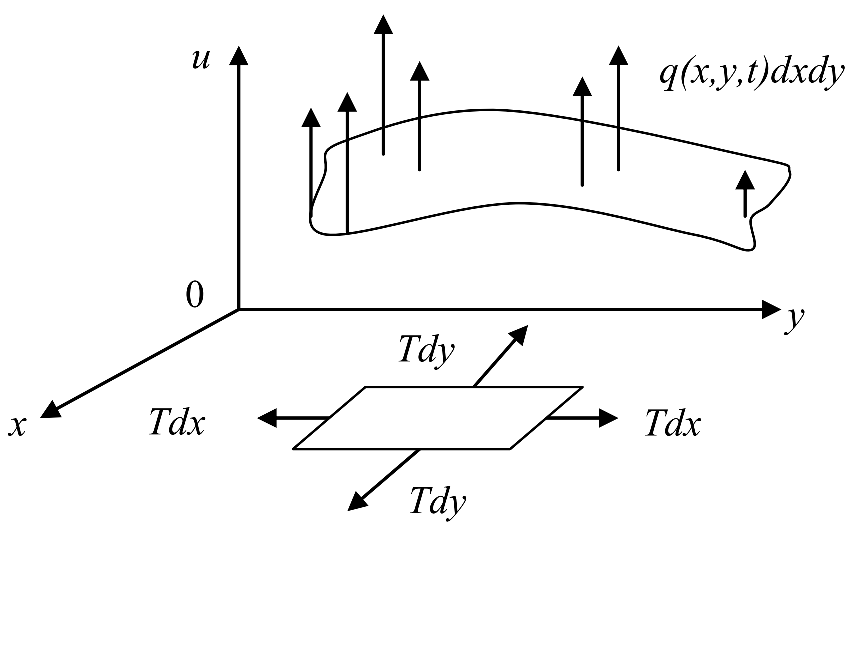
Н.В. Сачанюк-Кавецька, Л.І. Педорченко

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ



УДК 517.958 (075)
С 22

Рецензенти:

П.М. Зузяк, доктор фізико-математичних наук, професор
В.М. Михалєвич, доктор технічних наук, професор
В.С. Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Сачанюк-Кавецька Н.В., Педорченко Л.І.
С 22 **Рівняння математичної фізики.** Навчальний посібник. –Вінниця: ВНТУ, 2005. -108 с.

В посібнику розглянуто достатню кількість рівнянь математичної фізики; теоретичні положення про класифікацію диференціальних рівнянь з переліком класу задач, в яких вони використовуються; методи розв’язування рівнянь. Істотною особливістю даного посібника є розгляд спеціальних функцій математичної фізики та їх використання при розв’язуванні диференціальних рівнянь у частинних похідних.

До кожної теми розроблені питання для самоперевірки та розглянуто по 30 варіантів завдань для самостійної роботи, що дозволяє використовувати посібник для практичних занять.
Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК 517. 958 (075)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 4

ТЕМА 1 РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ 5
1.1 Рівняння малих поперечних коливань струни 6
1.2 Рівняння малих поздовжніх коливань стержня 7
1.3 Рівняння малих поперечних коливань мембрани 9
1.4 Телеграфне рівняння 13
1.5 Рівняння теплопровідності 16
1.6 Рівняння поширення тепла в стержні 18
1.7 Основні рівняння математичної фізики 21
Питання для самоперевірки 22
Завдання для самостійної роботи 24

ТЕМА 2 ЗВЕДЕННЯ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗАМІНИ ЗМІННИХ 28
2.1 Рівняння гіперболічного типу 30
2.2 Рівняння еліптичного типу 32
2.3 Рівняння параболічного типу 34
Питання для самоперевірки 36
Завдання для самостійної роботи 37

ТЕМА 3 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ СТРУНИ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК 39
Питання для самоперевірки 43
Завдання для самостійної роботи 44

ТЕМА 4 МЕТОД ФУР'Є 45
4.1 Розв'язання методом Фур'є першої крайової задачі для рівняння малих поперечних коливань струни 45
4.2 Розв'язання методом Фур'є першої крайової задачі 48
4.3 Розв'язання методом Фур'є першої крайової задачі 54
4.4 Приклади розв'язання задачі Коші для рівняння теплопровідності 62
Питання для самоперевірки 67
Завдання для самостійної роботи 68

ТЕМА 5 МЕТОД СІТОК ДЛЯ РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ 72
Питання для самоперевірки 81
Завдання для самостійної роботи 81

ТЕМА 6 СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ 85
6.1. Інтеграл Ейлера першого роду 85
6.2. Інтеграл Ейлера другого роду 86
6.3 Функція Бесселя 86
6.4 Рекурентні формули для функції Бесселя 89
6.5 Інтегральне представлення Пуассона функції Бесселя та його використання 90
6.6 Сферичні функції. Поліноми Лежандра 93
6.7 Виробнича функція для поліномів Лежандра 96
6.8 Рекурентні формули для поліномів Лежандра 97
Питання для самоперевірки 103
Завдання для самостійної роботи 104

ЛІТЕРАТУРА 108

ПЕРЕДМОВА

Математична фізика – це математичний апарат вивчення фізичних полів. Цей апарат є основою теоретичної гідромеханіки, теорії теплопровідності, теорії пружності, класичної теорії електромагнітного поля.

Математична фізика не обмежується тільки отриманням математичних співвідношень, що описують отримані експериментальним шляхом залежності між фізичними величинами. Розв'язування задач математичної фізики сприяє виникненню нових ідей та теорій. Класичним прикладом тут є історія відкриття античастинок. Як відомо, першим було відкрито позитрон. Його існування було передбачено Полем Діраком у 1926 році як математичний наслідок квантової теорії руху електронів. І тільки у 1932 році позитрони були фактично спостережені.

Побудова та дослідження математичних моделей фізичних явищ складають предмет математичної фізики. Математична фізика розвивалася з часів Н'ютона паралельно розвитку фізики та математики. У XVIII ст. методи математичної фізики почали формуватись при вивченні коливань струни та стержня, а також при розв'язуванні задач, пов'язаних з акустикою та гідродинамікою. У цей же час закладаються підвалини теоретичної механіки (Ж. Даламбер, Л. Ейлер, П. Лаплас, Д. Бернуллі). У XIX ст. ідеї математичної фізики піднялися на інший виток розвитку у зв'язку із задачами теплопровідності, дифузії, пружності, оптики, електродинаміки. У цей же період створюються теорії потенціалу та теорія стійкості руху (Ж. Фур'є, К. Гаусс, О. Коші, М.В. Остроградський, П. Діріхле, Д. Стокс). У XX ст. до математичної фізики залучаються задачі квантової фізики та теорії відносності, а також нові проблеми газової динаміки, переносу частинок та фізики плазми.

Основними математичними засобами дослідження усіх цих задач є теорія диференціальних рівнянь, теорія функцій, функціональний аналіз, теорія ймовірностей, наближені методи та обчислювальна математика.

Для кращого розуміння подальшого викладення матеріалу наведемо основні означення.

Означення 1. Диференціальним рівнянням у частинних похідних називається рівняння, яке пов'язує незалежні змінні, їх функцію і частинні похідні від цієї функції.

Наприклад,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (*);$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}} = a^2 \Delta U + f(M, t) \qquad (**)$$

Означення 2. Найвищий порядок частинної похідної, що входить у рівняння, називається порядком диференціального рівняння у частинних похідних.

Наприклад, рівняння (*) є рівнянням другого порядку, а рівняння (**) – першого.

Означення 3. Диференціальне рівняння у частинних похідних називається лінійним, якщо воно лінійне відносно невідомої функції і її частинних похідних.

Означення 4. Диференціальне рівняння у частинних похідних називається квазілінійним, якщо воно лінійне відносно похідних найвищого порядку.

Означення 5. Розв'язком диференціального рівняння у частинних похідних називається усяка функція, неперервна в області, у якій ставиться задача, що всередині області має неперервні частинні похідні, порядок яких відповідає порядку диференціального рівняння і при підстановці у це рівняння перетворює його на тотожність за незалежними змінними.

Для того, щоб повністю описати той чи інший процес, необхідно, окрім самого рівняння у частинних похідних, задати початковий стан цього процесу (*початкові умови*) та режим роботи на границі області, у якій відбувається процес (*граничні умови*). Математично це пов'язано із нескінченною кількістю розв'язків диференціальних рівнянь. Тому, щоб виділити розв'язок, який описує реальний процес, необхідно задати додаткові умови. Такими додатковими умовами і є *крайові умови* – початкові та граничні. Відповідна задача називається *крайовою задачею* або *задачею математичної фізики*.

Означення 6. Сукупність диференціального рівняння у частинних похідних і додаткових умов (крайових та початкових) становить математичне моделювання фізичної задачі і називається задачею математичної фізики.

Та обставина, що задача математичної фізики повинна моделювати деяке фізичне явище (процес), накладає на неї ряд вимог, часто не обов'язкових для суто математичних задач. Так, задача математичної фізики вважається поставленою коректно (правильно), якщо існує її розв'язок єдиний і стійкий. При цьому, стійкість розв'язку означає, що малим змінам в умові задачі повинні відповідати малі зміни у розв'язку, що дозволить знівелювати похибку експериментальних даних задачі. Природно, що основною проблемою «Теорії рівнянь математичної фізики» є знаходження розв'язку задачі математичної фізики у вигляді, зручному для практики. Знаючи цей розв'язок, можна отримати кількісну характеристику процесу у будь-якій точці середовища і у будь-який момент часу.

ТЕМА 1 РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Широкий клас фізичних процесів описується лінійними диференціальними рівняннями другого порядку

$$A U''_{xx} + 2BU''_{xy} + CU''_{yy} + f(x, y, U, U'_x, U'_y) = 0 . \qquad (1.1)$$

Розглянемо характерні фізичні процеси, що зводяться до різних крайових задач для диференціальних рівнянь типу (1.1), класифікацію таких рівнянь.

1.1 Рівняння малих поперечних коливань струни

Розглянемо натягнену струну, закріплену на кінцях $x = 0$ та $x = l$. Моделюючи струну будемо нехтувати її товщиною, вважаючи струну ниткою, а також силами, що виникають при згинанні, та силами ваги. Залишаємо тільки сили натягу, які описуються законом Гука: натяг струни пропорційний видовженню. Таким чином, моделлю струни є пружна, невагома й абсолютно гнучка нитка.

За основну величину, що характеризує процес коливання струни, виберемо вектор зміщення точок струни від положення рівноваги. Натяг, що виникає у струні у будь-який момент часу, направлений по дотичній до профілю.

Розглянемо малі відхилення точок струни від положення рівноваги, при яких можна вважати, що рух усіх точок струни відбувається в одній площині і перпендикулярно до осі Ox. При цьому довжина елементарної дуги струни дорівнює її проекції на цю вісь. Отже, за зроблених припущень, видовження струни під час її малих коливань не відбувається. Тоді за законом Гука величина натягу T в кожній точці струни не змінюється з часом.

Знайдемо проекції на вісь Ou сил натягу, що діють на елементарну дугу струни $\overset{\smile}{MM'}$: $T\sin(\varphi + \Delta\varphi) - T\sin\varphi$ (рис. 1.1).

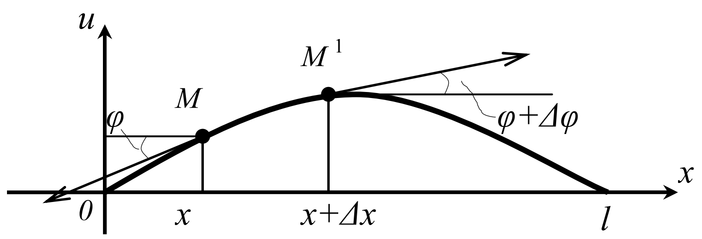


Рисунок 1.1

Оскільки кут φ досить малий, то можна вважати, що $\sin\varphi$ еквівалентний $tg\varphi$.

Тоді

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi \approx Ttg(\varphi+\Delta\varphi)-Ttg\varphi = \\ = T\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right),$$

але за теоремою Лагранжа одержуємо

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi = T\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x \approx T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x, \text{ де } 0<\theta<1.$$

Для отримання рівняння руху точок струни потрібно зовнішні сили прирівняти до сил інерції. На підставі закону Д'Аламбера всі сили, які діють на ділянку $\overset{\cup}{MM'}$, повинні зрівноважуватись.

Нехай ρ - лінійна густина струни, тоді маса елемента струни дорівнює $\rho\Delta x$. Прискорення елемента струни дорівнює $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Тоді за законом Д'Аламбера маємо:

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x. \tag{1.2}$$

З формули (1.2), враховуючи, що $a^2 = \frac{T}{\rho}$, одержуємо рівняння малих поперечних коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.3}$$

з *крайовими умовами*

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \tag{1.4}$$

та *початковими умовами*

$$u(x,0) = f(x), \tag{1.5}$$

де $f(x)$ - форма струни у початковий момент;

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x), \tag{1.6}$$

де $\varphi(x)$ - швидкість у кожній точці струни у початковий момент.

1.2 Рівняння малих поздовжніх коливань стержня

Розглянемо стержень, розташований вздовж осі Ox.

Введемо такі позначення:

S(x) – площа перерізу стержня площиною, перпендикулярною до осі *Ox* і проведеною через точку *X*;

K(x) – модуль Юнга;

ρ(x) – густина у перерізі стержня з абсцисою *x*;

U(x,t) – величина відштовхування (вздовж стержня) перерізу стержня з абсцисою *x* в момент часу *t*.

Припустимо, що величина відштовхування усіх точок фіксованого розрізу однакова. Зрозуміло, що в межах даної моделі повздовжні коливання повністю описуються формулою *U(x,t)*.

Малими коливаннями називаються такі повздовжні коливання, в яких натяги, що виникають в процесі коливання, відповідають закону Гука.

Підрахуємо відносне видовження площі пластини *(x; x+Δx)* в момент часу *t*. Координати кінців цієї частини площі: *x+ U(x,t), x+ Δx+ U(x+Δx, t)*.

Відносне видовження частини площі:

$$\frac{\{[x+\Delta x+U(x+\Delta x,t)]-[x+U(x,t)]\}-\Delta x}{\Delta x}=\frac{x+\Delta x+U(x+\Delta x,t)-x-U(x,t)-\Delta x}{\Delta x}=$$

$$=\frac{U(x+\Delta x,t)-U(x,t)}{\Delta x}=U_x(x+\theta\Delta x,t),$$

де $0<\theta<1$.

Таким чином, відносне видовження в точці *X* в момент часу *t* дорівнює $U_x(x,t)$, а величина натягу *T* за законом Гука:

$$T=K(x)S(x)U_x(x,t).$$

Візьмемо *f(x,t)* – густина рівнодійних зовнішніх сил, які діють на переріз з абсцисою *X* вздовж осі *x*.

Згідно з другим законом Н'ютона на відрізку $[x_1,x_2]$ за час $\Delta t=t_2-t_1$ маємо:

$$\int_{x_1}^{x_2}(U_t(\xi,t_2)-U_t(\xi,t_1))\rho(\xi)S(\xi)d\xi=\int_{t_1}^{t_2}(S(x_2)K(x_2)U_x(x_2,\tau)-S(x_1)K(x_1)U_x(x_1,\tau))d\tau+\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

– рівняння малих повздовжніх коливань ділянки стержня $[x_1,x_2]$ у інтегральній формі.

Припустимо існування неперервних похідних другого порядку функції *U(x,t)* і неперервної першої похідної функцій *K(x)* та *S(x)*, знайдемо диференціальні рівняння малих повздовжніх коливань стержня:

$$\frac{\partial}{\partial x}(S(x)K(x)U_x(x.t))+f(x,t)=\rho(x)S(x)U_{tt}(x,t). \qquad (1.7)$$

Якщо *S(x), K(x)* та *ρ(x)* – сталі, то припущення існування U_{xx} та U_{tt} правильне і рівняння (1.7) зведемо до вигляду:

$$a^2U_{xx} + F(x,t) = U_{tt}$$
$$a^2 = \frac{K}{\rho} \qquad (1.8)$$
$$F(x,t) = \frac{f(x,t)}{\rho S}$$

1.3 Рівняння малих поперечних коливань мембрани

Мембраною називається тонка натягнута плоска плівка, що не чинить опір згину і зсуву, але чинить опір розтягуванню.

$$\rho(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + F(x,t), \qquad x = (x_1, \ x_2) \qquad (1.9)$$

Якщо густина ρ постійна, то рівняння коливань мембрани

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \upsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + f(x,t), \qquad \upsilon^2 = \frac{T_0}{\rho}, \ \ f = \frac{F}{\rho}$$

називається двовимірним хвильовим рівнянням.

Наведемо виведення рівняння (1.9). Розглядатимемо малі поперечні коливання мембрани, в яких відбувається зсув перпендикулярно до площини мембрани, за яку ми приймемо площину Oxy. Нехай $u = u(x, y, t)$ - величина зсуву точки з координатами (x, y) у момент часу t. Критерієм малості коливань слугують умови

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 << 1, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 << 1.$$

Нехай ds — елемент дуги деякого контура, що лежить на поверхні мембрани, М — точка цього елемента. На цей елемент діють сили натягу Tds. Відсутність опору мембрани згину і зсуву математично виражається у тому, що вектор натягу T лежить в площині, дотичній до поверхні мембрани в точці М, і перпендикулярний до елемента ds, а натяг T в цій точці не залежить від напряму елемента ds, що містить точку М. З припущення про малість коливань випливає:

– проекція $T_{пр}$ вектора натягу $\vec{T}$ на площину (x, y) рівна T;

– натяг T не залежить від часу t.

Дійсно, $T_{пр} = T\cos\alpha$, де α - кут між вектором $\vec{T}$ і площиною (x, y).

Але α не більше кута γ між дотичною площиною до поверхні мембрани, в якій лежить вектор $\vec{T}$, і площиною (x, y): $\alpha \le \gamma$. .
Тому

$$\cos(\alpha) \ge \cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2}} \approx 1.$$

Отже, $\cos(\alpha) \approx 1$, і значить, $T_{пр} \approx T$.

Далі розглянемо ділянку S незбуреної мембрани. Її площа дорівнює

$$\iint\limits_{S} \mathrm{dxdy}.$$

Площа цієї ділянки у момент часу t дорівнює

$$\iint\limits_{S} \frac{dxdy}{\cos(\gamma)} \approx \iint\limits_{S} dxdy.$$

Таким чином, площа фіксованої ділянки мембрани не змінюється з часом, тобто ділянка не розтягується. Тому за законом Гука і T не змінюється з часом. З того, що вектор T направлений по перпендикуляру до елемента дуги ds, випливає, що T не залежить також від x і y.

Розглянемо елемент мембрани, для якого точка *N(x,y,u)* — середня. На цей елемент, окрім сил натягу $\vec{T}$, діє зовнішнє розподілене по поверхні навантаження *q(x,y,t)*, розраховане на одиницю площі і перпендикулярне до поверхні мембрани (рис. 1.2). Рівнодіюча зовнішніх сил буде рівна *q(x,y,t) dxdy*. Рівнодійна сил натягу

$$\left[\mathrm{Tdy}(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}})\Bigg|_{\mathrm{x} + \frac{\mathrm{dx}}{2}} - Tdy(\frac{\partial u}{\partial x})\Bigg|_{\mathrm{x} + \frac{\mathrm{dx}}{2}} \right] + \left[Tdx(\frac{\partial u}{\partial y})\Bigg|_{\mathrm{y} + \frac{\mathrm{dy}}{2}} - Tdx(\frac{\partial u}{\partial y})\Bigg|_{\mathrm{y} - \frac{\mathrm{dy}}{2}} \right] =$$

$$= \mathrm{Tdy}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}dx + Tdx\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy = T(\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy.$$

Позначимо через $\rho(x,y)$ поверхневу густину мембрани (густину, розраховану на одиницю площі). Тоді маса даного елемента мембрани буде

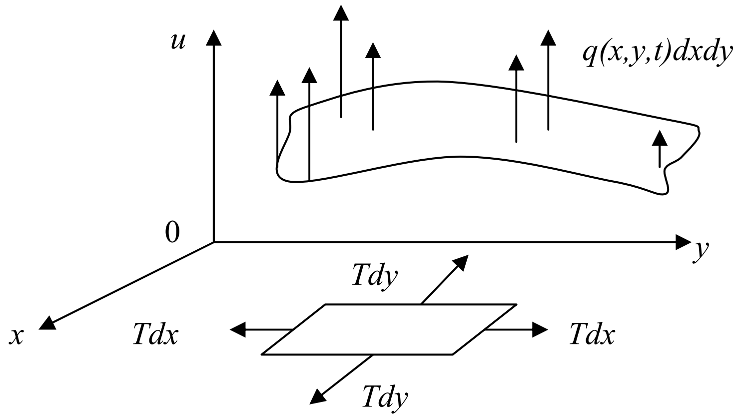


Рисунок 1.2 - Натягнута мембрана

$\rho(x,y)\,dxdy$. Таким чином, згідно з законами Ньютона ми можемо написати рівняння

$$\rho(x,y)dxdy\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=q(x,y,t)dxdy+T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy \Rightarrow \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{q(x,y,t)}{T},\quad \upsilon=\sqrt{\frac{T}{\rho}}.\tag{1.10}$$

Величина υ має розмірність швидкості. Вона характеризує швидкість поширення коливань. В окремому випадку може бути *q(x, y, t)= 0*, тоді ми маємо рівняння вільних коливань мембрани

$$\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\mathrm{u}}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).\tag{1.11}$$

Для завершення постановки задачі про коливання мембрани задамо початкові і крайові умови.

Початкові умови:

$$\mathrm{u}\Big|_{\mathrm{t}=0}=\varphi(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x,y).\tag{1.12}$$

Крайові умови на контурі Г:

$$\mathrm{u}\Big|_{\Gamma} = 0. \qquad (1.13)$$

Задача про рівновагу мембрани

Якщо вважати, що *q=q(x,y),* тобто, зовнішнє поперечне навантаження не залежить від часу, то можна ставити задачу про рівновагу мембрани. Рівняння рівноваги можна вивести безпосередньо або його можна одержати з рівняння коливань. Рівняння рівноваги мембрани має вигляд

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -\frac{\mathrm{q(x,y)}}{\mathrm{T}}. \qquad (1.14)$$

Це рівняння належить інтегрувати з крайовою умовою, наприклад, з умовою вигляду (1.13). Початкові умови не ставляться.

Задача про сталі синусоїдні коливання мембрани

Нехай *q=q(x,y,t)* залежить від часу спеціальним чином

$$q(x,y,t) = Q(x,y)\cos(\omega t),$$

або

$$q(x,y,t) = Q(x,y)\sin(\omega t),$$

де ϖ – частота зовнішньої збурюючої сили.

В цьому випадку і розв’язання задачі доцільно шукати у вигляді

$$u(x,y,t) = U(x,y)\cos(\omega t),$$

або

$$u(x,y,t) = U(x,y)\sin(\omega t),$$

відповідно.

Після підстановки цих функцій *u(x,y,t)* в рівняння коливань мембрани одержимо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{\upsilon^2}\mathrm{U} = -\frac{\mathrm{Q(x,y)}}{\mathrm{T}}, \qquad (1.15)$$

яке належить інтегрувати за крайових умов, наприклад, у вигляді (1.13).

