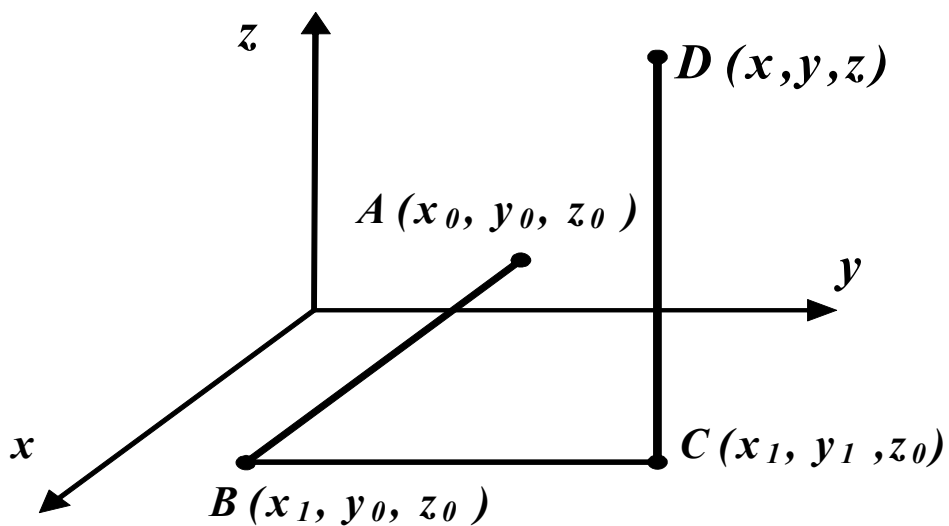


*Н.В. Сачанюк-Кавецька, Л.І. Педорченко*

## ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ



**Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет**

*Н.В. Сачанюк-Кавецька, Л.І. Педорченко*

## **ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ**

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник студентів технічних спеціальностей. Протокол № 12 від 29 червня 2006 р.

Вінниця ВНТУ 2006

УДК 612.623

С 22

*Рецензенти:*

**П.М. Зузяк**, доктор фізико-математичних наук, професор

**В.П. Кожем'яко**, доктор технічних наук, професор

**В.С. Абрамчук**, кандидат фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

**Сачанюк-Кавецька Н.В., Педорченко Л.І.**

С 22 **Елементи теорії поля.** Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2006. -100 с.

В посібнику розглянуто поняття скалярного та векторного полів, їх основні характеристики; спеціальні типи полів. В посібнику наведена достатня кількість прикладів та задач, в тому числі і прикладного характеру. Розглянуті приклади вдало доповнюють текстовий матеріал, зрозумілі і легко сприймаються.

До кожної теми розроблені питання для самоперевірки та розглянуто по 40 варіантів завдань для самостійної роботи, що дозволяє використовувати посібник для практичних занять.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК 612.623

© Н. В. Сачанюк-Кавецька,  
Л.І. Педорченко, 2006

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА .....	4
ТЕМА 1 СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ ТА ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ .....	5
1.1 Похідна за напрямом.....	5
1.2. Поняття та властивості градієнта.....	8
Питання для самоперевірки.....	12
Завдання для самостійної роботи.....	12
ТЕМА 2 ПОНЯТТЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ТА ЙОГО ПОТОКУ .....	17
2.1 Потік векторного поля.....	17
2.2 Обчислення потоку векторного поля.....	20
2.3 Формула Остроградського-Гаусса.....	27
Питання для самоперевірки.....	40
Завдання для самостійної роботи.....	41
ТЕМА 3 ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ.....	45
3.1 Дивергенція (розбіжність) векторного поля .....	45
3.2 Обчислення дивергенції векторного поля в декартовій системі координат.....	45
3.3 Проекція ротора векторного поля на вектор нормалі та ротор векторного поля.....	51
3.4. Оператор Гамільтона .....	53
3.5 Диференціальні операції другого порядку .....	54
3.6 Властивості ротора векторного поля .....	57
3.7 Циркуляція векторного поля та її обчислення. Формула Стокса .....	60
3.8 Основні операції векторного аналізу в криволінійних координатах .....	69
Питання для самоперевірки.....	75
Завдання для самостійної роботи.....	76
ТЕМА 4 СПЕЦІАЛЬНІ ТИПИ ПОЛІВ.....	88
4.1 Потенціальні векторні поля.....	88
4.2 Соленоїдні (трубчасті) поля .....	91
4.3 Гармонічне поле .....	95
Питання для самоперевірки.....	97
Завдання для самостійної роботи.....	98
ЛІТЕРАТУРА.....	100

## ПЕРЕДМОВА

Теорія поля є теоретичною основою таких фундаментальних курсів, як «Теоретичні основи електротехніки», «Теоретичні основи радіотехніки», «Рівняння математичної фізики» й ін. Це робить актуальним створення нових навчальних посібників з дисципліни «Теорія поля».

Основний принцип, яким керувались автори при підготовці курсу теорії поля для студентів технічних вузів, – підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з посиленням її прикладної технічної спрямованості. Це не тільки навчальний посібник, але й коротке керівництво до розв'язування задач. Основи теорії, викладені в навчальному посібнику, супроводжуються великою кількістю задач (в тому числі і фізичного змісту), які наводяться з розв'язуванням та задачами для самостійної роботи. Задачі з розв'язанням розглядаються протягом всього викладення навчального матеріалу. Задачі для самостійної роботи розглядаються в кінці кожної теми. Всього тем, розглянутих в навчальному посібнику, чотири: скалярне поле та його характеристики; поняття векторного поля та його потоку; характеристики векторного поля; спеціальні типи полів. При цьому головний акцент робиться на основні поняття курсу, їх фізичний зміст та застосування. Істотною особливістю даного навчального посібника є розгляд диференціальних операцій другого порядку та основних операцій векторного аналізу в криволінійних координатах.

Даний посібник може бути використаний студентами як денної, так і заочної форм навчання.

## ТЕМА 1 СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ ТА ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Якщо в кожній точці плоскої або просторової області задано функцію координат точки, то цю функцію називають *скалярним полем* і позначають символом

$$f(M) = f(x, y, z). \quad (1.1)$$

Прикладами скалярних полів є поле температури даного тіла, поле густини даного неоднорідного середовища, поле вологості повітря, поле атмосферного тиску, поле потенціалів заданого електростатичного поля тощо.

Важливою характеристикою скалярного поля, що дає загальне уявлення про характер зміни поля, є *поверхні або лінії рівня*.

Поверхня, в кожній точці якої поле зберігає одне і те ж значення, називається *поверхнею рівня*. Згідно з означенням рівняння поверхні рівня таке:

$$f(x, y, z) = const. \quad (1.2)$$

У випадку, коли поле задано на площині, поверхні рівня вироджуються в лінії рівня:

$$f(x, y) = const. \quad (1.3)$$

Прикладом ліній рівня є лінії постійної висоти гір або постійної глибини морів на географічних картах. Поверхні і лінії рівня – це інтегральні характеристики скалярного поля. Локальними характеристиками скалярного поля є *похідна поля у заданому напрямі та градієнт*.

### 1.1 Похідна за напрямом

Нехай задано скалярне поле  $f(x, y, z)$ . Візьмемо в ньому точку  $M(x, y, z)$  і проведемо з цієї точки вектор  $\vec{s}$ , напрямні косинуси якого  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  (рис. 1.1).

На векторі  $\vec{s}$  на відстані  $\Delta s$  від його початку візьмемо точку  $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ .

$$\text{Тоді } \Delta s = MM_1 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

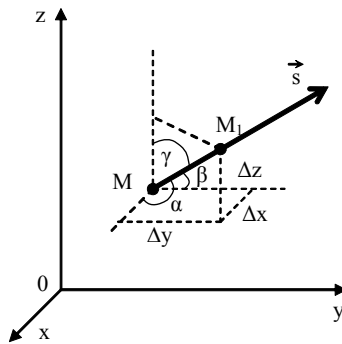


Рисунок 1.1

Обчислимо тепер приріст  $\Delta_s f$  функції  $f(x, y, z)$  при переході від точки  $M$  до точки  $M_1$  в напрямі вектора  $\vec{s}$ :

$$\Delta_s f = f(M_1) - f(M).$$

Якщо існує границя відношення  $\frac{\Delta_s f}{\Delta s}$  при  $\Delta s \rightarrow 0$ , то цю границю називають *похідною функції  $f(x, y, z)$  в точці  $M(x, y, z)$  за напрямом вектора  $\vec{s}$*  і позначають  $\frac{\partial f}{\partial s}$ , тобто

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta_s f}{\Delta s}. \quad (1.4)$$

Виведемо формулу для обчислення похідної за напрямом. Припустимо, що функція  $f(x, y, z)$  диференційовна в точці  $M(x, y, z)$ . Тоді її повний приріст в цій точці можна записати так:

$$\Delta_s f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z, \quad (1.5)$$

де  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – нескінченно малі функції при  $\Delta s \rightarrow 0$ .

Оскільки

$$\Delta x = \Delta s \cos \alpha, \quad \Delta y = \Delta s \cos \beta, \quad \Delta z = \Delta s \cos \gamma, \quad (1.6)$$

то вираз (1.5) набуває вигляду

$$\frac{\Delta_s f}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma + \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta + \varepsilon_3 \cos \gamma. \quad (1.7)$$

Перейшовши в рівності (1.7) до границі при  $\Delta s \rightarrow 0$ , дістанемо формулу для обчислення похідної за напрямом

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma. \quad (1.8)$$

З формули (1.8) випливає, що частинні похідні є окремими випадками похідної за напрямом. Дійсно, якщо  $\bar{s}$  збігається з одним із ортів  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ , то похідна за напрямом  $\bar{s}$  збігається з відповідною частинною похідною. Наприклад, якщо  $\bar{s} = \bar{i}$ , то  $\alpha = 0, \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ , тому

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos 0 + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Подібно до того, як частинні похідні характеризують швидкість зміни функції в напрямі осей координат, так і похідна  $\frac{\partial f}{\partial s}$  показує швидкість зміни скалярного поля  $f(x, y, z)$  в точці  $M(x, y, z)$  за напрямом вектора  $\bar{s}$ .

Абсолютна величина похідної  $\left| \frac{\partial f}{\partial s} \right|$  відповідає значенню швидкості, а знак похідної визначає характер зміни функції  $f(x, y, z)$  в напрямі  $\bar{s}$  (зростання чи спадання).

Очевидно, що похідна за напрямом, протилежним напрямку  $\bar{s}$ , дорівнює похідній за цим напрямом, взятій з протилежним знаком.

Справді, при зміні напрямку на протилежний кути  $\alpha, \beta, \gamma$  збільшуються на величину  $\pi$ , тому

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\alpha + \pi) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos(\beta + \pi) + \frac{\partial f}{\partial z} \cos(\gamma + \pi) = -\frac{\partial f}{\partial s}.$$

Фізичний зміст цього результату такий: зміна напрямку на протилежний не впливає на значення швидкості зміни поля, а тільки на характер цієї зміни.



**Приклад 1.1** Знайти похідну скалярного поля  $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3} + 3z$  в точці  $M_1(1, 0, 1)$  в напрямі точки  $M_2(3, 2, 2)$ .

### Розв'язування

Похідну скалярного поля  $f(x, y, z)$  в точці  $M_1$  обчислимо за формулою (1.8).

Для цього знайдемо частинні похідні скалярного поля за кожною змінною та обчислимо значення цих похідних в точці  $M_1$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3}(x^3 + y^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}, \quad \frac{\partial f(M_1)}{\partial x} = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}(x^3 + y^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3y^2 = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}, \quad \frac{\partial f(M_1)}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3, \quad \frac{\partial f(M_1)}{\partial z} = 3.$$

Обчислимо напрямні косинуси вектора  $\vec{s} = \overline{M_1 M_2} (2, 2, 1)$ . Оскільки  $|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$ , то  $\cos \alpha = \cos \beta = \frac{2}{3}$ ,  $\cos \gamma = \frac{1}{3}$ .

Отже,

$$\frac{\partial f(M_1)}{\partial s} = 1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}, \text{ тобто } \frac{\partial f(M_1)}{\partial s} = \frac{5}{3}.$$

## 1.2 Поняття та властивості градієнта

Нехай задано поле  $f(x, y, z)$  і точку. У якому напрямі похідна  $\frac{\partial f}{\partial s}$  має найбільше значення? Відповідь на це запитання має важливе практичне значення і дається на основі поняття *градієнта поля*.

Вектор, координати якого є значення частинних похідних функції  $f(x, y, z)$  в точці  $M(x, y, z)$ , називають *градієнтом функції* в цій точці і позначають  $\text{grad } f$ . Отже,

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.9)$$

Зв'язок між градієнтом та похідною в даній точці за довільним напрямом показує така теорема.

**Теорема.** Похідна функції  $f(x, y, z)$  в точці  $M(x, y, z)$  за напрямом вектора  $\vec{s}$  дорівнює проекції градієнта функції в цій точці на вектор  $\vec{s}$ , тобто

$$\frac{\partial f}{\partial s} = np_{\vec{s}} \text{ grad } f. \quad (1.10)$$

### Доведення

Нехай  $\varphi$  – кут між градієнтом (1.9) і одиничним вектором  $\vec{s}^0(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  (рис. 1.2). Тоді з властивостей скалярного добутку дістанемо

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma = (\text{grad } f) \vec{s}^0 = |\text{grad } f| |\vec{s}^0| \cos \varphi =$$

$= |\text{grad } f| \cos \varphi = np_{\vec{s}} \text{ grad } f$ . Тобто,  $\frac{\partial f}{\partial s} = np_{\vec{s}} \text{ grad } f$ . Що і треба було довести.

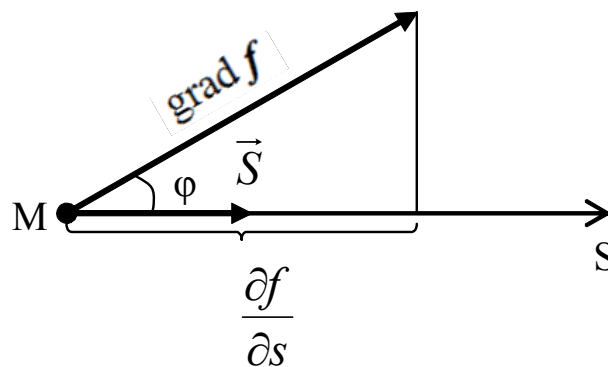


Рисунок 1.2

Зазначимо деякі **властивості градієнта**.

**1.** Похідна в даній точці за напрямом вектора має найбільше значення, якщо напрям цього вектора збігається з напрямом градієнта, причому

$$\left( \frac{\partial f}{\partial s} \right)_{\max} = |\text{grad } f| = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}. \quad (1.11)$$

Справді, з формули (1.10) випливає, що похідна за напрямом досягає максимального значення (1.11), якщо  $\cos \varphi = 1$ ,  $\varphi = 0$ , тобто, якщо напрям вектора  $\vec{s}$  збігається з напрямом градієнта.

Таким чином, швидкість зростання скалярного поля в довільній точці є максимальною у напрямі градієнта. Зрозуміло, що у напрямі, протилежному напрямку градієнта, поле найшвидше зменшуватиметься.

2. Похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю. Іншими словами, скалярне поле залишається сталим у напрямі, перпендикулярному до градієнта.

Дійсно, за формулою (1.10)  $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ , якщо  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

3. Вектор-градієнт у кожній точці поля  $f(x, y, z)$  перпендикулярний до поверхні рівня, яка проходить через цю точку.

Це твердження випливає з того, що напрямний вектор нормалі до поверхні рівня  $f = f(M_0)$ , яка проходить через точку  $M_0$ , має координати

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}.$$

4. Справедливі рівності:

$$\begin{aligned} \text{grad } (u + v) &= \text{grad } u + \text{grad } v; \\ \text{grad } (cu) &= c \text{ grad } u; \quad c = \text{const}; \\ \text{grad } (uv) &= v \text{ grad } u + u \text{ grad } v; \\ \text{grad } \frac{u}{v} &= \frac{v \text{ grad } u - u \text{ grad } v}{v^2}; \\ \text{grad } f(u) &= \frac{\partial f}{\partial u} \text{ grad } u. \end{aligned}$$

Доведемо, наприклад, третю рівність. Маємо:

$$\begin{aligned} \text{grad } (uv) &= \frac{\partial}{\partial x}(uv)\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}(uv)\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(uv)\bar{k} = \left( \frac{\partial u}{\partial x}v + \frac{\partial v}{\partial x}u \right)\bar{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial y}u \right)\bar{j} + \\ &+ \left( \frac{\partial u}{\partial z}v + \frac{\partial v}{\partial z}u \right)\bar{k} = \left( \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} \right)v + \left( \frac{\partial v}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\bar{k} \right)u = \\ &= v \text{ grad } u + u \text{ grad } v. \end{aligned}$$

Решта рівностей доводяться аналогічно.

**Приклад 1.2** Знайти величину і напрям градієнта скалярного поля  $f(M) = \arctg \frac{3y}{x} + 2z^2$  в точці  $M_0(1,0,1)$ .

### **Розв'язування**

Градiєнт скалярного поля обчислимо за формулою (1.9). Для цього знайдемо частинні похідні скалярного поля за кожною змінною:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{9y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{3y}{x^2}\right) = \frac{-3y}{x^2 + 9y^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{9y^2}{x^2}} \cdot \frac{3}{x} = \frac{3x}{x^2 + 9y^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4z.$$

Обчислимо значення частинних похідних в точці  $M_0(1,0,1)$ , дістанемо:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} = 4.$$

Отже,

$$\mathit{grad} f(M_0) = 0\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k},$$

або

$$\mathit{grad} f(M_0) = 3\bar{j} + 4\bar{k}.$$

Обчислимо величину градієнта скалярного поля за формулою (1.11), маємо:

$$|\mathit{grad} f(M_0)| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Таким чином, найбільша швидкість зростання скалярного поля  $f(M)$  в точці  $M_0$  досягається у напрямі вектора  $\mathit{grad} f(M_0) = 3\bar{j} + 4\bar{k}$  і дорівнює  $|\mathit{grad} f(M_0)| = 5$ .

### ***Питання для самоперевірки***

1. Що називається скалярним полем?
2. Наведіть приклади скалярних полів.
3. Дайте означення похідної за напрямом.
4. Виведіть формулу для похідної за напрямом.
5. У чому полягає фізичний зміст похідної за напрямом?
6. Дайте означення градієнта скалярного поля.
7. Доведіть теорему про зв'язок градієнта і похідної за напрямом.
8. Сформулюйте і доведіть властивості градієнта.
9. У чому полягає фізичний зміст градієнта?
10. Як означаються напрямні косинуси вектора?
11. Дайте означення поверхонь та ліній рівня.
12. Дайте визначення скалярного добутку векторів та сформулюйте його властивості.

### ***Завдання для самостійної роботи***

#### *Завдання 1.1*

1. Знайти похідну скалярного поля  $U = x^2 + y^2 - 3 \cdot x + 2 \cdot y$  в точці  $M_1(0;0;0)$  в напрямі, що йде від цієї точки до точки  $M_2(3;4;0)$ .
2. Знайти швидкість зміни скалярного поля  $U = xyz$  в точці  $M_1(5;1;-8)$  в напрямі, що йде від цієї точки до точки  $M_2(9;4;4)$ .
3. Знайти похідну скалярного поля  $U = x^2 + y^2$  в точці  $M_1 = (3;2)$  в напрямі, що утворює з віссю  $Ox$  кут  $\alpha = 45^\circ$ .
4. Знайти похідну скалярного поля  $U = x^2 - x \cdot y + y^2$  в точці  $M_1(2;-1)$  в напрямі, що утворює з віссю  $Ox$  кут  $\alpha = 120^\circ$ .
5. Знайти похідну скалярного поля  $U = x^2 - 3xy - y^2$  в точці  $M_1(3;1)$  в напрямі від цієї точки до точки  $M_2(6;5)$ .

6. Знайти похідну скалярного поля  $U = \operatorname{arctg}xy$  в точці  $M_1(2;2)$  в напрямі бісектриси першого координатного кута.
7. Знайти похідну скалярного поля  $U = x^2y^2 - xy^3 - 3y$  в точці  $M_1(2;1)$  в напрямі від цієї точки до початку координат.
8. Знайти похідну скалярного поля  $U = x^2 + y^2 + z^2 - x + y + z + 1$  в точці  $M_1(1;-2;3)$  в напрямі від цієї точки до початку координат.
9. Знайти похідну скалярного поля  $U = y^2z - 2xyz + z^2$  в точці  $M_1(3;1;1)$  в напрямі вектора  $\vec{a}$ , який утворює з осями координат кути  $\alpha, \beta, \gamma$ , причому  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ;  $\beta = \frac{\pi}{4}$ .
10. Знайти похідну скалярного поля  $U = x^2 + y^2 - 3 \cdot x + 2 \cdot y$  в точці  $M_1(0;0;0)$  в напрямі від цієї точки до точки  $M_2(3;4;0)$ .
11. Знайти похідну скалярного поля  $U = xy^2 + z^3 - xyz$  в точці  $M_1(1;1;0)$  в напрямі, що утворює з осями координат кути відповідно  $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ .
12. Знайти похідну скалярного поля  $U = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz$  в точці  $M_1(1;1;1)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = 8 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j} + 8 \cdot \vec{k}$ .
13. Знайти похідну скалярного поля  $U = 4 \ln(3 + x^2) - 8xyz$  в точці  $M_1(1;1;1)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ .
14. Знайти похідну скалярного поля  $U = x \cdot z^2 - \sqrt{x^5 \cdot y}$  в точці  $M_1(2;2;4)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ .
15. Знайти похідну скалярного поля  $U = \sqrt[3]{x \cdot y^2} + z^3$  в точці  $M_1(1;1;1)$  в напрямі від цієї точки до точки  $M_2(2;3;-1)$ .
16. Знайти похідну скалярного поля  $U = \ln(5 \cdot x^2 + 3 \cdot y^2)$  в точці  $M_1(1;1)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$ .
17. Знайти похідну скалярного поля  $U = 2x^3 - y^3 + z^3 + xyz$  в точці  $M_1(1;1;1)$  в напрямі від цієї точки до початку координат.

18. Знайти похідну скалярного поля  $U = x^3 + \sqrt{y \cdot z}$  в точці  $M_1(2;1;1)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 2 \cdot \vec{k}$ .
19. Знайти похідну скалярного поля  $U = \arctg xy^2$  в точці  $M_1(2;1)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = 4 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}$ .
20. Знайти похідну скалярного поля  $U = \ln(3 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2)$  в точці  $M_1(1;3)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - \vec{j}$ .
21. Знайти похідну скалярного поля  $U = x \cdot \sqrt{y} + y \cdot \sqrt{z}$  в точці  $M_1(2;4;4)$  в напрямі від цієї точки до точки  $M_2(1;1;1)$ .
22. Знайти похідну скалярного поля  $U = \arctg \frac{y}{x} + xz$  в точці  $M_1(2;2;-1)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$ .
23. Знайти похідну скалярного поля  $U = \ln(5 \cdot x + 4 \cdot y^2)$  в точці  $M_1(1;1)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - \vec{j}$ .
24. Знайти похідну скалярного поля  $U = \arctg \frac{x^2}{y}$  в точці  $M_1(1;2)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = 5 \cdot \vec{i} - 12 \cdot \vec{j}$ .
25. Знайти похідну скалярного поля  $U = \sqrt{x \cdot y} + \sqrt{4 + z^2}$  в точці  $M_2(1;1;0)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} + \vec{j} - 2 \cdot \vec{k}$ .
26. Знайти похідну скалярного поля  $U = \ln(1 + x^2 + y^2)$  в точці  $M_1(1;1)$  в напрямі від цієї точки до точки  $M_2(4;5)$ .
27. Знайти похідну скалярного поля  $U = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$  в точці  $M_1(0;-3;4)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ .
28. Знайти похідну скалярного поля  $U = x^2 \cdot y + y^3 + z^3$  в точці  $M_1(0;1;1)$  в напрямі від цієї точки до точки  $M_2(2;3;2)$ .

29. Знайти похідну скалярного поля  $U = \arctg x^2 y$  в точці  $M_1(1;2)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j}$ .
30. Знайти похідну скалярного поля  $U = \ln(3 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2)$  в точці  $M_1(1;1)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$ .
31. Знайти похідну скалярного поля  $U = 3x^2 yz + 2y^2 z^2$  в точці  $M_1(1;1;1)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$ .
32. Знайти похідну скалярного поля  $U = 4 \cdot \ln(3 + y^2) - 8 \cdot x \cdot y \cdot z$  в точці  $M_1(1;1;1)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} + \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ .
33. Знайти похідну скалярного поля  $U = y \cdot \sqrt{x} + z \cdot \sqrt{y}$  в точці  $M_1(4;4;2)$  в напрямі від цієї точки до точки  $M_2(1;1;1)$ .
34. Знайти похідну скалярного поля  $U = 2x^2 - y^2 + 3x - 2y$  в точці  $M_1(1;2)$  в напрямі від цієї точки до точки  $M_2(4;-2)$ .
35. Знайти похідну скалярного поля  $U = \ln(2x^3 + 3y^2)$  в точці  $M_1(1;1)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}$ .
36. Знайти похідну скалярного поля  $U = y^2 \cdot z + \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$  в точці  $M_1(1;1;2)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} - 2 \cdot \vec{k}$ .
37. Знайти похідну скалярного поля  $U = \arctg \frac{x}{y}$  в точці  $M_1(2;2)$  в напрямі бісектриси першого координатного кута.
38. Знайти похідну скалярного поля  $U = 3x^2 + 2y^2 - 3z^2$  в точці  $M_1(0;0;0)$  в напрямі від цієї точки до точки  $M_2(1;2;2)$ .
39. Знайти похідну скалярного поля  $U = \sqrt{x \cdot z} + \sqrt{4 + y^2}$  в точці  $M_1(1;0;1)$  в напрямі вектора  $\vec{a} = 2 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$ .
40. Знайти похідну скалярного поля  $U = x^3 + \sqrt{y \cdot z^2}$  в точці  $M_1(1;1;1)$  в напрямі від цієї точки до точки  $M_2(-1;2;3)$ .



