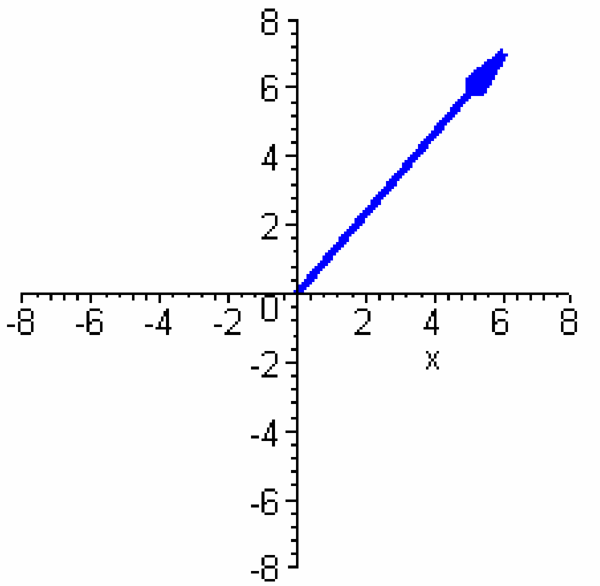
$$Det\_A := \sin(x)^2 + \cos(x)^2$$

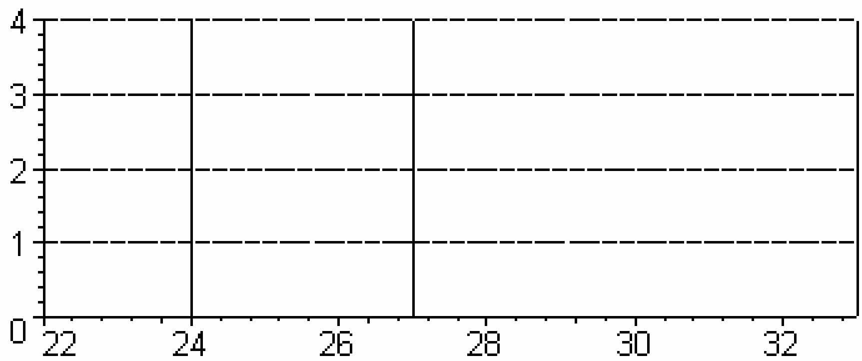
$$Det\_A = 1$$

В останньому командному рядку використано позначення 'Det_A' для того, щоб на екран дисплея вивести ім'я змінної, а не вираз, який позначає це ім'я.

Якщо в поточному сеансі роботи з додатком виконано команду **with(linalg),** то замість linalg[det] достатньо вказати тільки саму команду det.</td></tr>
<tr><td>linalg[concat](A,B)</td><td>Повертає об'єднану матрицю з горизонтальним злиттям матриць A і B</td></tr>
<tr><td>my_arw</td><td>Оператор my_arw(x,y,l,w) - процедура, складена автором. Цей оператор формує вираз для побудови радіус-вектора точки (x,y); l,w – визначають дожину та ширину стрілки.

```
> plot([my_arw(6,7,0.15,0.2)],x=-8..8,-8..8,style=[line],
color=[blue],thickness=4,scaling=CONSTRAINED);
```


</td></tr>
<tr><td>plots[display]</td><td>Команда display пакета plots дозволяє сумістити різні графічні структури на одному графіку.</td></tr>
</table>