1.4 Телеграфне рівняння

Як ще один приклад хвильового рівняння розглянемо телеграфне рівняння, яке застосовується в теорії поширення квазістаціонарних електричних коливань по кабелях.

Якщо протяжність електричного ланцюга велика (наприклад, телеграфні лінії або лінії передачі енергії), то такий ланцюг не можна характеризувати зосередженими параметрами (опором, ємністю, котушкою самоіндукції). У найпростішому випадку, коли електричний ланцюг має велику протяжність, можна говорити про лінії з розподіленими параметрами. При вивченні таких ліній враховують опір проводів, індуктивність лінії, витік струму в атмосферу внаслідок відсутності ізоляції проводами дротами (або між проводом і землею). Ми розглядатимемо однорідну лінію, тобто лінію, для якої опір, індуктивність, витік і ємність розподілені уздовж проводу безперервно і рівномірно; для наочності вважатимемо лінію двопровідною (рис. 1.3).

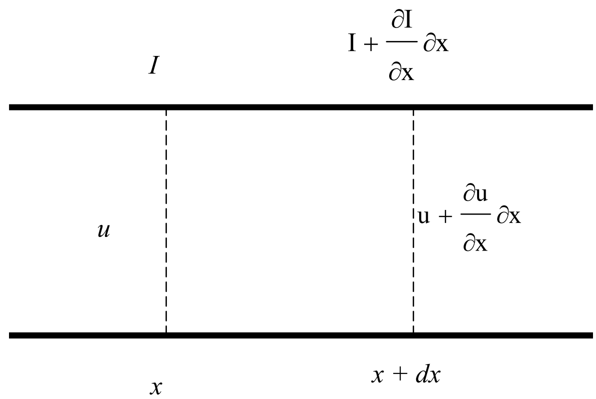


Рисунок 1.3 – Лінія електропередач

Припустимо, що лінія електропередачі характеризується омічним опором R, самоіндукцією L, ємністю C і витоком ізоляції g, розрахованими на одиницю довжини. Нехай напруга між проводами і струм на відстані x від початку лінії $x = 0$ у момент часу t рівні, відповідно, $u(x,t)$ і $I(x,t)$. Ці функції і є шуканими; вони пов'язані двома диференціальними рівняннями, які ми зараз виведемо.

Нагадаємо, що самоіндукція L — коефіцієнт пропорційності, що зв'язує електрорушійну силу самоіндукції із швидкістю зміни струму, тобто, $u_C = \frac{L\partial I}{\partial t}$. Ємність C — коефіцієнт пропорційності між струмом зсуву і швидкістю зміни напруги, тобто $I_{CM} = \frac{C\partial u}{\partial t}$. Останню рівність отримуємо диференціюванням співвідношення $q = Cu$, де q — кількість електрики, яка залишається на ділянці проводу, що розглядається як обкладка конденсатора, а u – напруга. Нарешті, витік g є коефіцієнтом пропорційності між струмом витоку і напругою.

Для складання диференціальних рівнянь, якім повинні задовольняти функції $u(x,t)$ і $I(x,t)$, виділимо ділянку проводу від точки з абсцисою x до точки з абсцисою $x + dx$. Якщо напруга і струм в точці x у момент часу t рівні, відповідно, $u(x,t)$ і $I(x,t)$, то в точці $x + dx$ в той же момент часу значення цих величин (з точністю до нескінченно малих вищих порядків у порівнянні з dx) будуть рівні $u + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx$ і $I + \left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)dx$. Падіння напруги на даній ділянці викликатиметься втратою напруги в проводі, тобто величиною RdxI, і виникненням протидіючої електрорушійної сили самоіндукції. Тому

$$\mathrm{u - (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) = RdxI + Ldx\frac{\partial I}{\partial t}},$$

тобто,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + L\frac{\partial I}{\partial t} + RI = 0. \tag{1.16}$$

Далі зміна струму на цій же ділянці обумовлена струмом витоку і струмом зсуву. Отже,

$$\mathrm{I - (I + \frac{\partial \mathit{I}}{\partial x} dx) = gdxu + \mathit{C}dx\frac{\partial \mathit{u}}{\partial t}},$$

звідки

$$\frac{\partial I}{\partial \mathrm{x}} + C\frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}} + gu = 0. \tag{1.17}$$

Велике значення мають початкові і крайові умови, які повинні виконуватися на кінцях лінії. *Початкові умови* в загальному випадку формулюються так:

$$\mathrm{u}\Big|_{\mathrm{t}=0} = \varphi(x), \quad I\Big|_{t=0} = \psi(x).$$

Користуючись рівняннями (1.16) і (1.17), легко знайти $\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}$ і $\frac{\partial I}{\partial t}$ при $t = 0$.

Якщо на початку лінії $x=0$ включено джерело живлення з електрорушійною силою E, а на кінці $x = l$ є приймач струму з опором Rl, то *крайові умови* будуть

$$\mathrm{u}\Big|_{\mathrm{x}=0} = E(t), \quad u\Big|_{x=l} = R_l I\Big|_{x=l}.$$

Зокрема, якщо один кінець $x=0$ підтримується під напругою E, а інший $x = l$ коротко замкнутий, ми маємо

$$\mathrm{u}\Big|_{\mathrm{x}=0} = E(t), \quad u\Big|_{x=l} = 0.$$

Якщо, наприклад, кінець $x = 0$ лінії відкритий, то в цьому кінці ми повинні мати

$$\mathrm{I}\Big|_{\mathrm{x}=0} = 0.$$

Взагалі, якщо в кінці ($x = l$) лінії включені зовнішня електрорушійна сила E, опір R і самоіндукція I, то в ньому ми повинні мати

$$\mathrm{u}\Big|_{x=l} = \left(E + RI + L\frac{\partial I}{\partial t}\right)\Big|_{x=l}.$$

Зрозуміло, можна розглядати будь-яку комбінацію умов при $x = 0$ і $x = l$. Виключимо струм з рівнянь (1.16) і (1.17), одержимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2} + (Lg + CR)\frac{\partial u}{\partial t} + Rgu, \quad \upsilon = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (1.18)$$

Рівняння (1.18) називається *телеграфним рівнянням*; υ— швидкість передачі сигналу по кабелю.

Через симетрію рівнянь (1.16) і (1.17) аналогічне рівняння виходить і для струму I (заміною в (1.17) напруги *u* на струм I).

Якщо вважати $\mathrm{R} = 0$, $\mathrm{g} = 0$, то замість рівняння (1.18) ми матимемо рівняння для лінії без втрат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}.$$

1.5 Рівняння теплопровідності

Процес поширення тепла або дифузії частинок у середовищі описується таким загальним рівнянням:

$$\rho\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}} = dir(\rho gradU) - qU + F(x,t). \qquad (1.19)$$

Отримаємо його для випадку поширення тепла.

Позначимо $U(M,t)$ температуру середовища в точці $M(x,y,z)$ у момент часу *t*. Середовище будемо вважати ізотропним. Виділимо всередині тіла деякий об’єм V, обмежений гладкою або кусково-гладкою поверхнею S, в об’єм V надходить кількість тепла (потік тепла)

$$\Delta \mathrm{Q} = \oiint\limits_S \mathrm{k}\left|\frac{\partial \mathrm{U(M,t)}}{\partial n}\right| dS \cdot \Delta t, \qquad (1.20)$$

де *n* – зовнішня нормаль до поверхні S у точці M;
k - коефіцієнт теплопровідності.

Оскільки

$$\frac{\partial U}{\partial \mathrm{n}} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$$

– похідна за напрямком, яку можна розглядати як скалярний добуток двох векторів

$$\mathrm{grad}\quad \mathrm{U} = \left\{\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}}\right\}$$

та

$$\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\},$$

то

$$\mathrm{Q}_1 = \Delta Q = \oiint_S (\kappa \mathrm{grad U}, \vec{\mathrm{n}}) dS \cdot \Delta t .$$

Позначивши

$$\vec{n} dS = \overrightarrow{dS},$$

матимемо:

$$Q_1 = \Delta Q = \oiint_{\mathrm{S}} k \mathrm{grad U} \overrightarrow{\mathrm{dS}} \cdot \Delta \mathrm{t} . \tag{1.21}$$

Застосуємо до правої частини рівності (1.21) формулу Остроградського-Гаусса, за якою

$$Q_1 = \oiint_{\mathrm{S}} \kappa \mathrm{grad U} \overrightarrow{\mathrm{dS}} \cdot \Delta \mathrm{t} = \iiint_{\mathrm{V}} \mathrm{div(kgradU) dV} \cdot \Delta \mathrm{t} . \tag{1.22}$$

Якщо є теплові джерела, то в об'ємі V виникає тепло, яке дорівнює

$$\mathrm{Q}_2 = \iiint_V F(M,t) dV \cdot \Delta t , \tag{1.23}$$

де $\mathrm{F(M,t)}$ – питома потужність джерела.

Щоб вивести рівняння теплопровідності, складемо рівняння теплового балансу. Виділення тепла з об'єму V повинно супроводжуватися зменшенням температури точок тіла. Якщо температура у точці M в момент часу t була $\mathrm{U(M,t)}$, то в момент $t + \Delta t$ вона дорівнюватиме $U(M, t + \Delta t)$. З курсу фізики відомо, яка кількість тепла виділяється тілом масою *m*, якщо його температура змінюється на ΔU і дорівнює

$$\gamma m \cdot \Delta U ,$$

де γ – теплоємність.

Тоді в усьому об'ємі ця кількість тепла дорівнюватиме

$$\mathrm{Q}_3 = \iiint_V \gamma\rho [U(M, t + \Delta t) - U(M,t)] dV = \iiint_V \gamma\rho \Delta U \cdot dV . \tag{1.24}$$

Запишемо рівняння теплового балансу:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 . \tag{1.25}$$

Підставимо знайдені значення Q_1, Q_2, Q_3 з (1.21), (1.23) і (1.24) у рівняння (1.25), матимемо:

$$\iiint_V \gamma\rho \Delta U \cdot dV = \iiint_V div(k \mathrm{grad U}) dV \cdot \Delta t + \iiint_V F(M,t) dV \cdot \Delta t . \tag{1.26}$$

Поділимо обидві частини рівності (1.26) на Δt і перейдемо до границі за умови, що $\Delta t \to 0$, дістанемо:

$$\iiint\limits_{V} \mathrm{div}(k\mathrm{gradU})dV + \iiint\limits_{V} F(M,t)dV - \iiint\limits_{V} \gamma\rho \frac{\partial U}{\partial t} dV = 0,$$

або

$$\iiint\limits_{V} [div(k\mathrm{gradU}) - \gamma\rho \frac{\partial U}{\partial t} + F(M,t)]dV = 0. \qquad (1.27)$$

Для неперервних функцій і їх частинних похідних матимемо, що

$$\mathrm{div(kgradU)} - \gamma\rho \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}} + F(M,t) = 0. \qquad (1.28)$$

Рівняння (1.28) називається рівнянням теплопровідності.

Якщо середовище однорідне, то $\rho = \mathrm{const}$, $k = \mathrm{const}$, $\gamma = \mathrm{const}$. Тоді рівняння теплопровідності матиме вигляд:

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}} = a^2 \Delta U + f(M,t), \qquad (1.29)$$

де $a^2 = \dfrac{k}{\gamma\rho}$,

Δ – оператор Лапласа, $\Delta = \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$,

$\Delta \mathrm{U} = \nabla^2 U = div(gradU)$,

$f(M,t) = \dfrac{1}{\gamma\rho} F(M,t)$.

1.6 Рівняння поширення тепла в стержні

Розглянемо однорідний стержень довжиною *l.* Будемо вважати, що бічна поверхня стержня теплонепроникна і що в усіх точках поперечного перерізу стержня температура однакова. Вивчимо процес поширення тепла в стержні.

Розмістимо вісь *Ox* так, щоб один кінець стержня збігався з точкою *x=0*, а другий – з точкою *x=R*.

Нехай $U(x,t)$ - температура в перерізі стержня з абсцисою *x* у момент часу *t*. Кількість тепла, яка проходить через поперечний переріз стержня з абсцисою *x* за одиницю часу визначається за формулою:

$$q = -k \frac{\partial U}{\partial x} S , \tag{1.30}$$

де S – площа перерізу стержня;
k – коефіцієнт теплопровідності.

Розглянемо елемент стержня, що міститься між перерізами з абсцисами x_1 та x_2 $(x_1 – x_2 = \Delta x)$. Кількість тепла, що проходить через переріз стержня з абсцисою *x*, за час Δt дорівнює:

$$\Delta Q_1 = -\kappa \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x = x_1} \cdot S \cdot \Delta t , \tag{1.31}$$

а для перерізу з абсцисою x_2:

$$\Delta Q_2 = -k \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x = x_2} \cdot S \cdot \Delta t . \tag{1.32}$$

Приріст кількості тепла $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ в елементі стержня за час Δt дорівнюватиме:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = -k \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x = x_1} \cdot S \cdot \Delta t + k \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x = x_2} \cdot S \cdot \Delta t = k\left(\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x = x_2} - \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x = x_1}\right) \cdot S \cdot \Delta t \cdot$$

При малих Δx $(\Delta x \to 0)$ вираз у дужках замінимо диференціалом:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x = x_2} - \frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x = x_1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\Delta x = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Delta x .$$

Тоді

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \kappa \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \Delta x \cdot S \cdot \Delta t . \tag{1.33}$$

Цей приріст тепла за час Δt також витрачається на підвищення температури елемента стержня на величину ΔU.

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho \cdot \Delta x \cdot S \cdot \Delta U \tag{1.34}$$

або

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c\rho \cdot \Delta x \cdot S \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \Delta t \tag{1.35}$$

де c – теплоємність речовини стержня;

ρ – густина речовини стержня;

ρΔxS – маса елемента стержня.

Прирівнюючи вирази (1.34) і (1.35) для однієї і тієї ж кількості тепла $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$, дістанемо:

$$k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \Delta x \cdot S \cdot \Delta t = c\rho \cdot \Delta x \cdot S \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \Delta t\,,$$

або

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{k}{c\rho} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,.$$

Позначимо через

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}\,,$$

матимемо рівняння:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,. \tag{1.36}$$

Це і є рівняння поширення тепла в однорідному стержні.

Задамо ще *крайові умови*:

$$\mathrm{U(x,t)}\Big|_{x=0} = \psi_1(t)$$

$$\mathrm{U(x,t)}\Big|_{x=l} = \psi_2(t) \tag{1.37}$$

та *початкову умову* (для $0 \le \mathrm{t} \le \mathrm{T}$):

$$U(x,t)\Big|_{t=o} = \varphi(x) \tag{1.38}$$

Початкова умова (1.38) відповідає тому, що для $t=0$ у різних перерізах стержня задана температура, яка дорівнює $\varphi(x)$. Крайові умови (1.37) відповідають тому, що на кінцях стержня для *x=0* і *x=l* підтримується температура рівня $\psi_1(t)$ і $\psi_2(t)$, відповідно.

1.7 Основні рівняння математичної фізики

У попередніх параграфах ми ознайомилися з різноманітними задачами фізики та механіки, що приводять до рівнянь з частинними похідними. Але основною метою є не виведення рівняння у частинних похідних, а їх дослідження та розв'язування. Тому потрібно перерахувати основні найбільш уживані рівняння математичної фізики (на прикладі лінійних рівнянь в частинних похідних другого порядку).

1. *Рівняння Лапласа* (рівняння еліптичного типу)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{1.39}$$

Використовується рівняння Лапласа при вивченні стаціонарних процесів поширення тепла, процесу стаціонарного явища дифузії і фільтрації, при дослідженні потенціалів полів тяжіння, стаціонарних електричних полів в яких відсутні відповідні маси та електричні заряди.

2. *Хвильове рівняння* (рівняння гіперболічного типу)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{1.40}$$

де a – числовий коефіцієнт, який визначається в залежності від виду задачі.

Хвильове рівняння використовують там, де виникає потреба дослідити хвильові процеси: поперечні коливання струни, поздовжні коливання стержня, електричні коливання у проводах, газові коливання тощо.

У тривимірному координатному просторі розглядається тривимірне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\upsilon^2\left(\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial x_3^2}\right)+f(x,t), \qquad x=(x_1,x_2,x_3). \tag{1.41}$$

Це рівняння описує процеси поширення звуку в однорідному середовищі і електромагнітних хвиль в однорідному непровідному середовищі. Його задовольняють густина і тиск газу, потенціал швидкостей, а також складові напруженості електричного і магнітного полів і відповідні потенціали.

3. *Рівняння теплопровідності* (рівняння параболічного типу)

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{1.42}$$

Рівняння використовуються при дослідження розподілу тепла, дослідженні явища дифузії, фільтрації тощо.

4. *Рівняння Пуассона*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z). \tag{1.43}$$

Рівняння Пуассона, на відміну від рівняння Лапласа, описує поля із розподіленими внутрішніми джерелами. Ці рівняння зустрічаються майже у всіх областях прикладної фізики.

5. *Рівняння Гельмгольца*

$$\Delta u + k^2 u = -f(x, y, z),\ k = const. \tag{1.44}$$

Це рівняння для амплітуд сталих періодичних коливань заданої частоти; $k = \dfrac{\varpi}{\upsilon}$ – хвильове число.

7. *Поширення хвиль у середовищах із поглинанням енергії* описується рівнянням

$$\Delta u - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b\frac{\partial u}{\partial t} - cu = -f(x, y, z, t). \tag{1.45}$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається диференціальним рівнянням у частинних похідних?

2. Що називається розв’язком диференціального рівняння у частинних похідних?
3. Як визначається порядок диференціального рівняння у частинних похідних?
4. Що називається задачею математичної фізики?
5. Запишіть загальний вигляд лінійного диференціального рівняння у частинних похідних другого порядку.
6. Запишіть загальний вигляд хвильового рівняння.
7. Що називається струною? Виведіть рівняння малих поперечних коливань струни.
8. Що називається стержнем? Виведіть рівняння поздовжніх коливань стержня.
9. Що називається мембраною? Виведіть рівняння поперечних коливань мембрани.
10. Сформулюйте задачу про рівновагу мембрани.
11. Сформулюйте задачу про сталі синусоїдні коливання мембрани.
12. Виведіть телеграфне рівняння.
13. Напишіть тривимірне хвильове рівняння.
14. Виведіть рівняння теплопровідності.
15. Сформулюйте крайові умови для рівняння теплопровідності.
16. Сформулюйте крайові умови для одновимірного хвильового рівняння на прикладах поперечних коливань струни та поздовжніх коливань стержня.
17. Напишіть рівняння Лапласа та рівняння Пуассона. До якого типу відносяться ці рівняння?
18. Напишіть рівняння Гельмгольца. Які процеси описує це рівняння?
19. Які фізичні процеси описуються за допомогою рівнянь параболічного типу?
20. Які фізичні процеси описуються за допомогою рівнянь гіперболічного типу?
21. Які фізичні процеси описуються за допомогою рівнянь еліптичного типу?
22. Виведіть рівняння поширення тепла в стержні. Сформулюйте крайові та початкові умови.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти статистичний прогин струни, закріпленої на кінцях, під дією неперервно розподіленого навантаження (на одиницю довжини).

2. Вивести рівняння малих поперечних коливань струни із насадженою на неї у деякій точці x_0 бусинкою маси m.

3. Вивести рівняння коливань струни, що відбуваються у пружному середовищі.

4. Крутильними коливаннями стержня називають такі коливання, при яких його поперечні перерізи повертаються один відносно одного, обертаючись при цьому навколо стержня. Вивести рівняння малих крутильних коливань однорідного циліндричного стержня, якщо кінці стержня вільні.

5. Крутильними коливаннями стержня називають такі коливання, при яких його поперечні перерізи повертаються один відносно одного, обертаючись при цьому навколо стержня. Вивести рівняння малих крутильних коливань однорідного циліндричного стержня, якщо кінці стержня жорстко закріплені.

6. Точкам пружного однорідного прямокутного стержня, жорстко закріпленого на лівому кінці і вільного на правому, у початковий момент часу $t = 0$ надано малі поперечні відхилення і швидкості, паралельні поздовжній площині симетрії стержня. Сформулювати крайову задачу для визначення поперечних відхилень точок стержня при $t > 0$, припускаючи, що стержень здійснює малі поперечні коливання.

7. Знаходячись у горизонтальній площині невагома струна з постійною кутовою швидкістю ϖ обертається навколо вертикальної осі. Один кінець струни закріплений на осі, а інший вільний. У початковий момент часу $t = 0$ точкам цієї струни надаються малі відхилення і швидкості по нормалях до цієї площини. Сформулювати крайові та початкові умови для

визначення відхилень точок струни від площини рівноважного руху.

8. Нехай у точці $x = 0$ нескінченної однорідної струни знаходиться кулька маси m_0. Початкові швидкості і початкові відхилення точок струни рівню нулю. Сформулювати крайову задачу для визначення відхилень точок струни від положення рівноваги, якщо у початковий момент часу $t = 0$ кулька отримує імпульс p_0 у поперечному напрямі.

9. У внутрішніх точках $x = x_i$, $i = \overline{1,n}$ на струні зосереджені маси m_i, $i = \overline{1,n}$. Сформулювати крайову задачу для визначення малих поперечних коливань струни при довільних початкових даних. Кінці струни закріплені.

10. Кабель, що має потенціал υ_0, при $t = 0$ заземлюється на одному кінці через зосереджену ємність (чи індуктивність), другий кінець ізольований. Скласти задачу про визначення електричного струму у кабелі.

11. Сформулювати крайову задачу для малих радіальних коливань ідеального однорідного газу, що знаходиться у трубці радіуса R, яка простирається у обидві сторони на нескінченність. Початкові відхилення та початкові швидкості є заданими функціями від r.

12. Сформулювати крайову задачу для малих радіальних коливань ідеального однорідного газу, що знаходиться у сферичній посудині радіуса R, якщо початкові швидкості та початкові відхилення задано як функції від r.

13. Сформулювати крайову задачу для поперечних коливань мембрани, до якої прикладено нормальний тиск P на одиницю площі, якщо у незбуреному стані мембрана є плоскою, а навколишнє середовище не здійснює опору коливанням мембрани. Вважати, що мембрана жорстко закріплена на межі L.

14. Сформулювати крайову задачу для поперечних коливань мембрани, до якої прикладено нормальний тиск P на одиницю площі, якщо у

незбуреному стані мембрана є плоскою, а навколишнє середовище не здійснює опору коливанням мембрани. Вважати, що мембрана вільна на межі L.

15. Дано тонкий однорідний стержень довжиною l, початкова температура якого $f(x)$. Сформулювати крайову задачу про визначення температури стержня, якщо на кінці $x=0$ підтримується стала температура u_0, а на бічній поверхні та на кінці $x=l$ здійснюється конвективний теплообмін за законом Н'ютона з навколишнім середовищем нульової температури.

16. Сформулювати задачу про визначення температури у нескінченному тонкому теплоізольованому стержні, по якому з моменту $t=0$ у додатному напрямі із швидкістю υ_0 починає рухатися точкове джерело, що дає q одиниць тепла у одиницю часу.

17. Сформулювати задачу про охолодження тонкого однорідного кільця радіуса R, на поверхні якого здійснюється конвективний теплообмін із навколишнім середовищем, яке має задану температуру. Нерівномірністю розподілу температури по товщині кільця знехтувати.