### Завдання 1.2

Знайти величину і напрям градієнта скалярного поля  $U$  в точці  $M_1$

- |                                |              |                                     |                                 |
|--------------------------------|--------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| 1. $U=\ln(x^2+4y^2)$ ,         | $M_1(2;1)$   | 22. $U=x^2\sqrt{y}+y\sqrt{z}$ ,     | $M_1(1;1;1)$                    |
| 2. $U=\sqrt{x^2+y^2}$ ,        | $M_1(3;4)$   | 23. $U=\sqrt{xyz}$ ,                | $M_1(1;1;1)$                    |
| 3. $U=\arctg xy$ ,             | $M_1(1;1)$   | 24. $U=y^2\sqrt{x}+x\sqrt{z}$ ,     | $M_1(1;2;1)$                    |
| 4. $U=\frac{x}{y}+\sqrt{y}$ ,  | $M_1(3;1)$   | 25. $U=\ln(2x^2+3yz)$ ,             | $M_1(1;1;1)$                    |
| 5. $U=x-3y+\sqrt{3xy}$ ,       | $M_1(3;4)$   | 26. $U=2x^2y-yz^2$ ,                | $M_1(3;2;1)$                    |
| 6. $U=x^2+y^2-3x+2y+1$ ,       | $M_1(1;1)$   | 27. $U=3xy+2xz+3yz$ ,               | $M_1(1;1;1)$                    |
| 7. $U=\arcsin\frac{x}{x+y}$ ,  | $M_1(1;1)$   | 28. $U=\arctg\frac{x}{y}$ ,         | $M_1(1;1)$                      |
| 8. $U=\ln\frac{y}{x}$ ,        | $M_1(1;1)$   | 29. $U=\sqrt[3]{x^2+y}$ ,           | $M_1(2;2)$                      |
| 9. $U=\ln(x^2+4y^2)$ ,         | $M_1(6;4)$   | 30. $U=\frac{3y}{x}+\sqrt{x}$ ,     | $M_1\left(1;\frac{3}{2}\right)$ |
| 10. $U=\arcsin\frac{y^2}{x}$ , | $M_1(2;1)$   | 31. $U=\ln(3x^2+2yz)$ ,             | $M_1(1;1;1)$                    |
| 11. $U=y-3x+\sqrt{3xy}$ ,      | $M_1(4;3)$   | 32. $U=\sqrt{xy^3+z^2}$ ,           | $M_1(1;2;1)$                    |
| 12. $U=\ln(3x^2=5y^2)$ ,       | $M_1(1;1)$   | 33. $U=\ln(2x^2+3y^2)$ ,            | $M_1(1;1)$                      |
| 13. $U=2x^2y-z^2x$ ,           | $M_1(1;1;2)$ | 34. $U=\arctg\frac{y^2}{x}$ ,       | $M_1(2;1)$                      |
| 14. $U=3x^4+2x^2y^3$ ,         | $M_1(-1;2)$  | 35. $U=\sqrt{x^2+z^2}+y^2$ ,        | $M_1(3;1;4)$                    |
| 15. $U=3x^2y^2+3y^2x$ ,        | $M_1(1;1)$   | 36. $U=\sqrt{y^2+z^2}+x^2$ ,        | $M_1(3;4;1)$                    |
| 16. $U=\sqrt{x^2+y^2}+z^2$ ,   | $M_1(3;4;1)$ | 37. $U=x^3+y^3+z^3-3xyz$ ,          | $M_1(2;1;1)$                    |
| 17. $U=\ln(1+x^2+y^2)$ ,       | $M_1(1;1)$   | 38. $U=\sqrt[3]{(x^2+y^2+z^2)^2}$ , | $M_1(1;1;1)$                    |
| 18. $U=3x^2+2xy+y^2$ ,         | $M_1(2;1)$   | 39. $U=\ln(3xy+z^2)$ ,              | $M_1(1;1;1)$                    |
| 19. $U=5x^2-4xy$ ,             | $M_1(1;2)$   | 40. $U=\arcsin\frac{x^2}{y}$ ,      | $M_1(1;2)$                      |
| 20. $U=\sqrt{x^2y+z^3}$ ,      | $M_1(1;1;2)$ |                                     |                                 |
| 21. $U=\arctg\frac{x}{y}$ ,    | $M_1(1;1)$   |                                     |                                 |

## ТЕМА 2 ПОНЯТТЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ТА ЙОГО ПОТОКУ

Якщо в кожній точці простору чи площини задано вектор

$$\bar{a}(a_x(M), a_y(M), a_z(M)),$$

де  $a_x(M), a_y(M), a_z(M)$  є функції точки  $M$ , то кажуть, що задано *векторне поле*  $\bar{a}(M)$ .

Однією з важливих характеристик векторного поля є *векторні лінії*.

Векторною, називається лінія, в кожній точці якої дотична до неї паралельна вектору поля. Позначимо через  $\bar{\tau}(dx, dy, dz)$  вектор дотичної. Тоді рівняння векторної лінії таке

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}. \quad (2.1)$$

Ще однією особливою характеристикою векторного поля є *потік векторного поля*.

### 2.1 Потік векторного поля

Нехай  $\bar{a}(M)$  – поле швидкостей рухомої рідини, а  $\sigma$  – деяка гладка поверхня (рис. 2.1).

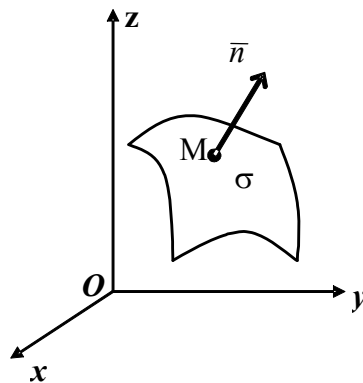


Рисунок 2.1

Введемо поняття сторони поверхні. Візьмемо на гладкій поверхні  $\sigma$  довільну точку  $M$ , проведемо в цій точці нормаль до поверхні  $\bar{n}$  певного напрямку і розглянемо на даній поверхні довільний замкнений контур, який виходить з точки  $M$  і повертається в цю ж точку, не перетинаючи при

цьому межі поверхні  $\sigma$ . Переміщатимемо точку по замкненому контуру разом з вектором  $\bar{n}$  так, щоб цей вектор весь час залишався нормальним до даної поверхні. При обході заданого контуру ми можемо повернутися в точку з тим самим або протилежним напрямом нормалі.

Якщо у довільну точку  $M$  поверхні  $\sigma$  після обходу довільного замкненого контуру, розміщеного на цій поверхні, який не перетинає її межі, ми повертаємось з початковим напрямом нормалі  $\bar{n}$ , то таку поверхню називають *двосторонньою*. Прикладами таких поверхонь є площина та сфера.

Якщо при обході деякого контуру поверхні  $\sigma$  напрям нормалі змінюється на протилежний, то таку поверхню називають *односторонньою*. Прикладом односторонньої поверхні є так званий *лист Мебіуса*. Модель цієї поверхні можна дістати, якщо прямокутну смужку паперу  $ABCD$ , перекрутивши один раз склеїти так, щоб точка  $A$  збігалась з точкою  $C$ , а точка  $B$  – з  $D$ .

Двосторонню поверхню називають *орієнтованою*, а вибір певної її сторони *орієнтацією поверхні*. Спрямувавши в кожній точці замкненої поверхні нормаль всередину об'єму, обмеженого поверхнею, дістанемо внутрішню сторону поверхні, а спрямувавши нормаль зовні поверхні – зовнішню її сторону. Надалі розглядатимемо двосторонні поверхні. Односторонні поверхні неорієнтовані.

Поставимо задачу обчислення кількості рідини, що протікає через поверхню  $\sigma$  за одиницю часу. Якщо вектор  $\bar{a}(a_x(M), a_y(M), a_z(M))$  в кожній точці поверхні  $\sigma$  має однаковий напрям та модуль, то кількість рідини, що протікає через цю поверхню за одиницю часу, визначається за формулою:

$$P = |\bar{a}| \cdot S_\sigma \cdot \cos \alpha, \quad (2.2)$$

де  $S_\sigma$  – площа поверхні  $\sigma$ ,

$\alpha$  – кут між вектором  $\bar{a}$  і нормаллю до поверхні  $\sigma$ .

Формулу (2.2) можна подати у вигляді:

$$P = np_n \bar{a} \cdot S_\sigma, \quad (2.3)$$

де  $np_n \bar{a}$  – проекція вектора  $\bar{a}$  на напрям нормалі до поверхні  $\sigma$ .

У випадку криволінійної поверхні та змінного вектора  $\bar{a}$  обчислити кількість рідини, що протікає через поверхню  $\sigma$  за одиницю часу, за формулами (2.2) або (2.3) неможливо.

Для обчислення кількості рідини, що протікає через поверхню  $\sigma$  за одиницю часу, розіб'ємо цю поверхню неперервними кривими на  $n$  досить

малих частин так, щоб зміною вектора  $\bar{a}$  та напрямку нормалі усередині кожної частини можна було б знехтувати.

Позначимо через  $\Delta S_i$  площу  $i$ -ої частини  $\Delta \sigma_i$ , яку вважаємо частиною площини з напрямком нормалі  $\bar{n}(M)$ . Виберемо усередині цієї частини довільну точку  $M_i$  та будемо вважати, що в усіх точках цієї частини вектор  $\bar{a}$  дорівнює  $\bar{a}(M_i)$ . Тоді кількість рідини, що протікає через  $i$ -у частину за одиницю часу, можна обчислити за наближеною формулою:

$$\Delta P_i \approx np_{n(M_i)} \bar{a}(M_i) \cdot \Delta S_i,$$

а кількість рідини, що протікає через всю поверхню  $\sigma$  за одиницю часу, дорівнює:

$$P \approx \sum_{i=1}^n \Delta P_i.$$

Тоді одержуємо наближену формулу

$$P \approx \sum_{i=1}^n np_{n(M_i)} \bar{a}(M_i) \cdot \Delta S_i. \quad (2.4)$$

Похибка цієї наближеної формули прямує до нуля при необмеженому зменшенні діаметрів усіх частин, на які розбита поверхня  $\sigma$ . Позначивши через  $\lambda$  максимальний діаметр  $\Delta \sigma_i$ , перейдемо в рівності (2.4) до границі при  $\lambda \rightarrow 0$ . Тоді маємо:

$$P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n np_{n(M_i)} \bar{a}(M_i) \cdot \Delta S_i. \quad (2.5)$$

Якщо границя (2.5) існує і не залежить ні від способу розбиття поверхні  $\sigma$  на частини, ні від способу вибору точок  $M_i$ , то її називають *поверхневим інтегралом* і позначають символом:

$$\iint_{\sigma} np_{\bar{n}} \bar{a}(M) d\sigma, \quad \text{тобто}$$

$$\iint_{\sigma} np_{\bar{n}} \bar{a}(M) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n np_{n(M_i)} \bar{a}(M_i) \cdot \Delta S_i. \quad (2.6)$$

Якщо підінтегральна функція у формулі (2.6) є проекцією вектора  $\vec{a}$  на напрям нормалі до поверхні  $\sigma$ , то такий поверхневий інтеграл називається потоком векторного поля  $\vec{a}$  через поверхню  $\sigma$ , причому

$$\Pi = \iint_{\sigma} \text{np}_{\vec{n}} \vec{a}(M) d\sigma. \quad (2.7)$$

Підінтегральний вираз у формулі (2.6) може бути записаний у векторній формі. Введемо вектор  $\vec{ds}$ , напрям якого збігається з напрямом нормалі, а модуль дорівнює елементарній площі поверхні  $ds$ , тоді

$$\text{np}_{\vec{n}} \vec{a}(M) d\sigma = \vec{a} \cdot \vec{ds},$$

тому потік

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{ds}. \quad (2.8)$$

Відмітимо основні *властивості потоку* векторного поля.

1. Якщо  $\text{np}_{\vec{n}} \vec{a} = c = \text{const}$ , то

$$\iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{ds} = c \cdot S_{\sigma},$$

де  $S_{\sigma}$  – площа поверхні  $\sigma$ .

2. При зміні напрямку нормалі потік змінює лише знак.

$$3. \iint_{\sigma} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{ds} = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{ds} + \iint_{\sigma} \vec{b} \cdot \vec{ds}.$$

$$4. \iint_{\sigma} c \vec{a} \cdot \vec{ds} = c \cdot \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{ds}, \text{ де } c = \text{const}.$$

5. Якщо поверхня  $\sigma$  розбита деякою кривою на дві частини  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$ , то

$$\iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \iint_{\sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{ds} + \iint_{\sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{ds}.$$

## 2.2 Обчислення потоку векторного поля

Оскільки  $\cos(\vec{n}^0, \vec{k}) d\sigma = dx dy$ ,  $\cos(\vec{n}^0, \vec{i}) d\sigma = dy dz$ ,  $\cos(\vec{n}^0, \vec{j}) d\sigma = dx dz$ ,

то

$$II = \iint_{\sigma} (a_x \cos(\bar{n}^0, \bar{i}) + a_y \cos(\bar{n}^0, \bar{j}) + a_z \cos(\bar{n}^0, \bar{k})) d\sigma = \iint_{\sigma} a_x dydz + a_y dx dz + a_z dx dy.$$

Поверхневі інтеграли можна обчислювати за допомогою подвійних інтегралів. Нехай функція  $a_z(x, y, z)$  неперервна в усіх точках поверхні  $\sigma$ , яка задана рівнянням  $z = z(x, y)$ . Точки  $(x, y) \in D_{xy}$ , де область  $D_{xy}$  – проекція даної поверхні на координатну площину  $Oxy$ . Виберемо верхню сторону поверхні  $\sigma$ , де нормаль до поверхні утворює з віссю  $Oz$  гострий кут. Тоді

$$\iint_{\sigma} a_z dx dy = \iint_{D_{xy}} a_z|_{z=z(x,y)} dx dy. \quad (2.9)$$

При обчисленні  $\iint_{D_{xy}} a_z dx dy$  в функції  $a_z(x, y, z)$  змінну  $z$  необхідно виразити через змінні  $y$  та  $x$ , використовуючи рівняння поверхні  $\sigma$ . Отже, маємо:

$$\iint_{\sigma} a_z(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} a_z(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (2.10)$$

Формула (2.10) виражає поверхневий інтеграл за змінними  $y$  та  $x$  через подвійний. Якщо вибрати нижню сторону поверхні (нормаль до поверхні утворює тупий кут з віссю  $Oz$ ), то одержаний подвійний інтеграл беруть із знаком «мінус», тому

$$\iint_{\sigma} a_z(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} a_z(x, y, z(x, y)) dx dy. \quad (2.11)$$

Аналогічно

$$\iint_{\sigma} a_x(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} a_x(x(y, z), y, z) dy dz; \quad (2.12)$$

$$\iint_{\sigma} a_y(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{yz}} a_y(x, y(x, z), z) dx dz. \quad (2.13)$$

В загальному випадку для обчислення потоку можна скористатися формулою:

$$\iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \bar{ds} = \pm \iint_{D_{yz}} a_x|_{x=x(y,z)} dy dz \pm \iint_{D_{xz}} a_y|_{y=y(x,z)} dx dz \pm \iint_{D_{xy}} a_z|_{z=z(x,y)} dx dy, \quad (2.14)$$

де  $D_{xy}, D_{xz}, D_{yz}$  – проекції поверхні  $\sigma$  на відповідні координатні площини.

Правильність вибору знаків перед подвійними інтегралами формули (2.14) можна перевірити за допомогою формули

$$\bar{n}^0 = \pm \frac{\varphi'_x \bar{i} + \varphi'_y \bar{j} + \varphi'_z \bar{k}}{\sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2 + (\varphi'_z)^2}}, \quad (2.15)$$

яка визначає одиничний нормальний вектор до поверхні  $\varphi(x, y, z) = 0$ . Подвійний інтеграл у цій формулі відповідає двом сторонам поверхні  $\sigma$ . Знак перед подвійним інтегралом збігається із знаком відповідного напрямного косинуса нормалі  $\bar{n}$ :

$$\cos(\bar{n}, \overline{Ox}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{i}; \quad \cos(\bar{n}, \overline{Oy}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{j}; \quad \cos(\bar{n}, \overline{Oz}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{k}. \quad (2.16)$$

Якщо поверхня  $\sigma$  неоднозначно проектується на яку-небудь координатну площину, то цю поверхню розбивають на частини, а інтеграл, який міститься у лівій частині рівності (2.14), – на суму інтегралів по одержаних частинах поверхні.

Для обчислення потоку векторного поля  $\bar{a}(M)$  через поверхню  $\sigma$  можна використовувати також одну із формул:

$$\Pi = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\bar{a} \bar{n}^0}{\cos(\bar{n}^0, \bar{k})} \right|_{z=z(x,y)} dx dy,$$

$$\Pi = \iint_{D_{yz}} \left. \frac{\bar{a} \bar{n}^0}{\cos(\bar{n}^0, \bar{i})} \right|_{x=x(y,z)} dy dz,$$

$$\Pi = \iint_{D_{xz}} \left. \frac{\bar{a} \bar{n}^0}{\cos(\bar{n}^0, \bar{j})} \right|_{y=y(x,z)} dx dz.$$

Термін «потік векторного поля» має фізичне походження. Вкажемо приклади фізичних величин, які обчислюються за допомогою формули (2.14):

а) Якщо векторне поле розглядати як поле швидкостей рухомої рідини, то її потік через поверхню  $\sigma$  дорівнює кількості рідини, що протікає через цю поверхню за одиницю часу у напрямку зовнішньої нормалі. Якщо потік через замкнену поверхню додатний, то це означає, що з частини простору, обмеженого цією поверхнею, витікає більше рідини, ніж затікає в неї. Такий результат пояснюється тим, що всередині закритої поверхні існують джерела, що виділяють рідину. Якщо потік від'ємний, то всередину поверхні затікає більше рідини, ніж витікає з неї. Такий результат означає, що всередині поверхні є стоки, які поглинають рідину.

б) Потік тепла має напрям і є векторною величиною. Довжина вектора потоку тепла вимірює кількість тепла, що протікає через одиницю площі за одиницю часу. Повний тепловий потік назовні через поверхню  $\sigma$  також визначається за формулою (2.14)

**Приклад 2.1** Обчислити інтеграл

$$I = \iint_{\sigma} \left(x - y + \frac{3}{2}z\right) dydz + x dx dz - z dx dy,$$

якщо  $\sigma$  – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини  $2x - 2y + z - 2 = 0$  з координатними площинами (рис. 2.2а)

### *Розв'язування*

За формулою (2.14) знайдемо проєкції поверхні  $\sigma$  на координатні площини:

$$D_{xy} = \{x - 1 \leq y \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 1\} \text{ (рис. 2.2, б);}$$

$$D_{xz} = \{0 \leq z \leq 2 - 2x, \quad 0 \leq x \leq 1\} \text{ (рис. 2.2, в);}$$

$$D_{yz} = \{0 \leq z \leq 2 - 2y, \quad -1 \leq y \leq 0\} \text{ (рис. 2.2, г).}$$

Визначимо нормальний вектор до поверхні  $\sigma$ :  
 $\varphi(x, y, z) = 2x - 2y + z - 2$ ;  $\varphi'_x = 2$ ,  $\varphi'_y = -2$ ,  $\varphi'_z = 1$ . За формулою (2.15)

$$\vec{n}^0 = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}. \text{ Оскільки за формулами (2.16)}$$



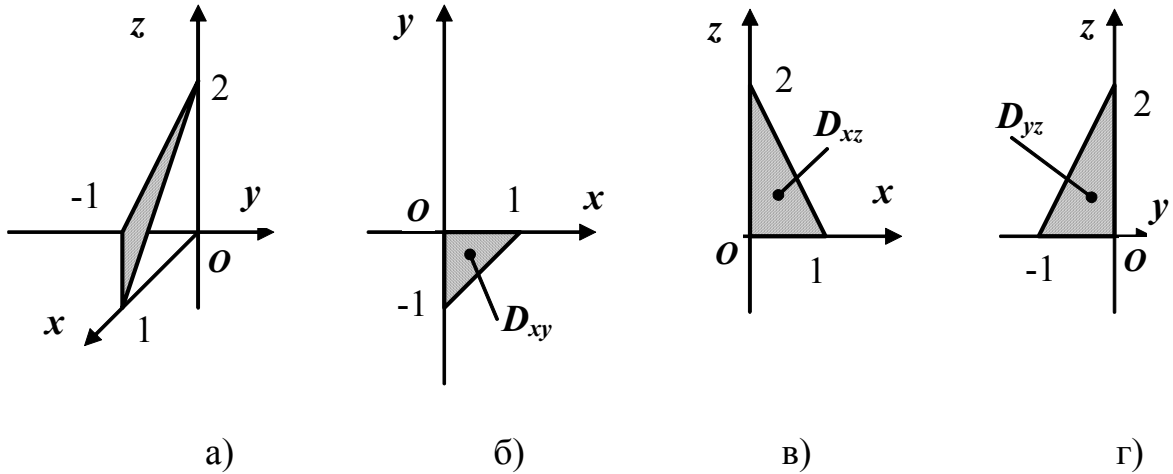


Рисунок 2.2

$$\cos(\bar{n}, \overline{Ox}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{i} = \frac{2}{3} > 0, \quad \cos(\bar{n}, \overline{Oy}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{j} = -\frac{2}{3} < 0, \quad \cos(\bar{n}, \overline{Oz}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{k} = \frac{1}{3} > 0,$$

то перед подвійними інтегралами у формулах (2.11) і (2.12) треба брати знак «плюс», а перед подвійним інтегралом у формулі (2.13) – знак «мінус». Отже,

$$I = \int_{-1}^0 dy \int_0^{2-2y} \left( \frac{1}{2}(2-z+2y) - y + \frac{3z}{2} \right) dz - \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} x dz + \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (2x-2y-2) dy = 7.$$

**Приклад 2.2** Обчислити потік вектора  $\bar{a}(x, y, z)$  через повну поверхню циліндра  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2$  (рис. 2.3).

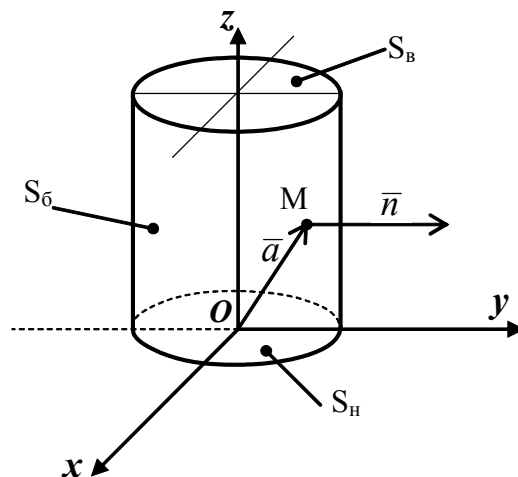


Рисунок 2.3

## Розв'язування

Потік через повну поверхню циліндра дорівнює

$$\Pi = \iint_{\sigma} \bar{a} \cdot \overline{ds} = \iint_{S_H} \bar{a} \cdot \overline{ds} + \iint_{S_{\sigma}} \bar{a} \cdot \overline{ds} + \iint_{S_B} \bar{a} \cdot \overline{ds},$$

де  $S_H$  – нижня основа циліндра,

$S_{\sigma}$  – бічна поверхня циліндра,

$S_B$  – верхня основа циліндра.

Для обчислення  $\iint_{S_{\sigma}} \bar{a} \cdot \overline{ds}$  діятимемо так. Виберемо на бічній поверхні циліндра довільну точку  $M$ , побудуємо вектор поля в цій точці і проведемо нормаль до поверхні. З рис. 2.3 бачимо, що  $np_n \bar{a}$  дорівнює радіусу циліндра, тобто  $np_n \bar{a} = 1$ . Тоді

$$\iint_{S_{\sigma}} \bar{a} \cdot \overline{ds} = \iint_{S_{\sigma}} np_n \bar{a} dS = \iint_{S_{\sigma}} dS = 2\pi \cdot 1 = 2\pi.$$

Тобто,  $\iint_{S_{\sigma}} \bar{a} \cdot \overline{ds}$  дорівнює площі бічної поверхні циліндра.

Для обчислення інтеграла  $\iint_{S_B} \bar{a} \cdot \overline{ds}$  чинимо аналогічно попередньому випадку (рис. 2.4).

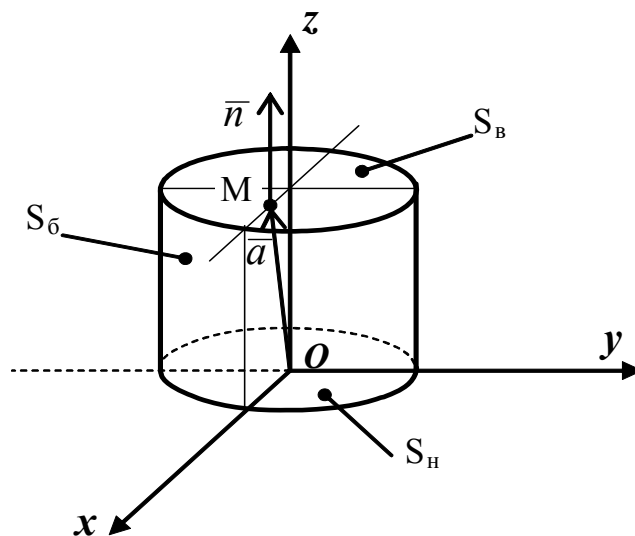


Рисунок 2.4

З рис. 2.4 бачимо, що  $np_n \bar{a}$  є сталою і дорівнює висоті циліндра, тобто  $np_n \bar{a} = 2$ . Отже,

$$\iint_{S_6} \bar{a} \cdot \bar{ds} = \iint_{S_6} np_n \bar{a} dS = 2 \iint_{S_6} dS = 2\pi,$$

оскільки радіус циліндра дорівнює одиниці. Тобто, потік вектора  $\bar{a}(x, y, z)$  через верхню основу циліндра дорівнює подвоєній площі цієї основи.

Обчислимо  $\iint_{S_H} \bar{a} \cdot \bar{ds}$ . На даній поверхні виберемо довільну точку  $M$  і зобразимо вектор поля в цій точці та вектор нормалі до поверхні (рис. 2.5).

