УДК 681.3.04

ФОРМИ p-КОДІВ ФІБОНАЧЧІ І КОДІВ ЗОЛОТОЇ p-ПРОПОРЦІЇ

ЛУЖЕЦЬКИЙ В.А.

Показується, що, виходячи з М-форми р-кодів Фібоначчі і кодів золотої р-пропорції, можна отримати набір різних форм цих кодів з певними визначальними властивостями. Описуються нові властивості відомих форм, а також нових форм, що пропонуються.

Вступ

В [1] описані позиційні системи кодування таких математичних об'єктів як комплексні числа, кватерніони, числа Келі (октави), вектори n-вимірного простору, поліноми і матриці. При цьому як базисні використовуються послідовності однойменних математичних об'єктів, що засновані на р-числах Фібоначчі. Кожному коду математичного об'єкту можна поставити у відповідність числовий еквівалент, якщо розглядати цей код як р-код Фібоначчі або код золотої р-пропорції. Відомо [2], що ці коди є надлишковими і кожному числу відповідає множина їх різних форм. Однак до цього часу описані тільки три форми, а саме: М-форма, Z-форма і ЧР-форма. Тому виникає необхідність комплексного дослідження властивостей різних форм р-кодів Фібоначчі і кодів золотої р-пропорції.

1. "Фібоначчієві" системи кодування цілих чисел

Розглянемо кодування цілих чисел на основі базисних послідовностей, що задовольняють різницевому рівнянню:

$$w_{i+p+1} - w_{i+p} - w_i = 0, \quad i = 0,1,\ldots \tag{1}$$

при початкових значеннях $w_0 = 0, w_1 = \cdots = w_p = 1.$

Елементи таких послідовностей прийнято [2] позначати $\varphi_p(i)$ і називати р-числами Фібоначчі, тому далі будемо дотримуватись цього позначення.

Елементи послідовності φ_p для додатних індексів обчислюються на основі рекурентного співвідношення

$$\varphi_p(i+p+1) = \varphi_p(i+p) + \varphi_p(i) \tag{2}$$

при $\varphi_p(0) = 0, \varphi_p(1) = \cdots = \varphi_p(p) = 1, \quad i = 0,1,\ldots$

Елементи послідовності φ_p^- для від'ємних індексів обчислюються на основі рекурентного співвідношення

$$\varphi_p(i) = \varphi_p(i+p+1) - \varphi_p(i+p), \quad i = -1,-2,\ldots$$

Об'єднанням послідовностей φ_p і φ_p^- утворюються розширені або двосторонні послідовності φ_p^* р-чисел Фібоначчі. Елементи таких послідовностей задовольняють співвідношенню (2).

Різницевому рівнянню (1) відповідає характеристичне рівняння

$$\lambda^{p+1} - \lambda^p - 1 = 0, \tag{3}$$

яке має корені $\alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \ldots, \alpha_{p(p+1)}$.

Корінь α_{p1} називають [2] золотою р-пропорцією. Кожен з коренів утворює свою базисну послідовність виду $\cdots\alpha_p^3\alpha_p^2\alpha_p^1\alpha_p^0\alpha_p^{-1}\alpha_p^{-2}\cdots$

Елементи цієї послідовності можуть бути обчислені як р-числа Фібоначчі на основі рекурентного співвідношення, котре в даному випадку має вигляд:

$$\alpha_p^{i+p+1} = \alpha_p^{i+p} + \alpha_p^i. \tag{4}$$

Будь-яке додатне ціле число можна зобразити у базисі φ_p у вигляді:

$$N = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_p(i), \tag{5}$$

де $a_i = \{0;1\}$.

Послідовність $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$, що утворена представленням (5), називається *р-кодом Фібоначчі* числа *N*.

Існує множина представлень виду (5) для кожного цілого числа.

Послідовність $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ називається *мінімальною формою* (*М-формою*) р-коду Фібоначчі, якщо $a_i = 1$ і $a_{i-k} = 0$ для $i = p+1, p+2, \ldots, n, \quad 1 \le k \le p$.

Доведено [2, 3], що представлення (5), яке має М-форму *р*-коду Фібоначчі, є єдиним.