18. Необмежений циліндр радіуса R має початкову температуру $f(r)$. Сформулювати крайову задачу про радіальне розповсюдження тепла, якщо бічна поверхня має постійну температуру.

19. Початкова температура необмеженої пластини товщиною $2h$ дорівнює нулю. Сформулювати крайову задачу про розподіл температури при $t>0$ по товщині пластини, якщо вона нагрівається з обох боків рівними постійними тепловими потоками q.

20. Початкова температура необмеженої пластини товщиною $2h$ дорівнює нулю. Сформулювати крайову задачу про розподіл температури при $t>0$, по товщині пластини, якщо в пластині, починаючи з моменту $t=0$ діє джерело тепла із постійною густиною Q, а її основи підтримуються при нульовій температурі.

21. Сформулювати крайову задачу про стаціонарний розподіл температури у тонкій прямокутній пластині $OACB$ із сторонами

OA=a, OB=b, якщо на бічних сторонах пластини підтримуються задані температури.

22. Сформулювати крайову задачу про стаціонарний розподіл температури у тонкій прямокутній пластині *OACB* із сторонами *OA=a, OB=b*, якщо на сторонах *OA* і *OB* задано теплові потоки, а сторони *BC* та *AC* теплоізольовані.

23. На плоску мембрану, обмежену кривою L, діє стаціонарне поперечне навантаження із густиною $f(x,y)$. Сформулювати крайову задачу про відхилення точок мембрани від площини, якщо мембрана закріплена на краях.

24. На плоску мембрану, обмежену кривою L, діє стаціонарне поперечне навантаження із густиною $f(x,y)$. Сформулювати крайову задачу про відхилення точок мембрани від площини, якщо край мембрани вільний.

25. На плоску мембрану, обмежену кривою L, діє стаціонарне поперечне навантаження із густиною $f(x,y)$. Сформулювати крайову задачу про відхилення точок мембрани від площини, якщо край мембрани закріплений пружно.

26. Дано циліндр із радіусом основи R та висотою h. Сформулювати крайову задачу про стаціонарний розподіл температури всередині циліндра, якщо температура верхньої та нижньої основ є заданою функцією від r, а бічна поверхня теплоізольована.

27. Дано циліндр із радіусом основи R та висотою h. Сформулювати крайову задачу про стаціонарний розподіл температури всередині циліндра, якщо температура верхньої та нижньої основ є заданою функцією від r, а бічна поверхня має температуру, що залежить тільки від z.

28. Дано циліндр із радіусом основи R та висотою h. Сформулювати крайову задачу про стаціонарний розподіл температури всередині циліндра, якщо температура верхньої та нижньої основ є заданою функцією від r, а бічна поверхня вільно охолоджується у середовищі потрібної температури.

29. Дана однорідна куля радіуса R із нульовою початковою температурою. Сформулювати крайову задачу про розподіл температури при $t > 0$ всередині кулі, якщо куля нагрівається рівномірно по всій поверхні сталим тепловим потоком q.

30. Дана однорідна куля радіуса R із нульовою початковою температурою. Сформулювати крайову задачу про розподіл температури при $t > 0$ всередині кулі, якщо на поверхні кулі відбувається конвективний теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого залежить тільки від часу.

ТЕМА 2 ЗВЕДЕННЯ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗАМІНИ ЗМІННИХ

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними (1.1). Встановити тип цього рівняння можна за допомогою дискримінанта

$$\Delta = B^2 - AC. \tag{2.1}$$

1) Якщо $\Delta > 0$, то рівняння (1.1) є рівнянням гіперболічного типу.
2) Якщо $\Delta = 0$, то рівняння (1.1) є рівнянням параболічного типу.
3) Якщо $\Delta < 0$, то рівняння (1.1) є рівнянням еліптичного типу.

Приклад *2.1 Встановити тип рівняння:*

а) $a^2U''_{xx} - U'_t + f(x,t) = 0$

Розв'язування

$A = a^2 \qquad B = 0 \qquad C = 0$

$\Delta = B^2 - AC = 0$ – рівняння параболічного типу.

б) $U''_{xx} + U''_{yy} - g(x,y) = 0$

Розв'язування

$A = C = 1 \qquad B = 0$

$\Delta = -1 \qquad \Delta < 0$ – рівняння еліптичного типу.

Покажемо, що рівняння (1.1) у кожному класі можна звести до найпростішого (канонічного) вигляду. Введемо нові змінні:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \tag{2.2}$$

Функції $\varphi(x,y)$ та $\psi(x,y)$ неперервні, двічі диференційовні і якобіан переходу від змінних (x,y) до змінних (ξ,η) відмінний від нуля, тобто:

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \varphi'_x \varphi'_y \\ \psi'_x \psi'_y \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.3}$$

Умова (2.3) є необхідною і достатньою умовою того, що система (2.2) має єдиний розв'язок.

Здійснимо необхідну заміну змінних:

$$\begin{gathered}
U'_x = U'_\xi \varphi'_x + U'_\eta \psi'_x \qquad\qquad U'_y = U'_\xi \varphi'_y + U'_\eta \psi'_y \\
U''_{xx} = U''_{\xi\xi} (\varphi'_x)^2 + U'_\xi \varphi''_{xx} + U''_{\eta\eta} (\psi'_x)^2 + U'_\eta \psi''_{xx} + 2U''_{\xi\eta} \psi'_x \varphi'_x \\
U''_{yy} = U''_{\xi\xi} (\varphi'_y)^2 + U'_\xi \varphi''_{yy} + U''_{\eta\eta} (\psi'_y)^2 + U'_\eta \psi''_{yy} + 2U''_{\xi\eta} \psi'_y \varphi'_y \\
U''_{xy} = U''_{\xi\xi} \varphi'_x \varphi'_y + U'_\xi \varphi''_{xy} + U''_{\eta\eta} \psi'_x \psi'_y + U'_\eta \psi''_{xy} + U''_{\xi\eta} \varphi'_x \psi'_y + U''_{\xi\eta} \psi'_x \varphi'_y = \\
= U''_{\xi\xi} \varphi'_x \varphi'_y + U'_\xi \varphi''_{xy} + U''_{\eta\eta} \psi'_x \psi'_y + U'_\eta \psi''_{xy} + U''_{\xi\eta} (\varphi'_x \psi'_y + \varphi'_y \psi'_x).
\end{gathered} \tag{2.4}$$

Підставивши похідні (2.4) у рівняння (1.1) одержуємо

$$\begin{gathered}
A(U_{\xi\xi} (\varphi'_x)^2 + U'_\xi \varphi''_{xx} + U''_{\eta\eta} (\psi'_x)^2 + U'_\eta \psi''_{xx} + 2U''_{\xi\eta} \psi'_x \varphi'_x) + 2B(U''_{\xi\xi} \varphi'_x \varphi'_y + U'_\xi \varphi''_{xy} + \\
+ U''_{\eta\eta} \psi'_x \psi'_y + U'_\eta \psi''_{xy} + U''_{\xi\eta} (\varphi'_x \psi'_y + \varphi'_y \psi'_x)) + C(U''_{\xi\xi} (\varphi'_y)^2 + U'_\xi \varphi''_{yy} + U''_{\eta\eta} (\psi'_y)^2 + \\
+ U'_\eta \psi''_{yy} + 2U''_{\xi\eta} \psi'_y \varphi'_y) + f_1(\xi, \eta, U, U'_\xi, U'_\eta) = 0,
\end{gathered} \tag{2.5}$$

або

$$\begin{gathered}
(A(\varphi'_x)^2 + 2B\varphi'_x \varphi'_y + C(\varphi'_y)^2) U''_{\xi\xi} + 2(A\psi'_x \varphi'_x + B(\varphi'_x \psi'_y + \varphi'_y \psi'_x) + C\psi'_y \varphi'_y) U''_{\xi\eta} + \\
+ (A(\psi'_x)^2 + 2B\psi'_x \psi'_y + C(\psi'_y)^2) U''_{\eta\eta} + f_2(\xi, \eta, U, U'_\xi, U'_\eta) = 0.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Введемо нові позначення:

$$\begin{gathered}
\overline{A} = A(\varphi'_x)^2 + 2B\varphi'_x \varphi'_y + C(\varphi'_y)^2, \\
\overline{B} = A\psi'_x \varphi'_x + B(\varphi'_x \psi'_y + \varphi'_y \psi'_x) + C\psi'_y \varphi', \\
\overline{C} = A(\psi'_x)^2 + 2B\psi'_x \psi'_y + C(\psi'_y)^2.
\end{gathered} \tag{2.7}$$

Підставивши рівності (2.7) в рівняння (2.6) знову отримуємо лінійне рівняння другого порядку із невідомою функцією U та двома незалежними змінними ξ та η:

$$\overline{A} U''_{\xi\xi} + 2\overline{B} U''_{\xi\eta} + \overline{C} U''_{\eta\eta} + f_2(\xi, \eta, U, U'_\xi, U'_\eta) = 0. \tag{2.8}$$

Оскільки

$$\overline{B}^2 - \overline{AC} \equiv (B^2 - AC)\left[\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right]^2, \tag{2.9}$$

то тип рівняння (2.8) збігається з типом рівняння (1.1).

Слід зауважити, що функції *φ(x,y)* та *ψ(x,y)* підбираються так, щоб деякі з коефіцієнтів $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ дорівнювали нулеві.

2.1 Рівняння гіперболічного типу

Для рівнянь такого типу функції *φ(x,y)* та *ψ(x,y* підбираються таким чином, щоб $\overline{A} = \overline{C} = 0$. Звідси, з врахуванням (2.7), маємо

$$\begin{cases} A(\varphi'_x)^2 + 2B\varphi'_x\varphi'_y + C(\varphi'_y)^2 = 0 \\ A(\psi'_x)^2 + 2B\psi'_x\psi'_y + C(\psi'_y)^2 = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Розв'яжемо систему (2.10) на відносно $\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$ і $\dfrac{\psi'_x}{\psi'_y}$. Одержимо:

$$\begin{cases} A\left(\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right)^2 + 2B\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_y} + C = 0 \\ A\left(\dfrac{\psi'_x}{\psi'_y}\right)^2 + 2B\dfrac{\psi'_x}{\psi'_y} + C = 0 \end{cases}. \tag{2.11}$$

Розв'язками системи (2.11) є:

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{A}, \\ &\frac{\psi'_x}{\psi'_y} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{A}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Таким чином, кожне з рівнянь системи (2.11) розпадається на два лінійні однорідні диференціальні рівняння у частинних похідних першого порядку:

$$\begin{cases}\varphi'_x + \lambda_1(x,y)\varphi'_y = 0 \\ \varphi'_x + \lambda_2(x,y)\varphi'_y = 0\end{cases} \text{ і } \begin{cases}\psi'_x + \lambda_1(x,y)\psi'_y = 0 \\ \psi'_x + \lambda_2(x,y)\psi'_y = 0\end{cases}, \qquad (2.13)$$

де

$$\lambda_1(x,y) = \frac{B-\sqrt{\Delta}}{A}\ ,\ \lambda_2 = \frac{B+\sqrt{\Delta}}{A}. \qquad (2.14)$$

Розв’язки систем (2.13) можна знайти, розв’язавши так звані диференціальні *рівняння характеристик*:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x,y) \qquad (2.15)$$

та

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_2(x,y). \qquad (2.16)$$

Функції $\lambda_1(x)$ та $\lambda_2(x)$ диференціальних рівнянь (2.15) та (2.16) мають неперервні частинні похідні до другого порядку включно, що випливає з припущень про коефіцієнти A, B, C. Тому існують загальні інтеграли $\varphi^*(x,y) = const = C$ і $\psi^*(x,y) = const = C$ рівнянь (2.15) та (2.16) і їхні ліві частини також мають неперервні похідні до другого порядку включно. Функції $\varphi^*(x,y)$ та $\psi^*(x,y)$ і будуть шуканими розв’язками систем (2.13), а отже і (2.10).

Таким чином ми знаходимо заміну $\xi = \varphi^*(x,y)$ і $\eta = \psi^*(x,y)$, яка обертає в нуль коефіцієнти $\overline{A}$ і $\overline{C}$ рівняння (2.8). При цьому $\overline{B}$ не обертається в нуль в жодній точці, що безпосередньо випливає з рівності (2.9).

Тому шукана канонічна форма така

$$2\overline{B}U''_{\xi\eta} + f_2(\xi,\eta,U'_\xi,U'_\eta,U) = 0. \qquad (2.17)$$

Приклад 2.2 Звести до канонічного вигляду рівняння

$$x^2U''_{xx} - y^2U''_{yy} = 0.$$

Розв’язування

Для визначення типу рівняння складемо його дискримінант. Оскільки

$A = x^2 \qquad B = 0 \qquad C = -y^2$

$\Delta = B^2 - AC = x^2 y^2 > 0$, то дане рівняння є рівнянням гіперболічного типу.

Диференціальні рівняння характеристик та їх загальні інтеграли такі:

1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{x^2}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$; $xy = C$, звідси $\xi = xy$;

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; $\frac{y}{x} = C$, звідси $\eta = \frac{y}{x}$.

Згідно з (2.4) маємо

$$U''_{xx} = y^2 U''_{\xi\xi} - 2\frac{y^2}{x^2}U''_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^4}U''_{\eta\eta} + 2\frac{y}{x^3}U'_{\eta};$$

$$U''_{yy} = U''_{\xi\xi}x^2 + 2U''_{\xi\eta}x\frac{1}{x} + U''_{\eta\eta}\frac{1}{x^2} + U'_{\xi}\cdot 0 + U'_{\eta}\cdot 0 = U''_{\xi\xi}x^2 + 2U''_{\xi\eta} + \frac{1}{x^2}U''_{\eta\eta}.$$

Підставимо знайдені похідні у наше рівняння, маємо

$$x^2y^2U''_{\xi\xi} - 2y^2U''_{\xi\eta} + \frac{y^2}{x^2}U''_{\eta\eta} + \frac{2y}{x}U'_{\eta} - y^2x^2U''_{\xi\xi} - 2y^2U''_{\xi\eta} - \frac{y^2}{x^2}U''_{\eta\eta} = 0, \text{ або}$$

$$-4y^2U''_{\xi\eta} - 2\frac{y}{x}U'_{\eta} = 0.$$

Поділимо останній вираз на $-4y^2$, отримаємо:

$$U''_{\xi\eta} - \frac{1}{2yx}U'_{\eta} = 0.$$

Оскільки $\xi = xy$, остаточно одержуємо канонічний вигляд даного рівняння

$$U''_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}U'_{\eta} = 0.$$

2.2 Рівняння еліптичного типу

Якщо рівняння (1.1) є рівнянням еліптичного типу, то існують такі функції $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$, що $\overline{B} = 0$ і дане рівняння зводиться до канонічної форми

$$U''_{\xi\xi} + U''_{\eta\eta} + f_2(\xi, \eta, U, U'_{\xi}, U'_{\eta}) = 0. \qquad (2.18)$$

Опишемо процедуру знаходження цих функцій.

Спочатку формально, як і у попередньому випадку, приводимо рівняння (1.1) до вигляду

$$U''_{\xi\eta} + f_2(\xi,\eta,U'_{\xi},U'_{\eta},U) = 0 \qquad (2.19)$$

При цьому нові змінні ξ та η будуть комплексно спряженими

$$\xi = \alpha(x,y) + i\beta(x,y), \qquad \eta = \alpha(x,y) - i\beta(x,y), \qquad (2.20)$$

оскільки диференціальні рівняння характеристик (2.15) та (2.16) у випадку, що розглядається, мають вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{A}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{A}. \qquad (2.21)$$

Таким чином, рівняння еліптичного типу має лише уявні характеристики.

Виконаємо нову заміну змінних

$$\rho = \alpha(x,y), \;\; \sigma = \beta(x,y), \qquad (2.22)$$

внаслідок якої рівняння (2.19), а отже і рівняння (1.1) зводиться до шуканої канонічної форми з точністю до зміни позначень

$$U''_{\rho\rho} + U''_{\sigma\sigma} + f_2(\rho,\sigma,U,U'_{\rho},U'_{\sigma}) = 0.$$

Приклад 2.3 Звести до канонічного вигляду рівняння $\frac{1}{x^2}U''_{xx} + \frac{1}{y^2}U''_{yy} = 0$

Розв'язування

Для визначення типу рівняння складемо його дискримінант. Оскільки

$$A = \frac{1}{x^2} \qquad B = 0 \qquad C = \frac{1}{y^2}$$

$\Delta = B^2 - AC = -\frac{1}{x^2y^2} < 0$, то дане рівняння є рівнянням еліптичного типу.

Диференціальні рівняння характеристик та їх загальні інтеграли такі:

1) $\dfrac{dy}{dx} = -i\dfrac{x^2}{xy}$; $\dfrac{dy}{dx} = -i\dfrac{x}{y}$; $y^2 + ix^2 = C$, звідси $\xi = y^2 + ix^2$;

2) $\dfrac{dy}{dx} = i\dfrac{x}{y}$; $y^2 - ix^2 = C$, звідси $\eta = y^2 - ix^2$.

Отримані змінні комплексні, тому згідно з (2.22) знаходимо остаточну заміну змінних

$$\rho = y^2, \quad \sigma = x^2.$$

Згідно з (2.4) маємо

$$U''_{xx} = U''_{\rho\rho} \cdot 0 + 2U''_{\rho\sigma} \cdot 0 + U''_{\sigma\sigma} 4x^2 + U'_{\rho} \cdot 0 + U'_{\sigma} 2 = 4x^2 U''_{\sigma\sigma} + 2U'_{\sigma},$$
$$U''_{yy} = U''_{\rho\rho} 4y^2 + 2U''_{\rho\sigma} \cdot 0 + U''_{\sigma\sigma} \cdot 0 + U'_{\rho} 2 + U'_{\sigma} \cdot 0 = 4y^2 U''_{\rho\rho} + 2U'_{\rho}.$$

Підставимо знайдені похідні у наше рівняння, маємо

$$\frac{1}{x^2} 4x^2 U''_{\sigma\sigma} + \frac{2}{x^2} U'_{\sigma} + \frac{4y^2}{y^2} U''_{\rho\rho} + \frac{2}{y^2} U'_{\rho} = 0,$$
$$4U''_{\sigma\sigma} + 4U''_{\rho\rho} + 2\left(\frac{1}{\sigma} U'_{\sigma} + \frac{1}{\rho} U'_{\rho}\right) = 0.$$

2.3 Рівняння параболічного типу

Якщо рівняння (1.1) є рівнянням параболічного типу, то функції $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$ підбираються такі, що $\overline{A} = \overline{B} = 0$, і дане рівняння зводиться до канонічної форми

$$U''_{\eta\eta} + f_2(\xi, \eta, U, U'_{\xi}, U'_{\eta}) = 0. \qquad (2.23)$$

Опишемо процедуру знаходження цих функцій.

Знаходимо функцію $\varphi(x, y)$, яка є розв'язком рівняння

$$A(\varphi'_x)^2 + 2B\varphi'_x\varphi'_y + C(\varphi'_y)^2 = 0. \qquad (2.24)$$

Як і у випадку гіперболічного рівняння припускаємо, що $A \neq 0$ та розв'яжемо рівняння (2.24) відносно $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi'(y)}$. При цьому отримуємо лише одне рівняння характеристик

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}, \tag{2.25}$$

оскільки $\Delta = 0$.

Нехай $\varphi^*(x, y) = C$ є загальний інтеграл рівняння (2.25), звідки $\xi = \varphi^*(x, y)$. Інша змінна $\eta = \psi(x, y)$ вибирається довільним чином за умови, що $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi'_x \varphi'_y \\ \psi'_x \psi'_y \end{vmatrix} \neq 0$ і $\psi(x, y)$ не перетворює на нуль коефіцієнт $\overline{C}$.

Приклад 2.4 Звести до канонічного вигляду рівняння $x^2 U''_{xx} + 2xyU''_{xy} + y^2 U''_{yy} = 0$.

Розв'язування

Для визначення типу рівняння складемо його дискримінант. Оскільки

$A = x^2 \qquad B = xy \qquad C = y^2$

$\Delta = B^2 - AC = 0$, то дане рівняння є рівнянням параболічного типу.

Складемо згідно з (2.25) диференціальне рівняння характеристик

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{y}{x} = c$, звідки $\xi = \frac{y}{x}$.

Рівняння для другої незалежної змінної можна взяти у вигляді $\eta = y$, оскільки за такого вибору якобіан

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y}{x^2}$$

відмінний від нуля в усіх точках площини Oxy, крім точок осі Ox і згідно з (2.7) перетворює на нуль коефіцієнт $\overline{C}$.

Згідно з (2.4) маємо

$$U''_{xx} = \frac{y^2}{x^4} U''_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^3} U'_{\xi};$$

$$U''_{yy} = \frac{1}{x^2} U''_{\xi\xi} + \frac{2}{x} U''_{\xi\eta} + U''_{\eta\eta};$$

$$U''_{xy} = -\frac{y}{x^3} U''_{\xi\xi} - \frac{y}{x^2} U''_{\xi\eta} - \frac{1}{x^2} U'_{\xi}.$$

Підставимо знайдені похідні у наше рівняння, маємо

$$U''_{\eta\eta} = 0\,.$$

Питання для самоперевірки

1. Як визначається тип лінійного диференціального рівняння другого порядку у частинних похідних?
2. Запишіть канонічну форму рівняння гіперболічного типу.
3. Запишіть канонічну форму рівняння еліптичного типу.
4. Запишіть канонічну форму рівняння параболічного типу.
5. Виведіть диференціальні рівняння характеристик для рівнянь гіперболічного типу.
6. Виведіть диференціальні рівняння характеристик для рівнянь еліптичного типу.
7. Виведіть диференціальні рівняння характеристик для рівнянь еліптичного типу.
8. Опишіть процедуру заміни змінних при зведенні до канонічного вигляду диференціальних рівнянь гіперболічного типу.
9. Опишіть процедуру заміни змінних при зведенні до канонічного вигляду диференціальних рівнянь еліптичного типу.
10. Опишіть процедуру заміни змінних при зведенні до канонічного вигляду диференціальних рівнянь параболічного типу.
11. Покажіть, що лінійне диференціальне рівняння другого порядку у частинних похідних в кожному класі можна звести до найпростішого (канонічного) вигляду.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 2.1

Визначити тип рівняння і звести його до канонічного вигляду в кожній з областей, де зберігається тип розглядуваного рівняння.

1. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 13\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

2. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

3. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

4. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0$

5. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 4\frac{\partial U}{\partial x} - 4\frac{\partial U}{\partial y} = 0$

6. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

7. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 3\frac{\partial U}{\partial x} + 3\frac{\partial U}{\partial y} = 0$

8. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 10\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

9. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2\frac{\partial U}{\partial x} + 10\frac{\partial U}{\partial y} = 0$

10. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 8\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

11. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

12. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 4\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0$

13. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 7\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

14. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} + 2\frac{\partial U}{\partial y} = 0$

15 $4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 4\frac{\partial U}{\partial x} - 8\frac{\partial U}{\partial y} = 0$

16. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

17. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0$

18. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 7\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

19. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 5\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 3\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0$

20. $9\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 3\frac{\partial U}{\partial x} + 9\frac{\partial U}{\partial y} = 0$

21. $3\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2\frac{\partial U}{\partial x} + 3\frac{\partial U}{\partial y} = 0$

22. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} + 2\frac{\partial U}{\partial y} = 0$

23.
$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 3\frac{\partial U}{\partial x} - 5\frac{\partial U}{\partial y} + 4U = 0$

24.
$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + 4U = 0$

25.
$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 5\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + 4U = 0$

26.
$2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 4\frac{\partial U}{\partial x} + 4\frac{\partial U}{\partial y} + U = 0$

27. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

28. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 10\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial x} - 3\frac{\partial U}{\partial y} = 0$

29. $3\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2\frac{\partial U}{\partial x} + 3\frac{\partial U}{\partial y} = 0$

30. $4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2\frac{\partial U}{\partial y} = 0$

Завдання 2.2

В кожній області, де зберігається тип рівняння, звести його до канонічного вигляду.

1. $x^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

2. $4y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-e^{2x}\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

3. $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2\sin x\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+(2-\cos^2 x)\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

4. $y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-x^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

5. $(1+x^2)^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}+2x(1+x^2)\dfrac{\partial U}{\partial x}=0$

6. $e^{2x}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2e^{x+y}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+e^{2y}\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}-xU=0$

7. $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2x\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=0$

8. $x^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}-2y\dfrac{\partial U}{\partial x}+ye^{\frac{y}{x}}=0$

9. $x\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2x\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+(x-1)\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

10. $xy^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2x^2y\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+x^3\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}-y^2\dfrac{\partial U}{\partial x}=0$

11. $x^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

12. $4y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-e^{2x}\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}-4y^2\dfrac{\partial U}{\partial x}=0$

13. $y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+2x^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}+y\dfrac{\partial U}{\partial y}=0$

14. $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2x\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+x^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial U}{\partial y}=0$

15. $x^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

16. $x^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2x\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

17. $y\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-x\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

18. $x^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}-2y\dfrac{\partial U}{\partial y}=0$

19. $x^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial U}{\partial x}+y\dfrac{\partial U}{\partial y}=0$

20. $4y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-e^{2x}\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}-4y^2\dfrac{\partial U}{\partial x}=0$

21. $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2\sin x\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-\cos^2 x\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\cos x\dfrac{\partial U}{\partial y}=0$

22. $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

23. $y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+x^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

24. $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-x\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

25. $y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-x^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

26. $4y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-e^{2x}\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

27. $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2\sin x\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+(2-\cos^2 x)\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

28. $y^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2y\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

29. $x^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2x\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$

30. $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}+(1+y^2)\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}+y\dfrac{\partial U}{\partial y}=0$

ТЕМА 3 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ СТРУНИ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

(ФОРМУЛА Д'АЛАМБЕРА)

Розрізняють три типи крайових задач для диференціальних рівнянь:

- *Задача Коші* для рівнянь гіперболічного та параболічного, типу у якій задаються тільки початкові умови;
- *Крайова задача* для рівнянь еліптичного типу у якій відсутні початкові умови;
- *Змішана задача* для рівнянь гіперболічного та параболічного типу, у якій ставляться як крайові, так і початкові умови.

Відмітимо, що методом характеристик називається метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку шляхом інтегрування їх канонічних форм.

Коливання струни описується рівнянням $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ з початковими умовами $U(x,0) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$, де $\varphi(x)$ – початкове відхилення струни від положення рівноваги, $\psi(x)$ – початкова швидкість точок струни.

Тоді рівняння характеристик такі:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -a \text{ та } \frac{\partial x}{\partial t} = a. \tag{3.1}$$

Розв'язками рівнянь (3.1) будуть

$$x + at = C \text{ та } x - at = C. \tag{3.2}$$

Згідно з (3.2) потрібно ввести заміну

$$\xi = x + at \text{ та } \eta = x - at. \tag{3.3}$$

Враховуючи формули (2.4), рівняння коливання струни буде таке:

$$U''_{\xi\eta} = 0, \tag{3.4}$$

або

$$(U'_\xi)'_\eta = 0. \tag{3.5}$$

З рівняння (3.5) випливає, що

$$U'_\xi = f(\xi). \tag{3.6}$$

Для знаходження функції $U(x,t)$ проінтегруємо рівняння (3.6) за змінною ξ, маємо

$$U(x,t) = \int f(\xi)d\xi + C_1(\eta). \tag{3.7}$$

Введемо позначення

$$C_2(\xi) = \int f(\xi)d\xi. \tag{3.8}$$

Враховуючи (3.8), (3.3) рівність (3.7) виглядатиме так

$$U(x,t) = C_1(\eta) + C_2(\xi) = C_1(x-at) + C_2(x+at). \tag{3.9}$$

Для того, щоб знайти функції C_1 та C_2, скористаємося початковими умовами. Тоді

$$U(x,0) = C_1(x) + C_2(x) = \varphi(x), \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -aC_1'(x-at) + aC_2'(x+at). \tag{3.11}$$

Рівність (3.11) можна переписати так

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = -aC_1'(x) + aC_2'(x) = \psi(x). \tag{3.12}$$

Проінтегруємо (3.12) в межах від 0 до *x*, маємо

$$-a\int_0^x C_1'(x)dx + a\int_0^x C_2'(x) = \int_0^x \psi(z)dz, \tag{3.13}$$

звідки

$$-a(C_1(x)-C_1(0))+a(C_2(x)-C_2(0))=\int_0^x \psi(z)dz\,. \qquad (3.14)$$

Позначимо $C_1(0)-C_2(0)=C$, тоді з рівності (3.14) маємо:

$$-C_1(x)+C_2(x)=\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz+C\,. \qquad (3.15)$$

Таким чином, враховуючи (3.10) та (3.15), ми отримали систему для знаходження функцій C_1 та C_2

$$\begin{cases} C_1(x)+C_2(x)=\varphi(x) \\ -C_1(x)+C_2(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x \psi(z)dz+C \end{cases}. \qquad (3.16)$$

Системою розв'язків системи (3.16) буде

$$\begin{cases} C_2=\dfrac{\varphi(x)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(z)dz+\dfrac{C}{2} \\ C_1(x)=\varphi(x)-C_2(x)=\dfrac{\varphi(x)}{2}-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(z)dz-\dfrac{C}{2} \end{cases}. \qquad (3.17)$$

Згідно з заміною (3.3) одержуємо

$$C_1(x-at)=\frac{\varphi(x-at)}{2}-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(z)dz-\frac{C}{2},$$

$$C_1(x+at)=\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(z)dz+\frac{C}{2}. \qquad (3.18)$$

Підставивши рівності (3.18) у (3.9) знайдемо функцію $U(x,t)$

$$U(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)dz\,. \qquad (3.19)$$

Формула (3.19) називається формулою Д'Аламбера.

У випадку, коли коливання струни описується рівнянням вигляду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (3.20)$$

з початковими умовами

$$U(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \qquad (3.21)$$

де $\varphi(x)$ – початкове відхилення струни від положення рівноваги, $\psi(x)$ – початкова швидкість точок струни, формула Д’Аламбера записується так

$$U(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\eta)}^{x+a(t-\eta)} f(\xi,\eta)d\xi d\eta. \qquad (3.22)$$

Приклад 3.1 Знайти розв’язок задачі Коші за формулою Д’Аламбера $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ за умови $U(x,0) = x^2$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos x$.

Розв’язування

Згідно з формулою (3.19) знайдемо спочатку інтеграл

$$\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz = \int_{x-at}^{x+at}\cos z dz = \sin z\Big|_{x-at}^{x+at} = \sin(x+at) - \sin(x-at) = 2\cos x \sin at.$$

Тоді

$$U(x,t) = \frac{1}{2}((x-at)^2 + (x+at)^2) + \frac{1}{a}\cos x \sin at = x^2 + a^2t^2 + \frac{1}{a}\cos x \sin at.$$

Приклад 3.2 Знайти розв’язок задачі Коші за формулою Даламбера $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6$ за умови $U(x,0) = x^2$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 4x$.

Розв’язування

В даному випадку потрібно скористатись формулою (3.22).
Для цього обчислимо інтеграли

$$\frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi = 2\int_{x-t}^{x+t}\xi d\xi = \xi^2\Big|_{x-t}^{x+t} = 4xt$$

$$\frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\eta)}^{x+a(t-\eta)} f(\xi,\eta)d\xi d\eta = 3\int_0^t \int_{x-t+\eta}^{x+t-\eta} d\xi d\eta = 6\int_0^t (t-\eta)d\eta = 6(t\eta - \frac{\eta^2}{2})\Big|_0^t = 3t^2.$$

Оскільки $\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} = \dfrac{1}{2}((x-t)^2 + (x+t)^2) = x^2 + t^2$, то

$$U(x,t) = x^2 + t^2 + 4xt + 3t^2 = (x+2t)^2.$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається методом характеристик?
2. Виведіть формулу Д’Аламбера.
3. Запишіть формулу Д’Аламбера для хвильового рівняння виду $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t)$ з початковими умовами $U(x,0) = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$.
4. Дайте пояснення фізичного змісту загального розв’язку хвильового рівняння.
5. Розкажіть про коректність постановки задач математичної фізики.
6. Що таке початкові та крайові умови?
7. З чим пов’язана необхідність у формулюванні окрім рівнянь додаткових умов? Наведіть приклад.
8. Що називається задачею Коші? Для якого типу рівнянь ставиться задача Коші? Наведіть приклад.
9. Що називається крайовою задачею? Для якого типу рівнянь ставиться крайова задача? Наведіть приклади.
10. Що називається змішаною задачею? Для якого типу рівнянь ставиться змішана задача? Наведіть приклади.

Завдання для самостійної роботи

Знайти розв'язок задачі Коші, використовуючи формулу Д'Аламбера

1. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = \sin x$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0$

2. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6$, $U(x,0) = x^2$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 4x$

3. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = x^2$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0$

4. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = 0$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = x$

5. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \sin x$, $U(x,0) = \sin x$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0$

6. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = 0$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \cos x$

7. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \sin x$, $U(x,0) = 1$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 1$

8. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = \sin x$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0$

9. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = 0$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \sin x$

10. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \sin 2t$, $U(x,0) = 0$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0$

11. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = \cos x$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0$

12. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = e^{-x}$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 4$

13. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = \sin x$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \cos x$

14. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{9}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = e^{-x}$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 9$

15. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = x$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \sin^2 x$

16. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = 0$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \sin x$

17. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + xt$, $U(x,0) = x^2$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = x$

18. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = x$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = -x$

19. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + e^x$, $U(x,0) = \sin x$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = x + \cos x$

20. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = \sin x$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \cos x$

21. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \sin 2x$, $U(x,0) = 0$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0$

22. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = x$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \cos^2 x$

23. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \sin x$, $U(x,0) = \sin x$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0$

24. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{9}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = 0$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \cos x$

25. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = \sin 2x$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0$

26. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6$, $U(x,0) = x^2$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 2x$

27. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = e^{-2x}$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 2$

28. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = e^{-x}$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 4$

29. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2xt$, $U(x,0) = x^2$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = -x$

30. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = x^2$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 2$

ТЕМА 4 МЕТОД ФУР'Є

Метод Фур'є, або метод відокремлення змінних, є одним із найбільш розповсюджених методів розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних. Цей метод базується на узагальненому принципі суперпозиції: якщо кожна з функцій $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ є розв'язком однорідного лінійного диференціального рівняння, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x)$ також є розв'язком цього рівняння, якщо він збігається до деякої функції $u(x)$ і можливе його почленне диференціювання.

4.1 Розв'язання методом Фур'є першої крайової задачі для рівняння малих поперечних коливань струни

Нехай маємо рівняння малих поперечних коливань струни $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ з крайовими умовами $U = (0,t) = U(l,t) = 0$ та початковими умовами $U(x,0) = f(x)$; $\frac{\partial U}{\partial t}\Big|(x,0) = \varphi(x)$.

Будемо шукати розв'язок рівняння (1.3), що задовольняє крайові умови (1.4), у вигляді добутку двох функцій *X(x)* і *T(t)*:

$$U(x,t) = X(x)T(t). \tag{4.1}$$

Щоб визначити функції *X(x)* і *T(t),* підставимо розв'язок (4.1) у рівняння (1.3). Для цього спочатку знайдемо

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = X(x)T''(t), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = T(t)X''(x). \tag{4.2}$$

Тоді отримаємо

$$XT'' = \frac{1}{a^2} X''T, \tag{4.3}$$

або

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}. \tag{4.4}$$

Рівність (4.4) має місце лише у випадку, коли обидва співвідношення дорівнюють константі.

Нехай $\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$, де $\lambda > 0$. Звідки отримуємо два лінійних однорідних диференціальних рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{4.5}$$

та

$$T'' + \lambda a^2 T = 0. \tag{4.6}$$

Характеристичні рівняння рівнянь (4.5) та (4.6) такі

$$k^2 = -\lambda, \; звідки \quad k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} i \tag{4.7}$$

та

$$p^2 = -\lambda a^2, \quad звідки \quad p_{1,2} = \pm a\sqrt{\lambda} i. \tag{4.8}$$

Враховуючи (4.7) та (4.8) одержуємо загальний розв'язок рівняння (4.5)

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x \tag{4.9}$$

та рівняння (4.6)

$$T(t) = C\cos \mathrm{a}\sqrt{\lambda}t + D\sin \mathrm{a}\sqrt{\lambda}t. \tag{4.10}$$

Коефіцієнти A та B мають бути такими, щоб функція $U(x,t)$ задовольняла крайові умови $U(o,t) = U(l,t) = 0$.

Звідки $X(0) = 0$, тому $A = 0$.

Оскільки $X(l) = 0$, то

$$B\sin\sqrt{\lambda}l = 0, \; \sqrt{\lambda}l = \pi \mathrm{n}, \; \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}, \text{ де } \mathrm{n} \in \mathrm{z}. \tag{4.11}$$

При цьому λ називають *власним значенням* функції $U(x,t)$, а функції $X(x) = B\sin\frac{\pi n}{l}x$ називають *власними функціями*.

Зауваження. Припустимо, що ми взяли не $-\lambda$, а наприклад k^2, тоді розв'язком рівняння $x'' - k^2 x' = 0$ буде функція $X(x) = Ae^{p_1 x} + Be^{p_2 x}$. В цьому випадку не існує таких значень *A* та *B,* при яких функція $U(x,t)$ задовольняла б крайові умови.

Таким чином, розв'язок рівняння малих поперечних коливань струни (1.3) такий:

$$U_n(x,t) = (C\cos\frac{a\pi n}{l}t + D\sin\frac{a\pi n}{l}t)B\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (4.12)$$

або

$$U_n(x,t) = (C_n\cos\frac{a\pi n}{l}t + D_n\sin\frac{a\pi n}{l}t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \text{ де } C_n = \frac{C}{B} \text{ і } D_n = \frac{D}{B}. \qquad (4.13)$$

Загальний розв'язок хвильового рівняння згідно з узагальненим принципом суперпозиції шукається за формулою:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\frac{a\pi n}{l}t + D_n\sin\frac{a\pi n}{l}t)\sin\frac{\pi n}{l}x. \qquad (4.14)$$

Рівняння (4.14) буде розв'язком рівняння (1.3) тоді, коли коефіцієнти C_n та D_n будуть такими, що збіжним буде як ряд (4.14), так і ряди, отримані після двократного диференціювання ряду (4.14) за змінною x і за змінною t.

Розв'язок рівняння (4.14) має задовольняти початкову умову $U(x,0) = f(x)$,тому

$$U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}x = f(x). \qquad (4.15)$$

Якщо функцію $f(x)$ на проміжку $(0,l)$ можна розкласти у ряд Фур'є, то рівність (4.15) виконується лише тоді, коли

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx. \qquad (4.16)$$

Щоб знайти коефіцієнти D_n скористаємось другою початковою умовою $\frac{\partial U}{\partial t}\Big|(x,0) = \varphi(x)$.

Маємо

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{a\pi n}{l}C_n\sin\frac{a\pi n}{l}t+\frac{a\pi n}{l}D_n\cos\frac{a\pi n}{l}t)\sin\frac{\pi nx}{l}. \qquad (4.17)$$

Згідно з (4.17)

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\pi n}{l}D_n\sin\frac{\pi n}{l}xdx=\varphi(x). \qquad (4.18)$$

Якщо на проміжку $(0,l)$ функція $\varphi(x)$ розвивається у ряд Фур'є, то рівність (4.18) має місце лише у випадку, коли

$$\frac{a\pi n}{l}D_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,$$

$$D_n=\frac{2}{a\pi n}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx. \qquad (4.19)$$

4.2 Розв'язання методом Фур'є першої крайової задачі для рівняння теплопровідності

Розглянемо випадок, коли зовнішнє джерело тепла відсутнє, тобто

$$\mathrm{f(x,t)=0}.$$

Знайдемо розв'язок однорідного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}}=\mathrm{a}^2\frac{\partial^2\mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}^2} \qquad (4.20)$$

на відрізку $0\le x\le l$, який задовольняє однорідні крайові умови:

$$\mathrm{U(x,t)}\Big|_{x=0}=0, \qquad \mathrm{U(x,t)}\Big|_{x=l}=0 \qquad (4.21)$$

і початкову умову

$$\mathrm{U(x,t)}\Big|_{\mathrm{t}=0}=\varphi(x), \qquad (0\le x\le l). \qquad (4.22)$$

Будемо шукати розв'язок рівняння (4.20), що задовольняє крайові умови (4.21), у вигляді добутку двох функцій *X(x)* і *T(t)*:

$$\mathrm{U(x,t) = X(x) \cdot T(t)}\,. \tag{4.23}$$

Щоб знайти функції *X(x)* і *T(t)*, підставимо розв'язок (4.23) у рівняння (4.20). Для цього спочатку знайдемо

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{X(x)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} \qquad \text{і} \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}^2} = \mathrm{T(t)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}\,.$$

Тоді отримаємо:

$$\mathrm{X(x)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = \mathrm{a}^2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \cdot T(t)\,.$$

Відокремивши змінні, матимемо:

$$\frac{1}{\mathrm{a}^2} \cdot \frac{\dfrac{dT(t)}{dt}}{T(t)} = \frac{\dfrac{d^2 X(x)}{dx^2}}{X(x)}\,. \tag{4.24}$$

Ліва частина тотожності (4.24) залежить тільки від *t*, а права – тільки від *x*. Знак рівності між ними можливий тоді і тільки тоді, коли обидві частини дорівнюватимуть деякій сталій величині, яку ми позначимо через $(-\lambda^2)$, де λ - поки що невідома стала.

Отже, матимемо:

$$\frac{1}{\mathrm{a}^2} \cdot \frac{\dfrac{dT(t)}{dt}}{T(t)} = \frac{\dfrac{d^2 X(x)}{dx^2}}{X(x)} = -\lambda^2\,. \tag{4.25}$$

(знак „мінус" береться для того, щоб виконувалися крайові умови).

Звідки отримаємо два звичайні лінійні однорідні диференціальні рівняння для знаходження функцій *T(t)* і *X(x)*.

$$\frac{dT(t)}{dt} = -a^2\lambda^2 T(t) \Rightarrow \frac{dT(t)}{dt} + a^2\lambda^2 T(t) = 0\,, \tag{4.26}$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda^2 X(x) \Rightarrow \frac{d^2X(x)}{dx^2} + \lambda^2 X(x) = 0. \qquad (4.27)$$

Розв'яжемо рівняння (4.26) – це лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Складемо характеристичне рівняння:

$$r + a^2\lambda^2 = 0 \Rightarrow r = -a^2\lambda^2.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (4.26) матиме вигляд:

$$T(t) = C_1 e^{-a^2\lambda^2 t}, \qquad (4.28)$$

де C_1 – невідома стала.

Розв'яжемо рівняння (4.27). Це також лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Складемо характеристичне рівняння:

$$r^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow r = \pm i\lambda.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (4.27) матиме вигляд:

$$X(x) = C_2 \cos\lambda x + C_3 \sin\lambda x, \qquad (4.29)$$

де C_2, C_3 – невідомі сталі.

Отже, розв'язок рівняння (4.20) матиме вигляд:

$$U(x,t) = C_1 e^{-a^2\lambda^2 t}(C_2 \cos\lambda x + C_3 \sin\lambda x). \qquad (4.30)$$

Визначимо невідомі сталі C_1, C_2, C_3 і значення параметра λ, для чого скористаємося крайовими умовами (4.21).

Перша крайова умова дає

$$U(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow 0 = C_1 e^{-a^2\lambda^2 t} C_2 = C_1 C_2 e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Звідки

$$C_2 = 0.$$

Друга крайова умова дає

$$U(x,t)\Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow 0 = C_1 e^{-a^2\lambda^2 t} C_2 \sin \lambda l .$$

Припустити, що $C_3 = 0$ ми не можемо, оскільки за цієї умови розв'язок (4.30) стає тотожно рівним нулю. Отже,

$$\sin \lambda l = 0 .$$

Маємо тригонометричне рівняння, з якого знайдемо параметр λ. Розв'язуючи це рівняння матимемо:

$$\lambda l = n\pi , \qquad n \in Z .$$

Звідси

$$\lambda = \frac{n\pi}{l} , \qquad n \in Z .$$

Для параметра λ ми отримаємо безліч значень:

$$\lambda_0 = 0 , \qquad \lambda_1 = \frac{\pi}{l} , \qquad \lambda_2 = \frac{2\pi}{l} , \ldots \ldots \ldots , \lambda_n = \frac{n\pi}{l} . \qquad (4.31)$$

Перше значення $\lambda_0 = 0$ нас не цікавить, оскільки воно знову перетворює в нуль увесь розв'язок.

Отже, розв'язок рівняння (4.20) має такий вигляд:

$$U(x,t) = C_1 e^{-a^2\lambda^2 t} C_3 \sin \lambda x ,$$

де для λ можна взяти будь-яке значення з (4.31), крім $\lambda_0 = 0$.

Позначимо

$$C_1 C_3 = A .$$

Тоді

$$U(x,t) = A e^{-a^2\lambda^2 t} \sin \lambda x . \qquad (4.32)$$

Підставивши в (4.32) будь-які значення λ з (4.31), ми отримаємо безліч розв'язків, причому для кожного з яких довільна стала A може набувати різних значень. Отже, частинними розв'язками задачі (4.20)-(4.21) за умови, що $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}$, є функції:

$$U_n(x,t) = A_n e^{-a^2 (\frac{n\pi}{l})^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}. \qquad (4.33)$$

Оскільки рівняння (4.20) є лінійним, то згідно з узагальненим принципом суперпозиції загальний розв'язок рівняння теплопровідності (4.20) має вигляд:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2 (\frac{n\pi}{l})^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}. \qquad (4.34)$$

Ця функція задовольняє крайові умови. Будемо вимагати виконання початкової умови (4.22)

$$\varphi(x) = U\ (x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^0 \sin \frac{n\pi x}{l}, \qquad (4.35)$$

тобто, A_n є коефіцієнтами Фур'є функції $\varphi(z)$ при розкладанні її в ряд за синусами на інтервалі (0; l). Тому коефіцієнти A_n визначаються за формулами:

$$A_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\mathrm{x}) \sin \frac{\mathrm{n}\pi \mathrm{x}}{l} dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (4.36)$$

Покажемо, що ряд (4.34) задовольняє усі умови першої крайової задачі, тобто, що $U(x,t)$ - диференційовна в області $0 \le x \le l$, $\mathrm{t} > 0$ задовольняє рівняння (4.20) і неперервна в точках границі цієї області.