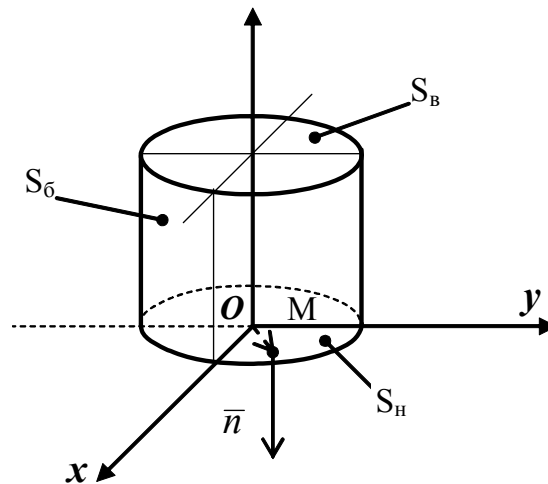


Рисунок 2.5

З рис. 2.5 видно, що вектор поля перпендикулярний вектору нормалі і  $np_n \bar{a} = 0$  в довільній точці поверхні  $S_H$ . Отже:

$$\iint_{S_H} \bar{a} \cdot \bar{ds} = \iint_{S_H} np_n \bar{a} dS = 0.$$

Таким чином, потік векторного поля через поверхню циліндра дорівнює:

$$\Pi = \iint_{S_H} \bar{a} \cdot \bar{ds} + \iint_{S_6} \bar{a} \cdot \bar{ds} + \iint_{S_B} \bar{a} \cdot \bar{ds} = 0 + 2\pi + 2\pi = 4\pi.$$

**Приклад 2.3** Обчислити потік вектора  $\bar{a}(2x - y + z, 0, 0)$  через поверхню  $z = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

### Розв'язування

В даному випадку  $np_n \bar{a}$  не є постійною на усій поверхні, тому для обчислення потоку застосуємо формулу (2.14). Оскільки  $a_y = a_z = 0$ , то формула (2.14) набуває вигляду:

$$P = \pm \iint_{D_{yz}} a_x|_{x=x(y,z)} dydz = \pm \iint_{D_{yz}} (2x - y + z)|_{x=\sqrt{z}} dydz,$$

де  $D_{yz}$  – проекція поверхні  $z = x^2$  на координатну площину  $Oyz$ .

Побудуємо задану поверхню та її проекцію на площину  $Oyz$  (рис. 2.6).

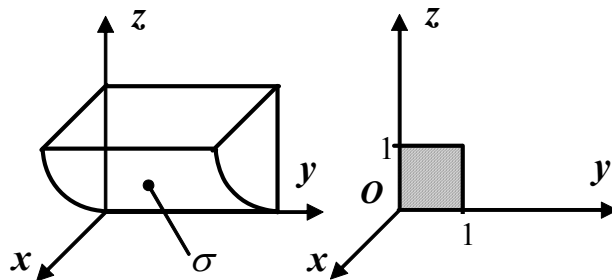


Рисунок 2.6

Визначимо нормальний вектор до поверхні  $\sigma$ :

$\varphi(x, y, z) = x^2 - z$ ;  $\varphi'_x = 2x$ ,  $\varphi'_y = 0$ ,  $\varphi'_z = -1$ . За формулою (2.15)

$\bar{n}^0 = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} \bar{i} - \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} \bar{k}$ . Оскільки за формулами (2.16)

$\cos(\bar{n}, \bar{Ox}) = \bar{n}^0 \cdot \bar{i} = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} > 0$  для всіх  $0 \leq x \leq 1$ , то при обчисленні потоку

перед подвійним інтегралом ставимо знак «плюс».

Тоді,

$$P = \iint_{D_{yz}} (2x - y + z) dydz = \iint_{D_{yz}} (2\sqrt{z} - y + z) dydz = \int_0^1 dy \int_0^1 (2\sqrt{z} - y + z) dz = \frac{4}{3}.$$

### 2.3 Формула Остроградського-Гаусса

Формула Остроградського-Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею.

Розглянемо деяке векторне поле  $\bar{a}(a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z))$ . Нехай в просторі задано правильну область  $V$ , обмежену замкненою

поверхнею  $\sigma$ , проекцією якої на координатну площину  $Oxy$  є правильна область  $D$  (рис. 2.7). Поверхня  $\sigma$  може бути розбита на нижню поверхню  $\sigma_1$ , яка задається рівнянням  $z = f_1(x, y)$ , верхню поверхню  $\sigma_2$ , яка задається рівнянням  $z = f_2(x, y)$ , та бічну циліндричну поверхню  $\sigma_3$  з твірною, паралельною осі  $Oz$ .

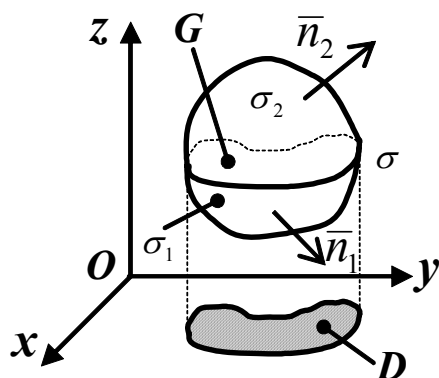


Рисунок 2.7

Тоді потрібний інтеграл по області  $V$  функції  $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$  дорівнює поверхневому інтегралу векторного поля  $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$  по поверхні  $\sigma$ . Тобто,

$$\iiint_V \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV = \iint_{\sigma} (a_x \cos(\bar{n}^0, \bar{i}) + a_y \cos(\bar{n}^0, \bar{j}) + a_z \cos(\bar{n}^0, \bar{k})) d\sigma, \quad (2.17)$$

або

$$\iiint_V \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} a_x dy dz + a_y dx dz + a_z dx dy. \quad (2.18)$$

Формули (2.17), (2.18) називають формулою *Остроградського-Гаусса*. Доведемо цю формулу.

Розглянемо інтеграл

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V \frac{\partial a_z}{\partial z} dV = \iiint_V \frac{\partial a_z}{\partial z} dx dy dz = \iint_D \left( \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial a_z}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_D a_z(x, y, f_2(x, y)) dx dy - \\ &- \iint_D a_z(x, y, f_1(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Оберемо напрям нормалі до поверхні, який збігається із напрямом зовнішньої нормалі. Тоді  $\cos(\bar{n}^0, \bar{k})$  на поверхні  $\sigma_2$  – додатний, на поверхні  $\sigma_1$  – від’ємний, а на поверхні  $\sigma_3$  – рівний нулю. Тому:

$$\iint_D a_z(x, y, f_2(x, y)) dx dy = \iint_{\sigma_2} a_z(x, y, z) \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) d\sigma_2, \quad (2.20)$$

$$\iint_D a_z(x, y, f_1(x, y)) dx dy = -\iint_{\sigma_1} a_z(x, y, z) \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) d\sigma_1, \quad (2.21)$$

$$\iint_{\sigma_3} a_z(x, y, z) \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) d\sigma_3 = 0. \quad (2.22)$$

З формул (2.20) – (2.22) випливає, що

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial a_z}{\partial z} dV &= \iint_{\sigma_1} a_z(x, y, z) \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) d\sigma_1 + \iint_{\sigma_2} a_z(x, y, z) \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) d\sigma_2 + \\ &+ \iint_{\sigma_3} a_z(x, y, z) \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) d\sigma_3, \end{aligned}$$

або

$$\iiint_V \frac{\partial a_z}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\sigma} a_z(x, y, z) \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) d\sigma. \quad (2.23)$$

Аналогічно можна одержати, що

$$\iiint_V \frac{\partial a_x}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\sigma} a_x(x, y, z) \cos(\bar{n}^0, \bar{i}) d\sigma, \quad (2.24)$$

$$\iiint_V \frac{\partial a_y}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\sigma} a_y(x, y, z) \cos(\bar{n}^0, \bar{j}) d\sigma. \quad (2.25)$$

Додавши рівності (2.23)–(2.25), отримуємо формулу Остроградського:

$$\iiint_V \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV = \iint_{\sigma} (a_x \cos(\bar{n}^0, \bar{i}) + a_y \cos(\bar{n}^0, \bar{j}) + a_z \cos(\bar{n}^0, \bar{k})) d\sigma.$$

**Приклад 2.4** Знайти потік векторного поля  $\bar{a} = (2x + y)\bar{i} + (x + 3z)\bar{j}$

- 1) через верхню сторону трикутника  $ABC$ , утвореного при перерізі площини  $P: x + 2y + z = 2$  з координатними площинами;
- 2) через повну поверхню піраміди, утвореної площиною  $P$  і координатними площинами:
  - а) безпосередньо;
  - б) за формулою Остроградського-Гаусса.

### Розв'язування

Зробимо схематичний рисунок (рис. 2.8).

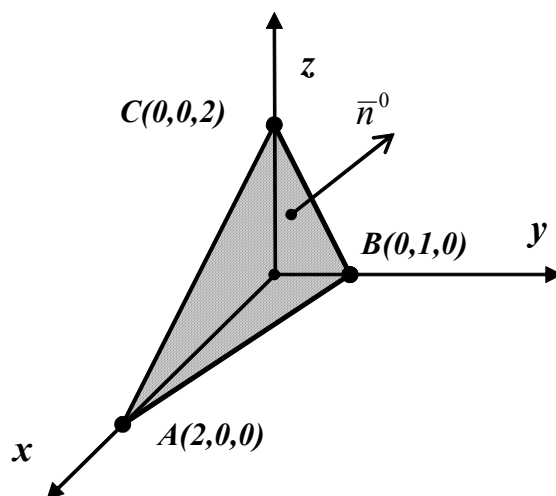


Рисунок 2.8

1. Обчислимо потік векторного поля через верхню сторону трикутника  $ABC$ , утвореного при перерізі площини  $P: x+2y+z=2$  з координатними площинами ( $\sigma$ ) безпосередньо.

Оскільки поверхня  $\sigma$  взаємно однозначньо проектується на площину  $xOy$  в область  $D_{xy}$ , то обчислення потоку векторного поля  $\vec{a}$  через дану поверхню зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області  $D_{xy}$  за формулою :

$$I_1 = \iint_{\sigma_{ABC}} \vec{a} d\sigma = \iint_{\sigma_{ABC}} \vec{a} \vec{n}^0 d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\vec{a} \vec{n}^0}{\left| \cos(\vec{n}^0, \vec{k}) \right|} \right|_{z=z(x,y)} dx dy. \quad (2.26)$$

За формулою (2.15) знайдемо одиничний вектор нормалі до поверхні  $\varphi(x, y, z) = x + 2y + z - 2 = 0$ . Оскільки вектор  $\vec{n}^0$  поставлений до зовнішньої сторони поверхні, то у формулі (2.15) беремо знак «плюс».

Обчислимо частинні похідні функції  $\varphi(x, y, z) = x + 2y + z - 2$  за кожною змінною:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1.$$

Тоді

$$\bar{n}^0 = \frac{\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{k}.$$

Обчислимо скалярний добуток векторів  $\bar{a}$  та  $\bar{n}^0$ , заданих своїми декартовими координатами:

$$\bar{a}\bar{n}^0 = (2x + y)\frac{1}{\sqrt{6}} + (x + 3z)\frac{2}{\sqrt{6}} + 0\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{4x + y + 6z}{\sqrt{6}},$$

тобто  $\bar{a}\bar{n}^0 = \frac{4x + y + 6z}{\sqrt{6}}$ , при цьому  $\cos(\bar{n}^0, \bar{k}) = \frac{1}{\sqrt{6}}$ . Тоді

$$\frac{dxdy}{|\cos(\bar{n}^0, \bar{k})|} = \sqrt{6}dxdy.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_{ABC}} \bar{a}\bar{n}^0 d\sigma &= \iint_{D_{xy}} \frac{4x + y + 6z}{\sqrt{6}} \Big|_{z=2-x-2y} \sqrt{6}dxdy = \iint_{D_{xy}} (4x + y + 12 - 6x - 12y)dxdy = \\ &= \iint_{D_{xy}} (12 - 2x - 11y)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{2-2y} (12 - 2x - 11y)dx = \\ &= \int_0^1 (12(2-2y) - (2-2y)^2 - 11y(2-2y))dy = 24 \int_0^1 (1-y)dy - 4 \int_0^1 (1-y)^2 dy - \\ &- 22 \int_0^1 (y-y^2)dy = -24 \frac{(1-y)^2}{2} \Big|_0^1 + 4 \frac{(1-y)^3}{3} \Big|_0^1 - 22 \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 + 22 \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = 7, \end{aligned}$$

тобто  $\Pi_I = 7$  (рис. 2.9).

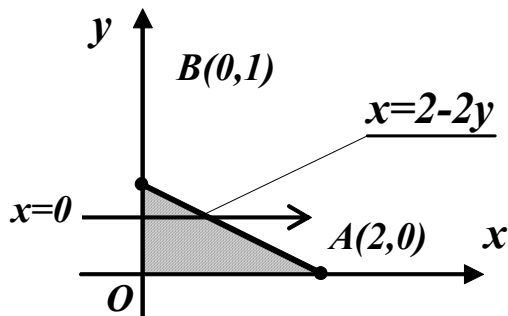


Рисунок 2.9

2. Обчислимо потік векторного поля через повну поверхню піраміди, утвореної площиною  $P$  і координатними площинами, безпосередньо:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4,$$



де  $\Pi_1$  – потік векторного поля через верхню сторону трикутника  $ABC$ ,  
 $\Pi_2$  – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника  $OBC$ ,  
 $\Pi_3$  – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника  $OAC$ ,  
 $\Pi_4$  – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника  $OAB$ .

Обчислимо  $\Pi_2$  – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника  $OBC$ . Рівняння площини  $OBC$ :  $x=0$ , одиничний вектор нормалі  $\vec{n}_2$  до цієї площини паралельний осі  $Ox$ , але має напрям, протилежний напрямку вектора  $\vec{i}$ . Тому за умовою колінеарності векторів  $\vec{n}_2 = -\vec{i} = \{-1, 0, 0\}$ . Тоді

$$\Pi_2 = \iint_{\sigma_{OBC}} \overline{an_2} d\sigma = \iint_{D_{yz}} \left. \frac{\overline{an_2}}{|\cos(\vec{n}_2, \vec{i})|} \right|_{x=x(y,z)} dydz,$$

причому  $\cos(\vec{n}_2, \vec{i}) = -1$ ,  $\overline{an_2} = (2x+y) \cdot (-1) + 0 \cdot (x+3z) + 0 \cdot 0 = -2x-y$ .

Маємо (рис. 2.10):

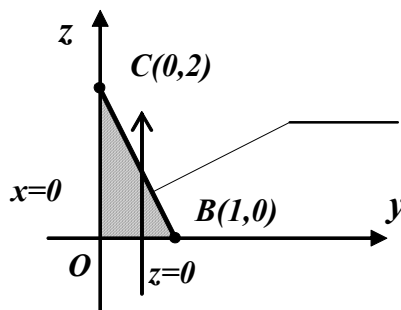


Рисунок 2.10

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_{ABC}} \overline{an_2} d\sigma &= \iint_{D_{yz}} (-2x-y) \Big|_{x=0} dydz = - \iint_{D_{yz}} y dydz = - \int_0^1 y dy \int_0^{2-2y} dz = - \int_0^1 yz \Big|_0^{2-2y} dy = \\ &= \int_0^1 2y^2 dy - \int_0^1 2y dy = 2 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 - 2 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3}. \text{ Тобто } \Pi_2 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Обчислимо  $\Pi_3$  – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника  $OAC$ . Рівняння площини  $OAC$ :  $y=0$ , одиничний вектор нормалі  $\vec{n}_3$  до цієї площини паралельний осі  $Oy$ , але має напрям, протилежний напрямку вектора  $\vec{j}$ , тому  $\vec{n}_3 = \{0, -1, 0\}$ . Тоді

$$P_3 = \iint_{\sigma_{AOC}} \overline{an_3} d\sigma = \iint_{D_{xz}} \left. \frac{\overline{an_3}}{|\cos(n_3, j)|} \right|_{y=y(x,z)} dx dz,$$

причому  $\cos(\overline{n_3}, \overline{j}) = -1$ ,  $\overline{an_3} = (2x + y) \cdot 0 + (-1) \cdot (x + 3z) + 0 \cdot 0 = -x - 3z$ .

Маємо (рис. 2.11):

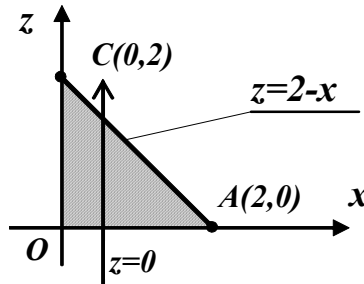


Рисунок 2.11

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_{AOC}} \overline{an_3} d\sigma &= \iint_{D_{xz}} (-x - 3z) dx dz = - \iint_{D_{xz}} (x + 3z) dx dz = - \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x + 3z) dz = \\ &= - \int_0^2 \left( xz \Big|_0^{2-x} + 3 \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^{2-x} \right) dx = \int_0^2 \left( -2x + x^2 - \frac{3}{2} (2-x)^2 \right) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 - 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{(2-x)^3}{3} \Big|_0^2 = \\ &= -\frac{4}{3} - 4 = -\frac{16}{3}, \text{ тобто } P_3 = -\frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Обчислимо  $P_4$  – потік векторного поля через зовнішню сторону площини трикутника  $OAB$ . Рівняння цієї площини:  $z = 0$ , одиничний вектор нормалі  $\overline{n_4}$  до цієї площини паралельний осі  $Oz$ , але має напрям, протилежний напрямку вектора  $\overline{k}$ , тому  $\overline{n_4} = \{0, 0, -1\}$ .

Оскільки  $\overline{an_4} = (2x + y) \cdot 0 + 0 \cdot (x + 3z) + 0 \cdot (-1) = 0$ , то

$$P_4 = \iint_{\sigma_{OAB}} \overline{an_4} d\sigma = 0.$$

Таким чином,  $P = 7 - \frac{1}{3} - \frac{16}{3} = \frac{4}{3}$

3. Обчислимо потік векторного поля через повну поверхню піраміди в напрямі її зовнішньої нормалі за формулою Остроградського-Гаусса.

Обчислимо спочатку вираз  $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ , маємо:

$$\frac{\partial(2x+y)}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial(x+3z)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial 0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 2.$$

$$\Pi = \iiint_V \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = 2 \iiint_V dx dy dz = 2V_{\text{піраміди}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

**Приклад 2.5** Обчислити потік вектора  $\vec{a} = xy\vec{i} + xz\vec{j}$  через зовнішню сторону поверхні  $\sigma$ , визначеної нерівностями  $x^2 + y^2 \leq z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ :

- а) безпосередньо;  
 б) за формулою Остроградського-Гаусса.

### Розв'язування

а) Зобразимо вказану поверхню (рис. 2.12):

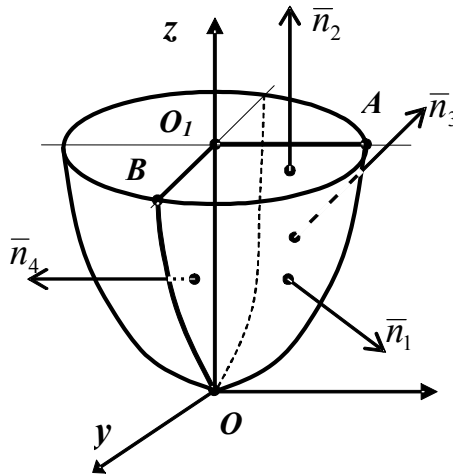


Рисунок 2.12

Згідно з рисунком (2.12) маємо:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4,$$

- де  $\Pi_1$  – потік векторного поля через зовнішню сторону поверхні  $\sigma_1$ :  
 $x^2 + y^2 - z = 0$ ;  
 $\Pi_2$  – потік векторного поля через зовнішню сторону площини  $AO_1B$ ;  
 $\Pi_3$  – потік векторного поля через зовнішню сторону площини  $OAO_1$ ;  
 $\Pi_4$  – потік векторного поля через зовнішню сторону площини  $O_1BO$ .

Обчислимо  $\Pi_l$  – потік векторного поля через зовнішню сторону поверхні  $\sigma_1: x^2 + y^2 - z = 0$ :

$$\Pi_l = \iint_{\sigma_1} \overline{an_1} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\overline{an_1}}{|\cos(\overline{n_1}, \overline{k})|} \right|_{z=z(x,y)} dx dy.$$

За формулою (2.15) знайдемо одиничний вектор нормалі  $\overline{n_1}$ . Обчислимо спочатку частинні похідні функції  $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ . Маємо:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -1,$$

$$\text{звідки } \overline{n_1} = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \overline{i} + \frac{2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \overline{j} - \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \overline{k},$$

$$\cos(\overline{n_1}, \overline{k}) = -\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Обчислимо скалярний добуток  $\overline{an_1}$ :

$$\begin{aligned} \overline{an_1} &= xy \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} + xz \frac{2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} - 0 \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \\ &= \frac{2x^2 y + 2xyz}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Обчислимо вираз  $\frac{\overline{an_1}}{|\cos(\overline{n_1}, \overline{k})|}$ :

$$\frac{\overline{an_1}}{|\cos(\overline{n_1}, \overline{k})|} = \frac{2x^2 y + 2xyz}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \cdot \left| \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}{-1} \right| = 2x^2 y + 2xyz, \text{ звідки}$$

$$\left. \frac{\overline{an_1}}{|\cos(\overline{n_1}, \overline{k})|} \right|_{z=x^2+y^2} = 2x^2 y + 2xyz \Big|_{z=x^2+y^2} = 2x^2 y + 2x^3 y + 2xy^3.$$

Тоді

$$P_1 = \iint_{\sigma_1} \overline{an_1} d\sigma = \iint_{D_{xy}} (2x^2y + 2x^3y + 2xy^3) dx dy.$$

Для обчислення отриманого подвійного інтеграла перейдемо до полярних координат за допомогою перетворення:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Рівняння кола  $x^2 + y^2 = 4$ , що є лінією перетину параболоїда  $x^2 + y^2 = z$  з площиною  $z = 4$ , в полярних координатах матиме вигляд:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 4, \text{ звідки } \rho^2 = 4 \text{ або } \rho = 2. \text{ Тоді } 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$dx dy = \rho d\rho d\varphi.$$

Враховуючи введені заміни, маємо:

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 (2\rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho \sin \varphi + 2\rho^3 \cos^3 \varphi \cdot \rho \sin \varphi + 2\rho^3 \cos \varphi \cdot \rho \sin^3 \varphi) \rho d\rho = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 (2\rho^4 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi + 2\rho^5 \cos^3 \varphi \sin \varphi + 2\rho^5 \cos \varphi \sin^3 \varphi) d\rho = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left( 2 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^2 + 2 \cos^3 \varphi \sin \varphi \cdot \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^2 + 2 \cos \varphi \sin^3 \varphi \cdot \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^2 \right) d\varphi = \\ &= \frac{64}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi + \frac{64}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi d\varphi + \frac{64}{3} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin^3 \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{64}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \cdot d(\cos \varphi) - \frac{64}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \cdot d(\cos \varphi) + \frac{64}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d(\sin \varphi) = \\ &= -\frac{64}{5} \cdot \frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{64}{3} \cdot \frac{\cos^4 \varphi}{4} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{64}{3} \cdot \frac{\sin^4 \varphi}{4} \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{64}{5}(0-1) - \frac{16}{3}(0-1) + \frac{16}{3}(1-0) = \\ &= \frac{64}{5} + \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{224}{15}, \text{ тобто } P_1 = \frac{224}{15}. \end{aligned}$$

Обчислимо  $P_2$  – потік векторного поля через зовнішню сторону площини  $AO_1B$ :  $z = 4$  за формулою:

$$P_2 = \iint_{AO_1B} \overline{an_2} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\overline{an_2}}{\left| \cos(\overline{n_2}, \overline{k}) \right|} \right|_{z=z(x,y)} dx dy,$$

де одиничний вектор нормалі  $\overline{n_2}$  паралельний осі  $Oz$  і колінеарний вектору  $\overline{k}$ , тому  $\overline{n_2} = \{0, 0, 1\}$ .

Обчислимо скалярний добуток  $\overline{an_2}$ :

$$\overline{an_2} = xy \cdot 0 + xz \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Отже,

$$P_2 = \iint_{AO_1B} \overline{an_2} d\sigma = 0.$$

Обчислимо  $P_3$  – потік векторного поля через зовнішню сторону площини  $OAO_1$ :  $x = 0$  за формулою:

$$P_3 = \iint_{OAO_1} \overline{an_3} d\sigma = \iint_{D_{yz}} \left. \frac{\overline{an_3}}{\left| \cos(\overline{n_3}, \overline{i}) \right|} \right|_{x=x(y,z)} dy dz,$$

де  $\overline{n_3}$  – одиничний вектор нормалі до даної поверхні, який паралельний осі  $Ox$ , але має напрям, протилежний напрямку вектора  $\overline{i}$ . Тому  $\overline{n_3} = (-1, 0, 0)$ , скалярний добуток векторів  $\overline{an_3}$  дорівнює:

$$\overline{an_3} = xy \cdot (-1) + xz \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -xy, \text{ а } \cos(\overline{n_3}, \overline{i}) = -1.$$

Тоді маємо

$$P_3 = \iint_{OAO_1} \overline{an_3} d\sigma = \iint_{D_{yz}} \left. (-xy) \right|_{x=0} dy dz = 0.$$

Обчислимо  $P_4$  – потік векторного поля через зовнішню сторону площини  $O_1BO$ :  $y = 0$  за формулою

$$P_4 = \iint_{O_1BO} \overline{an_4} d\sigma = \iint_{D_{xz}} \left. \frac{\overline{an_4}}{\left| \cos(\overline{n_4}, \overline{j}) \right|} \right|_{y=y(x,z)} dx dz,$$

де  $\overline{n_4}$  – одиничний вектор нормалі до даної поверхні, який паралельний осі  $Oy$ , але має напрям, протилежний напрямку вектора  $\overline{j}$ , тобто  $\overline{n_4} = (0, -1, 0)$ .