my_drid	Команда **my_drid(Xn,Ym)** - процедура, складена автором. Ця команда призначена для побудови графіка сітки з вертикальних та горизонтальних прямих, абсциси та ординати яких задаються списками **Xn,Ym** відповідно. **> my_drid([22,24,27,33],[$ 0..4]);** 
coeff(p,x)	Повертає коефіцієнт при **x**, де **p** - поліном від **x**.
seq	Створення послідовності **> seq(x[k],k=1..5);** x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
subs	Команда підстановки **> z:= 7*x[1] + 6*x[2];** **subs(x[1]=2,x[2]=4,z);** $z := 7\,x_1 + 6\,x_2$ 38 у виразі **z** знаходить ліві частини рівностей **x[1]=2,x[2]=4** (рівностей може бути довільне скінченне число) і підставляє замість них праві частини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. - М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.
2. Аладьев В.З. Эффективная работа в Maple 6/7 – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 336 с.
3. Бугір М.К. Математика для економістів. – К.: ВЦ «Академія», 2003. - 520 с.
4. Вагнер Г. Основи исследования операций: В 3 т. - М.: Мир, 1972-1973. - Т. 1-3.
5. Васильев А.Н. Maple 8. Самоучитель.: - М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 353 с.
6. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Сов. радио. 1971. - 551 с.
7. Вильям Орвис. EXCEL для ученых, инженеров и студентов. – К.: Юниор, 1999. – 528 с.
8. Виславский М.Н. Линейная алгебра и линейное программирование. - Минск: Вышэйша школа, 1966.
9. Волков Ю.І. Найко Д.А. Лінійна алгебра й аналітична геометрія з елементами програмування мовою Паскаль. - К.: НМК ВО, 1990. – 144 с.
10. Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения). - М., 1961.
11. Гетманцев В.Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування.: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2001.
12. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.І. - М.: Высш. шк., 1974. - 416 с.
13. Дьяконов В.П. Maple 7: учебный курс. – СПб.: Питер, 2002. – 672 с.
14. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації.: Навчальний посібник. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
15. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій: Підручник. – К., 2001. – 688 с.
16. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, 1967. – 460 с.
17. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. - 512 с.
18. Карманов В.Г. Математичне програмування. - М.: Наука, 1986. – 288 с.
19. Карпелевич Ф.И., Садовский Л. Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. - М.: Физматгиз, 1963. - 276 с.
20. Кігель В.Г. Елементи лінійного, цілочисельного лінійного і нелінійного програмування.: Навч. пос. – К.: ІСДО, 1995.
21. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики: Учеб. пособие для вузов. – М.: Энергоатомиздат, 1987. –496 с.
22. Кудрін Б.Г., Ребедайло В.М., Педорченко Л.І. Математичні методи в задачах автомобільного транспорту. – Навчальний посібник. – Вінниця, ВДТУ, 2001. – 62 с.
23. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика: Математическое программирование. - Мн.: Выш. шк., 1994. - 286 с.

24. Кулян В.Р., Юнькова Е.А., Жильцов А.Б. Математическое программирование (с элементами информационных технологий): Учеб. пособие для студ. немат. спец. вузов. – К.: МАУП, 2000. – 124 с.
25. Манзон Б.М. Maple V Power Edition – М.: Информационно-издательский дом «Филин», 1998. – 240 с.
26. Математичне програмування.// Барвінський А.Ф., Олексів І.Я., Крупка З.І та ін. Навчальний посібник. – Львів: Національний университет «Львівська політехніка», «Інтелект-Захід», 2004. – 448 с.
27. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 528 с.
28. Михалевич В.М. "Maple. Комп'ютерна підтримка курсу вищої математики в технічному вузі. Частина І. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія".: Навчальний посібник. - Вінниця: ВНТУ, 2004. – 111 с.
29. Михалевич В.М. Excel-VBA-Maple програма генерації задач з дисциплін математичного спрямування//Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2005. - № 2. – С. 74-83.
30. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика. – К.: Либідь, 1996. - 440 с.
31. Роїк О.М., Месюра В.І., Ракитянська Г.Б. Математичні методи дослідження операцій. – Вінниця: ВДТУ, 2002. - 103 с.
32. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб пособие для втузов/Болгов Б.А., Демидович Б.П., Ефимов А.В. и др. Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 464 с.
33. Сборник задач по математике для втузов. Ч.4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения. Учеб. пособ./ Вуколов Э.А., Ефимов А.В., Земсков В.Н. и др. Под ред. А В. Ефимова. – М.: Наука, 1990. – 304 с.
34. Справочник по математике для экономистов./Барбаумов В.Е., Ермаков В.И., Кривенцова В.Н. и др. Под редакцией В. И. Ермакова. - М.: Высш. шк., 1987. – 336 с.
35. Хемди А. Таха. Введение в исследование операций. - М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. — 912 с.
36. Хом'юк І.В., Хом'юк В.В., Карпенко В.Л. Математичне програмування. Частина ІІ. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 123 с.
37. Хом'юк І.В., Карпенко В.Л., Хом'юк В.В. Математичне програмування. Частина І. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2004. – 78 с.
38. Шикин Е. В., Шикина Г. Е. Исследование операций. - М. : ТК Велби, Изд-во Проспект, 2006. - 280 с.
39. Юдин Д. Б., Гольштейн Е.К. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. - М.: Наука, 1969. - 424 с.
40. Maple 9/ Advanced Programming Guide/M.B. Monagan, K.O. Geddes, K.M. Heal, G. Labahn, S.M. Vorkoetter, J. McCarron, P. DeMarco. Canada. Maplesoft, division of Waterloo Maple Inc. 2003. – 444 p.

Навчальне видання

Володимир Маркусович Михалевич

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ РАЗОМ З MAPLE

ЧАСТИНА I

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено автором

Редактор В.О. Дружиніна

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку
Формат 29,7х42 $^1/_4$
Друк різографічний
Тираж 100 прим.
Зам. №

Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 8.63

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