Оскільки рівняння (4.20) – лінійне, то ряд, складений з його частинних розв'язків, є розв'язком, якщо він є рівномірно збіжним.

Покажемо, що ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial U_n}{\partial t} \qquad \text{і} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2}$$

рівномірно збіжні для $t \ge \bar{t} \ge 0$, де $\bar{t}$ – будь-яке допоміжне число.

Дійсно,

$$\left|\frac{\partial U_n}{\partial t}\right| = \left| -A_n(\frac{n\pi}{l})a^2 e^{-a^2(\frac{n\pi}{l})^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}\right| < |A_n|(\frac{\pi}{l})^2 a^2 n^2 e^{-a^2(\frac{n\pi}{l})^2 t}.$$

Будемо вимагати, щоб функція $\varphi(x)$, була обмеженою, тобто $|\varphi(x)|$<M. Тоді з рівності (4.36) випливає, що

$$|A_n| = \left|\frac{2}{l}\right| \left|\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right| < 2M.$$

Отже,

$$\left|\frac{\partial U_n}{\partial t}\right| < 2M(\frac{\pi}{l})^2 a^2 n^2 e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 \bar{t}}, \qquad \forall \quad t \ge \bar{t}.$$

Аналогічно

$$\left|\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2}\right| < 2M(\frac{\pi}{l})^2 n^2 e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 a^2 \bar{t}}, \qquad \forall \quad t \ge \bar{t}.$$

Розглянемо мажорантний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} N n^q e^{-a^2(\frac{n\pi}{l})^2 \bar{t}} \tag{4.37}$$

і дослідимо його на збіжність.

Запишемо загальний член ряду (4.37)

$$a_n = N n^q e^{-a^2(\frac{n\pi}{l})^2 \bar{t}}.$$

Знайдемо наступний член

$$a_{n+1} = N(n+1)^q e^{-a^2(\frac{\pi}{l})^2 (n^2+2n+1)\bar{t}}.$$

Скористаємося ознакою Д'Аламбера. Обчислимо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^q \frac{e^{-a^2(\frac{\pi}{l})^2(n^2+2n+1)\bar{t}}}{e^{-a^2(\frac{\pi}{l})^2 n^2 \bar{t}}} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^q e^{-a^2(\frac{\pi}{l})^2(2n+1)\bar{t}} = 0<1.$$

Отже, ряд (4.37) збігається.

На основі ознаки Вейєрштрасса ряд (4.34) збігається рівномірно. Тому його можна диференціювати скільки завгодно разів для $t \geq \bar{t} \geq 0$.

Таким чином, функція $U(x,t)$, визначена рядом (4.34), задовольняє рівняння (4.20) для всіх $t > 0$.

4.3 Розв’язання методом Фур’є першої крайової задачі для рівняння поширення тепла у нескінченному стержні

Запишемо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \tag{4.38}$$

де $a^2 = \frac{c}{\gamma\rho}$.

Для знаходження розподілу температур у необмеженому з обох кінців стержні крім рівняння (4.38) необхідно ще задати початкову умову, тобто потрібно задати температури усіх точок стержня в початковий момент часу t.

Нехай початкова умова має вигляд:

$$U(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{4.39}$$

де $\varphi(x)$ – задана абсолютно інтегровна для $x \in (-\infty;+\infty)$ функція.

Необхідно знайти функцію $U(x,t)$, визначену для $x \in (-\infty;+\infty)$, $t \geq 0$, яка задовольняє рівняння (4.38) і початкову умову (4.39).

Для розв’язання рівняння (4.38) скористаємося методом Фур’є, тобто, будемо шукати функцію $U(x,t)$ у вигляді добутку двох функцій, з яких одна залежить тільки від часу *t*, а друга – від координати *x*.

Отже,

$$U(x,t) = X(x) \cdot T(t). \tag{4.40}$$

Підставимо цей розв’язок у рівняння (4.38), для чого спочатку обчислимо:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = X(x)\frac{dT(t)}{dt} \qquad \text{і} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = T(t)\frac{d^2 X(x)}{dx^2}.$$

Підставивши ці значення похідних у рівняння (3.38), отримаємо тотожність:

$$\mathrm{X(x)}\frac{dT(t)}{dt} = \mathrm{a}^2 \frac{d^2X(x)}{dx^2} \cdot T(t),$$

або

$$\frac{1}{\mathrm{a}^2} \cdot \frac{\frac{dT(t)}{dt}}{T(t)} = \frac{\frac{d^2X(x)}{dx^2}}{X(x)}.$$

Ліва частина цієї тотожності залежить тільки від *t*, а права – тільки від *x*, тому ця рівність можлива за умови, що кожна частина її дорівнює невідомій поки що, сталій величині, яку позначимо через ($-\lambda^2$). Тоді:

$$\frac{1}{\mathrm{a}^2} \cdot \frac{\frac{dT(t)}{dt}}{T(t)} = \frac{\frac{d^2X(x)}{dx^2}}{X(x)} = -\lambda^2. \tag{4.41}$$

Звідки отримаємо два звичайні лінійні однорідні диференціальні рівняння для знаходження функцій *T(t)* і *X(x)*.

$$\frac{dT(t)}{dt} = -a^2\lambda^2 T(t) \Rightarrow \frac{dT(t)}{dt} + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \tag{4.42}$$

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda^2 X(x) \Rightarrow \frac{d^2X(x)}{dx^2} + \lambda^2 X(x) = 0. \tag{4.43}$$

Загальний розв'язок рівняння (4.42) має вигляд:

$$T(t) = C_1 e^{-a^2\lambda^2 t}, \tag{4.44}$$

де C_1 – невідома стала.

Загальний розв'язок рівняння (4.43) має вигляд:

$$X(x) = C_2\cos\lambda x + C_3\sin\lambda x, \tag{4.45}$$

де C_2, C_3 – невідомі сталі, причому у цьому випадку вони залежать від λ, тобто $C_2 = C_2(\lambda)$, $C_3 = C_3(\lambda)$.

Підставивши значення (4.44) і (4.45) у розв'язок (4.22), ми отримаємо нескінченно незчисленну множину загальних розв'язків рівняння (4.20)

$$U(x,t,\lambda) = C_1 e^{-a^2\lambda^2 t}(C_2(\lambda)\cos\lambda x + C_3(\lambda)\sin\lambda x), \qquad (4.46)$$

кожен з яких відповідає деякому значенню довільного параметра λ з інтервалу $(-\infty;+\infty)$.

Позначимо:

$$C_1 C_2(\lambda) = A(\lambda), \qquad C_1 C3(\lambda) = B(\lambda).$$

Тоді

$$U(x,t,\lambda) = e^{-a^2\lambda^2 t}(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x). \qquad (4.47)$$

Враховуючи те, що у випадку необмеженого стержня крайові умови відсутні, параметр λ набуває не дискретних значень, а всіх значень з інтервалу $(-\infty;+\infty)$, то розв'язок рівняння (4.20) запишемо не у вигляді суми загальних розв'язків (4.47), а у вигляді інтеграла за λ:

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)\mathrm{d}\lambda. \qquad (4.48)$$

Правильність цього розв'язку можна перевірити шляхом безпосереднього підставлення (4.48) у рівняння теплопровідності (4.20).

Щоб задача була розв'язана однозначно, необхідно ще визначити невідомі функції A(λ) і B(λ) так, щоб функція (4.48) задовольняла початкову умову (4.21). Для цієї мети використаємо початкову умову (4.21), яка має вигляд:

$$\mathrm{U(x,t)}\Big|_{\mathrm{t}=0} = \varphi(x),$$

і підставимо її у розв'язок (4.48), дістанемо:

$$U(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x)\mathrm{d}\lambda. \qquad (4.49)$$

З другого боку, запишемо інтеграл Фур'є для функції $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda(\xi-x)d\xi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)(\cos\lambda\xi\cos\lambda x+\sin\lambda x\sin\lambda\xi)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\cos\lambda x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi+\sin\lambda x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi]d\lambda. \qquad (4.50)$$

Порівнюючи рівність (4.49) з інтегральною формулою Фур’є для функції $\varphi(x)$ (4.50), знайдемо коефіцієнти $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$

$$\begin{gathered}\mathrm{A}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi,\\ \mathrm{B}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi.\end{gathered} \qquad (4.51)$$

Підставимо значення $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ з (4.51) у (4.48), отримаємо:

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}(\cos\lambda x\cos\lambda\xi+\sin\lambda x\sin\lambda\xi)\mathrm{d}\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi-x)\mathrm{d}\lambda,$$

тобто,

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi-x)\mathrm{d}\lambda. \qquad (4.52)$$

Ми отримали розв’язок (4.52), який одночасно задовольняє і рівняння (4.20), і початкову умову (4.21).

Вираз (4.52) можна дещо спростити, оскільки внутрішній інтеграл можна обчислити. Крім того, враховуючи те, що в цьому інтегралі функції $e^{-a^2\lambda^2 t}$ та $\cos\lambda(\xi-x)$ - парні відносно λ, вираз (4.52) перепишемо так:

$$U(x,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi-x)\mathrm{d}\lambda. \qquad (4.53)$$

Щоб обчислити внутрішній інтеграл у виразі (4.53), спочатку розглянемо та обчислимо декілька невласних інтегралів.

а) Інтеграл Ейлера-Пуассона

Обчислимо інтеграл

$$\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx. \tag{4.54}$$

Позначимо його так:

$$I = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx. \tag{4.54/}$$

Введемо нову змінну, тобто покладемо $x = zt$, де z – поки що сталий параметр, тоді $dx = zdt$. Інтеграл (4.54/) матиме вигляд:

$$I = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-z^2 t^2} zdx. \tag{4.55}$$

Почнемо тепер змінювати параметр z і помножимо обидві частини рівності (4.55) на вираз $\mathrm{e}^{-z^2} dz$, матимемо

$$I\mathrm{e}^{-z^2} dz = \mathrm{e}^{-z^2} dz \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-z^2 t^2} zdt,$$

або

$$I\mathrm{e}^{-z^2} dz = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-z^2(1+t^2)} zdtdz.$$

Зінтегруємо отримане рівняння за змінною z в межах від 0 до $+\infty$

$$I \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-z^2} dz = \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-z^2(1+t^2)} zdtdz.$$

Але

$$\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-z^2} dz = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = I.$$

Отже,

$$I^2 = \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-z^2(1+t^2)} zdtdz.$$

Змінимо в подвійному інтегралі порядок інтегрування, дістанемо:

$$I^2=\int_0^{+\infty}[\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-z^2(1+t^2)}zdz]dt. \qquad (4.56)$$

Обчислимо спочатку внутрішній інтеграл в (4.56)

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-z^2(1+t^2)}zdz=-\frac{1}{2(1+\mathrm{t}^2)}e^{-z^2(1+t^2)}\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{2(1+t^2)}(0-1)=\frac{1}{2(1+t^2)}.$$

Підставимо отримане значення в (4.56), матимемо:

$$I^2=\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2(1+t^2)}=\frac{1}{2}arctgt\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-0)=\frac{\pi}{4}.$$

Звідки

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (4.57)$$

б) Обчислимо тепер інтеграл:

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{x}^2}dx=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\sqrt{\alpha}\mathrm{x})^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\sqrt{\alpha}\mathrm{x})^2}d(\sqrt{\alpha}x)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

тобто

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{x}^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \qquad (4.58)$$

в) Розглянемо тепер такий інтеграл:

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha\mathrm{x}^2}\cos\beta\mathrm{x}dx. \qquad (4.59)$$

Інтеграл (4.59) будемо вважати функцією від параметра β і позначимо його $\mathrm{I}(\beta)$, тобто:

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos\beta x dx . \qquad (4.59^/)$$

Продиференціюємо $(3.59^/)$ за параметром β, дістанемо:

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x \sin\beta x dx .$$

Обчислимо інтеграл у правій частині отриманої рівності, використовуючи метод інтегрування частинами, дістанемо:

$$\int_0^{+\infty} \sin\beta x e^{-\alpha x^2} x dx = \begin{vmatrix} U = \sin\beta x \\ dV = e^{-\alpha x^2} x dx \\ dU = \beta\cos\beta x dx \\ V = -\dfrac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\beta x\left(-\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{2\alpha}\right) e^{-\alpha x^2} \beta \cos\beta \sin x dx =$$

$$= 0 + \frac{\beta}{2\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos\beta x dx = \frac{\beta}{2\alpha} I(\beta) .$$

Отже,

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha} I(\beta) .$$

Маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dI(\beta)}{d\beta} = -\frac{1}{2\alpha}\beta d\beta .$$

Інтегруючи, матимемо:

$$\ln\left|I(\beta)\right| = -\frac{\beta^2}{4\alpha} + \ln C ,$$

звідки

$$I(\beta) = Ce^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} . \qquad (4.60)$$

Знайдемо значення константи C. Нехай $\beta = 0$, тоді $I(0) = C$. З другого боку,

$$I(0) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \cos 0x dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Отже,

$$C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Підставивши значення С в (3.60), матимемо:

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \cos\beta x dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \tag{4.61}$$

Використаємо інтеграл (4.61) для обчислення внутрішнього інтеграла у виразі (4.53), який має вигляд:

$$U(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)[\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(\xi - x)\mathrm{d}\lambda]d\xi.$$

Покладаючи у внутрішньому інтегралі, який береться за замінною λ

$$\alpha = a^2 t \qquad \text{і} \qquad \beta = \xi - x,$$

дістанемо, що

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(\xi - x)\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{a}^2 t}}e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}.$$

Отже, розв’язок рівняння (4.20), що задовольняє початкову умову (4.21), матиме вигляд:

$$U(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{a}^2 t}}e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

або

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi. \tag{4.62}$$

Формула (4.62) є розв’язком поставленої задачі про розподіл температур у різні моменти часу для будь-яких точок необмеженого з обох кінців стержня, якщо відомий початковий розподіл температур.

Зауваження. Розглянуті задачі за своїм фізичним змістом – це охолодження нескінченного стержня з теплоізольованою бічною поверхнею, нагрітою попередньо до температури $\varphi(x)$. Тому його температура $U(x,t)$ є функцією, спадною у часі.

4.4 Приклади розв’язання задачі Коші для рівняння теплопровідності

Приклад 4.1 Знайти розв’язок рівняння теплопровідності.

$$\frac{dU}{dt} = -a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad -\infty < \mathrm{x} < +\infty, \quad \mathrm{t}>0 \tag{4.63}$$

який задовольняє початкову умову

$$U(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} T_1, \text{якщо} \quad x \succ 0 \\ T_2, \text{якщо} \quad x \prec 0 \end{cases}. \tag{4.64}$$

Розв’язування

Скористаємося формулою (4.62), тобто запишемо розв’язок задачі (4.63), (4.64) у вигляді:

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi .$$

Перепишемо цей розв’язок так:

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi .$$

Використовуючи початкову умову (4.64), отримаємо:

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} T_2 e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{+\infty} T_1 e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi ,$$

$$U(x,t)=\frac{T_2}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi+\frac{T_1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi. \qquad (4.65)$$

Розглянемо кожен з інтегралів і спростимо їх.

$$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi=\left|\begin{array}{l}\frac{\xi-x}{\sqrt{2a^2t}}=\Theta\Rightarrow\xi=x+\sqrt{2a^2t}\Theta\\ d\xi=\sqrt{2a^2t}d\Theta\\ \xi\to-\infty\Rightarrow\Theta\to-\infty\\ \xi=0\Rightarrow\Theta=\frac{-x}{\sqrt{2a^2t}}\end{array}\right|=\int_{-\infty}^{\frac{-x}{\sqrt{2a^2t}}}\mathrm{e}^{-\frac{\Theta^2}{2}}\sqrt{2a^2t}d\Theta=a\sqrt{2t}\int_{-\infty}^{\frac{-x}{\sqrt{2a^2t}}}\mathrm{e}^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta,$$

$$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi=\left|\begin{array}{l}\frac{\xi-x}{\sqrt{2a^2t}}=\Theta\Rightarrow\xi=x+\sqrt{2a^2t}\Theta\\ d\xi=\sqrt{2a^2t}d\Theta\\ \xi=0\Rightarrow\Theta=\frac{-x}{\sqrt{2a^2t}}\\ \xi\to+\infty\Rightarrow\Theta\to+\infty\end{array}\right|=\int_{\frac{-x}{\sqrt{2a^2t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\Theta^2}{2}}\sqrt{2a^2t}d\Theta=a\sqrt{2t}\int_{\frac{-x}{\sqrt{2a^2t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta.$$

Підставимо отримані значення інтегралів у вираз (4.64), дістанемо

$$U(x,t)=\frac{T_2}{2a\sqrt{\pi t}}a\sqrt{2t}\int_{-\infty}^{\frac{-x}{\sqrt{2a^2t}}}\mathrm{e}^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta+\frac{T_1}{2a\sqrt{\pi t}}a\sqrt{2t}\int_{\frac{-x}{\sqrt{2a^2t}}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta,$$

$$U(x,t)=\frac{T_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-z}\mathrm{e}^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta+\frac{T_1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-z}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta, \qquad (4.66)$$

де $z=\frac{x}{\sqrt{2a^2t}}$.

Знову розглянемо кожен з інтегралів у виразі (4.66). За властивістю адитивності маємо:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-z}\mathrm{e}^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{-z}\mathrm{e}^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{z}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha.$$

Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta = \left|\begin{array}{l}\dfrac{\Theta}{\sqrt{2}} = x \Rightarrow \Theta = \sqrt{2}x \\ d\Theta = \sqrt{2}dx \\ \Theta \to -\infty \Rightarrow x \to -\infty \\ \Theta = 0 \Rightarrow x = 0\end{array}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\sqrt{2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{-z} e^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta = \left|\begin{array}{l}\Theta = -\alpha \Rightarrow \alpha = -\Theta \\ d\Theta = -d\alpha \\ \Theta \to 0 \Rightarrow \alpha = 0 \\ \Theta = -z \Rightarrow \alpha = z\end{array}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{z} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha .$$

Аналогічно для другого інтеграла матимемо:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-z}^{+\infty} e^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-z}^{0} e^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{-z} e^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-z}^{+\infty} e^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{z} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha + \frac{1}{2}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{-z} e^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{z} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha ,$$

а

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta = \left|\begin{array}{l}\dfrac{\Theta}{\sqrt{2}} = x \Rightarrow \Theta = x\sqrt{2} \\ d\Theta = \sqrt{2}dx \\ \Theta = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \Theta \to +\infty \Rightarrow x \to +\infty\end{array}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\sqrt{2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi 2}}\cdot\sqrt{2}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\Theta^2}{2}}d\Theta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$U(x,t)=T_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha\right)+T_1\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha+\frac{1}{2}\right)=\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{T_1-T_2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha,$$

тобто,

$$U(x,t)=\frac{T_1+T_2}{2}+(T_1-T_2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha, \tag{4.67}$$

де $z=\dfrac{x}{\sqrt{2a^2t}}$.

Зокрема, якщо $T_1=0;\ \ T_2=0$, то:

$$U(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha, \tag{4.68}$$

де $z=\dfrac{x}{\sqrt{2a^2t}}$.

Профіль температури в заданий момент часу t визначається кривою

$$f(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha, \tag{4.69}$$

де z є абсцисою точки, в якій визначається температура, якщо за одиницю довжини в залежності від t береться значення $\sqrt{2a^2t}$, причому інтеграл $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha=\Phi(z)$ називається функцією Лапласа. Для її обчислення складені таблиці для значень $z\le 5$. Якщо z>5, то покладають Ф(z>5) = 0,5. Функція Ф(z) - непарна, тобто $\Phi(-z)=-\Phi(z)$. $\Phi(-\infty)=-0{,}5$, $\Phi(+\infty)=0{,}5$.

Формулу (4.67) для довільних T_1 *і* T_2 можна подати у вигляді:

$$U(x,t)=\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{T_1-T_2}{\sqrt{2\pi}}\Phi\left(\frac{x}{a\sqrt{2t}}\right). \tag{4.70}$$

Звідки видно, що в точці $x=0$ температура весь час стала і дорівнює півсумі початкових значень справа і зліва, оскільки $\Phi(0)=0$.

Приклад 4.2 Знайти розв’язок задачі Коші

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad -\infty < \text{x} < +\infty, \qquad t>0 \tag{4.71}$$

$$U(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} U_0, \, якщо \;\; |x| \le l \\ 0, якщо \;\; |x| > l \end{cases}. \tag{4.72}$$

Розв’язування

Функція $\varphi(x)$, яка задає початкову умову, абсолютно інтегровна, тому для відшукання $U(x,t)$ можна застосувати формулу (4.62):

$$U(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-l}^{l} U_0 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi = \frac{U_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-l}^{l} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{\xi - x}{\sqrt{2a^2t}} = \alpha \Rightarrow \xi = x + \sqrt{2a^2t} \cdot \alpha \\ d\xi = \sqrt{2a^2t} d\alpha \\ \xi = -l \Rightarrow \alpha = \dfrac{-l - \text{x}}{\sqrt{2\text{a}^2 t}} \\ \xi = l \Rightarrow \alpha = \dfrac{l - \text{x}}{\sqrt{2\text{a}^2 t}} \end{array} \right| = \frac{U_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\frac{-l-\text{x}}{\sqrt{2\text{a}^2t}}}^{\frac{l-\text{x}}{\sqrt{2\text{a}^2t}}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} a\sqrt{2t} d\alpha =$$

$$= \frac{U_0}{2a\sqrt{\pi t}} a\sqrt{2t} \int\limits_{\frac{-l-\text{x}}{\sqrt{2\text{a}^2t}}}^{\frac{l-\text{x}}{\sqrt{2\text{a}^2t}}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha =$$

$$=\frac{U_0}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{-l-\mathrm{x}}{\sqrt{2a^2t}}}^{\frac{l-\mathrm{x}}{\sqrt{2a^2t}}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha = U_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{-l-\mathrm{x}}{\sqrt{2a^2t}}}^{0} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\frac{l-\mathrm{x}}{\sqrt{2a^2t}}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha\right) =$$

$$=U_0\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{-l-\mathrm{x}}{\sqrt{2a^2t}}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{l-\mathrm{x}}{\sqrt{2a^2t}}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha\right) = U_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{l-\mathrm{x}}{\sqrt{2a^2t}}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{-l-\mathrm{x}}{\sqrt{2a^2t}}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha\right) =$$

$$=U_0\left[\varPhi\left(\frac{l-\mathrm{x}}{a\sqrt{2t}}\right)-\varPhi\left(\frac{-l-\mathrm{x}}{a\sqrt{2t}}\right)\right],$$

тобто,

$$U(x,t)=U_0\left[\varPhi\left(\frac{l+\mathrm{x}}{a\sqrt{2t}}\right)-\varPhi\left(\frac{\mathrm{x}-l}{a\sqrt{2t}}\right)\right], \qquad (4.73)$$

де

$\varPhi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z \mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha$ - функція Лапласа, причому $\varPhi(-z)=-\varPhi(z)$.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте узагальнений принцип суперпозиції.
2. Що називається власною функцією задачі?
3. Що таке власне значення задачі?
4. Скільки власних функцій може відповідати даному власному значенню?
5. Напишіть інтеграл Ейлера-Пуассона.
6. Виконайте процес відокремлення змінних у випадку хвильового рівняння малих поперечних коливань струни.
7. Виконайте процес відокремлення змінних у випадку хвильового рівняння теплопровідності.
8. Виконайте процес відокремлення змінних у випадку хвильового рівняння поширення тепла у нескінченному стержні.
9. Дати означення лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами та визначника Вронського. Сформулювати і довести теорему про структуру загального розв’язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку.
10. Охарактеризуйте функцію Лапласа.
11. Сформулюйте умову Діріхле для розвинення функції у ряд Фур’є.