Обчислимо скалярний добуток векторів  $\overline{an_4}$ :

$$\overline{an_4} = xy \cdot 0 + xz \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = -xz, \quad \cos(\overline{n_4}, \overline{j}) = -1.$$

Тоді (рис. 2.13)

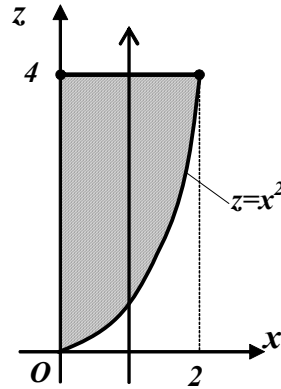


Рисунок 2.13

$$\begin{aligned} \Pi_4 &= \iint_{O_1BO} \overline{an_4} d\sigma = \iint_{D_{xz}} (-xz) \Big|_{y=0} dx dz = - \iint_{D_{xz}} xz dx dz = - \int_0^2 x dx \int_{x^2}^4 z dz = - \int_0^2 x \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{x^2}^4 dx = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^2 x(16 - x^4) dx = - \frac{1}{2} \left( 16 \int_0^2 x dx - \int_0^2 x^5 dx \right) = - \frac{1}{2} \left( 16 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 - \frac{x^6}{6} \Big|_0^2 \right) = - \frac{32}{3}, \end{aligned}$$

тобто  $\Pi_4 = -\frac{32}{3}$ .

Таким чином,

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \frac{224}{15} + 0 + 0 - \frac{32}{3} = \frac{64}{15}.$$

б) Обчислимо потік вектора  $\overline{a} = xy\overline{i} + xz\overline{j}$  через зовнішню сторону поверхні  $\sigma$ , визначеної нерівностями  $x^2 + y^2 \leq z \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  в напрямі її зовнішньої нормалі за формулою Остроградського-Гаусса (2.17).

Обчислимо спочатку вираз  $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ , маємо:

$$\frac{\partial(xy)}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial(xz)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = y.$$

Таким чином, потік векторного поля обчислюється за формулою:

$$\Pi = \iiint_V y dx dy dz,$$

де  $V$  – область, обмежена параболоїдом  $x^2 + y^2 = z$ , площиною  $z = 4$  і координатними площинами (рис. 2.12).

Для обчислення одержаного потрійного інтеграла перейдемо до циліндричних координат за допомогою перетворення:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Рівняння поверхні  $x^2 + y^2 = z$  в циліндричних координатах матиме вигляд:  $z = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2$ . Тоді межі інтегрування будуть такі:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 2, \quad \rho^2 \leq z \leq 4, \quad \text{а } dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_V y dx dy dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \int_{\rho^2}^4 \rho \sin \varphi dz = \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_{\rho^2}^4 dz = \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^2 z \Big|_{\rho^2}^4 d\rho = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^2 (4 - \rho^2) d\rho = \int_0^{\pi/2} \left( 4 \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^2 - \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^2 \right) \sin \varphi d\varphi = \frac{64}{15} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{64}{15} \cos \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{64}{15}. \end{aligned}$$



### *Питання для самоперевірки*

1. Що називається векторним полем?
2. Наведіть приклади векторних полів.
3. Що називається векторними лініями?
4. Дайте означення односторонньої поверхні.
5. Дайте означення двосторонньої поверхні.
6. Яка поверхня називається орієнтованою?
7. Дайте означення поверхневого інтеграла.
8. Що називається потоком векторного поля?
9. Як обчислюється поверхневий інтеграл?
10. У чому полягає зв'язок між поверхневими та подвійними інтегралами?
11. Сформулюйте властивості потоку векторного поля  $\vec{a}$  через поверхню  $\sigma$ .
12. Запишіть та доведіть формулу Остроградського-Гаусса.
13. Як визначити одиничний нормальний вектор до поверхні  $\varphi(x, y, z) = 0$ ?
14. Як обчислити потік векторного поля  $\vec{a}$  через поверхню  $\sigma$ , яка неоднозначно проектується на будь-яку координатну площину?

## Завдання для самостійної роботи

### Завдання 2.1

Обчислити потік векторного поля:

- 1) через верхню сторону трикутника ABC, утвореного при перетині площини P з координатними площинами;
- 2) через повну поверхню піраміди, утвореної площиною P і координатними площинами:
  - а) безпосередньо;
  - б) за формулою Остроградського-Гаусса.

1.  $\vec{a} = (2x + y)\vec{i} + (2z - x)\vec{j} + (2y - z)\vec{k}$ ,  
 $P: 2x + y + z = 2$ .

9.  $\vec{a} = (x + y^2)\vec{j} + (3xy + z)\vec{k}$ ,  
 $P: x - y + z = 2$ .

2.  $\vec{a} = (3x - y)\vec{i} + (z + 3y)\vec{j} + (z + x)\vec{k}$ ,  
 $P: 3x + 2y - z = 6$ .

10.  $\vec{a} = 3z\vec{i} + x\vec{j} + 2y\vec{k}$ ,  
 $P: x - y + z = 1$ .

3.  $\vec{a} = x^2\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$ ,  
 $P: 2x + y + z = 2$ .

11.  $\vec{a} = xz\vec{j} - yz\vec{k}$ ,  
 $P: x + y - z = -1$ .

4.  $\vec{a} = 2yz\vec{i} + (x^2 + 2y)\vec{j} + xy\vec{k}$ ,  
 $P: 3x + 2y - z = 6$ .

12.  $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (3x + z)\vec{j}$ ,  
 $P: x - y - z = 2$ .

5.  $\vec{a} = zy^2\vec{i} + (x^2 - 2z)\vec{j}$ ,  
 $P: 2x - 2y - z = 2$ .

13.  $\vec{a} = xy\vec{i} + xz\vec{k}$ ,  
 $P: x - y + z = 2$ .

6.  $\vec{a} = x^2\vec{j} + (xy - 2y)\vec{k}$ ,  
 $P: x + y - z = 2$ .

14.  $\vec{a} = 2xz\vec{i} + xy\vec{j} + 3z\vec{k}$ ,  
 $P: x + 2y + z = 4$ .

7.  $\vec{a} = 3xy\vec{i} + x\vec{k}$ ,  
 $P: x - y + z = 1$ .

15.  $\vec{a} = y\vec{i} + 2z\vec{j} + xz\vec{k}$ ,  
 $P: x + 3y + z = 3$ .

8.  $\vec{a} = x\vec{i} + xy\vec{j} + y\vec{k}$ ,  
 $P: x - y - z = 2$ .

16.  $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + (y + 2x)\vec{k}$ ,  
 $P: x + y - z = 1$ .

17.  $\vec{a} = (3x + y)\vec{i} + (x + 2z)\vec{j}$ ,  
 $P: 2x + y + z = 2$ .

$$18. \vec{a} = 3yz\vec{i} + (x + y^2)\vec{j} + xy\vec{k},$$

$$P: x + y + 3z = 3.$$

$$19. \vec{a} = (x^2 + y)\vec{j} + (3z + xy)\vec{k},$$

$$P: x - y + z = 1.$$

$$20. \vec{a} = 2xy\vec{i} + z\vec{j} + xz\vec{k},$$

$$P: x + 2y + z = 2.$$

$$21. \vec{a} = (y + 3z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (2y + z)\vec{k},$$

$$P: x + y + 2z = 2.$$

$$22. \vec{a} = 3xz\vec{j} + 2yz\vec{k},$$

$$P: x + y + z = 2.$$

$$23. \vec{a} = y^2z\vec{i} + (xy + 3z)\vec{k},$$

$$P: 2x + y + 2z = 2.$$

$$24. \vec{a} = x^2y\vec{j} + (2xy + 3z)\vec{k},$$

$$P: 2x + y + 2z = 4.$$

$$25. \vec{a} = (x + 2y)\vec{i} + (x - 2z)\vec{j} + (2y + z)\vec{k},$$

$$P: x - y + z = 3.$$

$$26. \vec{a} = xy\vec{i} + xz\vec{j},$$

$$P: x - 2y + z = 2.$$

$$27. \vec{a} = 2xy\vec{i} + xz\vec{j} + 3x\vec{k},$$

$$P: x - y + z = 1.$$

$$28. \vec{a} = 2z^2\vec{i} + 3xy\vec{j} + 2\vec{k},$$

$$P: x + 2y + z = 2.$$

$$29. \vec{a} = y^2\vec{i} + 2xy\vec{j} + (2xy + 2z)\vec{k},$$

$$P: 2x + 2y + z = 2.$$

$$30. \vec{a} = 2z\vec{i} + 3xy\vec{j} + 2x\vec{k},$$

$$P: x + y + 2z = 2.$$

$$31. \vec{a} = 3xz\vec{i} + y\vec{j} + 3z\vec{k},$$

$$P: x + y + z = 3.$$

$$32. \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$P: x - y - z = -2.$$

$$33. \vec{a} = (x + 2y)\vec{i} + (y + 3z)\vec{j} + (y - 2z)\vec{k},$$

$$P: x + y + 2z = 2.$$

$$34. \vec{a} = xy\vec{i} + x\vec{k},$$

$$P: x + y + z = -2.$$

$$35. \vec{a} = (2y + z)\vec{i} + (x + y)\vec{j},$$

$$P: x - y + z = 2.$$

$$36. \vec{a} = (y + 2z)\vec{i} + (x + z)\vec{j},$$

$$P: x + 2y + z = 4.$$

$$37. \vec{a} = (3y + z)\vec{i} + (2x + 3z)\vec{j} + (x + y)\vec{k},$$

$$P: x + 2y + 2z = 4.$$

$$38. \vec{a} = 4xy\vec{i} + 4xz\vec{k},$$

$$P: x + y + 3z = 3.$$

$$39. \vec{a} = z^2\vec{i} + 2x\vec{j} + \vec{k},$$

$$P: x + y - z = -2.$$

$$40. \vec{a} = (y - 2x)\vec{i} + (y + 3z)\vec{j} + (x + z)\vec{k},$$

$$P: x + y - z = 3.$$

## Завдання 2.2

Обчислити потік векторного поля  $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  через зовнішню сторону поверхні, визначеної нерівностями S:

а) безпосередньо;

б) за формулою Остроградського-Гаусса

1.  $\vec{a} = xy\vec{i} + y^2\vec{j}$     S:  $x^2 + z^2 \leq 4$ ,     $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, y \leq 2$
2.  $\vec{a} = 2x^2\vec{i} + \vec{k}$ ,    S:  $x^2 + y^2 + z - 1 \leq 0$ ;     $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
3.  $\vec{a} = z\vec{i} + 3x^2z\vec{k}$ ;    S:  $0 \leq x \leq 4 - y^2 - z^2$ ;     $z \geq 0, y \geq 0$ .
4.  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2z\vec{k}$ ,    S:  $0 \leq z \leq 1 - x^2$ ;     $0 \leq y \leq 1$ .
5.  $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j}$ ,    S:  $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1$      $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .
6.  $\vec{a} = 2x\vec{i} + z^2\vec{k}$ ,    S:  $0 \leq x \leq 1 - y^2 - z^2$ ,     $y \geq 0$ .
7.  $\vec{a} = z^2\vec{i} + xy^2\vec{j}$ ,    S:  $x^2 + z^2 \leq 1$ ,     $0 \leq y \leq 1, z \geq 0$ .
8.  $\vec{a} = x^3\vec{i} + z^3\vec{j}$ ,    S:  $x^2 + z^2 \leq 1$ ,     $0 \leq y \leq 2$ .
9.  $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}$ ,    S:  $x^2 + y^2 \leq z \leq 9$ .
10.  $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j}$ ,    S:  $x + y^2 + z^2 \leq 1$ ,     $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
11.  $\vec{a} = x^2\vec{i} + 3z\vec{k}$ ,    S:  $0 \leq y \leq 4 - x^2$ ,     $0 \leq z \leq 2, x \geq 0$ .
12.  $\vec{a} = xyz\vec{i} + y\vec{k}$ ,    S:  $0 \leq y \leq 1 - x^2$ ,     $0 \leq z \leq 1$ .
13.  $\vec{a} = x\vec{i} + y^2\vec{j} + xy\vec{k}$ ,    S:  $x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2$ ,     $-1 \leq z \leq 1$ .
14.  $\vec{a} = 2x\vec{i} + z^2\vec{k}$ ,    S:  $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$ ,     $x \geq 0, y \geq 0$ .
15.  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ,    S:  $0 \leq z \leq 4 - y^2$ ,     $-1 \leq x \leq 1$ .
16.  $\vec{a} = 3y\vec{j} + z^2\vec{k}$ ,    S:  $y^2 + z^2 \leq x \leq 4$ ,     $z \geq 0$ .
17.  $\vec{a} = 2z^2\vec{i} + xy\vec{j}$ ,    S:  $0 \leq y \leq 1 - x^2 - z^2$ ,     $x \geq 0$
18.  $\vec{a} = xy^2\vec{i} - yz^2\vec{j}$ ,    S:  $0 \leq z \leq 1 - y^2$ ,     $-1 \leq x \leq 1$ .
19.  $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$ ,    S:  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,     $0 \leq z \leq 2$ .
20.  $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$ ,    S:  $0 \leq y \leq x^2$ ,     $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1$
21.  $\vec{a} = 2x\vec{i} - y\vec{j} + 2z\vec{k}$ ,    S:  $0 \leq z \leq x^2 + y^2$ ,     $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$ .
22.  $\vec{a} = x^3\vec{i} + z^3\vec{k}$ ,    S:  $0 \leq 9 - x^2 - z^2$ ,     $x \geq 0, z \geq 0$ .
23.  $\vec{a} = xz\vec{i} + y\vec{k}$ ,    S:  $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 \leq 1$ ,     $x \geq 0, z \geq 0$ .
24.  $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j}$ ,    S:  $y^2 + z^2 \leq 1$ ,     $0 \leq x \leq 1, y \geq 0, z \geq 0$ .
25.  $\vec{a} = x^2\vec{i} + 3z\vec{k}$ ,    S:  $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$ .

26.  $\vec{a} = x^2\vec{i} + z^2\vec{k}$ , S:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ ,  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .
27.  $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j}$ , S:  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $0 \leq z \leq 1, y \geq 0$ .
28.  $\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j}$ , S:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $x \geq 0, z \geq 0$ .
29.  $\vec{a} = y^2\vec{j} + xz\vec{k}$ , S:  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1, x \geq 0, z \geq 0$ .
30.  $\vec{a} = 3xy\vec{i} + 2z\vec{k}$ , S:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .
31.  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2\vec{k}$ , S:  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $0 \leq y \leq 2, x \geq 0, z \geq 0$ .
32.  $\vec{a} = -x\vec{i} + 2y\vec{j}$ , S:  $x^2 + y^2 \leq 2x$ ,  $0 \leq z \leq 1, y \geq 0, x \geq 1$ .
33.  $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$ , S:  $x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $0 \leq z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ .
34.  $\vec{a} = y\vec{j} + 2z\vec{k}$ , S:  $x + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $y \geq 0, z \geq 0$ .
35.  $\vec{a} = x^2\vec{i} + z^2\vec{k}$ , S:  $y^2 + z^2 \leq 9$ ,  $-1 \leq x \leq 1, z \geq 0$ .
36.  $\vec{a} = x^3\vec{i} + z^3\vec{k}$ , S:  $x^2 + 16y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .
37.  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ , S:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0$ .
38.  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , S:  $x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $0 \leq z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ .
39.  $\vec{a} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + z\vec{k}$ , S:  $4x^2 + y^2 \leq z \leq 4$ .
40.  $\vec{a} = 4x\vec{i} + 2z\vec{k}$ , S:  $9x^2 + z^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0, z \leq 0, 0 \leq y \leq 1$ .

## ТЕМА 3 ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

### 3.1 Дивергенція (розбіжність) векторного поля

Нехай дано векторне поле  $\vec{a}(M)$ . Виберемо довільну точку  $M$  в просторі та обведемо її деякою гладкою (або кусково-гладкою) замкненою поверхнею  $\sigma$ . Тоді потік векторного поля через цю поверхню у напрямі зовнішньої нормалі дорівнює

$$\oiint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} ds.$$

Позначимо через  $\Delta V$  об'єм тіла, обмеженого поверхнею  $\sigma$ . Тоді  $\frac{\oiint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} ds}{\Delta V}$  характеризує питому продуктивність джерел, що містяться усередині поверхні  $\sigma$  (*питома потужність джерел*).

Будемо стягувати поверхню  $\sigma$  в точку  $M$ . Границя, до якої при цьому прямує середня потужність джерел, називається *дивергенцією векторного поля  $\vec{a}(M)$*  в точці  $M$  і позначається символом  $\operatorname{div} \vec{a}(M)$ , тобто

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} ds}{\Delta V}. \quad (3.1)$$

Обчислення дивергенції за означенням пов'язане з необхідністю граничного переходу, що ускладнює викладки. Однак слід відмітити, що за допомогою цієї формули ми можемо визначити *джерела* та *стоки*: ті точки, в яких дивергенція додатна, називаються джерелами, а ті, в яких вона від'ємна, називаються стоками.

### 3.2 Обчислення дивергенції векторного поля в декартовій системі координат

Розглянемо векторне поле  $\vec{a}(M)$ :

$$\vec{a}(M) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k},$$

де  $a_x(x, y, z)$ ,  $a_y(x, y, z)$ ,  $a_z(x, y, z)$  – проєкції вектора на координатні осі, неперервні функції.

Знайдемо  $\text{div} \bar{a}(M_0)$ , де  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ .

Візьмемо прямокутний паралелепіпед з центром у точці  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  із ребрами  $AB = \Delta x$ ,  $AD = \Delta y$ ,  $AA_1 = \Delta z$  (рис. 3.1).

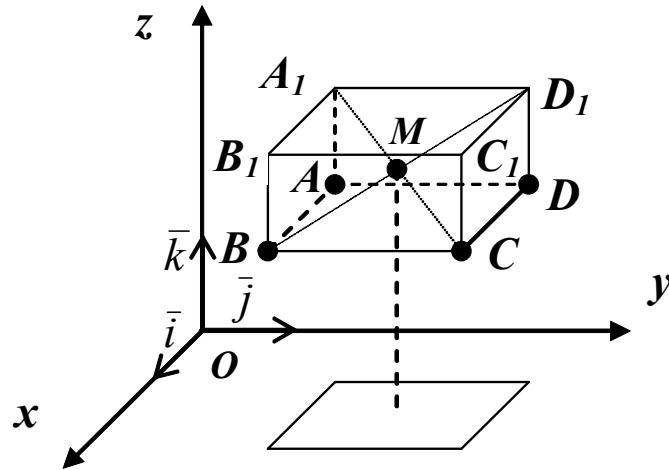


Рисунок 3.1

Потік вектора  $\bar{a}(M)$  через зовнішню поверхню цього паралелепіпеда дорівнює:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_5 + \Pi_6, \quad (3.2)$$

де  $\Pi_1$  – потік векторного поля через зовнішню сторону грані  $BB_1C_1C$ ,  
 $\Pi_2$  – потік векторного через зовнішню сторону грані  $AA_1D_1D$ ,  
 $\Pi_3$  – потік векторного поля через зовнішню сторону грані  $CC_1D_1D$ ,  
 $\Pi_4$  – потік векторного поля через зовнішню сторону грані  $BB_1A_1A$ ,  
 $\Pi_5$  – потік векторного поля через зовнішню сторону грані  $B_1A_1C_1D_1$ ,  
 $\Pi_6$  – потік векторного поля через зовнішню сторону грані  $ABCD$ .

Обчислимо  $\Pi_1$  – потік векторного поля через зовнішню сторону грані  $BB_1C_1C$ . Вектор нормалі до цієї поверхні  $\bar{n}_1$  паралельний осі  $Ox$  і співнапрямлений з одиничним вектором  $\bar{i}(1,0,0)$ , причому  $a_{n_1} = \text{pr}_{\bar{n}_1} \bar{a}$ .

Будемо вважати, що векторне поле постійне і таке, як у точці  $M_1\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)$ , тоді проєкція вектора  $\bar{a}(M)$  на напрям нормалі  $\bar{n}_1$  буде:

$$\text{pr}_{\bar{n}_1} \bar{a} = a_x \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0 \right).$$

Отже, потік векторного поля через зовнішню сторону грані  $BB_1C_1C$  дорівнює:

$$\Pi_1 = a_x \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0 \right) \Delta y \Delta z. \quad (3.3)$$

Обчислимо  $\Pi_2$  – потік векторного поля через зовнішню сторону грані  $AA_1D_1D$ . Вектор нормалі до цієї поверхні  $\vec{n}_2$  паралельний осі  $Ox$ , але має напрям протилежний напрямку одиничного вектора  $\vec{i}(1,0,0)$ , тобто  $\vec{n}_2(-1,0,0)$ .

Будемо вважати, що векторне поле постійне і таке, як у точці  $M_2 \left( x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0 \right)$ , тоді потік векторного поля через зовнішню сторону грані  $AA_1D_1D$  буде:

$$\Pi_2 = -a_x \left( x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0 \right) \Delta y \Delta z. \quad (3.4)$$

Обчислимо  $\Pi_3$  – потік векторного поля через зовнішню сторону грані  $CC_1D_1D$ . Вектор нормалі до цієї поверхні  $\vec{n}_3$  паралельний осі  $Oy$  і співнаправлений з одиничним вектором  $\vec{j}(0,1,0)$ . Будемо вважати, що векторне поле постійне і таке, як у точці  $M_3 \left( x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right)$ , тоді потік векторного поля по зовнішній стороні грані  $CC_1D_1D$  буде:

$$\Pi_3 = a_y \left( x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) \Delta x \Delta z. \quad (3.5)$$

Аналогічно,  $\Pi_4$  – потік векторного поля через зовнішню сторону грані  $BB_1A_1A$  обчислюється за формулою:

$$\Pi_4 = -a_y \left( x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) \Delta x \Delta z, \quad (3.6)$$

де одиничний вектор нормалі до цієї поверхні  $\vec{n}_4(0,-1,0)$ .

Потік через зовнішню сторону грані  $B_1A_1C_1D_1$  із одиничним вектором нормалі  $\vec{n}_5(0,0,1)$  обчислюється за формулою:

$$\Pi_5 = a_z \left( x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y, \quad (3.7)$$



а потік  $\Pi_6$  через зовнішню сторону грані  $ABCD$  із одиничним вектором нормалі  $\bar{n}_6(0,0,-1)$  дорівнює:

$$\Pi_6 = -a_z \left( x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2} \right) \Delta x \Delta y. \quad (3.8)$$

Тоді, враховуючи рівності (3.2)–(3.8), маємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{a}(M) &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Pi}{\Delta V} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\Pi}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \left( \frac{a_x \left( x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0 \right) - a_x \left( x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0 \right)}{\Delta x} + \frac{a_y \left( x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right) - a_y \left( x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0 \right)}{\Delta y} \right) + \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \left( \frac{a_z \left( x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2} \right) - a_z \left( x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2} \right)}{\Delta z} \right) = \frac{\partial a_x(M_0)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_0)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_0)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\operatorname{div} \bar{a}(M_0) = \frac{\partial a_x(M_0)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_0)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_0)}{\partial z}. \quad (3.9)$$

**Приклад 3.1** Визначити, в яких точках векторне поле  $\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c}$  має джерела, а в яких – стоки, якщо  $\bar{b} = y\bar{i} + xz\bar{j} - yz\bar{k}$ ,  $\bar{c} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ ,  $M_1(1,1,1)$ ,  $M_2(0,1,-1)$ ,  $M_3(-5,1,2)$ .

### Розв'язування

Знайдемо векторне поле  $\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c}$ :

$$\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ y & xz & -yz \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-xz + 2yz)\bar{i} - (-y + yz)\bar{j} + (2y - xz)\bar{k}. \text{ Тобто}$$

$$\bar{a} = \bar{b} \times \bar{c} = z(-x + 2y)\bar{i} - y(-1 + z)\bar{j} + (2y - xz)\bar{k}.$$

Знайдемо дивергенцію даного векторного поля. Оскільки

$$a_x = z(2y - x), \quad a_y = -y(z - 1), \quad a_z = 2y - xz,$$

то

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = -z, \quad \frac{\partial a_y}{\partial y} = -z, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} = -x.$$

Таким чином, дивергенція даного векторного поля за формулою (3.9) набуває такого вигляду:

$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \frac{\partial a_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M)}{\partial z} = -2z - x.$$

Обчислимо дивергенцію векторного поля в заданих точках, маємо:

$$\operatorname{div} \bar{a}(M_1) = \frac{\partial a_x(M_1)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_1)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_1)}{\partial z} = -2 \cdot 1 - 1 = -3;$$

$$\operatorname{div} \bar{a}(M_2) = \frac{\partial a_x(M_2)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_2)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_2)}{\partial z} = -2 \cdot (-1) - 0 = 2;$$

$$\operatorname{div} \bar{a}(M_3) = \frac{\partial a_x(M_3)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_3)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_3)}{\partial z} = -2 \cdot 2 - (-5) = 1.$$

Оскільки  $\operatorname{div} \bar{a}(M_1) = -3 < 0$ , а  $\operatorname{div} \bar{a}(M_2) = 2 > 0$  і  $\operatorname{div} \bar{a}(M_3) = 1 > 0$ , то в точці  $M_1$  векторне поле  $\bar{a} = z(-x + 2y)\bar{i} - y(-1 + z)\bar{j} + (2y - xz)\bar{k}$  має стік, а в точках  $M_2$  і  $M_3$  – джерела.

**Приклад 3.2** Напруженість  $\bar{E}$  поля точкового електричного заряду  $e$  на відстані  $r$  від цього заряду

$$\bar{E} = \frac{e}{r^3} \bar{r},$$

де  $\bar{r}$  – радіус-вектор, проведений з заряду у довільну точку  $A$ . Визначити потік вектора  $\bar{E}$  через довільну замкнену поверхню, яка не охоплює заряд  $e$ .

### Розв'язування

Для обчислення потоку вектора  $\bar{E}$  через довільну замкнену поверхню, яка не охоплює заряд  $e$ , скористаємось формулою Остроградського-Гаусса, записаною з використанням поняття дивергенції векторного поля. Маємо:

$$\iiint_V \operatorname{div} \bar{a} \, dV = \iint_{\sigma} (a_x \cos(\bar{n}^0, \bar{i}) + a_y \cos(\bar{n}^0, \bar{j}) + a_z \cos(\bar{n}^0, \bar{k})) d\sigma.$$

Вважатимемо, що заряд  $e$  розмішений у початку координат, а точка  $A$  має координати  $x, y$  та  $z$ . Тоді радіус-вектор  $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ , а його модуль  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Тому рівність  $\bar{E} = \frac{e}{r^3} \bar{r}$  набуває вигляду:

$$\bar{E} = \frac{e}{r^3} (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}),$$

а

$$E_x = \frac{e}{r^3} x, \quad E_y = \frac{e}{r^3} y, \quad E_z = \frac{e}{r^3} z.$$

Знайдемо тепер  $\frac{\partial E_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial E_y}{\partial y}$  та  $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ .

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = e \frac{r^3 - 3r^2 x \cdot \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6},$$

$$\text{але } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ а } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}.$$

Тому

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = e \frac{r^3 - 3r^2 x \cdot \frac{x}{r}}{r^6} = e \frac{r^3 - 3rx^2}{r^6} = e \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = e \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = e \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

Таким чином, дивергенція векторного поля  $\bar{E}$  така:

$$\operatorname{div} \bar{E} = e \frac{(r^2 - 3x^2) + (r^2 - 3y^2) + (r^2 - 3z^2)}{r^5} = e \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = e \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0.$$

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \bar{E} \, dV = \iiint_V 0 \, dV = 0.$$

### 3.3 Проекція ротора векторного поля на вектор нормалі та ротор векторного поля

Нехай задано векторне поле  $\bar{a}(M)$ . Виберемо в просторі деякий плоский замкнений контур  $L$  і позначимо через  $\bar{n}$  – вектор нормалі до площини, в якій лежить цей контур. Криволінійний інтеграл

$$\oint_L \bar{a} d\bar{l} \quad (3.10)$$

називається *циркуляцією векторного поля  $\bar{a}(M)$  уздовж контура  $L$* .

Позначимо  $\Delta S$  площу поверхні, обмеженої контуром  $L$ . Виберемо усередині отриманої плоскої фігури довільну точку і шляхом неперервної деформації будемо стягувати контур  $L$  в цю точку, не змінюючи напрям нормалі  $\bar{n}$ . Тоді

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \bar{a} d\bar{l}}{\Delta S} \quad (3.11)$$

називається *проекцією ротора векторного поля в точці  $M$  у напрямі нормалі  $\bar{n}$*  і позначається  $np_{\bar{n}} \operatorname{rot} \bar{a}(M)$ , тобто:

$$np_{\bar{n}} \operatorname{rot} \bar{a}(M) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \bar{a} d\bar{l}}{\Delta S}. \quad (3.12)$$

Загалом,  $np_{\bar{n}} \operatorname{rot} \bar{a}(M)$  характеризує густину циркуляції векторного поля. У випадку поля швидкостей рухомої рідини проекція ротора векторного поля в точці  $M$  у напрямі нормалі характеризує інтенсивність обертального руху. Зокрема, якщо рух ламінарний, то  $np_{\bar{n}} \operatorname{rot} \bar{a}(M)$  у кожній точці дорівнює нулю. Вектор, у напрямі якого  $np_{\bar{n}} \operatorname{rot} \bar{a}(M)$  досягає максимального значення і модуль якого дорівнює цьому максимальному значенню, називають *ротором (вихором)* векторного поля і позначають  $\operatorname{rot} \bar{a}(M)$ .

Модуль та напрям ротора в загальному випадку змінюються при переході від однієї точки простору до іншої. Формула для обчислення ротора в декартових координатах має вигляд:

$$\operatorname{rot} \bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \bar{k}. \quad (3.13)$$

**Приклад 3.3** Обчислити ротор векторного поля  $\bar{a} = 3x\bar{i} + yz\bar{j} + y^2\bar{k}$ .

### Розв'язування

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{a}(M) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x & yz & y^2 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial(y^2)}{\partial y} - \frac{\partial(yz)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( \frac{\partial(y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(3x)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial(yz)}{\partial x} - \frac{\partial(3x)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= (2y - y)\bar{i} - (0 - 0)\bar{j} + (0 - 0)\bar{k} = y\bar{i}. \text{ Тобто } \operatorname{rot} \bar{a}(M) = \{y, 0, 0\}. \end{aligned}$$

**Приклад 3.4** Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\bar{a} = x^2y^3\bar{i} - yz^2\bar{j} - x^2z\bar{k}$  в точці  $M_0(2,1,3)$ .

### Розв'язування

Знайдемо ротор векторного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{a}(M) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & -yz^2 & -x^2z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial(-xz^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-yz^2)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( \frac{\partial(-x^2z)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y^3)}{\partial z} \right) \bar{j} \\ &+ \left( \frac{\partial(-yz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y^3)}{\partial y} \right) \bar{k} = (0 + 2yz)\bar{i} - (-2xz - 0)\bar{j} + (0 - 3x^2y^2)\bar{k}, \end{aligned}$$

тобто  $\operatorname{rot} \bar{a}(M) = \{2yz, 2xz, -3x^2y^2\}$  і обчислимо його значення в точці  $M_0(2,1,3)$ . Маємо  $\operatorname{rot} \bar{a}(M_0) = \{6, 12, -12\}$ .

Найбільша густина циркуляції векторного поля  $\bar{a} = x^2y^3\bar{i} - yz^2\bar{j} - x^2z\bar{k}$  в точці  $M_0(2,1,3)$  досягається в напрямі  $\operatorname{rot} \bar{a}(M_0)$  і дорівнює  $|\operatorname{rot} \bar{a}(M_0)|$ , тобто

$$|\operatorname{rot} \bar{a}(M_0)| = \sqrt{6^2 + 12^2 + (-12)^2} = \sqrt{324} = 18.$$

### 3.4. Оператор Гамільтона

Векторно-диференціальний оператор  $\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$  називають *оператором Гамільтона* і позначають символом  $\bar{\nabla}$  (набла), тобто

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}. \quad (3.14)$$

Оператор  $\bar{\nabla}$  має властивості як вектора, так і оператора диференціювання. Дія оператора на скалярне поле  $U$  та довільний вектор  $\bar{a}$  здійснюється так:

$$\bar{\nabla}U = \left( \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k} \right)U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k} = \text{grad}U, \quad (3.15)$$

$$\bar{\nabla}\bar{a} = \left( \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k} \right)(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \text{div}\bar{a}, \quad (3.16)$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \text{rot}\bar{a}. \quad (3.17)$$

При застосуванні оператора  $\bar{\nabla}$  потрібно користуватись правилами векторної алгебри та правилами диференціювання. Наприклад,

$$\text{rot}(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{\nabla} \times (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{\nabla} \times \bar{a} + \bar{\nabla} \times \bar{b} = \text{rot}\bar{a} + \text{rot}\bar{b},$$

$$\text{grad}(\lambda U) = \bar{\nabla}(\lambda U) = \lambda \bar{\nabla}U = \lambda \text{grad}U, \quad (\lambda = \text{const}), \quad (3.18)$$

оскільки множення на скаляр та диференціювання мають властивість лінійності. В той же час у формулі (3.18) не можна вважати, що  $\lambda$  є скалярним полем, оскільки тоді ми винесли змінну величину за знак похідної. В загальному випадку маємо:

$$\text{grad}(UV) = U\bar{\nabla}V + V\bar{\nabla}U = U\text{grad}V + V\text{grad}U.$$

**Приклад 3.5** Задано скалярне поле  $U = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ . Визначити ротор і дивергенцію векторного поля  $\bar{a} = \text{grad}U$ .

### Розв'язування

Знайдемо координати вектора  $\vec{a} = \text{grad}U$  :

$$\begin{aligned}\vec{a} = \text{grad}U &= \frac{\partial(\ln\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(\ln\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(\ln\sqrt{x^2 + y^2})}{\partial z}\vec{k} = \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\vec{j} + 0\vec{k}.\end{aligned}$$

Обчислимо ротор векторного поля:

$$\begin{aligned}\text{rot}\vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} & \frac{y}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (0 - 0)\vec{i} - (0 - 0)\vec{j} + \left( \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \right)\vec{k} = \\ &= \left( \frac{-y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \right)\vec{k} = 0, \text{ тобто } \text{rot}\vec{a} = 0.\end{aligned}$$

Обчислимо дивергенцію векторного поля:

$$\begin{aligned}\text{div}\vec{a} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) + 0 = \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0..\end{aligned}$$

### 3.5 Диференціальні операції другого порядку

Після застосування диференціальних операцій до поля одержуємо нове поле, до якого можна знову застосовувати ці операції. Звичайно, не всі комбінації диференціальних операцій мають сенс. Наприклад, не має сенсу комбінація  $\text{div}\text{div}\vec{a}$ , оскільки  $\text{div}\vec{a}$  утворює скалярне поле, від якого вже не можна взяти дивергенцію. За допомогою комбінації операцій

$grad$ ,  $div$ ,  $rot$  можна одержати п'ять диференціальних операцій другого порядку:

$$div grad U, rot grad U, grad div \bar{a}, div rot \bar{a}, rot rot \bar{a}. \quad (3.19)$$

Почнемо з другої комбінації. Її можна записати у вигляді  $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} U)$ . Але для вектора та скаляра  $\bar{a} \times (\bar{a} U) = 0$ . Це означає, якщо замість  $\bar{a}$  в ліву частину останньої рівності підставити його розвинення за декартовими осями координат і здійснити обчислення за формальними правилами векторної алгебри, то ми одержимо нуль. Але обчислення комбінації  $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} U)$  відбувається за тими ж формальними правилами, тільки замість  $a_x, a_y, a_z$  потрібно взяти  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ . Це означає, що у будь-яких випадках

$$rot grad U = 0. \quad (3.20)$$

Аналогічно перевіряємо, що завжди

$$div rot \bar{a} = 0. \quad (3.21)$$

Ця проста властивість має важливий наслідок: для довільного поля  $\bar{a}$  поряд із векторними лініями можна розглядати *вихрові лінії*, тобто векторні лінії поля  $rot \bar{a}$ . Однак дивергенція будь-якого векторного поля дорівнює густині джерел векторних ліній цього поля. Тому формула (3.21) показує, що вихрові лінії не можуть мати ні джерел, ні стоків, тобто вони не можуть ні починатися, ні закінчуватися.

Першу комбінацію (3.19) можна записати у вигляді  $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} U = (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}) U = \bar{\nabla}^2 U$ , де  $\bar{\nabla}^2$  – скалярний диференціальний оператор другого порядку

$$\bar{\nabla}^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

який називається *оператором Лапласа (лапласіаном)* і іноді позначається символом  $\Delta$ . Тобто

$$div grad U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (3.22)$$

Нарешті, розглянемо останню комбінацію (3.19). Використовуючи формулу для векторно-векторного добутку та розташувавши множники так, щоб вони діяли на поле, одержимо



$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a} = \bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{a}) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{a}) - (\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla})\bar{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a} - \bar{\nabla}^2 \bar{a}. \quad (3.23)$$

**Приклад 3.6** Обчислити  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a}$ , якщо  $\bar{a} = 3x^2 y \bar{i} - 6y^2 z \bar{j} - 2xz^2 \bar{k}$ .

### Розв'язування

**1-ий спосіб.** Обчислимо ротор векторного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 y & -6y^2 z & -2xz^2 \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial(-2xz^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-6y^2 z)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( \frac{\partial(-2xz^2)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2 y)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial(-6y^2 z)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2 y)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= (0 + 6y^2) \bar{i} - (-2z^2 - 0) \bar{j} + (0 - 3x^2) \bar{k} = 6y^2 \bar{i} + 2z^2 \bar{j} - 3x^2 \bar{k}. \end{aligned}$$

Обчислимо  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a}$  за формулою:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6y^2 & 2z^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial(-3x^2)}{\partial y} - \frac{\partial(2z^2)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( \frac{\partial(-3x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(6y^2)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial(2z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(6y^2)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\ &= (0 - 4z) \bar{i} - (-6x - 0) \bar{j} + (0 - 12y) \bar{k} = -4z \bar{i} + 6x \bar{j} - 12y \bar{k}. \end{aligned}$$

**2-ий спосіб.** Використаємо формулу (3.23). Для цього знайдемо спочатку  $\operatorname{div} \bar{a}$ , маємо:

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 y) + \frac{\partial}{\partial y}(-6y^2 z) + \frac{\partial}{\partial z}(-2xz^2) = 6xy - 12yz - 4xz. \text{ Тоді}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a} &= \frac{\partial}{\partial x}(6xy - 12yz - 4xz) \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}(6xy - 12yz - 4xz) \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(6xy - 12yz - 4xz) \bar{k} = \\ &= (6y - 4z) \bar{i} + (6x - 12z) \bar{j} + (-12y - 4x) \bar{k}. \end{aligned}$$

Оскільки  $\bar{\nabla}^2 \bar{a} = 6y \bar{i} - 12z \bar{j} - 4x \bar{k}$ , маємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{a} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{a} - \nabla^2 \bar{a} = (6y - 4z)\bar{i} + (6x - 12z)\bar{j} + (-12y - 4x)\bar{k} - \\ &- 6y\bar{i} + 12z\bar{j} + 4x\bar{k} = -4z\bar{i} + 6x\bar{j} - 12y\bar{k}. \end{aligned}$$

### 3.6 Властивості ротора векторного поля

1. Якщо  $\bar{c}$  – сталий вектор, то  $\operatorname{rot} \bar{c}(M) = 0$ .
2. (Властивість лінійності). Якщо  $\bar{a}_1$  і  $\bar{a}_2$  – векторні поля,  $C_1$  і  $C_2$  – числа, то

$$\operatorname{rot} (C_1 \bar{a}_1 + C_2 \bar{a}_2) = C_1 \operatorname{rot} \bar{a}_1 + C_2 \operatorname{rot} \bar{a}_2.$$

3. Для будь-якого векторного поля  $\bar{a}(M)$   $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{a}) = 0$ .

Дійсно:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \bar{a}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} = 0, \text{ оскільки} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z}.$$

4. Нехай  $U$  – скалярне поле,  $\bar{a}(M)$  – векторне поле. Побудуємо векторне поле  $U \cdot \bar{a}(M)$ , тоді  $\operatorname{rot}(U \cdot \bar{a}(M)) = U \operatorname{rot} \bar{a}(M) + \operatorname{grad}(U \times \bar{a}(M))$ .

Дійсно:  $U = U(x, y, z)$ ,  $\bar{a}(M) = \{a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z)\}$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(U \cdot \bar{a}(M)) &= \nabla \times (U \cdot \bar{a}(M)) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Ua_x & Ua_y & Ua_z \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial(Ua_z)}{\partial y} - \frac{\partial(Ua_y)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( \frac{\partial(Ua_z)}{\partial x} - \frac{\partial(Ua_x)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial(Ua_y)}{\partial x} - \frac{\partial(Ua_x)}{\partial y} \right) \bar{k} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( U \frac{\partial a_z}{\partial y} + a_z \frac{\partial U}{\partial y} - a_y \frac{\partial U}{\partial z} - U \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( U \frac{\partial a_z}{\partial x} + a_z \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial a_x}{\partial z} - a_x \frac{\partial U}{\partial z} \right) \bar{j} + \\
&+ \left( U \frac{\partial a_y}{\partial x} + a_y \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial a_x}{\partial y} - a_x \frac{\partial U}{\partial y} \right) \bar{k} = U \left( \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \bar{j} + \right. \\
&+ U \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \bar{k} + \left( a_z \frac{\partial U}{\partial y} - a_y \frac{\partial U}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( a_z \frac{\partial U}{\partial x} - a_x \frac{\partial U}{\partial z} \right) \bar{j} + \left( a_y \frac{\partial U}{\partial x} - a_x \frac{\partial U}{\partial y} \right) \bar{k} = \\
&= U \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = U \operatorname{rot} \bar{a}(M) + (\operatorname{grad} U \times \bar{a}(M)),
\end{aligned}$$

або  $\bar{\nabla} \times (U \cdot \bar{a}(M)) = U \operatorname{rot} \bar{a}(M) + (\operatorname{grad} U \times \bar{a}(M))$ .

*Зауваження.* Якщо вектор  $\bar{a}(M)$  – постійний, то

$$\operatorname{rot}(U \cdot \bar{a}(M)) = \operatorname{grad} U \times \bar{a}(M).$$

**5.** Нехай  $\bar{a}_1 = \{a_{x_1}(x, y, z), a_{y_1}(x, y, z), a_{z_1}(x, y, z)\}$  і  $\bar{a}_2 = \{a_{x_2}(x, y, z), a_{y_2}(x, y, z), a_{z_2}(x, y, z)\}$ , тоді  $\operatorname{div}(\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = \bar{a}_2 \operatorname{rot} \bar{a}_1 - \bar{a}_1 \operatorname{rot} \bar{a}_2$ .

Дійсно,

$$\begin{aligned}
\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_{x_1} & a_{y_1} & a_{z_1} \\ a_{x_2} & a_{y_2} & a_{z_2} \end{vmatrix} = \bar{i}(a_{y_1} \cdot a_{z_2} - a_{y_2} \cdot a_{z_1}) - \bar{j}(a_{x_1} \cdot a_{z_2} - a_{x_2} \cdot a_{z_1}) + \\
&+ \bar{k}(a_{x_1} \cdot a_{y_2} - a_{x_2} \cdot a_{y_1}).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) &= \frac{\partial}{\partial x}(a_{y_1} \cdot a_{z_2} - a_{y_2} \cdot a_{z_1}) - \frac{\partial}{\partial y}(a_{x_1} \cdot a_{z_2} - a_{x_2} \cdot a_{z_1}) + \frac{\partial}{\partial z}(a_{x_1} \cdot a_{y_2} - a_{x_2} \cdot a_{y_1}) = \\
&= a_{z_2} \frac{\partial a_{y_1}}{\partial x} + a_{y_1} \frac{\partial a_{z_2}}{\partial x} - a_{y_2} \frac{\partial a_{z_1}}{\partial x} - a_{z_1} \frac{\partial a_{y_2}}{\partial x} - a_{z_2} \frac{\partial a_{x_1}}{\partial y} - a_{x_1} \frac{\partial a_{z_2}}{\partial y} + a_{z_1} \frac{\partial a_{x_2}}{\partial y} + a_{x_2} \frac{\partial a_{z_1}}{\partial y} + \\
&+ a_{x_1} \frac{\partial a_{y_2}}{\partial z} + a_{y_2} \frac{\partial a_{x_1}}{\partial z} - a_{x_2} \frac{\partial a_{y_1}}{\partial z} - a_{y_1} \frac{\partial a_{x_2}}{\partial z} = a_{x_2} \left( \frac{\partial a_{z_1}}{\partial y} - \frac{\partial a_{y_1}}{\partial z} \right) + a_{y_2} \left( \frac{\partial a_{x_1}}{\partial z} - \frac{\partial a_{z_1}}{\partial x} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{z_2} \left( \frac{\partial a_{y_1}}{\partial x} - \frac{\partial a_{x_1}}{\partial y} \right) - \left( a_{x_1} \left( \frac{\partial a_{y_2}}{\partial z} - \frac{\partial a_{z_2}}{\partial y} \right) + a_{y_1} \left( \frac{\partial a_{z_2}}{\partial x} - \frac{\partial a_{x_2}}{\partial z} \right) + a_{z_1} \left( \frac{\partial a_{x_2}}{\partial y} - \frac{\partial a_{y_2}}{\partial x} \right) \right) = \\
& = \bar{a}_2 \operatorname{rot} \bar{a}_1 - \bar{a}_1 \operatorname{rot} \bar{a}_2, \text{ або } \bar{\nabla} (\bar{a}_1 \times \bar{a}_2) = \bar{a}_2 (\bar{\nabla} \times \bar{a}_1) - \bar{a}_1 (\bar{\nabla} \times \bar{a}_2).
\end{aligned}$$

**Приклад 3.7** Довести, що  $\operatorname{rot}(f(r) \cdot \bar{c}) = \frac{f'(r)}{r} (\bar{r} \times \bar{c})$ , де  $\bar{c}$  – сталий вектор.

### Розв'язування

Нехай  $\bar{a} = f(r) \cdot \bar{c} = \{f(r)c_x, f(r)c_y, f(r)c_z\}$ , де  $\bar{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$  – сталий вектор.

Обчислимо  $\operatorname{rot} \bar{a}$ :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(r)c_x & f(r)c_y & f(r)c_z \end{vmatrix} = \\
&= \left( \frac{\partial(f(r)c_z)}{\partial y} - \frac{\partial(f(r)c_y)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( \frac{\partial(f(r)c_z)}{\partial x} - \frac{\partial(f(r)c_x)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial(f(r)c_y)}{\partial x} - \frac{\partial(f(r)c_x)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\
&= \left( c_z \frac{\partial f(r)}{\partial y} - c_y \frac{\partial f(r)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( c_z \frac{\partial f(r)}{\partial x} - c_x \frac{\partial f(r)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left( c_y \frac{\partial f(r)}{\partial x} - c_x \frac{\partial f(r)}{\partial y} \right) \bar{k} = \\
&= \left( c_z \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} - c_y \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( c_z \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} - c_x \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \right) \bar{j} + \left( c_y \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} - c_x \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \right) \bar{k} = \\
&= \frac{\partial f(r)}{\partial r} \left( \left( c_z \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - c_y \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) \bar{i} - \left( c_z \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - c_x \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) \bar{j} + \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial f(r)}{\partial r} \left( c_y \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - c_x \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \bar{k} = \\
&= \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \left( (yc_z - zc_y) \bar{i} - (xc_z - zc_x) \bar{j} + (xc_y - yc_x) \bar{k} \right) = \\
&= \frac{f'(r)}{r} \left( \begin{vmatrix} y & z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \bar{k} \right) = \frac{f'(r)}{r} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \frac{f'(r)}{r} (\bar{r} \times \bar{c}).
\end{aligned}$$

### 3.7 Циркуляція векторного поля та її обчислення. Формула Стокса

Нехай маємо векторне поле  $\bar{a}(M) = \{a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z)\}$  і  $\sigma$  – деяка гладка поверхня. Як відмічалось в пункті 3.3 *циркуляцією векторного поля* називають криволінійний інтеграл цього поля, обчислений вздовж довільного замкнутого контура, який належить поверхні  $\sigma$ , і позначають його  $\mathcal{C}(\bar{a})$ . Для розуміння фізичної суті поняття циркуляції розглянемо поняття *криволінійного інтеграла* та методи його обчислення.

Нехай точка рухається уздовж деякої лінії  $L$  від точки  $M$  до точки  $N$ . Тоді робота, що її виконує сила  $\bar{F} = X(x, y, z)\bar{i} + Y(x, y, z)\bar{j} + Z(x, y, z)\bar{k}$  при переміщенні точки  $P(x, y, z)$  уздовж лінії  $L$ , називається криволінійним інтегралом і обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned}
A &= \int_L \bar{F} \cdot d\bar{l} = \int_L X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz = \\
&= \int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

При цьому напрям від точки  $M$  до точки  $N$  називається напрямом інтегрування.

*Зауваження.* Для позначення криволінійного інтеграла вздовж замкнутого контура (точка початку збігається з точкою кінця) використовують символ  $\oint$ , тобто  $\int_L \bar{F} \cdot d\bar{l} = \oint_L X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$ . Слід відмітити, що замкнутий контур вважається додатно орієнтованим, якщо при його обході область, обмежена цим контуром, залишається зліва.

Обчислити криволінійні інтеграли можна шляхом зведення їх до визначених інтегралів, і вони мають аналогічні властивості.

Нехай крива  $L$  (від точки  $M$  до точки  $N$ ) задана параметричним рівнянням  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , де функції  $x(t)$ ,  $y(t)$  та  $z(t)$  на відрізку  $[\alpha, \beta]$  неперервні разом із своїми похідними  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  і  $z'(t)$ . Точці  $M$  відповідає значення параметра  $\alpha$ , а точці  $N$  –  $\beta$ . Тоді

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} (X(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + Z(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt. \quad (3.25)$$

**Приклад 3.8** Обчислити інтеграл  $I = \int_L ydx + xdy$ , де  $L$  – частина кола  $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$ , що знаходиться у першому квадранті.

### Розв'язування

Для обчислення даного інтеграла використаємо формулу (3.25). Знайдемо відповідні похідні

$$x'(t) = -r \sin t, \quad y'(t) = r \cos t.$$

Тоді

$$I = \int_L ydx + xdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \sin t \cdot (-r \sin t) + r \cos t \cdot r \cos t)dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{r^2}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Зокрема, якщо крива  $L$  (від точки  $M$  до точки  $N$ ) задана рівнянням  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , де функція  $f(x)$  та її похідна  $f'(x)$  неперервні на відрізку  $[a, b]$ , то з формули (3.25) дістанемо

$$\int_{(M)}^{(N)} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_a^b (X(x, f(x)) + Y(x, f(x))f'(x))dx. \quad (3.26)$$

**Приклад 3.9** Обчислити інтеграл  $I = \int_L (x + y)dx - y^2 dy$ , де  $L$  – дуга параболи  $y = x^2$  від точки  $M(0,0)$  до точки  $N(1,1)$ .

### Розв'язування

Оскільки  $y' = 2x$ , то за формулою (3.26) маємо:

$$I = \int_L (x+y)dx - y^2 dy = \int_0^1 (x+x^2 - x^4 \cdot 2x) dx = \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

*Зауваження.* Якщо  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$ , то

$$\int_L \bar{F} \bar{dl} = \int_{L_1} \bar{F} \bar{dl} + \int_{L_2} \bar{F} \bar{dl} + \dots + \int_{L_n} \bar{F} \bar{dl}. \quad (3.27)$$

Зв'язок між подвійними та криволінійними інтегралами встановлює *формула Гріна*. Нехай функції  $X(x,y)$  та  $Y(x,y)$  неперервні разом із своїми частинними похідними  $\frac{\partial Y}{\partial x}$  та  $\frac{\partial X}{\partial y}$  в деякій правильній області  $D$ , обмеженій замкненим контуром  $L$ . Тоді справедлива рівність:

$$\oint_L Xdx + Ydy = \iint_D \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3.28)$$

Зрозуміло, що значення криволінійного інтеграла залежить, певною мірою, від кривої інтегрування. Якщо значення криволінійного інтеграла залишається однаковим вздовж усіх можливих кривих, які сполучають початкову та кінцеву точки кривої інтегрування, то кажуть, що криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування. З'ясуємо умови, за яких існує така незалежність.