12. Чому при розв'язанні характеристичного рівняння $\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}$ обирається константа із знаком мінус?
13. Яке рівняння називається однорідним диференціальним рівнянням у частинних похідних другого порядку? Наведіть приклади таких рівнянь.
14. Обчисліть інтеграл Ейлера-Пуассона.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 4.1 Знайти розв'язок рівняння коливання струни $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, яке задовольняє початкові умови

$U(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_1(x)$, $\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_2(x)$, при t>0 та $0 \le x \le l$

і крайові умови

$U(x,y)\big|_{x=0} = 0$, та $U(x,t)\big|_{x=l} = 0$.

1 $\varphi_1(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$ $\quad l = \pi \quad \varphi_2(x) = 0$

2 $\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{2h}{l}x, & 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ \frac{2h}{l}(l - x), & \frac{\pi l}{2} < x \le l \end{cases}$ $\quad \varphi_2(x) = 0$

3 $\varphi_1(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 2 \\ 4 - x, & 2 < x \le 4 \end{cases}$ $\quad l = 4 \quad \varphi_2(x) = 0$

4 $\varphi_1(x) = \frac{4h}{l^2}x(l - x),$ $\quad \varphi_2(x) = 0$

5 $\varphi_1(x) = \begin{cases} -0.05x, & 0 \le x \le 2 \\ 0.1(x - 3), & 2 < x \le 3 \end{cases}$ $\quad \varphi_2(x) = 0$

6 $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x(4 - x),$ $\quad \varphi_2(x) = 0$

7 $\varphi_1(x) = \sin\frac{\pi x}{l},$ $\quad \varphi_2(x) = 0$

8 $\varphi_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\le x\le 2\\ \frac{1}{2}(4-x), & 2<x\le 4\end{cases}$ $\qquad\varphi_2(x)=0$

9 $\varphi_1(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 4\\ 8-x, & 4<x\le 8\end{cases}$ $\qquad\varphi_2(x)=0$

10 $\varphi_1(x)=\begin{cases}0.05x, & 0\le x\le 4\\ 0.1(6-x), & 4<x\le 6\end{cases}$ $\qquad 0\le x\le 6\qquad\varphi_2(x)=0$

11 $\varphi_1(x)=\dfrac{x(l-x)}{8l},\qquad x\le 0\le l\qquad\varphi_2(x)=0$

12 $\varphi_1(x)=\dfrac{l}{100}\sin\dfrac{\pi x}{2l},\qquad 0\le x\le l\qquad\varphi_2(x)=0$

13 $\varphi_1(x)=\begin{cases}0.1x, & 0\le x\le 2\\ 0.05(6-x), & 2<x\le 6\end{cases}$ $\qquad 0\le x\le 6\qquad\varphi_2(x)=0$

14 $\varphi_1(x)=\sin x,\qquad 0\le x\le l\qquad\varphi_2(x)=0$

15 $\varphi_1(x)=x(x-2),\qquad\varphi_2(x)=0\qquad 0\le x\le 2$

16 $\varphi_1(x)=1-\cos\dfrac{2\pi x}{l},\qquad\varphi_2(x)=0\qquad 0\le x\le l$

17 $\varphi_1(x)=\dfrac{1}{2}x(2-x),\qquad\varphi_2(x)=0\qquad 0\le x\le l$

18 $\varphi_1(x)=x(1-\dfrac{x}{l}),\qquad\varphi_2(x)=0\qquad 0\le x\le l$

19 $\varphi_1(x)=x(x-3),\qquad\varphi_2(x)=0\qquad 0\le x\le 2$

20 $\varphi_1(x)=\dfrac{\pi-2e}{4},\qquad x\le 0\le\pi\quad(l=\pi)\quad\varphi_2(x)=0$

21 $\varphi_1(x)=0\qquad\varphi_2(x)=\begin{cases}V_0, & \left|x-\frac{l}{2}\right|<\frac{h}{2}\\ 0, & \left|x-\frac{l}{2}\right|>\frac{h}{2}\end{cases}$

22 $\varphi_1(x)=U_0$ $\qquad \varphi_2(x)=\begin{cases} V_0, & \left|x-\dfrac{l}{2}\right|<\dfrac{h}{2} \\ 0, & \left|x-\dfrac{l}{2}\right|>\dfrac{h}{2} \end{cases}$

23 $\varphi_1(x)=0$ $\qquad \varphi_2(x)=\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{5\pi x}{l}$ $\qquad 0\le x\le l$

24 $\varphi_1(x)=0$ $\qquad \varphi_2(x)=\begin{cases} \cos\pi\left(x-\dfrac{l}{2}\right), & \left|x-\dfrac{l}{2}\right|<\dfrac{h}{2} \\ 0, & \left|x-\dfrac{l}{2}\right|>\dfrac{h}{2} \end{cases}$

25 $\varphi_1(x)=0$ $\qquad \varphi_2(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi(x-2)}{4}, & |x-2|<2 \\ 0, & |x-2|>2 \end{cases}$

26 $\varphi_1(x)=U_0$ $\qquad \varphi_2(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi(x-1)}{2}, & |x-1|<1 \\ 0, & |x-1|>1 \end{cases}$

27 $\varphi_1(x)=0$ $\qquad \varphi_2(x)=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{3\pi x}{l}$ $\qquad 0\le x\le l$

28 $\varphi_1(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases}$ $\qquad \varphi_2(x)=0$ $\qquad l=2$

29 $\varphi_1(x)=x(x-4),$ $\qquad \varphi_2(x)=0$ $\qquad 0\le x\le l$

30 $\varphi_1(x)=\sin\pi x,$ $\qquad 0\le x\le l$ $\qquad \varphi_2(x)=0$

Завдання 4.2 Знайти закон розподілу температури *U(x,t)* всередині стержня розміщеного на відрізку [*0,l*], якщо в початковий момент температура всередині стержня була рівною *U(x,0)=φ(x)*. На кінцях стержня підтримується нульова температура.

Знайти розв’язок рівняння $\dfrac{\partial U}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, що задовольняє крайові умови $U(x,t)\big|_{x=0}=0,\quad U(x,t)\big|_{x=l}=0,\quad t>0$ і початкову умову $U(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x).$

1 $\varphi(x)=x(l-x),$ $\qquad 0\le x\le l$

2 $\varphi(x)=\dfrac{2}{l^2}(l-x),$ $\qquad 0\le x\le l$

3 $\varphi(x)=\sin\dfrac{\pi x}{l},$ $\qquad 0\le x\le l$

4 $\varphi(x)=x(1-\dfrac{x}{l}),$ $\qquad 0\le x\le l$

5 $\varphi(x)=1-\cos\frac{2\pi x}{l}, \qquad 0\le x\le l$

6 $\varphi(x)=(x-l)\sin\pi x, \qquad 0\le x\le l$

7 $\varphi(x)=x(l-x), \qquad 0\le x\le l$

8 $\varphi(x)=\frac{1}{8l}(l-x)x, \qquad 0\le x\le l$

9 $\varphi(x)=U_0\frac{x^2}{l^2}, \quad U_0=const, \quad 0\le x\le l$

10 $\varphi(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le l\\ \left(x-\frac{l}{2}\right)U_0, & \frac{l}{2}<x\le l\end{cases} \qquad U_0=const, \qquad 0\le x\le l$

11 $\varphi(x)=x\sin\frac{\pi(2l-x)}{l}, \qquad 0\le x\le l$

12 $\varphi(x)=\frac{\pi-2x}{4}, \qquad 0\le x\le\pi \qquad (l=\pi)$

13 $\varphi(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 3\\ 6-x, & 3<x\le 6\end{cases} \qquad 0\le x\le 6$

14 $\varphi(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac{l}{2}\\ l-x, & \frac{l}{2}<x\le l\end{cases} \qquad 0\le x\le l$

15 $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{x}{l}U_0, & 0\le x\le\frac{l}{2}\\ \frac{l-x}{l}U_0, & \frac{l}{2}<x\le l\end{cases} \qquad U_0=const, \qquad 0\le x\le l$

16 $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, & 0\le x\le 2\\ 4-x, & 2<x\le 4\end{cases} \qquad 0\le x\le 4$

17 $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0\le x\le 1\\ \frac{2-x}{2}, & 1<x\le 2\end{cases} \qquad 0\le x\le 2$

18 $\varphi(x)=1-\cos\frac{\pi x}{l}, \qquad 0\le x\le l$

19 $\varphi(x)=(x-l)\sin\frac{\pi x}{l}, \qquad 0\le x\le l$

20 $\varphi(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 1 \\ 2-x, & 1<x\le 2 \end{cases} \qquad 0\le x\le 2$

21 $\varphi(x)=x(1-\frac{x}{4}), \qquad 0\le x\le 4$

22 $\varphi(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{4}, & 0\le x\le 4 \\ 8-x, & 4<x\le 8 \end{cases} \qquad 0\le x\le 8$

23 $\varphi(x)=x(2-x), \qquad 0\le x\le 2$

24 $\varphi(x)=\sin\frac{2\pi x}{l}, \qquad 0\le x\le l$

25 $\varphi(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{5}, & 0\le x\le 5 \\ 10-x, & 5<x\le 10 \end{cases} \qquad 0\le x\le 10$

26 $\varphi(x)=1-\cos\frac{x}{2}, \qquad 0\le x\le 4$

27 $\varphi(x)=\frac{x(2-x)}{4}, \qquad 0\le x\le 2$

28 $\varphi(x)=\begin{cases} \frac{x}{4}, & 0\le x\le 2 \\ \frac{4-x}{4}, & 2<x\le 4 \end{cases} \qquad 0\le x\le 4$

29 $\varphi(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0\le x\le 2 \\ 4-x, & 2<x\le 4 \end{cases} \qquad 0\le x\le 4$

30 $\varphi(x)=x(4-x), \qquad 0\le x\le 4$

ТЕМА 5 МЕТОД СІТОК ДЛЯ РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Розглянемо змішану задачу для рівняння теплопровідності, а саме: знайти функцію $U(x,t)$, яка задовольняє рівняння (1.36) $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}} = \mathrm{a}^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, має крайові умови (1.37) $U(x,t)\Big|_{x=0} = \psi_1(\mathrm{t})$, $U(x,t)\Big|_{x=l} = \psi_2(\mathrm{t})$ і початкову умову (1.38) $\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{t})\Big|_{\mathrm{t}=0} = \varphi(\mathrm{x})$, $(0 < \mathrm{x} < l)$.

Зауваження. До задачі (1.36)-(1.38) приводить зокрема, задача про поширення тепла в однорідному стержні довжиною *l*. Шляхом введення нової змінної $\tau = \mathrm{a}^2 t$ рівняння (1.36) зводиться до вигляду:

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

тому надалі приймаємо *a* = 1 і будемо розглядати рівняння

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \qquad (5.1)$$

Ідея *методу сіток* (або методу *скінчених різниць*) для необмеженого розв'язання крайових задач для двовимірних диференціальних рівнянь полягає в тому, що:

1) у плоскій області D, в якій шукаємо розв'язок, будується сіткова область D_h, яка складається з однакових комірок (рис. 5.1) і наближає дану область D;

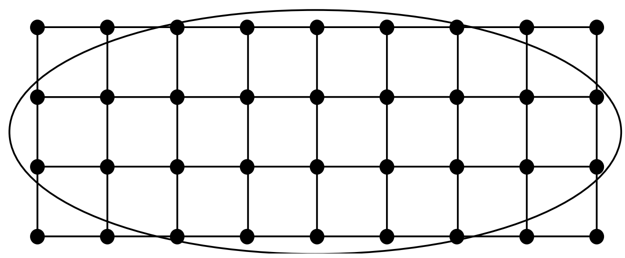


Рисунок 5.1

2) задане диференціальне рівняння замінюється у вузлах побудованої сітки відповідним рівнянням у скінченних різницях (різницевим рівнянням);

3) на основі крайових умов встановлюються значення шуканого розв'язку в граничних вузлах області D_h.

Розв’язавши отриману систему рівнянь у скінченних різницях, для чого потрібно розв’язати алгебраїчну систему з великою кількістю невідомих, ми отримаємо значення шуканої функції у вузлах сітки, тобто будемо мати чисельний розв’язок нашої задачі.

Побудуємо у півсмузі $t \geq 0$, $(0 \leq x \leq l)$ дві сім’ї паралельних прямих (рис. 5.2):

$$x = ih \quad (i = 0,1,3,..).$$
$$t = j\tau \quad (j = 0,1,2,3,..).$$

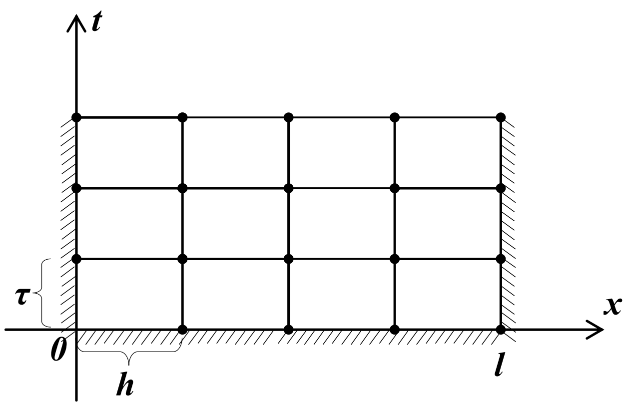


Рисунок 5.2

Позначимо $x_i = ih$, $t_j = j\tau$, $U(x_i, t_j) = U_{ij}$ і наближено замінимо у кожному внутрішньому вузлі (x_i, t_j) похідну $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ різницевим відношенням

$$(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2})_{ij} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{h^2}, \tag{5.2}$$

а похідну $\frac{\partial U}{\partial t}$ одним із двох різницевих відношень

$$(\frac{\partial U}{\partial t})_{ij} = \frac{U_{i,j+1} - U_{ij}}{\tau}, \tag{5.3}$$

$$(\frac{\partial U}{\partial t})_{ij} = \frac{U_{ij} - U_{i,j-1}}{\tau}. \tag{5.4}$$

Тоді для рівняння (5.1) (для a = 1) отримаємо два типи різницевих рівнянь

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{ij}}{\tau} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{h^2}, \qquad (5.5)$$

$$\frac{U_{ij} - U_{i,j-1}}{\tau} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{h^2}. \qquad (5.6)$$

Для складання рівняння (5.5) була використана схема вузлів – явна схема (рис. 5.3):

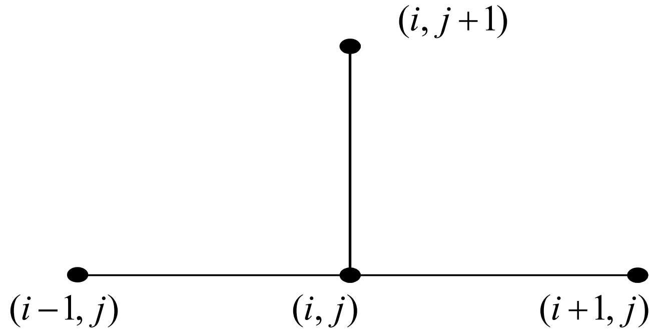


Рисунок 5.3

Для рівняння (5.6) – схема вузлів – неявна схема (рис. 5.4):

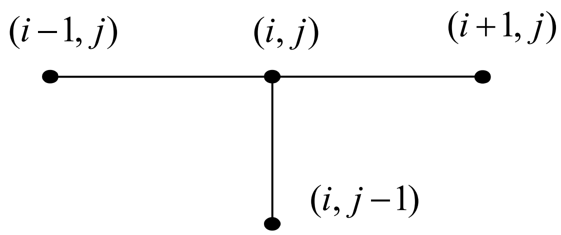


Рисунок 5.4

Позначивши $\sigma = \frac{\tau}{h^2}$, зведемо ці рівняння до вигляду:

$$U_{i,j+1} - U_{ij} = \frac{\tau}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}),$$

$$U_{i,j+1} = U_{ij} + \sigma(U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}),$$

$$U_{i,j+1} = (1-2\sigma)U_{ij} + \sigma(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}); \tag{5.7}$$

$$U_{ij} - U_{i,j-1} = \frac{\tau}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}),$$

$$U_{ij} - U_{i,j-1} - \sigma(U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}) = 0,$$

$$(1+2\sigma)U_{ij} - \sigma(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) - U_{i,j-1} = 0. \tag{5.8}$$

Вибираючи числа σ у рівняння (5.7) і (5.8), ми повинні враховувати дві обставини:

1) похибка апроксимації диференціального рівняння різницевим повинна бути найменшою;
2) різницеве рівняння повинно бути стійким.

Доведемо, що рівняння (5.7) буде стійким для $0 < \sigma \le \frac{1}{2}$, а рівняння (5.8) – для будь-якого σ.

Найпростіший вигляд рівняння (5.7) має для $\sigma = \frac{1}{2}$:

$$U_{i,j+1} = \frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j}}{2} \tag{5.9}$$

і для $\sigma = \frac{1}{6}$

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{6}(U_{i+1,j} + 4U_{ij} + U_{i-1,j}). \tag{5.10}$$

Оцінки похибок наближених розв’язків, отриманих з рівнянь (5.9) і (5.10) у смузі $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$, відповідно мають вигляд:

$$\left|U - \widetilde{U}\right| \le \frac{T}{3} M_1 h^2, \qquad (5.11)$$

$$\left|U - \widetilde{U}\right| \le \frac{T}{135} M_2 h^4, \qquad (5.12)$$

де $\widetilde{U}$ - точний розв’язок задачі (1.36) – (1.38),

$M_1 = \max\left\{\left|\varphi^{(4)}(x)\right|, \left|\psi_1^{11}(t)\right|, \left|\psi_2^{11}(t)\right|\right\}$ для $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$;

$M_1 = \max\left\{\left|\varphi^{(6)}(x)\right|, \left|\psi_1^{(4)}(t)\right|, \left|\psi_2^{(4)}(t)\right|\right\}$ для $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$.

З наведених оцінок похибок видно, що рівняння (5.10) дає вищу точність розв’язку в порівнянні з рівнянням (5.9). Але рівняння (5.9) має простіший вигляд, окрім того, крок τ по аргументу t для рівняння (5.10) повинен бути значно меншим, що призводить до великого обсягу обчислень. Рівняння (5.9) дає меншу точність, але при цьому кроки τ і h вибираються незалежно один від одного. Рівняння (5.9) і (5.10) дають можливість обчислювати значення функції $U(x,t)$ на кожному шарі за явними формулами через значення на попередньому шарі, неявна схема (5.8) не має цієї властивості.

Приклад. Використовуючи різницеве рівняння (5.9), знайти наближений розв’язок рівняння

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}^2},$$

яке задовольняє крайові умови:

$$\mathrm{U(x,t)}\Big|_{x=0} = \mathrm{U(x,t)}\Big|_{x=l} = 0, \qquad (0 \le t \le 0{,}025)$$

і початкову умову

$$\mathrm{U(x,t)}\Big|_{\mathrm{t}=0} = \sin \pi \mathrm{x} \qquad (0 \le x \le 1).$$

Розв’язування

Виберемо для аргументу x крок $h = 0,1$. Оскільки $\sigma = \frac{1}{2}$, отримаємо для аргументу t такий крок :

$$\sigma = \frac{h^2}{2} = 0{,}005.$$

Помічаємо, що початкова і крайові умови задачі симетричні відносно прямої $x = \frac{1}{2}$. Тому і розв'язок $U(x,t)$ буде також симетричним відносно цієї прямої.

Спочатку обчислимо значення функції $U(x,t)$ на нульовому шарі $(j = 0)$, тобто для $t = 0$ та $x = 0$; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

Результати обчислень зручно подати у вигляді таблиці.

Початковий рядок цієї таблиці $(j = 0)$ заповнюється на основі заданої початкової умови

$$\mathrm{U}_{\mathrm{i,o}} = \mathrm{U}(\mathrm{x}_{\mathrm{i}}, 0) = \sin \pi x_i, \qquad (i = \overline{0{,}10}).$$

Матимемо такі значення функції $\mathrm{U}_{\mathrm{i,o}}$:

$$\mathrm{U}_{0,0} = \sin \pi 0 = 0$$

$$\mathrm{U}_{1,0} = \sin \pi 0{,}1 = 0{,}3090$$

$$\mathrm{U}_{2,0} = \sin \pi 0{,}2 = 0{,}5878$$

$$\mathrm{U}_{3,0} = \sin \pi 0{,}3 = 0{,}8090$$

$$\mathrm{U}_{4,0} = \sin \pi 0{,}4 = 0{,}9511$$

$$\mathrm{U}_{5,0} = \sin \pi 0{,}5 = 1{,}0000$$

$$\ldots$$

$$\mathrm{U}_{10,0} = 0$$

У перший $(i = 0)$ та у останній $(i = 10)$ стовпці записуємо дані крайових умов

$$\mathrm{U}(0, \mathrm{t}) = U(l, t) = 0, \qquad (j = \overline{0{,}5})$$

тобто,

$$U_{0,0} = U_{0,1} = U_{0,2} = U_{0,3} = U_{0,4} = U_{0,5} = 0,$$

$$U_{10,0} = U_{10,1} = U_{10,2} = U_{10,3} = U_{10,4} = U_{10,5} = 0.$$

Решта рядків $(j = \overline{1,5})$ таблиці послідовно заповнюється на основі розрахункової формули (5.9):

$$U_{j+1,i} = \frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j}}{2} \qquad (\mathrm{i} = \overline{0,4};\ \ \mathrm{i} = \overline{1,9}).$$

Таблиця 5.1 – Розв'язання рівняння теплопровідності методом сіток

j	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	x_i / y_i	*0*	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*	*0,5*	*0,6*	*0,7*	*0,8*	*0,9*	*1,0*
0	*0*	0,0000	0,3090	0,5878	0,8090	0,9511	1,0000	0,9511	0,8090	0,5878	0,3090	0
1	*0,005*	0	0,2939	0,5590	0,7695	0,9045	0,9511	0,9045	0,7695	0,5590	0,2939	0
2	*0,010*	0	0,2795	0,5317	0,7318	0,8603	0,9045	0,8603	0,7318	0,5317	0,2795	0
3	*0,015*	0	0,2659	0,5057	0,6960	0,8182	0,8603	0,8182	0,6960	0,5057	0,2659	0
4	*0,020*	0	0,2529	0,4610	0,6620	0,7782	0,8182	0,7782	0,6620	0,4610	0,2529	0
5	*0,025*	0	0,2405	0,4575	0,6296	0,7401	0,7782	0,7401	0,6296	0,4575	0,2405	0

При цьому, звичайно, доцільно враховувати симетрію шуканої функції.

Заповнимо перший рядок $(j = 1)$ таблиці, обчислюючи значення шуканої функції за формулою:

$$U_{i,1} = \frac{U_{i+1,0} + U_{i-1,0}}{2},$$

використовуючи отримані значення функції з початкового рядка $(j = 0)$ і крайові умови для $j = 0$.

Таким чином, матимемо:

$$U_{1,1} = \frac{1}{2}(U_{2,0} + U_{0,0}) = \frac{1}{2}(0{,}5878 + 0) = 0{,}2939;$$

$$U_{2,1} = \frac{1}{2}(U_{3,0} + U_{1,0}) = \frac{1}{2}(0{,}8090 + 0{,}3090) = 0{,}5590;$$

$$U_{3,1} = \frac{1}{2}(U_{4,0} + U_{2,0}) = \frac{1}{2}(0{,}9511 + 0{,}5878) = 0{,}7695;$$

$$U_{4,1} = \frac{1}{2}(U_{5,0} + U_{3,0}) = \frac{1}{2}(1 + 0{,}8090) = 0{,}9045;$$

$$U_{5,1} = \frac{1}{2}(U_{6,0} + U_{4,0}) = \frac{1}{2}(0{,}9511 + 0{,}9511) = 0{,}9511.$$

Враховуючи те, що шукана функція симетрична відносно прямої $x = \frac{1}{2}$, то наступні значення можна записати, не обчислюючи їх:

$$U_{6,1} = U_{4,1} = 0{,}9045;$$
$$U_{7,1} = U_{3,1} = 0{,}7695;$$
$$U_{8,1} = U_{2,1} = 0{,}5590;$$
$$U_{9,1} = U_{1,1} = 0{,}2939;$$
$$U_{10,1} = U_{0,0} = 0{,}0000.$$

Записуємо отримані значення U_{ji} $(\mathrm{i} = \overline{1{,}10})$ у перший рядок $(j = 1)$ таблиці. Після цього переходимо до обчислення значень функції на другому шарі $(j = 2)$ за формулою:

$$U_{i,2} = \frac{U_{i+1,1} + U_{i-1,1}}{2},$$

використовуючи отримані значення функції з першого рядка (з першого шару) і відповідні крайові умови.

Аналогічно заповнюємо решту таблиці, обчислюючи значення шуканої функції за формулою (5.9).

Оцінка похибки

Для даної задачі:

$$\psi_1(t)=0,\ \ \psi_2(t)=0,\ \ \psi^{(4)}(x)=\pi^4\sin\pi x,\ \ \psi_1^{11}(x)=0,\ \ \psi_2^{11}(t)=0.$$

Отже, $M_1=\pi^4$,

$$\left|U-\widetilde{U}\right|\le\frac{T}{3}M_1h^2=\frac{0{,}025}{3}\pi^4\cdot0{,}01\approx\frac{1}{3}0{,}025\cdot97{,}4091\cdot0{,}01\approx0{,}0081$$

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте змішану задачу для рівняння теплопровідності.
2. Сформулюйте ідею методу сіток.
3. Запишіть для рівняння $\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}$ різницеві відношення.
4. Запишіть для рівняння $\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}$ різницеві рівняння.
5. Зобразіть явну схему вузлів.
6. Зобразіть неявну схему вузлів.
7. Як зміняться різницеві рівняння для $\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}$, якщо зробити заміну $\sigma=\frac{\tau}{h^2}$? Поясніть вибір змінних для такої заміни.
8. Які умови враховують при виборі числа σ.
9. Доведіть стійкість різницевих рівнянь.
10. Порівняйте точність розв’язку при використанні рівнянь

$U_{i,j+1}=\frac{U_{i+1,j}+U_{i-1,j}}{2}$ та $U_{i,j+1}=\frac{1}{6}(U_{i+1,j}+4U_{ij}+U_{i-1,j})$.

Завдання для самостійної роботи

Використовуючи метод сіток, відшукати наближений розв’язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

яке задовольняє крайові умови:

$$U(0,t)=\psi_1 t,\quad U(0{,}6;t)=\psi_2 t \qquad\qquad t\in[0;0{,}01]$$

і початкову умову

$$U(x,0)=\varphi(x) \qquad\qquad x\in[0;0{,}6]$$

з чотирма десятковими знаками, вважаючи $\sigma=\frac{1}{6}$.

1. $\varphi(x)=\cos 2x$ $\qquad$ $\psi_1(t)=1-6t$, $\psi_2(t)=0{,}3624.$

2. $\varphi(x)=x(x+1)$ $\qquad$ $\psi_1(t)=0$, $\psi_2(t)=2t+0{,}96.$

3. $\varphi(x)=1{,}2+\lg(x+0{,}4)$ $\qquad$ $\psi_1(t)=t+0{,}8$, $\psi_2(t)=1{,}2.$

4. $\varphi(x)=\sin 2x$ $\qquad$ $\psi_1(t)=2t$, $\psi_2(t)=0{,}932.$

5. $\varphi(x)=3x(2-x)$ $\qquad$ $\psi_1(t)=0$, $\psi_2(t)=t+2.52.$

6. $\varphi(x)=1-\lg(x+0{,}4)$ $\qquad$ $\psi_1(t)=1{,}4$, $\psi_2(t)=t+1.$

7. $\varphi(x)=\sin(0{,}55x+0{,}03)$ $\qquad$ $\psi_1(t)=t+0{,}03$, $\psi_2(t)=0{,}354.$

8. $\varphi(x)=2x(1-x)+0{,}2$ $\qquad$ $\psi_1(t)=0{,}2$, $\psi_2(t)=t+0{,}68.$

9. $\varphi(x) = \sin x + 0{,}08$ $\quad \psi_1(t) = 2t + 0{,}08$, $\psi_2(t) = 0{,}6446.$

10. $\varphi(x) = \lg(x + 0{,}26) + 1$ $\quad \psi_1(t) = t + 0{,}415$, $\psi_2(t) = 0{,}9345.$

11. $\varphi(x) = \sin(x + 0{,}45)$ $\quad \psi_1(t) = 0{,}435 - 2t$, $\psi_2(t) = 0{,}8674.$

12. $\varphi(x) = x(x + 4) + 0{,}3$ $\quad \psi_1(t) = 0{,}3$, $\psi_2(t) = 6t + 0{,}9.$

13. $\varphi(x) = \cos(2x + 0{,}19)$ $\quad \psi_1(t) = 0{,}932$, $\psi_2(t) = 0{,}1798.$

14. $\varphi(x) = 2x(x + 0{,}2) + 0{,}4$ $\quad \psi_1(t) = 2t + 0{,}4$, $\psi_2(t) = 0{,}36.$

15. $\varphi(x) = (x - 0{,}2)(x + 1) + 0{,}2$ $\quad \psi_1(t) = 6t$, $\psi_2(t) = 0{,}84.$

16. $\varphi(x) = x(2x + 0{,}3)$ $\quad \psi_1(t) = 0$, $\psi_2(t) = 6t + 0{,}9.$

17. $\varphi(x) = \sin(x + 0{,}48)$ $\quad \psi_1(t) = 0{,}4618$, $\psi_2(t) = 3t + 0{,}882.$

18. $\varphi(x) = \sin(x + 0{,}02)$ $\quad \psi_1(t) = 3t + 0{,}02$, $\psi_2(t) = 0{,}581.$

19. $\varphi(x) = \cos(x + 0{,}48)$ $\quad \psi_1(t) = 6t + 0{,}887$, $\psi_2(t) = 0{,}4713.$

20. $\varphi(x) = \lg(2{,}63 - x)$ $\quad \psi_1(t) = 3(0{,}14 - t)$
$\psi_2(t) = 0{,}3075.$

21. $\varphi(x) = 1{,}5 - x(1 - x)$ $\quad \psi_1(t) = 3(0{,}5 - t)$
$\psi_2(t) = 1{,}26.$

22. $\varphi(x) = \cos(x + 0{,}845)$ $\quad \psi_1(t) = 6(t + 0{,}11)$
$\psi_2(t) = 0{,}1205.$

23. $\varphi(x) = \lg(2{,}42 + x)$ $\quad \psi_1(t) = 0{,}3838$
$\psi_2(t) = 6(0{,}08 - t).$

24. $\varphi(x) = 0{,}6 + x(0{,}8 - x)$ $\quad \psi_1(t) = 0{,}6$
$\psi_2(t) = 3(t + 0{,}24).$

25. $\varphi(x) = 1{,}4 + \lg(x + 0{,}2)$ $\quad \psi_1(t) = t + 0{,}6$
$\psi_2(t) = 1.$

26. $\varphi(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2}$ $\quad \psi_1(t) = t$
$\psi_2(t) = 0{,}8.$

27. $\varphi(x) = x(1 - x) + 0{,}4$ $\quad \psi_1(t) = 0$
$\psi_2(t) = t + 1{,}2.$

28. $\varphi(x) = \cos(x + 0{,}2)$ $\quad \psi_1(t) = 0$
$\psi_2(t) = 2(t + 0{,}1).$

29. $\varphi(x) = \ln(x + 2)$ $\quad \psi_1(t) = 0{,}46$
$\psi_2(t) = 4(0{,}06 - t).$

30. $\varphi(x) = x(3x + 0{,}1)$ $\quad \psi_1(t) = 0$
$\psi_2(t) = 5t + 0{,}4.$

ТЕМА 6 СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

У багатьох випадках, наприклад при використанні методу Фур'є у циліндричних чи сферичних координатах, використовують так звані спеціальні функції: циліндричні, сферичні й ін. Характерною особливістю таких функцій є те, що багато з них є розв'язками рівнянь з особливими точками вигляду

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)y=0,$$

де коефіцієнт $p(x)$ перетворюється на нуль у одній чи багатьох точках проміжку зміни змінної x.

6.1 Інтеграл Ейлера першого роду

Так називається інтеграл вигляду

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x>0,\ y>0\,. \tag{6.1}$$

Інтеграл (6.1.) називається *бета-функцією*. Відмітимо, якщо $x\ge 1,\ y\ge 1$, то інтеграл $B(x,y)$ – інтеграл власний. Якщо хоча б одна з цих нерівностей порушується, то $B(x,y)$ – невласний інтеграл. Покажемо, що функція $B(x,y)$ збіжна. Маємо

$$B(x,y)=\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt+\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\,.$$

Розглянемо інтеграл

$$J_1=\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\,.$$

Точка $t=0$ – особлива точка, якщо $x<1$:

$$f(t)=t^{x-1}(1-t)^{y-1}\approx\frac{1}{t^{1-x}},\ \forall y,\ при\ t\to 0\,.$$

Відомо, що збіжним є інтеграл $\int\limits_0^{1/2} \frac{dt}{t^{1-x}}$, якщо $1-x<1 \leftrightarrow x>0$. Таким чином, J_1 збіжний при $x>0 \quad i \ \ \forall y$.

Аналогічним чином можна показати, що збіжним буде і інтеграл

$$J_2 = \int\limits_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Таким чином, $B(x,y)$ є збіжною при $x>0,\ y>0$.

Відмітимо деякі властивості бета-функції: $B(x,y)=B(y,x)$, $B(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$, $B(x,1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

6.2 Інтеграл Ейлера другого роду

Так називається інтеграл вигляду

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, \tag{6.2}$$

який збігається при $x>0$ і визначає функцію Γ – *гамма-функцію.*

Розглянемо деякі властивості цієї функції: $\Gamma(n+1)=n!$, $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

Зауваження 1. Інтеграли Ейлера першого та другого роду визначаються і для комплексних значень аргументів. У випадку комплексних x та y інтеграл (6.1) збіжний, якщо $\mathrm{Re}(x)>0, \quad \mathrm{Re}(y)>0$.

Зауваження 2. Гамма-функція – одна із найважливіших трансцендентних функцій математичного аналізу, що розповсюджує поняття факторіала на випадок комплексних значень. Знання її властивостей необхідне для вивчення інших спеціальних функцій, наприклад, циліндричних.

6.3 Функція Бесселя

Багато задач приводить до необхідності розв’язання рівнянь вигляду

$$u''+\frac{1}{z}u'+(1-\frac{\nu^2}{z^2})u=0, \tag{6.3}$$

де z – комплексна змінна, ν – комплекснозначний параметр.

Таке рівняння з’являється при розв’язуванні задач методом відокремлення змінних, якщо використовувати циліндричні чи полярні координати (задача про коливання круглої мембрани, про охолодження круглого циліндра й ін.).

Рівняння (6.3) називається *рівнянням Бесселя.* Розв'язки цього рівняння, не рівні тотожно нулю, називаються *циліндричними функціями (функціями Бесселя).*

Будемо шукати розв'язки рівняння (6.3) у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$u = z^{\sigma}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...), \tag{6.4}$$

де $a_0 \neq 0$. Тоді

$$zu' = z^{\sigma}(a_0\sigma + a_1(\sigma+1)z + a_2(\sigma+2)z^2 + ...),$$

$$z^2 u'' = z^{\sigma}(a_0\sigma(\sigma-1) + a_1(\sigma+1)\sigma z + a_2(\sigma+2)(\sigma+1)z^2 + ...). \tag{6.5}$$

Перепишемо рівняння (6.3) у вигляді

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - \nu^2)u = 0, \tag{6.6}$$

підставимо значення (6.4), (6.5) в рівняння (6.6), маємо:

$$z^{\sigma}(a_0\sigma^2 - a_0\nu^2) + z^{\sigma+1}(a_1(\sigma+1)^2 - a_1\nu^2) + ... + z^{\sigma+n}(a_n(\sigma+n)^2 - a_n\nu^2 + a_{n-2}) + ... \equiv 0.$$

Для того, щоб ряд (6.4) був розв'язком рівняння (6.6), необхідне виконання рівностей

$$\begin{aligned}
&z^{\sigma}(a_0\sigma^2 - a_0\nu^2) \equiv 0 \\
&z^{\sigma+1}(a_1(\sigma+1)^2 - a_1\nu^2) \equiv 0 \\
&\vdots \\
&z^{\sigma+n}(a_n(\sigma+n)^2 - a_n\nu^2 + a_{n-2}) \equiv 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

З першої рівності знаходимо $\sigma = \pm\nu$, оскільки $a_0 \neq 0$. Візьмемо $\sigma = \nu$. Тоді з другої рівності $a_1 = 0$ та

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(\sigma+n)^2 - \nu^2} = \frac{-a_{n-2}}{(2\nu+n)n}, \; n = 2,3,... \tag{6.7}$$

Очевидно, що для усіх цілих невід'ємних k $a_{2k+1} = 0$, а

$$a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{2^2(\nu+k)k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(\nu+k)(\nu+k-1)...(\nu+1)k!}. \tag{6.8}$$

Позначимо через $a_0 = \dfrac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$, використовуючи властивості гамма-функції отримуємо

$$a_{2k} = \frac{1}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}.$$

Таким чином, ми побудували один формальний розв'язок рівняння (6.3) у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$u = u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}, \tag{6.9}$$

де z – комплексна змінна, що належить площині із розрізом $(-\infty,0) : |z| < \infty, |\arg z| < \pi$; ν – параметр, що приймає дійсні або комплексні значення. Обмеження на змінну z забезпечує однозначність функції z^{ν} і може бути відкинуте у випадку, коли ν – ціле число.

Доведемо, що ряд (6.9) збіжний за допомогою ознаки Д'Аламбера. Позначимо загальний член цього ряду

$$u_k = \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)},$$

тоді

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(k+1)(k+\nu+1)}\right|, \qquad \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(k+1)(k+\nu+1)}\right| = 0, |z| < \infty. \tag{6.10}$$

Отже, за ознакою Д'Аламбера, ряд (6.9) збіжний при будь-яких скінченних z.

У площині із розрізом $(-\infty,0)$ кожен член ряду (6.9) – однозначна та регулярна функція комплексної змінної. Даний ряд є збіжним для будь-яких z та ν, причому в області $|z| < R$ і $|\nu| < N$ (R, N – як завгодно великі числа) збіжність рівномірна відносно кожної змінної. Дійсно, починаючи з деякого достатньо великого k, відношення модулів наступного члену ряду до попереднього, рівне, згідно з (6.10), величині

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(k+1)(k+\nu+1)}\right| \le \frac{R^2}{4(k+1)(k+1-N)},$$

не буде перевищувати деякого правильного додатного дробу $q<1$, що не залежить від z та ν. Звідси, за ознакою Д'Аламбера, випливає, що розглянутий ряд рівномірно збіжний у вказаній області.

Оскільки члени ряду є регулярними функціями у площині із розрізом $(-\infty,0)$, то сума ряду визначає деяку функцію комплексної змінної, регулярну у розглянутій області. Ця функція називається *функцією Бесселя першого роду із індексом* ν і позначається символом $J_\nu(z)$. Таким чином,

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}, \quad |z|<\infty, \quad |\arg z|<\pi. \tag{6.11}$$

Можна показати, що цей ряд в області його збіжності є фактичним розв'язком рівняння (6.3).

6.4 Рекурентні формули для функції Бесселя

Помножимо (6.11) на z та продиференціюємо отриманий вираз по z, маємо

$$\frac{d}{dz} z^\nu J_\nu(z) = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu} k!\,\Gamma(k+\nu+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(k+\nu) z^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu} k!\,\Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$= z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+\nu) z^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu-1} k!\,\Gamma(k+\nu+1)} = z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu-1}}{k!\,\Gamma(k+\nu)} = z^\nu J_{\nu-1}(z).$$

Таким чином

$$\frac{d}{dz} z^\nu J_\nu(z) = z^\nu J_{\nu-1}(z). \tag{6.12}$$

Аналогічним чином можна одержати

$$\frac{d}{dz} z^{-\nu} J_\nu(z) = -z^\nu J_{\nu+1}(z). \tag{6.13}$$

Продиференціювавши ліві частини рівностей (6.12) та (6.13) отримуємо

$$z^\nu \frac{d}{dz} J_\nu(z) + \nu z^{\nu-1} J_\nu(z) = z^\nu J_{\nu-1}(z), \tag{6.14}$$

$$z^{-\nu} \frac{d}{dz} J_\nu(z) - \nu z^{-\nu-1} J_\nu(z) = -z^\nu J_{\nu+1}(z). \tag{6.15}$$

Звідки

$$\frac{d}{dz} J_\nu(z) + \frac{\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z), \tag{6.16}$$

$$\frac{d}{dz} J_\nu(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z). \tag{6.17}$$

Додавши та віднявши рівності (6.16) та (6.17), отримаємо

$$2\frac{d}{dz} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z), \tag{6.18}$$

$$\frac{2\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z). \tag{6.19}$$

6.5 Інтегральне представлення Пуассона функції Бесселя та його використання

Циліндричні функції допускають прості інтегральні представлення. Одне з найпростіших інтегральних представлень функції Бесселя належить Пуассону.

Розглянемо бета-функцію та її властивість $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Зробимо заміну $x = k + \dfrac{1}{2}, \quad y = \nu + \dfrac{1}{2}$. Тоді

$$\int_0^1 s^{k-\frac{1}{2}} (1-s)^{\nu-\frac{1}{2}} ds = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\nu+1)}, k = 0,1,...; \operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2} \tag{6.20}$$

Робимо заміну $s = t^2 \to ds = 2tdt$, тоді

$$2\int_0^1 t^{2k-1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}tdt = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\nu+1)}. \qquad (6.21)$$

Звідки

$$\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} = \frac{2}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^1 t^{2k-1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}tdt. \qquad (6.22)$$

Підставимо рівність (6.22) у (6.11), маємо

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!}\frac{2}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^1 t^{2k-1}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}tdt, \quad \mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}.$$

Змінимо порядок підсумовування та інтегрування, тоді

$$J_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}tdt\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(zt)^{2k}}{2^{2k}k!\Gamma(k+\frac{1}{2})}. \qquad (6.23)$$

Скористаємося властивістю гамма-функції

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2z),$$

в якій зробимо заміну $z = k+\frac{1}{2}$. Тоді

$$2^{2k}\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(k+1) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2k+1)$$

або

$$2^{2k}\Gamma(k+\frac{1}{2})k! = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2k)!.$$

З рівності (6.23) знаходимо

$$J_\nu(z)=\frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^1(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dt\,\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(zt)^{2k}}{(2k)!}}_{=\cos zt}.$$

Остаточно одержуємо

$$J_\nu(z)=\frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^1(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos zt dt\,,\quad |\arg z|<\pi,\ \mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2}. \qquad (6.24)$$

Оскільки підінтегральна функція парна, то формулу (6.24) можна переписати так

$$J_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_{-1}^1(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos zt dt\,,\quad |\arg z|<\pi,\ \mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2} \qquad (6.25)$$

Застосовуючи у формулі (6.25) заміну $t=\cos\theta,\ \ dt=-\sin\theta d\theta$, отримуємо

$$J_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi\sin^{2\nu-1}\theta\cos(z\cos\theta)d\theta\,,\quad |\arg z|<\pi,\ \mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2} \qquad (6.26)$$

Формули (6.25) та (6.26) – *інтегральне представлення Пуассона.*

Приймемо у (6.24) $\nu=0,\ z=x$, тоді

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\cos xt dt\,,\quad -\infty<x<\infty. \qquad (6.27)$$

Із (6.27) випливає, що

$$|J_0(x)|\le\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{2}{\pi}\arcsin t\Big|_0^1=1.$$

Таким чином, для дійсних x $|J_0(x)|\le 1$.

Тепер зробимо заміну $\nu = n + \frac{1}{2}$, $n = 0,1,...$ Тоді

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}n!}\int_0^1 (1-t^2)^n \cos ztdt\,. \tag{6.28}$$

З рівності (6.28) випливає, що функцію Бесселя з додатним половинним індексом можна виразити за допомогою елементарних функцій. За допомогою рекурентних формул можна одержати подібний результат і для функцій з від'ємним половинним індексом. Наприклад,

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \cos ztdt = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin z.$$

6.6 Сферичні функції. Поліноми Лежандра

Сферичними функціями називаються розв'язки лінійного диференціального рівняння

$$((1-z^2)u')' + \left(\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\right)u = 0\,, \tag{6.29}$$

де z – комплексна змінна, $x \in (-1,1)$ μ та ν – параметри, що можуть приймати довільні цілі додатні дійсні чи комплексні значення.

Рівняння (6.29) зустрічається у математичній фізиці при інтегруванні рівняння Лапласа у криволінійних координатах.

Найпростіший клас сферичних функцій складають *поліноми Лежандра*, які є розв'язками рівняння (6.29) при $\mu = 0$, $\nu = n\ (n = 0,1,2,3,...)$. Наступний за ступенем складності клас сферичних функцій утворюють *сферичні функції Лежандра*, які є розв'язком рівняння (6.29) при $\mu = 0$ і довільному дійсному чи комплексному ν.