Нехай в усіх точках області  $D$  функції  $X(x,y)$  та  $Y(x,y)$  неперервні разом із частинними похідними  $\frac{\partial Y}{\partial x}$  та  $\frac{\partial X}{\partial y}$ . Для того, щоб криволінійний інтеграл вздовж довільного замкненого контуру дорівнював нулю (значення криволінійного інтеграла не залежало від кривої інтегрування) необхідно і достатньо, щоб  $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$ .

Дійсно, розглянемо довільний замкнений контур  $L \in D$  і для нього запишемо формулу Гріна:

$$\oint_L Xdx + Ydy = \iint_D \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy.$$

Якщо виконується умова  $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$ , то  $\iint_D \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = 0$ , тобто

$$\oint_L Xdx + Ydy = 0.$$

З іншого боку припустимо, що  $\oint_L Xdx + Ydy = 0$ , але  $\frac{\partial Y}{\partial x} \neq \frac{\partial X}{\partial y}$  принаймні в одній точці  $P(x_0, y_0)$ . Тоді в цій точці маємо нерівність  $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0$ . Тобто, для будь-якого як завгодно малого додатного числа  $\delta$  виконується нерівність  $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > \delta$  в усіх точках деякої малої області  $D'$  (причому точка  $P(x_0, y_0) \in D'$ ). Тоді

$$\iint_{D'} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy > \delta \iint_{D'} dx dy = \delta \cdot S_{D'},$$

де  $S_{D'}$  – площа області  $D'$ . Але за формулою Гріна  $\oint_L Xdx + Ydy = \iint_D \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = 0$ , а згідно з нашим припущенням  $\iint_{D'} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy > \delta \cdot S_{D'} > 0$ . Отже, наше припущення неправильне і  $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$ .

Нехай координати вектора  $\bar{a}(M)$  мають неперервні частинні похідні першого порядку, а  $L$  – замкнений, гладкий (або кусково-гладкий) контур. Натягнемо на контур гладку (або кусково-гладку) поверхню  $\sigma$ , яка задається рівнянням  $z = z(x, y)$ . Виберемо верхню сторону даної поверхні (рис. 3.2).

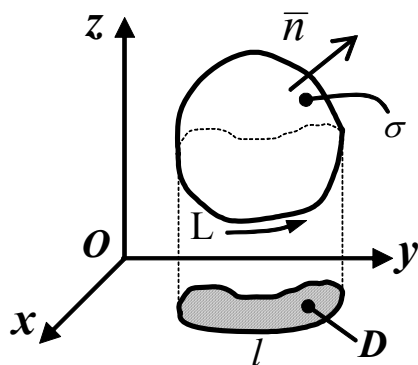


Рисунок 3.2

Тоді буде мати місце таке співвідношення:

$$\text{Ц}(\bar{a}) = \oint_L \bar{a} d\bar{l} = \iint_{\sigma} \text{rot} \bar{a} d\bar{s}, \quad (3.29)$$

яке називають *формулою Стокса*.



Доведемо цю формулу. Розглянемо інтеграл  $\oint_L a_x(x, y, z) dx$ . Оскільки контур  $L$  лежить на поверхні  $\sigma$ , то координати його точок задовольняють рівняння  $z = z(x, y)$ , тому

$$\oint_L a_x(x, y, z) dx = \oint_L a_x(x, y, z(x, y)) dx.$$

Застосовуючи до знайденого інтеграла формулу Гріна (3.28), дістанемо

$$\oint_L a_x(x, y, z(x, y)) dx = - \iint_D \left( \frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy.$$

Оскільки ми обрали верхню сторону поверхні  $\sigma$ , тобто  $\cos(\bar{n}^0, \bar{k}) > 0$ , то нормаль має проєкції  $-\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $-\frac{\partial z}{\partial y}$ , 1. Але напрямні косинуси нормалі

пропорційні відповідним проєкціям, тому  $\frac{\cos(\bar{n}^0, \bar{j})}{\cos(\bar{n}^0, \bar{k})} = \frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{1} = -\frac{\partial z}{\partial y}$ , тоді

$$\begin{aligned} \oint_L a_x(x, y, z) dx &= - \iint_D \left( \frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_D \left( \frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \frac{\cos(\bar{n}^0, \bar{j})}{\cos(\bar{n}^0, \bar{k})} \right) dx dy = \\ &= - \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial a_x}{\partial y} \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) - \frac{\partial a_x}{\partial z} \cos(\bar{n}^0, \bar{j}) \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Отже,

$$\oint_L a_x(x, y, z) dx = \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} \cos(\bar{n}^0, \bar{j}) - \frac{\partial a_x}{\partial y} \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right) d\sigma. \quad (3.30)$$

Аналогічним чином можна довести, що при відповідних умовах справедливі формули:

$$\oint_L a_y(x, y, z) dy = \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) - \frac{\partial a_y}{\partial z} \cos(\bar{n}^0, \bar{i}) \right) d\sigma, \quad (3.31)$$

$$\oint_L a_z(x, y, z) dz = \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} \cos(\bar{n}^0, \bar{i}) - \frac{\partial a_z}{\partial x} \cos(\bar{n}^0, \bar{j}) \right) d\sigma. \quad (3.32)$$

Додаючи почленно рівності (3.30) – (3.32),

$$\oint_L \overline{a} d\vec{l} = \iint_{\sigma} \left( \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos(\vec{n}^0, \vec{i}) + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos(\vec{n}^0, \vec{j}) + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos(\vec{n}^0, \vec{k}) \right) d\sigma = \iint_{\sigma} \text{rot } \overline{a} d\vec{s}. \quad (3.33)$$

**Приклад 3.10** Знайти циркуляцію векторного поля  $\overline{a} = (2x + y)\vec{i} + (x + 3z)\vec{j}$  вздовж контура  $L$ , що обмежує трикутник  $ABC$ , утворений при перерізі площини  $P: x + 2y + z = 2$  з координатними площинами:

- безпосередньо;
- за формулою Стокса.

### Розв'язування

а) Обчислимо циркуляцію векторного поля безпосередньо (рис. 3.3):

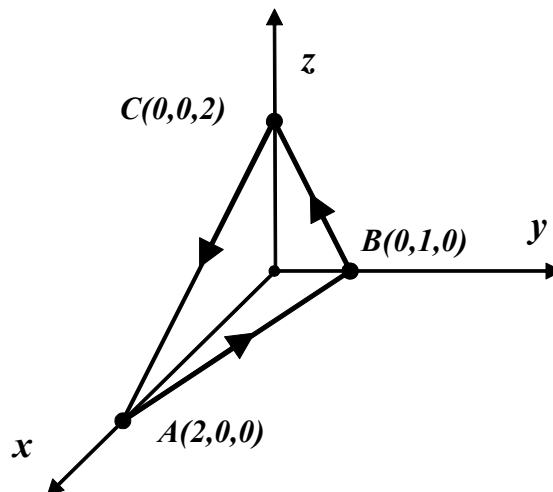


Рисунок 3.3

$$\mathcal{C}(\overline{a}) = \oint_{AB} \overline{a} d\vec{l} + \oint_{BC} \overline{a} d\vec{l} + \oint_{CA} \overline{a} d\vec{l},$$

де  $\overline{a} d\vec{l} = (2x + y)dx + (x + 3z)dy$ .

На прямій  $AB$   $z = 0, dz = 0, y = 1 - \frac{x}{2}, dy = -\frac{1}{2}dx, x \in [0, 2]$ .

Інтегрування здійснюється від 2 до 0. Тоді

$$\oint_{AB} \bar{a} dl = \int_2^0 \left( 2x + 1 - \frac{x}{2} + (x + 3 \cdot 0) \left( -\frac{1}{2} \right) \right) dx = \int_2^0 (x + 1) dx = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_2^0 = -2 - 2 = -4.$$

На прямій  $BC$   $x = 0, dx = 0, z = 2 - 2y, dz = -2dy, y \in [0, 1]$ .  
Інтегрування здійснюється від 1 до 0. Тоді

$$\oint_{BC} \bar{a} dl = \int_1^0 3(2 - 2y) dy = \left( 6y - 3y^2 \right) \Big|_1^0 = 3(0 - 2 - 0 + 1) = -3.$$

На прямій  $CA$   $y = 0, dy = 0, z = 2 - x, dz = -dx, x \in [0, 2]$ . Тоді

$$\oint_{CA} \bar{a} dl = \int_0^2 2x dx = x^2 \Big|_0^2 = 4.$$

$$\text{Таким чином, } \mathcal{C}(\bar{a}) = \oint_{AB} \bar{a} dl + \oint_{BC} \bar{a} dl + \oint_{CA} \bar{a} dl = -4 - 3 + 4 = -3.$$

б) Обчислимо циркуляцію векторного поля  $\bar{a}$  за формулою Стокса (3.29).

Обчислимо  $rot \bar{a}$ :

$$rot \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x + y & x + 3z & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial (x + 3z)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( \frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial (2x + y)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial (x + 3z)}{\partial x} - \frac{\partial (2x + y)}{\partial y} \right) \bar{k} = -3\bar{i}.$$

Контур трикутника  $ABC$  має додатну орієнтацію і лежить у площині  
 $P: x + 2y + z = 2, \bar{n}^0 \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$  – вектор нормалі до даної поверхні.

Тоді

$$\text{Ц}(\bar{a}) = \iint_{\sigma} \text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n} \, ds = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right|} \right|_{z=z(x,y)} dx dy.$$

Оскільки  $\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0 = -\frac{3}{\sqrt{6}}$ ,  $\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right| = \frac{1}{\sqrt{6}}$ , то

$$\text{Ц}(\bar{a}) = \iint_{D_{xy}} \left. \frac{\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right|} \right|_{z=z(x,y)} dx dy = -3 \iint_{D_{xy}} dx dy = -3 S_{\Delta OAB} = -3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = -3.$$

**Приклад 3.11** Обчислити циркуляцію векторного поля

$$\bar{a} = 2zy\bar{i} + 6(x^2 + 1)\bar{j} + 3xy\bar{k}$$

вздовж замкненого контура  $L$ , що є перерізом сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  з площиною  $z = 3$  і з координатними площинами у першому октанті (обхід контуру додатний) (рис. 3.4):

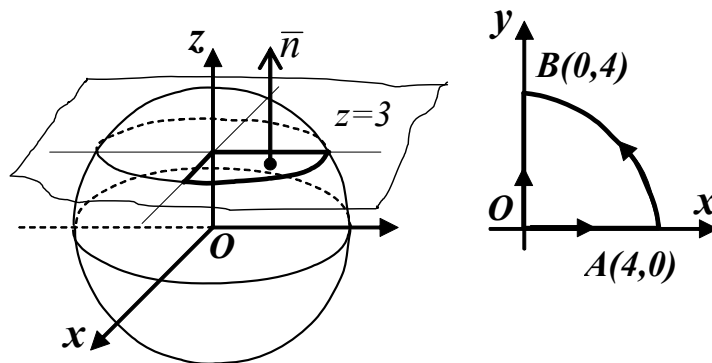


Рисунок 3.4

- а) безпосередньо;
- б) за формулою Стокса.

### Розв'язування

а) Обчислимо циркуляцію векторного поля  $\bar{a} = 2zy\bar{i} + 6(x^2 + 1)\bar{j} + 3xy\bar{k}$  безпосередньо:

$$\text{Ц}(\bar{a}) = \int_{OA} \bar{a} d\bar{l} + \int_{AB} \bar{a} d\bar{l} + \int_{BO} \bar{a} d\bar{l}, \text{ де } \bar{a} d\bar{l} = 2yzdx + 6(x^2 + 1)dy + 3xydz.$$

На прямій  $OA$ :  $y = 0$ ,  $dy = 0$ ,  $z = 3$ ,  $dz = 0$ ,  $x \in [0, 4]$ . Тоді

$$\int_{OA} \bar{a} \bar{dl} = \int_0^4 0 \, dx = 0.$$

На дузі  $AB$ :  $x^2 + y^2 = 16$ . Задамо коло параметрично:  $x = 4 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t$ ,  $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Тоді  $dx = -4 \sin t \, dt$ ,  $dy = 4 \cos t \, dt$ ,  $z = 3$ ,  $dz = 0$ .

Таким чином, маємо:

$$\begin{aligned} \int_{AB} \bar{a} \bar{dl} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cdot 3 \cdot 4 \sin t \cdot (-4 \sin t) + 6 \cdot (16 \cos^2 t + 1) \cdot 4 \cos t) \, dt = \\ &= -96 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt + 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (16 \cos^3 t + \cos t) \, dt = -48 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) \, dt + 384 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos^2 t \, dt + \\ &+ 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = -48 \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 384 \left( \sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 24 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -48 \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) + 384 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + 24 = -24\pi + 280. \text{ Тобто, } \int_{AB} \bar{a} \bar{dl} = 280 - 24\pi. \end{aligned}$$

На прямій  $BO$ :  $x = 0$ ,  $dx = 0$ ,  $z = 3$ ,  $dz = 0$ ,  $y \in [0, 4]$ . Інтегрування здійснюється за змінною  $y$  від 4 до 0. Тоді

$$\int_{BO} \bar{a} \bar{dl} = \int_4^0 6 \, dy = 6y \Big|_4^0 = -24.$$

Таким чином,

$$\mathcal{C}(\bar{a}) = \int_{OA} \bar{a} \bar{dl} + \int_{AB} \bar{a} \bar{dl} + \int_{BO} \bar{a} \bar{dl} = 280 - 24\pi - 24 = 256 - 24\pi.$$

б) Обчислимо циркуляцію векторного поля  $\bar{a} = 2zy\bar{i} + 6(x^2 + 1)\bar{j} + 3xy\bar{k}$  за формулою Стокса:

$$\mathcal{C}(\bar{a}) = \iint_{\sigma} \text{rot} \bar{a} \cdot \bar{ds} = \iint_{D_{xy}} \frac{\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right|} \Big|_{z=z(x,y)} \, dx \, dy, \text{ де}$$

$$\text{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2yz & 6(x^2 + 1) & 3xy \end{vmatrix} =$$

$$= \left( \frac{\partial(3xy)}{\partial y} - \frac{\partial(6(x^2+1))}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( \frac{\partial(3xy)}{\partial x} - \frac{\partial(2yz)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial(6(x^2+1))}{\partial x} - \frac{\partial(2yz)}{\partial y} \right) \bar{k} =$$

$$= 3x\bar{i} - y\bar{j} + (12x - 2z)\bar{k}.$$

Поверхня  $\sigma$  – це площина  $z = 3$ , причому одиничний вектор нормалі  $\bar{n}^0$  колінеарний вектору  $\bar{k}$ :  $\bar{n}^0 = \{0, 0, 1\}$  та співнаправлений з ним. Тоді

$$\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0 = 3x \cdot 0 + (-y) \cdot 0 + (12x - 2z) \cdot 1 = 12x - 2z, \quad \left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right| = 1,$$

$$\iint_{\sigma} \text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0 ds = \iint_{D_{xy}} \frac{\text{rot} \bar{a} \cdot \bar{n}^0}{\left| \cos(\bar{n}^0, \bar{k}) \right|} \Big|_{z=z(x,y)} dxdy = \iint_{D_{xy}} (12x - 2z) \Big|_{z=3} dxdy = \iint_{D_{xy}} (12x - 6) dxdy.$$

Перейдемо до полярної системи координат за допомогою перетворення:  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow \rho = 4$ ,  $\rho \in [0, 4]$ ,

$\varphi \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ ,  $dxdy = \rho d\rho d\varphi$ . Маємо:

$$\iint_{D_{xy}} (12x - 6) dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^4 (12\rho \cos \varphi - 6) \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 12 \cos \varphi \frac{\rho^3}{3} - 6 \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^4 d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (256 \cos \varphi - 48) d\varphi = (256 \sin \varphi - 48\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 256 - 48\pi.$$

Таким чином,  $\iint (\bar{a}) = 256 - 48\pi$ .

### 3.8 Основні операції векторного аналізу в криволінійних координатах

Як розглядалося у попередніх пунктах, основні поняття теорії поля – градієнт, дивергенція, ротор мають певний фізичний зміст, і для введення цих понять немає потреби вибирати ту чи іншу систему координат.

При конкретному обчисленні градієнта, розбіжності та проекції ротора на напрям нормалі доводиться застосовувати ту чи іншу координатну систему. Звичайно, можна постійно використовувати прямокутну декартову систему координат. Однак у багатьох випадках це пов'язано із великими технічними труднощами. Аналогічне положення зустрічається, наприклад, при обчисленні кратних інтегралів. Тому досить

часто доцільно використовувати криволінійні координати (наприклад, циліндричні чи сферичні).

Розглянемо питання обчислення градієнта, дивергенції та ротора векторного поля в криволінійних координатах.

Нехай  $x, y, z$  – прямокутні декартові координати точки  $M$ ,  $q_1, q_2, q_3$  – її криволінійні координати. При цьому припускаємо, що кожній трійці  $q_1, q_2, q_3$  відповідає певна точка простору і, навпаки, кожній точці простору відповідає певна трійка чисел  $q_1, q_2, q_3$ . Очевидно,

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z),$$

а

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3).$$

Рівняння  $q_1 = c_1, q_2 = c_2, q_3 = c_3$ , де  $c_1, c_2, c_3$  – константи, визначають координатні поверхні. На кожній із них одна з координат  $q_1, q_2, q_3$  залишається сталою.

Припустимо, що через кожен точку простору проходить лише одна координатна поверхня із кожного сімейства. Координатні поверхні попарно перетинаються вздовж ліній, які називаються координатними лініями. Вздовж кожної координатної лінії одна з координат  $q_1, q_2, q_3$  змінюється, а дві інші залишаються сталими. Будемо вважати, що в кожній точці координатні лінії ортогональні одна одній. Нехай  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  – орти дотичних до координатних ліній в точці  $O$ , а  $dl_1, dl_2, dl_3$  – елементи довжин дуг відповідних координатних ліній.

Відомо, що  $dl = |d\bar{r}|$ , де  $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ . Вздовж координатної лінії  $q_1$  завжди  $q_2 = const, q_3 = const$ , тому  $x, y, z$  в точках цієї лінії залежать лише від  $q_1$ . Тоді

$$d\bar{r} = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 \cdot \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 \cdot \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 \cdot \bar{k},$$

$$|d\bar{r}| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} \cdot dq_1.$$

Таким чином,  $dl_1 = H_1 \cdot dq_1$ ,

де 
$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}.$$

Аналогічно маємо:

$$dl_2 = H_2 \cdot dq_2, \quad dl_3 = H_3 \cdot dq_3,$$

де

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2},$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}.$$

Елементи площ координатних поверхонь знаходяться за формулами:

$$dS_1 = H_2 H_3 \cdot dq_2 \cdot dq_3, \quad dS_2 = H_1 H_3 \cdot dq_1 \cdot dq_3, \quad dS_3 = H_2 H_1 \cdot dq_2 \cdot dq_1,$$

$H_1, H_2, H_3$  називаються коефіцієнтами Ламе.

Знайдемо вираз градієнта функції  $f$  в криволінійних координатах  $q_1, q_2, q_3$ .

Відомо, що  $np_s \operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial s}$ . Тому

$$np_{l_1} \operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial l_1}, \quad np_{l_2} \operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial l_2}, \quad np_{l_3} \operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial l_3}.$$

Але

$$\frac{\partial f}{\partial l_1} = \frac{df}{dl_1} = \frac{df}{H_1 \cdot dq_1} = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial f}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial l_3} = \frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_3}.$$

Таким чином,

$$\operatorname{grad} f = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1} \cdot \bar{e}_1 + \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_2} \cdot \bar{e}_2 + \frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_3} \cdot \bar{e}_3. \quad (3.34)$$

Можна показати, що

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 a_{e_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 H_3 a_{e_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_2 H_1 a_{e_3}) \right], \quad (3.35)$$

де  $a_{e_i} = np_{e_i} \bar{a}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ).

Якщо врахувати, що оператор Лапласа  $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$ , то, застосовуючи формули (3.34) та (3.35), отримуємо:



$$\Delta f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_1 H_3}{H_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_2 H_1}{H_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (3.36)$$

Формула для знаходження векторного поля в криволінійних координатах така:

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{a} = & \frac{1}{H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 a_{e_3}) - \frac{\partial}{\partial q_3} (H_2 a_{e_2}) \right] \cdot \bar{e}_1 + \frac{1}{H_1 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 a_{e_1}) - \frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 a_{e_3}) \right] \cdot \bar{e}_2 + \\ & + \frac{1}{H_2 H_1} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 a_{e_2}) - \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 a_{e_1}) \right] \cdot \bar{e}_3. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Застосуємо формули (3.34), (3.35) та (3.37) для запису основних операцій векторного аналізу в циліндричних та сферичних координатах.

**Циліндричні координати.** Положення точки  $M$  в цій системі координат визначається координатами  $\rho, \varphi, z$ ,

де  $\rho$  – відстань від точки  $M$  до осі  $Oz$ ;

$\varphi$  – кут між додатним напрямом осі  $Ox$  та радіусом-вектором проєкції точки  $M$  на площину;

$z$  – відстань від точки  $M$  до площини  $xOy$ .

Формули перетворення координат:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Тому

$$H_1 = H_\rho = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1,$$

$$H_2 = H_\varphi = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = \rho,$$

$$H_3 = H_z = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial z} \right)^2} = 1.$$

За формулами (3.34) – (3.37) маємо:

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \cdot \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \bar{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \bar{e}_z,$$

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho a_z)}{\partial z} \right],$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right],$$

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) \bar{e}_\rho + \left( \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right) \bar{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right) \bar{e}_z.$$

В даному випадку  $a_\rho, a_\varphi, a_z$  – проекції вектора  $\bar{a}$  на напрямки  $\bar{e}_\rho, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_z$  відповідно.

Відмітимо, що циліндричні координати використовуються в теоретичній електротехніці при дослідженні явищ поверхневого ефекту (відтиснення змінного струму від центра до зовнішньої поверхні) у циліндричних проводах.

**Сферичні координати.** Положення точки  $M$  в цій системі координат визначається координатами  $\rho, \psi, \varphi$ ,

де  $\rho$  – відстань від точки  $M$  до початку координат;

$\psi$  – кут між радіусом-вектором точки  $M$  та додатним напрямом осі  $Oz$ ;

$\varphi$  – кут між додатним напрямом осі  $Ox$  та радіусом-вектором проекції точки  $M$  на площину.

Формули перетворення координат:

$$x = \rho \sin \psi \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \psi \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \psi.$$

Тому

$$H_1 = H_\rho = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2} = \sqrt{\sin^2 \psi \cos^2 \varphi + \sin^2 \psi \sin^2 \varphi + \cos^2 \psi} = 1,$$

$$H_2 = H_\psi = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \psi} \right)^2} = \rho,$$

$$H_3 = H_\varphi = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2} = \rho \sin \psi.$$

За формулами (3.34) – (3.37) маємо:

$$\text{grad}f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \cdot \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \bar{e}_\psi + \frac{1}{\rho \sin \psi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \bar{e}_\varphi,$$

$$\text{div} \bar{a} = \frac{1}{\rho^2 \sin \psi} \left[ \sin \psi \frac{\partial(\rho^2 a_\rho)}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial(\sin \psi \cdot a_\psi)}{\partial \psi} + \frac{1}{\rho \sin \psi} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right],$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho^2 \sin \psi} \left[ \sin \psi \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \psi \cdot \frac{\partial f}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right],$$

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{a} = & \frac{1}{\rho \sin \psi} \left( \frac{\partial(a_\varphi \sin \psi)}{\partial \psi} - \frac{\partial a_\psi}{\partial \varphi} \right) \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial \rho} \right) \bar{e}_\psi + \\ & + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho a_\psi)}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial \psi} \right) \bar{e}_\varphi. \end{aligned}$$

В електротехніці та радіотехніці сферичні координати використовують при розгляді питання випромінення та розповсюдження електромагнітних хвиль.

### Питання для самоперевірки

1. Що називають дивергенцією векторного поля?
2. Охарактеризуйте фізичний зміст дивергенції.
3. Виведіть формулу для обчислення дивергенції в декартових координатах.
4. Як визначити, в яких точках векторне поле має стоки, а в яких – джерела?
5. Що називають проекцією ротора векторного поля на напрямок нормалі?
6. Що називають ротором векторного поля?
7. Вкажіть фізичний зміст проекції ротора векторного поля на напрямок нормалі.
8. Запишіть формулу обчислення ротора векторного поля в декартових координатах.
9. Який оператор називають оператором Гамільтона? Вкажіть властивості цього оператора.
10. Які ви знаєте диференціальні операції другого порядку? Охарактеризуйте їх.
11. Перерахуйте властивості ротора векторного поля.
12. Доведіть, що  $rot(f(r) \cdot \bar{c}) = \frac{f'(r)}{r}(\bar{r} \times \bar{c})$ , де  $\bar{c}$  – сталий вектор.
13. Що називають циркуляцією векторного поля?
14. Що називають криволінійним інтегралом?
15. Як обчислюють криволінійні інтеграли?
16. Запишіть формулу Гріна.
17. Сформулюйте та доведіть умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.
18. Виведіть формулу Стокса.
19. Які координати визначають положення точки  $M$  в циліндричній та сферичній системах координат?
20. Як виконуються операції векторного аналізу в криволінійних координатах?
21. Запишіть формули обчислення основних характеристик векторного поля в циліндричних та сферичних координатах.

## Завдання для самостійної роботи

### Завдання 3.1

Обчислити циркуляцію векторного поля

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

вздовж замкненого контура, який обмежує трикутник ABC, утвореного при перетині площини P з координатними площинами:

- а) безпосередньо;
  - б) за формулою Стокса (обхід контура додатний).
- Варіанти завдань взяти із завдання 2.1.

### Завдання 3.2

Обчислити циркуляцію векторного поля

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

вздовж замкненого контура L (обхід контура в додатному напрямі):

- а) безпосередньо;
- б) за формулою Стокса.