Припустимо, що у рівнянні (6.29) $z = x \in [-1,1],\ \mu = 0,\ \nu = n\ (n = 0,1,2,3,...)$, тобто

$$((1-x^2)u')' + n(n+1)u = 0\,. \tag{6.30}$$

Покажемо, що одним із інтегралів рівняння (6.30) є функція

$$u = u_1 = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \quad n = 0,1,2,... \quad (6.31)$$

Функції (6.31) називаються *поліномами Лежандра.*

Позначимо

$$W = (x^2 - 1)^n .$$

Тоді

$$W' = n(x^2 - 1)^{n-1} 2x = \frac{2nx}{x^2 - 1} W ,$$

або

$$W'(1 - x^2) + 2nxW \equiv 0 . \quad (6.32)$$

Продиференціюємо рівність (6.32) *(n+1)* раз. Отримуємо

$$(W'(1 - x^2))^{(n+1)} + 2n(xW)^{(n+1)} \equiv 0 . \quad (6.33)$$

Диференціювання можна виконати за формулою Лейбніца

$$(uv)^{(m)} = u^{(m)}v + \frac{m}{1!}u^{(m-1)}v' + \frac{m(m-1)}{2!}u^{(m-2)}v'' + ... + uv^{(m)} . \quad (6.34)$$

Позначимо для першого доданка (6.33) $u = W', v = 1 - x^2$, а для другого доданка $u = W, v = x$. Зрозуміло, що в обох випадках $m = n + 1$. Маємо

$$(1 - x^2)W^{(n+2)} + \frac{n+1}{1!}W^{(n+1)}(-2x) + \frac{n(n+1)}{2!}W^{(n)}(-2) + 2nW^{(n+1)}x + \frac{n+1}{1!}W^{(n)} \equiv 0 ,$$

або

$$(1 - x^2)W^{(n+2)} - 2xW^{(n+1)} + n(n+1)W^{(n)} \equiv 0 . \quad (6.35)$$

Помножимо рівність (6.35) на $\frac{1}{2^2 n!}$, маємо

$$(1 - x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) \equiv 0 ,$$

або

$$((1 - x^2)P_n'(x))' + n(n+1)P_n(x) = 0 . \quad (6.36)$$

Рівність (6.36) означає, що поліноми Лежандра є розв’язками рівняння (6.30).

Знайдемо інший розв'язок рівняння (6.30), який був би лінійно незалежним з розв'язком $u_1 = P_n(x)$.

Нехай u_1 та u_2 – розв'язки рівняння (6.30), тоді

$$((1-x^2)u_1')' + n(n+1)u_1 = 0,$$

$$((1-x^2)u_2')' + n(n+1)u_2 = 0.$$

Помножимо перше рівняння на u_2, а друге – на u_1 та віднімемо отримані рівняння, маємо

$$u_2((1-x^2)u_1')' - u_1((1-x^2)u_2')' = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dx}((1-x^2)(u_1u_2' - u_2u_1')) = 0. \quad (6.37)$$

Проінтегруємо тотожність (6.37)

$$((1-x^2)(u_1u_2' - u_2u_1')) = C, \quad C = const \to \frac{u_1u_2' - u_2u_1'}{u_1^2} = \frac{C}{u_1^2(1-x^2)} \to$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) = \frac{C}{u_1^2(1-x^2)} \to \frac{u_2}{u_1} = C\int \frac{dx}{u_1^2(1-x^2)} + D, \quad D = const \to$$

$$u_2 = Cu_1\int \frac{dx}{u_1^2(1-x^2)} + Du_1. \quad (6.38)$$

Таким чином, якщо u_1 та u_2 – розв'язки рівняння (6.30), то вони пов'язані співвідношенням (6.38), у якому C та D можуть бути довільними. Якщо $C \neq 0$, то u_1 та u_2 лінійно незалежні. Візьмемо в якості u_1 поліноми Лежандра: $u_1 = P_n(x)$. Тоді, згідно з (6.38), маємо

$$u_2 = C_nP_n(x)\int \frac{dx}{P_n^2(x)(1-x^2)} + D_nP_n(x) = Q_n(x). \quad (6.39)$$

У рівності (6.39) $Q_n(x)$ – лінійно незалежна функція з $P_n(x)$. Функція $Q_n(x)$ називається *функцією Лежандра другого роду* ($C_n \neq 0$).

Нехай $n = 0$, тоді

$$Q_0(x) = C_0\int \frac{dx}{1-x^2} + D_0 = \frac{C_0}{2}\int\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx + D_0 = \frac{C_0}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + D_0 \quad (6.40)$$

Візьмемо $C_0 = 1, D_0 = 0$, тоді

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}. \tag{6.41}$$

Нехай $n = 1$, тоді

$$P_1(x) = x, \quad Q_1(x) = C_1 x\int\frac{dx}{(1-x^2)x^2} + D_1 x = \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - 1. \tag{6.42}$$

Загалом

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - f_{n-1}(x), \tag{6.43}$$

де $f_{-1}(x) \equiv 0,\ f_0(x) = 0,\ f_{n-1}(x)$ – поліном степеня $(n-1)$.

Оскільки функції $P_n(x)$ та $Q_n(x)$ лінійно незалежні, то загальний розв'язок рівняння (6.30) може бути записаний у вигляді

$$u(x) = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x), \quad x \in [-1,1], \quad n = 0,1,2,... \tag{6.44}$$

де C_1 та C_2 – довільні константи.

6.7 Виробнича функція для поліномів Лежандра

Функція

$$W(x,z) = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \tag{6.45}$$

називається виробничою функцією для поліномів Лежандра, тобто ці поліноми є коефіцієнтами розвинення цієї функції в ряд за додатними степенями z:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n. \tag{6.46}$$

У даному випадку, z – комплексна змінна, $x \in [-1,1]$, x – параметр.

Розглянемо деякі приклади використання виробничої функції:

$$W(1,z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1,$$

звідки знаходимо

$$P_n(1) = 1, \quad n = 0,1,2,...;$$

$$W(-1,z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1,$$

звідки

$$P_n(-1) = (-1)^n,$$

$$W(-x,-z) = W(x,z) \to \sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n,$$

звідки знаходимо

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad n = 0,1,2,...$$

Із останньої формули, зокрема, випливає, що $P_{2n-1}(0) = 0$.

6.8 Рекурентні формули для поліномів Лежандра

Маючи виробничу функцію, легко отримати рекурентні співвідношення між поліномами Лежандра.

Продиференціюємо рівність (6.45) за z, отримаємо

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{1-2xz+z^2} \cdot \frac{-2x+2x+2z}{2\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{x-z}{1-2xz+z^2} W,$$

або

$$(1-2xz+z^2)\frac{\partial W}{\partial z} + (z-x)W = 0. \qquad (6.47)$$

Звідки

$$(1-2xz+z^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_{n-1}(x) z^{n-1} + (z-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = 0 \to$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nxP_n(x)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)z^n = 0 \to$$

$$\sum_{\substack{n=0\\(n=1)\\(n-1\to n)}}^{\infty} nP_n(x)z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)z^n + \sum_{\substack{n=0\\(n+1\to n)}}^{\infty}(n+1)P_n(x)z^{n+1} = 0 \to$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)z^n - \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)xP_n(x)z^n + \sum_{n=1}^{\infty} nP_{n-1}(x)z^n = 0. \qquad (6.48)$$

Внесемо всі доданки лівої частини рівності (6.48) під один знак суми, маємо

$$(P_1(x) - xP_0(x))z^0 + \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x))z^n = 0. \qquad (6.49)$$

Рівність (6.49) можлива лише тоді, коли коефіцієнти при степенях z рівні нулю. Звідки

$$P_1(x) - xP_0(x) \equiv 0,$$

оскільки $P_z(x) = x,\ P_0(x) = 1$,

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,\ n = 1,2,3,... \qquad (6.50)$$

Формула (6.50) – шукане рекурентне співвідношення.

Отримаємо друге рекурентне співвідношення. Розглянемо похідну

$$\frac{\partial}{\partial z}((z-x)W) = (z-x)\frac{\partial W}{\partial z} + W = W\left(1 - \frac{(x-z)^2}{1-2xz+z^2}\right) = \frac{(1-x^2)W}{} 1-2xz+z^2 \qquad (6.51)$$

З іншого боку,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{z}{(1-2xz+z^2)\sqrt{1-2xz+z^2}} = \frac{z}{1-2xz+z^2}W. \qquad (6.52)$$

Порівнюючи (6.51) та (6.52), отримаємо

$$\frac{\partial W}{z\,\partial x} = \frac{1}{1-x^2}\frac{\partial}{\partial z}((z-x)W) \to (1-x^2)\frac{\partial W}{\partial x} = z\frac{\partial}{\partial z}((z-x)W) \to$$

$$(1-x^2)\frac{\partial W}{\partial x}=z(z-x)\frac{\partial W}{\partial z}+zW\,. \qquad (6.53)$$

Підставимо (6.46) у (6.53), отримаємо ланцюжок рівностей

$$(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)z^n=z(z-x)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)z^{n-1}+z\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)z^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}xnP_n(x)z^n+\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^{n+1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}nP_{n-1}(x)z^n-\sum_{\substack{n=0\\(n=1)}}^{\infty}nxP_n(x)z^n=\sum_{n=1}^{\infty}n(P_{n-1}(x)-xP_n(x))z^n\,.$$

Звідки отримуємо друге рекурентне співвідношення

$$(1-x^2)P_n'(x)=nP_{n-1}(x)-nxP_n(x),\quad n=1,2,3,... \qquad (6.54)$$

Приклад. Задача про обтікання кулі потоком ідеальної рідини.

Як відомо з гідродинаміки, потенціал швидкостей U ідеальної рідини задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta U=0,\quad \vec{v}=\nabla U\,,$$

де $\vec{v}$ – вектор швидкості частинки рідини.

Нехай рідина рухається відносно кулі радіуса a із швидкістю u у напрямку від’ємної осі Oz (рис. 6.1)

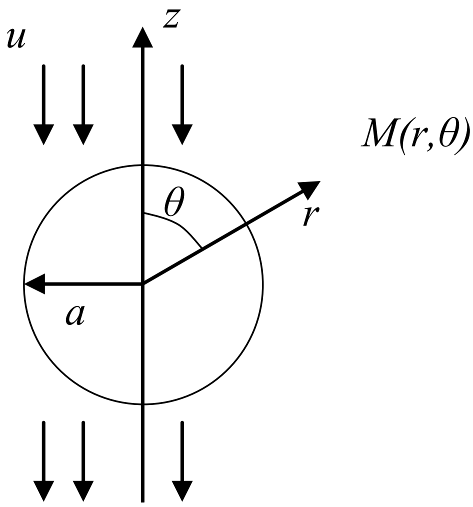


Рисунок 6.1 – Обтікання кулі потоком рідини

За означенням потенціалу швидкості U, нормальна компонента швидкості v_n прилеглої до поверхні кулі частинки рідини

$$v_n = \frac{\partial U}{\partial n}.$$

Застосуємо сферичну систему координат

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta.$$

Представимо потенціал швидкостей як суму

$$U = U_1 + U_2,$$

де U_1 – потенціал потоку за відсутності кулі, U_2 – потенціал збуреного потоку. Зрозуміло, що

$$U_1 = uz = -ur\cos\theta,$$

де r – радіус-вектор точки, θ – меридіанний кут. Для потенціалу U_2 маємо таку задачу:

$$\Delta U_2 = 0, \quad r > a, \tag{6.55}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial r}\Big|_{r=a} = -\frac{\partial U_1}{\partial r}\Big|_{r=a} = u\cos\theta, \quad U_2\big|_{r\to\infty} = O(1). \tag{6.56}$$

Рівняння Лапласа в сферичній системі координат таке

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U_2}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U_2}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_2}{\partial\varphi^2}=0. \qquad (6.57)$$

Із міркувань симетрії зрозуміло, що U_2 не залежить від кута φ, тобто $U_2 = U_2(r,\theta)$. Тому можна відкинути останній доданок у рівності (6.57) та шукати розв'язок задачі (6.55), (6.56) у вигляді

$$U_2(r,\theta) = R(r)V(\theta).$$

Оскільки змінні в рівнянні (6.56) можна відокремити, отримуємо два рівняння

$$V'' + ctgV' + \lambda V = 0, \qquad (6.58)$$

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0. \qquad (6.59)$$

Рівняння (6.59) відноситься до типу рівнянь Ейлера. Шукаємо його розв'язок у вигляді $R(r) = r^k$; тоді характеристичне рівняння таке

$$k(k+1) - \lambda = 0. \qquad (6.60)$$

З іншого боку, розв'язками рівняння (6.58) є поліноми Лежандра

$$V(\theta) = P_n(\cos\theta),$$

при цьому $\lambda = \lambda_n = n(n+1)$. Дійсно, зробимо заміну незалежної змінної в рівнянні (6.58) $x = \cos\theta, x \in [-1,1]$ та позначимо $y(x) = V(\theta)$. Тоді

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-\sin\theta\frac{dy}{dx}\right) = -\cos\theta\frac{dy}{dx} - \sin\theta\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{d\theta} =$$

$$= -\cos\theta\frac{dy}{dx} + \sin^2\theta\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Таким чином, замість рівняння (6.58) маємо

$$\sin^2\theta \frac{d^2 y}{dx^2} - 2\cos\theta \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0,$$

або, враховуючи, що $\sin^2\theta = 1 - x^2$, $\cos\theta = x$,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0. \tag{6.61}$$

Рівняння (6.61) є рівнянням Лежандра, його розв'язками, обмеженими у точках $x = \pm 1$, є поліноми Лежандра $P_n(x)$, причому $\lambda = n(n+1)$.

Таким чином, із (6.60) за теоремою, оберненою теоремі Вієта, знаходимо $k_1 = n, \quad k_2 = -(n+1)$.

Розв'язок зовнішньої задачі, обмежений на нескінченності, відшукується у вигляді ряду

$$U_2(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta).$$

Підставимо цей ряд у (6.56)

$$\left.\frac{\partial U_2}{\partial r}\right|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(-n-1)a^{-(n+2)} P_n(\cos\theta) = u\cos\theta.$$

Враховуючи, що $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$, отримуємо

$$D_1 = -\frac{ua^3}{2}, \quad D_n = 0, \quad n \neq 1.$$

Тому шуканий потік визначається потенціалом швидкості

$$U_2 = -\frac{ua^3\cos\theta}{2r^2}.$$

Таким чином, потенціал обтікання кулі поступовим потоком

$$U = -u\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right)\cos\theta.$$

Відмітимо, що з крайової умови (6.56) та значення першого полінома Лежандра можна було одразу здогадатись, що розв'язок такий

$$U_2 = R(r)\cos\theta .$$

Детальне дослідження наведено з метою формування навичок розв'язування задач з більш складними крайовими умовами у сферичній системі координат.

Питання для самоперевірки

1. Які функції називається спеціальними? Наведіть приклади спеціальних функцій.
2. Сформулюйте визначення бета-функції за допомогою невласного інтеграла.
3. Перерахуйте основні властивості бета-функції.
4. Дайте означення гамма-функції та запишіть формулу, що пов'язує бета- та гамма-функції.
5. Перерахуйте основні властивості гамма-функції.
6. Запишіть рівняння Бесселя індекса ν.
7. Встановіть залежність, що існує між функціями Бесселя індексу n та $-n$.
8. Отримайте рекурентні формули для функцій Бесселя.
9. Отримайте інтегральне представлення для функцій Бесселя.
10. Наведіть приклади застосування інтегрального представлення Пуассона.
11. Які з циліндричних функцій можна виразити через елементарні?
12. Які спеціальні функції називаються сферичними?
13. Напишіть рівняння, розв'язками якого є поліноми Лежандра.
14. Напишіть рівняння, розв'язками якого є сферичні функції Лежандра.
15. Як пов'язані між собою будь-які два розв'язки рівняння Лежандра? Напишіть формулу.
16. Як визначається функція Лежандра другого роду? Запишіть формулу.
17. Яка функція є виробничою функцією для системи поліномів Лежандра?
18. Наведіть приклади застосування виробничої функції для поліномів Лежандра.
19. Отримайте рекурентні формули для поліномів Лежандра.
20. Дайте розв'язок задачі про обтікання кулі потоком ідеальної рідини.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити інтеграли $\int\limits_0^x xJ_0(x)dx, \quad \int\limits_0^x x^3 J_0(x)dx.$
2. Обчислити (виразити через елементарні функції) $J_{\frac{3}{2}}(x), \quad J_{\frac{5}{2}}(x).$
3. Обчислити за формулою (6.31) $P_n(x)$ при $n = 4,5,6,7.$
4. Записати загальний розв’язок рівняння $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0$.
5. Записати загальний розв’язок рівняння $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$.
6. Записати загальний розв’язок рівняння $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{3}{5x^2})y = 0$.
7. Написати рівняння, розв’язком якого були б функції $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$
8. Написати інтегральне представлення Пуассона функції $J_{-2}(x).$
9. Знайти температуру нескінченного циліндра радіуса a за умови, що на його поверхні підтримується температура, рівна нулю, а початкова температура дорівнює $u\big|_{t=0} = U_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$
10. Вивчити віссесиметричні коливання круглої мембрани радіуса a, викликані ударним імпульсом P, прикладеним у момент $t = 0$ та розподіленим по площі круга радіуса ε, ρ – поверхнева густина мембрани, а початкові умови такі: $u\big|_{t=0}, \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} v_0 = \dfrac{P}{\pi\varepsilon^2\rho}, 0 \le r < \varepsilon, \\ 0, \quad \varepsilon > r \le a. \end{cases}.$
11. Навести загальний розв’язок задачі про коливання кільцевої мембрани, закріпленої на колах $r = a$ та $r = b$ при довільних початкових умовах $u\big|_{t=0} = f(r), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r).$

12. Дослідити вільні пружні поперечні коливання круглої плити радіуса a із жорстко закріпленим краєм при довільних початкових умовах $u\big|_{t=0} = f(r), \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r).$

13. На круглу мембрану, закріплену по краю, діє зовнішня гармонічна сила $q(x,t) = A\rho \sin \omega t$, неперервно розподілена по усій площі мембрани. Перевірте, що вимушені коливання мембрани такі $u = \dfrac{A}{\omega^2}\left(\dfrac{J_0\left(\dfrac{\omega}{v} r \right)}{J_0\left(\dfrac{\omega}{v} R \right)} - 1 \right) \sin \omega t,$ де $R-$ радіус мембрани.

14. Обчислити інтеграли $\int\limits_0^x x^2 J_0(x)dx, \quad \int\limits_0^x x J_0(x)dx.$

15. Знайти температуру нескінченного циліндра радіуса a за умови, що на його поверхні підтримується температура, рівна нулю, а початкова температура дорівнює $u\big|_{t=0} = U_0\left(1 - \dfrac{r^2}{a^2} \right).$

16. Знайти закон вирівнювання вісесиметричного початкового розподілу температури $u(r,0) = f(r)$ у нескінченному циліндрі радіуса $r = a$, бічна поверхня якого теплонепроникна.

17. Написати рівняння, розв'язком якого були б функції $\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \sin x, \quad \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \cos x.$

18. Циліндр радіуса $r = a$ нагрівають до температури T_0, а потім охолоджують з поверхні таким чином, що її температура поверхні, починаючи з моменту часу $t = 0$, підтримується сталою та рівною нулю. Знайти закон охолодження циліндра, вважаючи, що розподіл температури в усіх поперечних перерізах однаковий.

19. Знайти температуру круглого нескінченного циліндра радіуса $r = a$ за умови, що на його поверхні відбувається конвективний теплообмін із середовищем, температура якого дорівнює нулю, а

початкова температура дорівнює $u\big|_{t=0} = f(r),\ 0 \le r \le a$. Розглянути окремий випадок, коли $f(r) = U_0 = const.$

20. В циліндрі радіуса R та висотою h протягом експерименту температура нижньої основи та бічної поверхні дорівнює нулю, а температура верхньої основи є функцією від r. *Вказівка:* для розв'язання задачі потрібно знайти такий інтеграл рівняння Лапласа, який би задовольняв умови $u\big|_{r=0} = O(1), u\big|_{z=0} = 0,$ $u\big|_{z=h} = f(r),\ 0 < r < R, u\big|_{r=R} = 0$.

21. Вивчити вісесиметричні коливання круглої мембрани радіуса a, викликані ударним імпульсом P, прикладеним у момент $t = 0$ та розподіленим по площі круга радіуса ε, ρ – поверхнева густина мембрани, а початкові умови такі:
$$u\big|_{t=0}, \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \begin{cases} v_0 = \dfrac{P}{\pi\varepsilon^2\rho}, 0 \le r < \varepsilon, \\ 0, \quad \varepsilon > r \le a. \end{cases}.$$

22. Розв'язати задачу 19 з припущенням, що бічна поверхня циліндра покрита теплонепроникним чохлом. *Вказівка:* третю крайову умову в задачі 19 замінити на $\dfrac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R} = 0$.

23. Розв'язати задачу 19 з припущенням, що бічна поверхня циліндра вільно охолоджується у повітря, яке має нульову температуру. *Вказівка:* третю крайову умову в задачі 19 замінити на $\dfrac{\partial u}{\partial r} + h_1 u\bigg|_{r=R} = 0$.

24. Центр круглої мембрани відхилений при $t = 0$ на малу висоту h. Початкові швидкості точок мембрани рівні нулю. Дослідити коливання мембрани. *Вказівка:* початкові умови такі: $u\big|_{t=o} = h\left(1 - \dfrac{r^2}{a^2}\right), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0.$

25. Навести загальний розв'язок задачі про коливання кільцевої мембрани, закріпленої на колах $r = a$ та $r = b$ при довільних початкових умовах $u\big|_{t=0} = f(r), \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = g(r).$

26. Циліндр, радіус якого R і висота h, має температуру обох основ, рівну нулю, а температура бічної поверхні є функцією від z. Знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок.

27. Розкласти функцію $f(x)$ на інтервалі $(-1,1)$, якщо $f(x)=\begin{cases}-1, & -1\le x\le 0,\\ 1, & 0<x\le 1.\end{cases}$

28. Розв'язати рівняння коливання круглої мембрани $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$ при крайовій умові (мембрана закріплена по контуру) $u\big|_{r=b}=0$ та початкових умовах $u\big|_{r=b}=0$, початкових умовах $u\big|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=1-\frac{r^2}{b^2}$.

29. Написати інтегральне представлення Пуассона функції $J_{-1}(x)$.

30. Дослідити пружні поперечні коливання круглої плити радіуса a із закріпленим краєм при довільних початкових умовах $u\big|_{t=0}=f(r),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(r)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Арсенин В.Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. – М.: Физматгиз, 1966. – 368 с.
2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике.– М.:ГИТТЛ, 1956. – 684 с.
3. Бутенин Н.В. Введение в аналитическую механику. – М.: Наука, 1974. – 264 с.
4. Вища математика. Спеціальні розділи. Підручник: У двох книгах. Книга 2 /Г.Л. Кулініч, Є.Ю. Таран, В.М. Бурим та ін.; За ред. Г.Л. Кулініча. – К.: Либідь, 1996. – 336 с.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.– 4-е изд. – М.: Наука, 1981 – 512 с.
6. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: Учебник для вузов. – 2-е изд., стереотип. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 400 с.
7. Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. Учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2004. – 539 с.
8. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. шк., 1970. – 712 с.
9. Очан Ю.С. Методы математической физики. – М.: Высш. шк., 1965. –384 с.
10. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
11. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4, ч. 1. – М.: Наука, 1974. –336 с.
12. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М.: ИЛ, 1955. –668 с.
13. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 444 с.
14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
15. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. – М.: ИЛ, 1962. – 352 с.
16. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.