1.  $\vec{a} = y^2\vec{i} + 2x\vec{j}$ , L - перетин сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  з координатними площинами в другому октанті.

2.  $\vec{a} = -2xy\vec{i} + \vec{k}$ , L - перетин циліндра  $x^2 + y^2 = 4$  з площиною  $z = 2$ .

3.  $\vec{a} = y^2\vec{i} + 2zy\vec{j}$ , L - перетин параболоїда  $z = 25 - x^2 - y^2$  з координатними площинами в четвертому октанті.

4.  $\vec{a} = x\vec{i} + x^2y\vec{j}$ , L - перетин сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  з координатними площинами в першому октанті.

5.  $\vec{a} = x^2y\vec{i} + z\vec{k}$ , L - перетин циліндра  $9x^2 + 4y^2 = 36$  з площиною  $z = 2$ .

6.  $\vec{a} = x^2\vec{i} + xy^2\vec{j}$ , L - перетин сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  з координатними площинами в другому октанті.

7.  $\vec{a} = y\vec{j} + x^2y\vec{k}$ , L - перетин сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  з координатними площинами в четвертому октанті.

8.  $\vec{a} = y^2\vec{i} + 3xz\vec{k}$ , L - перетин циліндра  $x^2 + y^2 = 4$  з площинами  $z = 1, x = 0, y = 0$  в першому октанті.

9.  $\vec{a} = x^2\vec{j} + y^2\vec{k}$ , L - перетин параболоїда  $z = 9 - x^2 - y^2$  з координатними площинами в другому октанті.

10.  $\bar{a} = xz\bar{i} + yz\bar{k}$ , L - перетин площини  $y=1$  з координатними площинами і з циліндром  $x^2 + z^2 = 1$ , що лежить в другому октанті.

11.  $\bar{a} = 2\bar{i} + 67y\bar{k}$ , L - перетин сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  з координатними площинами в першому октанті.

12.  $\bar{a} = x^2 + x^2\bar{j}$ , L - перетин параболоїда  $x = 4 - y^2 - z^2$  з площиною  $x=3$ .

13.  $\bar{a} = 27\bar{j} + xy\bar{k}$ , L - перетин циліндра  $x^2 + y^2 = 4$  з площиною  $z = 2$  і з координатними площинами в третьому октанті.

14.  $\bar{a} = zy\bar{i} + 4xz\bar{k}$ , L - перетин циліндра  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  з площиною  $z = 2$  і з координатними площинами в першому октанті.

15.  $\bar{a} = 2xy\bar{j} + yz\bar{k}$ , L - перетин циліндра  $x^2 + y^2 = 4$  з площинами  $x=0, y=0, z=0$ .

16.  $\bar{a} = 2x^2\bar{i} + y^2\bar{k}$ , L - перетин параболоїда  $y = x^2 + z^2$  з площиною  $x=1$ .

17.  $\bar{a} = 3xz\bar{i} + xy\bar{j}$ , L - перетин параболоїда  $z = x + y^2$  з площиною  $z = 4$  і з координатою площиною  $y=0$  ( $y>0$ ).

18.  $\bar{a} = 3x\bar{i} + yz\bar{k}$ , L - перетин циліндра  $y = 4 - x^2$  з площиною  $z = 1$ .

19.  $\bar{a} = xy\bar{i} + z\bar{j}$ , L - перетин циліндра  $x + 4z^2 = 1$  з площинами  $y=1, x=0$  ( $x>0$ ).

20.  $\bar{a} = zx^2\bar{i} + y^2\bar{j}$ , L - перетин параболоїда  $z = 1 - x^2 - y^2$  з площинами  $z=0, y=0$  ( $y>0$ ).

21.  $\bar{a} = 2x\bar{i} + y\bar{j} + xz\bar{k}$ , L - перетин параболоїда з координатними площинами в четвертому октанті.

22.  $\bar{a} = x\bar{i} - z\bar{j} + yz\bar{k}$ , L - перетин параболоїда  $z = 1 - x^2 - y^2$  з площинами  $y=0, z=0, y=x$  в першому октанті.

23.  $\bar{a} = x^2y\bar{i} + xz^2\bar{j}$ , L - перетин циліндра  $x^2 + y^2 = 1$  з площинами  $x=0, y=0, z=0$  і  $z=1$ .

24.  $\bar{a} = x^3\bar{j} + y^3\bar{k}$ , L - перетин сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  з координатними площинами в четвертому октанті.

25.  $\bar{a} = xy\bar{j} + yz\bar{k}$ , L - перетин параболоїда  $z = 4 - x^2 - y^2$  з координатними площинами в четвертому октанті.

26.  $\bar{a} = y\bar{j} + xy\bar{k}$ , L - перетин параболоїда  $x = y^2 + z^2$  з площиною  $x=4$  і з координатними площинами в першому октанті.

27.  $\bar{a} = xyz\bar{j} + z\bar{k}$ , L - перетин конуса  $y^2 = z^2 + x^2$  з площинами  $x=0, y=1, z=0$  в першому октанті.

28.  $\bar{a} = y^2\bar{i} + x^2\bar{j}$ , L - перетин сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  з площинами  $y=0, y=x, z=0$  в першому октанті.

29.  $\vec{a} = x^2\vec{i} + 3y\vec{k}$ , L - перетин сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  з координатними площинами в другому октанті.

30.  $\vec{a} = xy\vec{j} - 2yz\vec{k}$ , L - перетин циліндра  $x^2 + y^2 = 1$  з площинами  $x=2, x=0, y=0, z=0$  в другому октанті.

31.  $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ , L - перетин сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  з координатними площинами в першому октанті.

32.  $\vec{a} = 2\vec{i} + x^2\vec{j}$ , L - перетин сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  з координатними площинами в другому октанті.

33.  $\vec{a} = 2z\vec{j} + 3xy\vec{k}$ , L - перетин сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  з площинами  $x=3, y=0, z=0$  в першому октанті.

34.  $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$ , L - перетин еліпсоїда  $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$  з координатними площинами в першому октанті.

35.  $\vec{a} = x^3\vec{i} + y\vec{j} + z^3\vec{k}$ , L - перетин параболоїда  $y = \frac{x^2 + z^2}{4}$  з площинами  $x=0, y=1, z=1$  в другому октанті.

36.  $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ , L - перетин параболоїда  $z = 4 - x^2 - y^2$  з координатними площинами в першому октанті.

37.  $\vec{a} = x\vec{i} - 2\vec{j} + z\vec{k}$ , L - перетин сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  з координатними площинами  $y=0, y=x, z=0$  в першому октанті.

38.  $\vec{a} = x^2\vec{i} + z^2\vec{k}$ , L - перетин сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  з площинами  $x=0, y=0, z=3$  в першому октанті.

39.  $\vec{a} = y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ , L - перетин сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  з координатними площинами в третьому октанті.

40.  $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ , L - перетин параболоїда  $z = 1 - x^2 - y^2$  з площинами  $y=0, y=x, z=0$  в першому октанті.

### Завдання 3.3

1. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = \vec{r} \times \vec{c}$ , де  $\vec{r}$  - радіус-вектор довільної точки  $M(x; y; z)$ ,  $\vec{c}$  - сталий вектор.
2. Визначити, в яких точках векторне поле  $\vec{a}$  має джерела, якщо  $\vec{a} = 3 \cdot x^2 \cdot \vec{i} - 5 \cdot x \cdot y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ ,  
 $M_1(1; 2; 3), M_2(1; 5; -3), M_3(2; 0; -1), M_4(1; 0; 3)$ .

3. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = U \times \vec{b}$ , де  $U = \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}}$ ,  $\vec{b} = 2 \cdot x \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} - y \cdot \vec{k}$ , у точці  $M_0(1;3;4)$ .
4. Довести, що  $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b}$ ,  
де  $\vec{a} = P_1(x; y; z) \vec{i} + \vec{Q}_1(x; y; z) \vec{j} + R_1(x; y; z) \vec{k}$ ,  
 $\vec{b} = P_2(x; y; z) \vec{i} + \vec{Q}_2(x; y; z) \vec{j} + R_2(x; y; z) \vec{k}$ .
5. Визначити, в яких точках векторне поле  $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$  не має ні джерел, ні стоків, якщо  $\vec{b} = y^2 \cdot z^2 \cdot \vec{i} - x^2 \cdot z^2 \cdot \vec{j} + x^2 \cdot y^2 \cdot \vec{k}$ ,  
 $\vec{c} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$ ,  $M_1(0; -1; 1)$ ,  $M_2(1; 0; 1)$ ,  $M_3(1; -1; 0)$ ,  $M_4(-1; 0; -1)$ .
6. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = r^2(\vec{c} \times \vec{r})$ , де  $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ ,  $z^2 = |\vec{r}|^2$ .
7. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = U \times \vec{c}$ , де  $U = \frac{1}{(3 \cdot x^2 - y + 2 \cdot z)^2}$ , де  $\vec{c} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}$ .
8. Визначити, в яких точках векторне поле  $\vec{a}$  має стоки, якщо  $\vec{a} = x \cdot y \cdot z \cdot \vec{i} - 2 \cdot y^2 \cdot z \cdot \vec{j} + y \cdot z^2 \cdot \vec{k}$ ,  
 $M_1(0; 1; 2)$ ,  $M_2(1; -1; 1)$ ,  $M_3(-1; -1; 1)$ ,  $M_4(2; -1; 1)$ .
9. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{r}$ , якщо  $\vec{b} = y \cdot z \cdot \vec{i} + x \cdot z \cdot \vec{j} + x \cdot y \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ .
10. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = U \times \vec{b}$ , де  $U = e^{xyz}$ ,  
 $\vec{b} = -x \cdot z \cdot \vec{i} + y \cdot z \cdot \vec{j} + x \cdot y \cdot \vec{k}$ .
11. Показати, що дивергенція векторного поля  $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ , де  $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ ,  $r = |\vec{r}|$ , дорівнює нулю.



12. Визначити в яких точках векторне поле  $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$ , де  $\vec{b} = x \cdot y^2 \cdot \vec{i} + x^2 \cdot z \cdot \vec{j} + y \cdot z^2 \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{c} = 3 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ , має джерела, якщо  $M_1(1;0;1)$ ,  $M_2(0;-1;1)$ ,  $M_3(-1;-1;1)$ ,  $M_4(1;1;0)$ .
13. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = U \cdot \vec{c}$ , де  $U = 3 \cdot x^2 \cdot z + y^3$ ,  $\vec{c} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}$ .
14. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = U \times \vec{b}$ , де  $U = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $\vec{b} = x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} - 2 \cdot z \cdot \vec{k}$  у точці  $M_0(4;3;-1)$ .
15. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = (x^2 - 2 \cdot x \cdot y) \vec{i} + (y^2 - 2 \cdot y \cdot z) \vec{j} + (z^2 - 2 \cdot x \cdot z) \vec{k}$ .
16. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = x^3 \cdot y \cdot \vec{i} - y^2 \cdot z^2 \cdot \vec{j} + x \cdot z^3 \cdot \vec{k}$  у точці  $M_0(2;1;2)$ .
17. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = U \times \vec{b}$ , де  $U = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\vec{b} = 2 \cdot x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ .
18. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{r}$ ,  $\vec{b} = z \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ .
19. Перевірити, чи дорівнює нулю дивергенція векторного поля  $\vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = (3 \cdot x^3 \cdot y - 4 \cdot x \cdot y^3) \vec{i} + (y^4 - 4 \cdot y \cdot z^3) \vec{j} + (z^4 - 9 \cdot x^2 \cdot y \cdot z) \vec{k}$ .
20. Чи має векторне поле  $\vec{a} = \ln(3 \cdot x^2 + y^2 + z^2)$  джерела в точках  $M_1(1;1;1)$ ,  $M_2(-1;1;-1)$ ,  $M_3(1;-1;3)$ ,  $M_4(1;2;1)$ ?
21. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{r}$ , де  $\vec{b} = 2 \cdot z \cdot \vec{i} + 3 \cdot x \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ .
22. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = U \times \vec{c}$ , де  $U = x \cdot y^2 \cdot z^3$ ,  $\vec{c} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} - \vec{k}$  у точці  $M_0(0;2;1)$ .

23. Визначити в яких точках векторне поле  $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$  має джерела, якщо  
 $\vec{b} = y \cdot z \cdot \vec{i} + x \cdot z \cdot \vec{j} - x \cdot y \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2 \cdot \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  
 $M_1(1;1;0), M_2(3;1;1), M_3(0;1;2), M_4(1;0;2)$ .
24. Довести, що  $\operatorname{div}(U \times \vec{a}) = U \cdot \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} U$ , де  $U = U(x; y; z)$ ,  
 $\vec{a} = P(x; y; z) \vec{i} + Q(x; y; z) \vec{j} + R(x; y; z) \vec{k}$ .
25. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = U \times \vec{c}$ , де  
 $U = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$ .
26. Визначити, в яких точках векторне поле  $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$  має стоки, якщо  
 $\vec{b} = 3 \cdot y \cdot z^2 \cdot \vec{i} + 6 \cdot x^2 \cdot z \cdot \vec{j} + 2 \cdot y^2 \cdot x \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2 \cdot \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ,  
 $M_1(0;1;1), M_2(1;-1;2), M_3(1;2;0), M_4(-1;0;1)$ .
27. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{r}$ , де  
 $\vec{b} = 2 \cdot y^2 \cdot z \cdot \vec{i} + x \cdot z^2 \cdot \vec{j} - 2 \cdot x^2 \cdot y \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ .
28. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = U \times \vec{b}$ , де  
 $U = \sin(3 \cdot x - y - 2 \cdot z)$ ,  $\vec{b} = y^2 \cdot \vec{i} - z^2 \cdot \vec{j} - x^2 \cdot \vec{k}$  у точці  $M_0(1;1;1)$ .
29. Обчислити дивергенцію одиничного радіуса-вектора  $\vec{r}^0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ ,  
де  $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ .
30. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{r}$ , де  
 $\vec{b} = y^2 \cdot \vec{i} + x^2 \cdot \vec{j} + y \cdot z \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ .
31. В яких точках векторне поле  $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$  має стоки, якщо  
 $\vec{b} = y^2 \cdot z \cdot \vec{i} - z^2 \cdot x \cdot \vec{j} + x^2 \cdot y \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2 \cdot \vec{i} - \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}$ ,  
 $M_1(1;1;1), M_2(0;1;-1), M_3(1;0;-1), M_4(-1;1;0)$ .
32. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = U \cdot \vec{c}$ , де  
 $U = \sin(2 \cdot x + y) + 2 \cdot \sqrt{x \cdot y \cdot z}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$  у точці  $M_0(1;1;1)$ .

33. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{r}$ , де  $\vec{b} = 2 \cdot y \cdot z \cdot \vec{i} + 3 \cdot x \cdot z \cdot \vec{j} - 2 \cdot x \cdot y \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ .
34. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = U \times \vec{b}$ , де  $U = \frac{1}{\sqrt{(2 \cdot x + 3 \cdot y + z)^3}}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ .
35. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = f(r) \cdot \vec{r}$ , де  $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ ,  $r = |\vec{r}|$ .
36. Перевірити, чи дорівнює нулю дивергенція векторного поля  $\vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = (4 \cdot x^3 \cdot y - 3 \cdot x^4) \vec{i} + (2 \cdot y^3 \cdot z - 6 \cdot x^2 \cdot y^2) \vec{j} + (12 \cdot x^3 \cdot z - 3 \cdot y^2 \cdot z) \vec{k}$ .
37. Визначити, в яких точках векторне поле  $\vec{a} = U \times \vec{b}$  має джерела, якщо  $U = x^3 \cdot y^2 \cdot z$ ,  $\vec{b} = 2 \cdot y \cdot \vec{i} - z \cdot \vec{j} + 2 \cdot x \cdot \vec{k}$ ,  $M_1(1;1;1), M_2(-1;1;-1), M_3(-1;-1;1), M_4(1;1;2)$ .
38. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{c})$ , де  $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{c} = 3 \cdot \vec{i} - \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$ .
39. Обчислити дивергенцію векторного поля  $\vec{a} = U \times \vec{b}$ , де  $U = e^{xyz}$ ,  $\vec{b} = -x \cdot z \cdot \vec{i} + y \cdot z \cdot \vec{j} + x \cdot y \cdot \vec{k}$  у точці  $M_0(1;1;0)$ .
40. Показати, що дивергенція векторного поля  $\vec{a} = r(\vec{c} \times \vec{r})$ , де  $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ ,  $r = |\vec{r}|$ ,  $\vec{c} = \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} - 2 \cdot \vec{k}$ , дорівнює нулю.

#### Завдання 3.4

1. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = U \cdot \vec{b}$ , де  $U = \sin(x + 2y + 3z)$ ,  $\vec{b} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ .

2. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = 3xyz \vec{i} + x^3 \vec{j} + y^3 \vec{k}$  у точці  $M_0(1;1;1)$ .

3. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = (\vec{r} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{r}$ , де  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

4. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = \frac{\vec{b}}{r}$ , де  $\vec{b} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

5. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = U \cdot (\vec{c} \cdot \vec{r})$ , де  $U = y^2z - x^2y$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

6. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = (4xy - z^2)\vec{i} + (4xz - y^2)\vec{j} + (x^2 - 2yz)\vec{k}$  у точці  $M_0(1;1;0)$ .

7. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = (z^2 - x^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j} + (y^2 - z^2)\vec{k}$ .

8. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = U \cdot \vec{c}$ , де  $U = z^2y^2 - x^2y^2$ ,  $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} = \vec{k}$  у точці  $M_0(0;-1;1)$ .

9. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = \frac{1}{r}\vec{b}$ , де  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\vec{b} = 2y\vec{i} + z\vec{j} - 3x\vec{k}$ .

10. Показати, що ротор векторного поля  $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ , де  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $r = |\vec{r}|$ , дорівнює нулю.

11. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ , де  $\vec{b} = x^2\vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ .

12. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = (\vec{r} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ , де  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ .

13. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = (6xy - 2z^2)\vec{i} + (yz - 2xz)\vec{j} + (y^2 - 2x^2)\vec{k}$  у точці  $M_0(1;2;1)$ .

14. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ , де  $\vec{b} = yz\vec{i} - z^2\vec{j} + 2xy\vec{k}$ ,  $\vec{c} = z\vec{i} + x\vec{j} - y\vec{k}$ .

15. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = \vec{b} + \frac{\vec{c}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , де  $\vec{b} = 2x\vec{i} + y\vec{j} - 3z\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 3y\vec{i} - z\vec{j} + 5x\vec{k}$ .

16. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = U \cdot \vec{r}$ , де  $U = xyz$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  у точці  $M_0(0;-2;2)$ .

17. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = (\vec{r} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ , де  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2y\vec{i} + 3z\vec{j} - x\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ .

18. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = y^3\vec{i} + x^2y\vec{j} + 2xyz\vec{k}$  у точці  $M_0(1;1;1)$ .

19. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = xz^2\vec{i} + y^2z\vec{j} + x^2y\vec{k}$  у точці  $M_0(2;1;0)$ .

20. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ , де  $\vec{b} = 2y\vec{i} + 3x\vec{j} - z\vec{k}$ ,  $\vec{c} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ .

21. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = (x^2 - z^2)\vec{i} + (z^2 - y^2)\vec{j} + (y^2 - x^2)\vec{k}$  у точці  $M_0(5;2;-1)$ .

22. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{r}$ , де  $\vec{b} = 2xz\vec{i} + yz\vec{j} + xy\vec{k}$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

23. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = (z^2 - xy)\vec{i} + (x^2 - yz)\vec{j} + (y^2 - xz)\vec{k}$  у точці  $M_0(1;2;2)$ .

24. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = \frac{y\vec{i} + z\vec{j} - x\vec{k}}{r}$ , де  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

25. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = x^3yz\vec{i} + xy^3z\vec{j} + xyz^3\vec{k}$  у точці  $M_0(1;-1;1)$ .

26. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = U \cdot \vec{b}$ , де  $U = \cos(3x + 2y + z)$ ,  $\vec{b} = x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$ .

27. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = yz^2\vec{i} + xyz\vec{j} + xy^2\vec{k}$  у точці  $M_0(1;1;1)$ .

28. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = \frac{\vec{b}}{r^3}$ , де  $\vec{b} = y\vec{i} - z\vec{j} - x\vec{k}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

29. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = z^2\vec{i} + y^2\vec{j} + x^2z\vec{k}$  у точці  $M_0(3;0;1)$ .

30. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = U \cdot \vec{b}$ , де  $U = \sin(2x - 3y + 2z)$ ,  $\vec{b} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ .

31. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = r \cdot \vec{c}$ , де  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ .

32. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = (z^3 + x^2y)\vec{i} + y^2z\vec{j} + (y^3 + xz^2)\vec{k}$  у точці  $M_0(2;-2;2)$ .

33. Показати, що ротор векторного поля  $\vec{a} = r \cdot \vec{r}$ , де  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $r = |\vec{r}|$ , дорівнює нулю.

34. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = (2y^2xz)\vec{i} + (z^2 + 2xy)\vec{j} + (x^2 + 3zy)\vec{k}$  у точці  $M_0(1;-1;2)$ .

35. Довести, що  $rot(U \cdot \vec{a}) = U rot \vec{a} + grad U \cdot \vec{a}$ , де  $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ .

36. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = U \cdot \vec{b}$ , де  $U = \cos(4x - y - 3z)$ ,  $\vec{b} = x\vec{i} - 2y\vec{j} + z\vec{k}$ .

37. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного поля  $\vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{r}$ , де  $\vec{b} = yz\vec{i} - xz\vec{j} + xy\vec{k}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

38. Визначити ротор векторного поля  $\vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{r}$ , де  $\vec{b} = yz\vec{i} - xz\vec{j} + xy\vec{k}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

39. Показати, що ротор векторного поля  $\vec{a} = r^3 \cdot \vec{r}$ , де  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $r = |\vec{r}|$ , дорівнює нулю.

40. Обчислити найбільшу густину циркуляції векторного  $\vec{a} = U \cdot (\vec{r} \cdot \vec{c})$ , де  $U = 2xyz$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ , у точці  $M_0(1;0;1)$ .

### Завдання 3.5

1. Обчислити  $\text{divgrad } U$ , якщо  $U = x^3y + y^2z^2$ .
2. Обчислити  $\text{grad div } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ .
3. Обчислити  $\text{rot rot } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = xy\vec{i} - yz\vec{j} + xz\vec{k}$ .
4. Довести, що  $\text{rotgrad } U = 0$ , якщо  $U = x^2(y^2 + z^2)$ .
5. Обчислити  $\text{divgrad } U$ , якщо  $U = \ln(2x^2 + y^2)$ .
6. Довести, що  $\text{divrot } \vec{a} = 0$ , якщо  $\vec{a} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + x^2z\vec{k}$ .
7. Обчислити  $\text{graddiv } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = x^2y\vec{i} - y^2z\vec{j} + xz^2\vec{k}$ .
8. Довести, що  $\text{divrot } \vec{a} = 0$ , якщо  $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ .
9. Довести, що  $\text{rotgrad } U = 0$ , якщо  $U = x^2y + xz^2$ .
10. Обчислити  $\text{rotrot } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = \vec{b}U$ , де  $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $U = xyz$ .
11. Обчислити  $\text{divgrad } U$ , якщо  $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
12. Обчислити  $\text{graddiv } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = U\vec{c}$ , де  $U = x^2y^2 + y^2z + x^2z^2$ ,  $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ .
13. Обчислити  $\text{rotrot } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (y^2 - z^2)\vec{j} + (z^2 - x^2)\vec{k}$ .
14. Обчислити  $\text{graddiv } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = U\vec{b}$ , де  $U = xyz$ ,  $\vec{b} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ .
15. Обчислити  $\text{rotrot } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = U\vec{c}$ , де  $U = xy^2 - yz^2$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ .
16. Обчислити  $\text{divgrad } U$ , якщо  $U = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$ .
17. Обчислити  $\text{graddiv } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = 4xyz\vec{i} - y^2z\vec{j} - xyz^2\vec{k}$ .
18. Обчислити  $\text{divgrad } U$ , де  $U = e^{x^2+y^2}$ , у точці  $M_0(0;0)$ .
19. Обчислити ротор векторного поля  $\vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = \text{grad}U \times \vec{b}$ , де  $U = y^2 - 2xz + z^2$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ .

20. Перевірити, чи дорівнює нулю дивергенція векторного поля  $\vec{a} = \text{grad } U$ , де  $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
21. Обчислити  $\text{rot rot } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = xy^2\vec{i} - yz^2\vec{j} - x^2z\vec{k}$ .
22. Обчислити  $\text{div grad } U$ , якщо  $U = \ln(x^2 + 2y^2)$ .
23. Обчислити  $\text{grad div } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = x^3y\vec{i} - 2xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$ .
24. Перевірити, чи дорівнює нулю ротор векторного поля  $\vec{a} = \text{grad } U$ , де  $U = \ln(x^2 + y^2)$ .
25. Довести, що  $\text{div rot } \vec{a} = 0$ , якщо  $\vec{a} = 2yz\vec{i} - 3xz\vec{j} + xy\vec{k}$ .
26. Обчислити  $\text{rot rot } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (y^2 - z^2)\vec{j} + (z^2 - x^2)\vec{k}$ .
27. Довести, що  $\text{rot grad } U = 0$ , якщо  $U = x^2y^2z^2$ .
28. Перевірити, чи є векторне поле  $\vec{a} = \text{grad } U$ , де  $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , гармонічним.
29. Обчислити  $\text{grad div } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = (x^3 - y^3)\vec{i} + (y^3 - z^3)\vec{j} + (z^3 - x^3)\vec{k}$ .
30. Обчислити  $\text{div grad } U$ , де  $U = \cos(2x - 3y + z)$ , у точці  $M_0(1;1;1)$ .
31. Довести, що векторне поле  $\vec{a} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ , де  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $r = |\vec{r}|$ , є гармонічним.
32. Обчислити  $\text{rot rot } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = U\vec{c}$ , де  $U = xyz$ ,  $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ .
33. Перевірити, чи дорівнює нулю дивергенція векторного поля  $\vec{a} = \text{grad } U$ , де  $U = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ .
34. Показати, що ротор векторного поля  $\vec{a} = \text{grad } U$ , де  $U = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$ , дорівнює нулю.
35. Обчислити  $\text{grad div } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = U\vec{c}$ , де  $U = 2xy^3 + x^2z^2$ ,  $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ , у точці  $M_0(1;1;0)$ .
36. Показати, що ротор векторного поля  $\vec{a} = \text{grad } U$ , де  $U = \sin(x - 2y + 3z)$ , дорівнює нулю.
37. Довести, що  $\text{div grad } U = \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2}$ , де  $U = U(x, y, z)$ .
38. Обчислити  $\text{grad div } \vec{a}$ , якщо  $\vec{a} = \vec{r} \times \vec{b}$ , де  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $\vec{b} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}$ , у точці  $M_0(1;1;1)$ .
39. Показати, що ротор векторного поля  $\vec{a} = \text{grad } U$ , де  $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , дорівнює нулю.
40. Довести, що функція  $U = \frac{1}{z}$ , де  $z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , є гармонічною.



## ТЕМА 4 СПЕЦІАЛЬНІ ТИПИ ПОЛІВ

### 4.1 Потенціальні векторні поля

Векторне поле  $\vec{a}(M)$  називається *потенціальним*, якщо існує така скалярна функція  $U(M)$ , що скрізь виконується рівність:

$$\vec{a}(M) = \text{grad } U(M). \quad (4.1)$$

При цьому, функцію  $U(M)$  називають *потенціалом* поля.

Звертаємо увагу на те, що досить часто потенціал визначається формулою  $\vec{a}(M) = -\text{grad } U(M) = \text{grad}(-U(M))$ . Іноді, для відокремлення цих двох підходів, застосовують терміни «потенціал» і «потенціальна функція», однак така термінологія не є загальноприйнятою. Тому при прочитанні роботи, у якій застосовують потенціали, необхідно уточнювати, в якому з цих двох сенсів застосовується дане поняття.

Оскільки градієнт постійного скалярного поля дорівнює нулю, то потенціал довільного поля, якщо він існує, визначений із точністю до постійного доданка. Підбираючи цей доданок, можна пронормувати потенціал, наприклад, зробивши це значення рівним нулю в деякій заданій точці. Найчастіше потенціал нормують умовою рівності нулю на безмежності – якщо там потенціал має скінченне значення.

Відмітимо деякі **властивості потенціальних полів**.

1.  $\text{rot } \vec{a}(M) = 0$ .

2. Циркуляція векторного поля вздовж довільного замкненого контура дорівнює нулю, тобто

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{l} = 0.$$

3. Криволінійний (лінійний) інтеграл векторного поля уздовж лінії  $AB$  не залежить від форми лінії, а визначається лише положенням точок  $A$  та  $B$ .

4. Вираз

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz = dU$$

є повним диференціалом потенціала поля  $U(x, y, z)$ . При цьому  $a_x(x, y, z)$ ,  $a_y(x, y, z)$ ,  $a_z(x, y, z)$  – координати вектора  $\vec{a}(M)$  (проекції цього вектора на координатні осі).

Прикладами потенціальних полів є гравітаційне поле, електричне поле, створене точковим зарядом, тощо.

Потенціал векторного поля обчислюють за формулою:

$$U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} a_x(x, y, z)dx + a_y(x, y, z)dy + a_z(x, y, z)dz. \quad (4.1)$$

Криволінійний інтеграл обчислюється вздовж ламаної  $L$ , ланки якої паралельні осям координат (рис. 4.1).

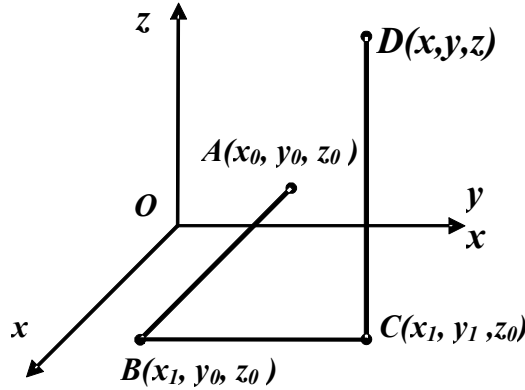


Рисунок 4.1

За початкову точку беруть точку  $A(x_0, y_0, z_0)$ , а за кінцеву – точку  $D(x, y, z)$ . В цьому випадку

$$\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz + \int_{BC} a_x dx + a_y dy + a_z dz + \int_{CD} a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

На відрізку  $AB$ , який паралельний осі  $Ox$ ,  $y = y_0, z = z_0, dy = 0, dz = 0, x \in [x_0, x]$ . Тоді

$$\int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{x_0}^x a_x(x, y_0, z_0) dx.$$

На відрізку  $BC$ , який паралельний осі  $Oy$ ,  $x = x_1, z = z_0, dx = 0, dz = 0, y \in [y_0, y]$ . Тоді

$$\int_{BC} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{y_0}^y a_y(x_1, y, z_0) dy.$$

На відрізку  $CD$ , який паралельний осі  $Oz$ ,  $x = x_1, y = y_1, dx = 0, dy = 0, z \in [z_0, z]$ . Тоді

$$\int_{CD} a_x dx + a_y dy + a_z dz = .$$

Таким чином,

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x a_x(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y a_y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z a_z(x, y, z) dz . \quad (4.2)$$

*Зауваження.* Якщо функції  $a_x(x, y, z)$ ,  $a_y(x, y, z)$ ,  $a_z(x, y, z)$  неперервні в точці  $(0, 0, 0)$ , то за початкову точку  $A(x_0, y_0, z_0)$  можна взяти початок координат.

**Приклад 4.1** Перевірити, чи векторне поле

$$\bar{a} = (3x - yz)\bar{i} + (3y - xz)\bar{j} + (3z - xy)\bar{k}$$

є потенціальним і знайти його потенціал.

### *Розв'язування*

Умовою потенціальності полів є рівність:  $\text{rot} \bar{a}(M) = 0$ . Обчислимо ротор векторного поля:

$$\begin{aligned} \text{rot} \bar{a} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x - yz & 3y - xz & 3z - xy \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial(3z - xy)}{\partial y} - \frac{\partial(3y - xz)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( \frac{\partial(3z - xy)}{\partial x} - \frac{\partial(3x - yz)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial(3y - xz)}{\partial x} - \frac{\partial(3x - yz)}{\partial y} \right) \bar{k} = \end{aligned}$$

$= (-x + x)\bar{i} - (-y + y)\bar{j} + (-z + z)\bar{k} = 0$ . Отже, дане векторне поле є потенціальним.

Знайдемо його потенціал за формулою (4.2). Маємо

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_{x_0}^x a_x(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y a_y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z a_z(x, y, z) dz = \\ &= \int_{x_0}^x (3x - y_0 z_0) dx + \int_{y_0}^y (3y - x z_0) dy + \int_{z_0}^z (3z - xy) dz = \left( \frac{3}{2} x^2 - xy_0 z_0 \right) \Big|_{x_0}^x + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{3}{2} y^2 - xyz_0 \right) \Big|_{y_0}^y + \left( \frac{3}{2} z^2 - xyz \right) \Big|_{z_0}^z = \frac{3}{2} x^2 - xy_0 z_0 - \frac{3}{2} x_0^2 + x_0 y_0 z_0 + \\
& + \frac{3}{2} y^2 - xyz_0 - \frac{3}{2} y_0^2 + xy_0 z_0 + \frac{3}{2} z^2 - xyz - \frac{3}{2} z_0^2 + xyz_0 = \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2) - xyz - \\
& - \frac{3}{2} (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) + x_0 y_0 z_0,
\end{aligned}$$

тобто

$$U(x, y, z) = \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2) - xyz + C, \text{ де } C = x_0 y_0 z_0 - \frac{3}{2} (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2).$$

#### 4.2 Соленоїдні (трубчасті) поля

Векторне поле  $\bar{a}(M)$  називається *соленоїдним*, якщо існує таке поле  $\bar{b}(M)$ , що

$$\bar{a}(M) = \text{rot} \bar{b}(M).$$

При цьому вектор  $\bar{b}(M)$  називають *векторним потенціалом* поля  $\bar{a}(M)$ .

Відмітимо деякі **властивості соленоїдних полів**.

1.  $\text{div} \bar{a}(M) = 0$ .
2. Потік вектора  $\bar{a}(M)$  через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю.
3. Векторні лінії соленоїдного поля замкнені.
4. Соленоїдне поле не має ні джерел, ні стоків.

Розглянемо центрально-симетричне поле в просторі, визначене формулою

$$\bar{a} = f(r) \cdot \bar{r}^0 = \frac{f(r)}{r} \cdot \bar{r}, \quad (4.3)$$

де  $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ ,  $r = |\bar{r}|$ ,  $\bar{r}^0 = \frac{\bar{r}}{r}$ .

З означення дивергенції легко знайти, що  $\operatorname{div} \bar{a} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (r^2 \cdot f(r))$ . Зокрема, такі поля без джерел поза початком координат характеризуються тим, що  $r^2 \cdot f(r) = C = \text{const}$ , звідки  $f(r) = \frac{C}{r^2}$ ,  $\bar{a} = \frac{C}{r^3} \bar{r}$ .

Це так званий закон Кулона, який застосовується в теорії електричних та магнітних взаємодій. Потік такого поля через довільну сферу з центром в початку координат дорівнює  $\frac{C}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi C$ , тобто, не залежить від  $\bar{r}$ . Іншими словами, в початку координат у даному випадку починаються  $4\pi C$  векторних ліній, що йдуть у безмежність.

Однак точкове джерело  $Q = 4\pi C$  має густину  $Q\delta(r) = Q \cdot \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$ , тобто ми одержуємо важливу формулу

$$\operatorname{div} \left( \frac{Q}{4\pi r^2} \bar{r}^0 \right) = Q \cdot \delta(r).$$

Аналогічний розгляд плоского центрально-симетричного поля виду (4.3) з  $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$  дає, що якщо в початку координат немає джерел, то  $f(r) = \frac{C}{r}$ ,  $Q = 2\pi C$ ,

$$\operatorname{div} \left( \frac{Q}{2\pi r^2} \bar{r}^0 \right) = Q \cdot \delta(x) \cdot \delta(y).$$

В результаті ми одержуємо картину, яку можна тлумачити як точкове джерело векторних ліній  $Q$  на площині, або як джерело, розповсюджене у просторі вздовж осі  $Oz$  з густиною  $Q$  на одиницю довжини.

Диполь одержується накладанням джерела і стоку однакової густини, розташованих у нескінченній близькості один від одного. Однак якщо при цьому густина джерела та стоку залишаються скінченними, то їх поля взаємно знищуються. Тому вказані густини повинні бути настільки великими, щоб добуток густини джерела на відстань між джерелом та стоком (цей добуток називається моментом диполя) залишався скінченним. Слід відмітити, що диполь має вісь, яка проходить через джерело та стік у напрямі від останнього до першого.

Розглянемо векторне поле для випадку диполя (рис. 4.2), де  $l$  – вісь диполя.

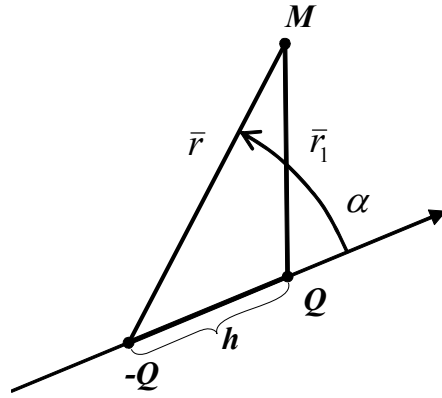


Рисунок 4.2

При достатньо малому  $h$  в будь-якій точці  $M$  будемо мати

$$\bar{a} = \frac{Q}{4\pi r^3} \bar{r}_1 - \frac{Q}{4\pi r^3} \bar{r} = Qh \cdot \frac{\bar{r}_1}{4\pi r^3} - \frac{\bar{r}}{4\pi r^3} = m \frac{d}{dl} \left( \frac{\bar{r}}{4\pi r^3} \right), \quad (4.4)$$

де  $m$  – момент диполя. Спростуючи праву частину (4.4) отримуємо

$$\bar{a} = \frac{m}{4\pi} \left( \frac{1}{r^3} \cdot \frac{dr}{dl} - \frac{3\bar{r}}{r^4} \cdot \frac{dr}{dl} \right) = \frac{m}{4\pi r^3} \left( 3 \frac{\bar{r}}{r} \cos \alpha - \bar{l}^0 \right).$$

Аналогічно, розгляд диполя плоского поля дає результат

$$\bar{a} = \frac{m}{2\pi r^2} \left( 2 \frac{\bar{r}}{r} \cos \alpha - \bar{l}^0 \right).$$

Якщо для простоти вважати, що вісь  $l$  збігається з віссю  $Ox$ , то поле в декартових координатах набуває вигляду

$$\bar{a} = \frac{m}{2\pi(x^2 + y^2)} \left( 2 \frac{x\bar{i} + y\bar{j}}{x^2 + y^2} x - \bar{i} \right).$$

Інтегрування рівняння  $\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y}$  для векторних ліній дає  $x^2 + y^2 = C$  (рис. 4.3).

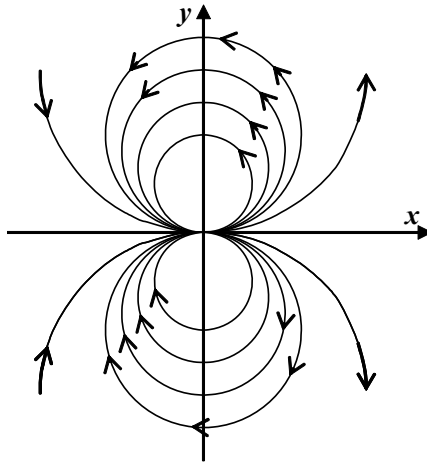


Рисунок 4.3

**Приклад 4.2** Перевірити, чи векторне поле  $\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r})$ , де  $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ ,  $\bar{c} = \bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$ ,  $r = |\bar{r}|$ , є соленоїдним.

**Розв'язування**

Умовою соленоїдності векторного поля є рівність:  $\text{div}\bar{a}(M) = 0$ . Знайдемо координати вектора  $\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r})$ . Маємо

$$\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r}) = r \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = r((-2z + 2y)\bar{i} - (z + 2x)\bar{j} + (y + 2x)\bar{k}), \text{ де}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Обчислимо дивергенцію векторного поля  $\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r})$ :

$$\text{div}\bar{a} = \frac{\partial(r(2y - 2z))}{\partial x} + \frac{\partial(r(-2x - z))}{\partial y} + \frac{\partial(r(y + 2x))}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x}(2y - 2z) + r \frac{\partial(2y - 2z)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial r}{\partial y}(-2x - z) + r \frac{\partial(-2x - z)}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}(y + 2x) + r \frac{\partial(y + 2x)}{\partial z} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(2y - 2z) +$$

$$+ 0 \cdot r + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(-2x - z) + 0 \cdot r + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(y + 2x) + 0 \cdot r =$$

$$= \frac{1}{r}(2xy - 2xz - 2xy - yz + yz + 2xz) = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0.$$

Отже, векторне поле  $\bar{a} = r(\bar{c} \times \bar{r})$  є соленоїдним.

### 4.3 Гармонічне поле

Векторне поле  $\bar{a}(M)$ , яке є одночасно потенціальним (безвихровим) і соленоїдним (трубчастим), називається *гармонічним*. Оскільки поле потенціальне, то його можна записати у вигляді:

$$\bar{a}(M) = \text{grad } U(M),$$

де  $U = U(x, y, z)$  – потенціал поля.

Умова соленоїдності означає, що

$$\text{div} \bar{a}(M) = 0.$$

Таким чином,  $\text{div} \bar{a}(M) = \text{div grad } U(M) = 0$ , але

$$\begin{aligned} \text{div grad } U(M) &= \bar{\nabla}(\bar{\nabla}U) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U. \end{aligned}$$

Функція  $U = U(x, y, z)$ , яка задовольняє умову

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (4.5)$$

називається *гармонічною*.

**Приклад 4.3** Перевірити, чи дане векторне поле  $\bar{a} = yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$  є

- потенціальним,
- соленоїдним.

У випадку потенціальності поля знайти його потенціал.

#### Розв'язування

Знайдемо  $\text{rot} \bar{a}(M)$ :

$$\text{rot} \bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial(xy)}{\partial y} - \frac{\partial(xz)}{\partial z} \right) \bar{i} - \left( \frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial z} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial(xz)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial y} \right) \bar{k} =$$

$$= (x-x)\bar{i} - (y-y)\bar{j} + (z-z)\bar{k} = 0.$$

Отже, векторне поле є потенціальним. Знайдемо  $\text{div} \bar{a}(M)$ :



$$\operatorname{div} \bar{a}(M) = \frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(xz)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z} = 0.$$

Отже, векторне поле є соленоїдним. Знайдемо потенціал векторного поля:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \int_{x_0}^x a_x(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y a_y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z a_z(x, y, z) dz = \\ &= \int_{x_0}^x y_0 z_0 dx + \int_{y_0}^y x z_0 dy + \int_{z_0}^z xy dz = (y_0 z_0 x) \Big|_{x_0}^x + (y z_0 x) \Big|_{y_0}^y + (y z x) \Big|_{z_0}^z = \\ &= y_0 z_0 x - y_0 z_0 x_0 + y z_0 x - y_0 z_0 x + y z x - y z_0 x = xyz - y_0 z_0 x_0 = xyz + C, \end{aligned}$$

де  $C = -y_0 z_0 x_0$ .

### Питання для самоперевірки

1. Яке векторне поле називається потенціальним?
2. Що називають потенціалом поля?
3. Поясніть відмінність термінів «потенціал» та «потенціальна функція».
4. Вкажіть властивості потенціальних полів.
5. Наведіть приклади потенціальних полів.
6. Виведіть формулу знаходження потенціалу поля.
7. Яке поле називають соленоїдним?
8. Що таке векторний потенціал поля?
9. Вкажіть властивості соленоїдних полів.
10. Що таке диполь?

11. Проаналізуйте центрально-симетричне поле  $\vec{a} = f(r) \cdot \vec{r}^0 = \frac{f(r)}{r} \cdot \vec{r}$ ,

де  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $r = |\vec{r}|$ ,  $\vec{r}^0 = \frac{\vec{r}}{r}$ .

12. Яке поле називається гармонічним?
13. Запишіть умову гармонічності поля.
14. Перевірити, чи векторне поле  $\vec{a} = r(\vec{c} \times \vec{r})$ , де  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ ,  $r = |\vec{r}|$ , є соленоїдним.
15. Перевірити, чи векторне поле  $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$  є гармонічним, знайти його потенціал.

## Завдання для самостійної роботи

### Завдання 4.1

Перевірити, чи є векторне поле  $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  потенціальним і соленоїдним. У випадку потенціальності поля  $\vec{a}$  обчислити його потенціал:

1.  $\vec{a} = (yz - 2x)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + xy\vec{k}$ .

2.  $\vec{a} = 2x^2y\vec{i} + (\frac{2}{3}x^3 + 3z)\vec{j} + 3y\vec{k}$ .

3.  $\vec{a} = (8x - 5yz)\vec{i} - (8y - 5xz)\vec{j} + (8z - 5xy)\vec{k}$ .

4.  $\vec{a} = (2yz + 3x)\vec{i} + (3y + 2xz)\vec{j} + 2xy\vec{k}$

5.  $\vec{a} = 6xy\vec{i} + (3x^2 + 2z)\vec{j} + 2y\vec{k}$ .

6.  $\vec{a} = (6x + 7yz)\vec{i} + (6y + 7xz)\vec{j} + (6z + 7xy)\vec{k}$ .

7.  $\vec{a} = (4x + 5zy)\vec{i} + (2y + 5xz)\vec{j} + 5xy\vec{k}$ .

8.  $\vec{a} = 5xy\vec{i} + (\frac{5}{2}x^2 - 3z)\vec{j} - 3y\vec{k}$ .

9.  $\vec{a} = (2yz - x)\vec{i} + (2xz + y)\vec{j} + 2xy\vec{k}$ .

10.  $\vec{a} = (7zy - 5x)\vec{i} + (3y + 7xz)\vec{j} + 7xy\vec{k}$ .

11.  $\vec{a} = (2xy + 3)\vec{i} + (x^2 + 4z)\vec{j} + (4y + 5)\vec{k}$ .

12.  $\vec{a} = (4x - 7yz)\vec{i} + (4y - 7xz)\vec{j} + (4z - 7xy)\vec{k}$ .

13.  $\vec{a} = (8yz - 3x)\vec{i} + (2y + 8xz)\vec{j} + 8xy\vec{k}$ .

14.  $\vec{a} = 6xy\vec{i} + (3x^2 - 4z)\vec{j} - 4y\vec{k}$ .

15.  $\vec{a} = (x + 2yz)\vec{i} + (y + 2xz)\vec{j} + (z + 2xy)\vec{k}$ .

16.  $\vec{a} = (6yz + 5x)\vec{i} + (3y + 6xz)\vec{j} + 6xy\vec{k}$ .

17.  $\vec{a} = (8xy - 1)\vec{i} + (4x^2 - 3z)\vec{j} + (2 - 3y)\vec{k}$ .

18.  $\vec{a} = (5x + 4yz)\vec{i} + (5y + 4xz)\vec{j} + (5z + 4xy)\vec{k}$ .

19.  $\vec{a} = (4xy + 5)\vec{i} + (2x^2 + 5z)\vec{j} + (3 + 5y)\vec{k}$ .

20.  $\vec{a} = (6xy + z)\vec{i} + (3x^2 - 2z)\vec{j} + (5 - 2y)\vec{k}$ .

21.  $\vec{a} = (x - 2yz)\vec{i} + (3y - 2xz)\vec{j} - 2xy\vec{k}$ .

22.  $\vec{a} = (3yz - 8x)\vec{i} + (4y + 3xz)\vec{j} + 3xy\vec{k}$ .

23.  $\vec{a} = (3x - yz)\vec{i} + (3y - xz)\vec{j} + (4 - xy)\vec{k}$ .

24.  $\vec{a} = (5x - 2yz)\vec{i} + (9y - 2xz)\vec{j} - 2xy\vec{k}$ .

25.  $\vec{a} = (2x + yz)\vec{i} + (2y + xz)\vec{j} + (2z + xy)\vec{k}$ .

26.  $\vec{a} = (3x - 4yz)\vec{i} + (5y - 4xz)\vec{j} - 4xy\vec{k}$ .

27.  $\vec{a} = (9x + 5yz)\vec{i} + (9y + 5xz)\vec{j} + (9z + 5xy)\vec{k}$ .
28.  $\vec{a} = (6xy + 5)\vec{i} + (3x^2 + 4z)\vec{j} + (3 + 4y)\vec{k}$ .
29.  $\vec{a} = (2x - 3yz)\vec{i} + (2y - 3xz)\vec{j} + (2z - 3xy)\vec{k}$ .
30.  $\vec{a} = 9xy\vec{i} + \left(\frac{9}{2}x^2 + 6z\right)\vec{j} + 6y\vec{k}$ .
31.  $\vec{a} = (5yz + 2x)\vec{i} + (2y + 5xz)\vec{j} + 5xy\vec{k}$ .
32.  $\vec{a} = (7x - 2yz)\vec{i} + (7y - 2xz)\vec{j} + (7z - 2xy)\vec{k}$ .
33.  $\vec{a} = 4x^2y\vec{i} + \left(\frac{4}{3}x^3 + 3z\right)\vec{j} + 3y\vec{k}$ .
34.  $\vec{a} = (3x - 2yz)\vec{i} + (3y - 2xz)\vec{j} + (3z - 2xy)\vec{k}$ .
35.  $\vec{a} = 8xy\vec{i} + (4x^2 + 3z)\vec{j} + 3y\vec{k}$ .
36.  $\vec{a} = (2x - 3yz)\vec{i} + (6y - 3xz)\vec{j} - 3xy\vec{k}$ .
37.  $\vec{a} = (4zy - 3x)\vec{i} + (2y + 4xz)\vec{j} + 4xy\vec{k}$ .
38.  $\vec{a} = (12x + yz)\vec{i} + (12y + xz)\vec{j} + (12z + xy)\vec{k}$ .
39.  $\vec{a} = 5x^2y\vec{i} + \left(\frac{5}{3}x^3 + 2z\right)\vec{j} + 2y\vec{k}$ .
40.  $\vec{a} = (10x - 3yz)\vec{i} + (10y - 3xz)\vec{j} + (10z - 3xy)\vec{k}$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний, 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1959. – 325 с.
2. Васильченко І.П., Данилов В.Я., Лобанов А.І., Тарах Є.Ю. Вища математика: Основні означення, приклади і задачі /Навч. посібник. Кн. 2 – друге вид., зі змінами. – К.:Либідь, 1994. – 280 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. II. – М.: Высшая школа, 1986. – 415 с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики, 3-е изд. – М.: Наука, 1966. – 455 с.
5. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михайлін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі. Посібник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 624 с.
6. Сборник задач по математике для вузов. Ч.2. Специальные разделы математического анализа /Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – 2-е изд. – М.: Наука, 1986. – 368 с.
7. Мышкис А.Д. Математика для технических вузов: Специальные курсы. 2-е изд. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 640 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
8. Чинаев П.И., Черенков А.А., Минин Н.А., Перевозников А.Ю. Высшая математика. Специальные главы. – К.: Вища школа, 1977. – 368 с.
9. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. – К.: Вища школа, 1986. – 521 с.
10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.

*Навчальне видання*

**Наталія Василівна Сачанюк-Кавецька**

**Лідія Іванівна Педорченко**

**Елементи теорії поля**

*Навчальний посібник*

Оригінал-макет підготовлено Н.В. Сачанюк-Кавецькою

Редактор В.О. Дружиніна

Науково-методичний відділ ВНТУ  
Свідоцтво Держкомінформу України  
серія ДК №746 від 25.12.2001  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку  
Формат 29.7 x 42  $\frac{1}{4}$   
Друк різнографічний  
Тираж прим.  
Зам. №

Гарнітура Times New Roman  
Папір офсетний  
Ум. друк. арк.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі  
Вінницького національного технічного університету  
Свідоцтво Держкомінформу України  
серія ДК №746 від 25.12.2001  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