Теорема 1. *Нехай* $a_i \in$ *{0;1}, тоді будь-яке додатне ціле число N можна зобразити у вигляді*

$$N = \sum_{i=-m}^{n} a_i \alpha_p^i. \tag{6}$$

Доведення. Представлення числа N=1 очевидно, оскільки $\alpha_p^0 = 1$.

Число N=2 дорівнює сумі $\alpha_p^0 + \alpha_p^0$. Замінимо одне α_p^0 згідно з (4) на $\alpha_p^{-p} + \alpha_p^{-p-1} + \cdots + \alpha_p^{-2p}$, тоді $2 = \alpha_p^0 + \alpha_p^{-p} + \alpha_p^{-p-1} + \cdots + \alpha_p^{-2p}$. З урахуванням (4) маємо $2 = \alpha_p^1 + \alpha_p^{-p-1} + \cdots + \alpha_p^{-2p}$.

Число 3 дорівнює $\alpha_p^1 + \alpha_p^0 + \alpha_p^{-p-1} + \cdots + \alpha_p^{-2p}$.

Число 4 отримаємо, виконавши розгортку $\alpha_p^0 + \alpha_p^{-p-1} + \cdots + \alpha_p^{-2p}$ і додавши α_p^0:

$$4 = \alpha_p^1 + \alpha_p^0 + \alpha_p^{-1} + \alpha_p^{-p} + \alpha_p^{-p-1} + \alpha_p^{-p-2} + \cdots + \alpha_p^{-3p-1}.$$

Таким чином, виконуючи розгортки і згортки і додаючи α_p^0, можна зобразити будь-яке додатне ціле число як суму степенів α_p.

Теорема доведена.

Послідовність $a_n a_{n-1} \cdots a_0 a_{-1} \cdots a_{-m}$, що утворюється представленням (6), називається *кодом золотої р-пропорції* числа N.

Для цих кодів, як і для р-кодів Фібоначчі, існує М-форма коду.

Представлення (6) ізоморфне представленню нулю у вигляді: $0 = \sum_{i=-m}^{n} a_i \varphi_p(i)$.

Лівий зсув даної суми забезпечує представлення будь-якого цілого додатного числа:

$$N = \sum_{i=-m}^{n} a_{i-1} \varphi_p(i). \qquad (7)$$

Вираз (7) називається *представленням Фібоначчі числа* N *у відповідності з псевдополіномом* (6).

Форма р-коду Фібоначчі, що отримується при цьому, називається Z-*формою* (zero - нуль) [4].

Таким чином, будь-яке додатне ціле число можна зобразити за допомогою базисів φ_p, φ_p^* і α_p.

Для представлення від'ємних цілих чисел потрібна додаткова цифра знаку.

Оскільки базисні послідовності, що породжують ці коди, описуються еквівалентними співвідношеннями, то і самі коди, з цієї точки зору, еквівалентні. Тому в подальшому, коли мова буде йти одночасно про р-коди Фібоначчі і коди золотої р-пропорції, будемо казати просто р-коди.

Базиси φ_p, φ_p^* і α_p, є надмірними, тому при їх застосовуванні необхідно враховувати кількісну оцінку їх надмірності, яка характеризує надмірність р-кодів. При використанні алфавіту {0;1} як канонічний є базис $\{2^i\}$, тобто порівняння здійснюється з позиційним двійковим кодом.

Чисельні значення надмірності базисів φ_p, φ_p^* і α_p для різних р наведені в табл.1.

Таблиця 1

p	1	2	3	4	5
$\delta(\varphi_p)$, $\delta(\alpha_p)$	0,44	0,81	1,15	1,46	1,76
$\delta(\varphi_p^*)$	0,88	2,43	3,45	4,38	5,28

Оскільки різні форми р-кодів породжуються одним і тим же базисом, то їх надмірність однакова і дорівнює надмірності базису.

2. Класифікація форм р-кодів

Характерною особливістю р-кодів, що випливає з надмірності їх базисів, є наявність множини кодів (класу еквівалентності), яка відповідає кожному числу. Вибір представника класу еквівалентності здійснюється на підставі деякої визначальної властивості $P(a)$. Пропонується як фундаментальну визначальну властивість $P_\phi(a)$ використовувати властивість, яка дозволяє виділити з класу еквівалентності єдиний р-код, що має М-форму. Використовуючи М-форму як початкову, можна отримати ряд інших форм зі своїми визначальними властивостями. Виходячи з цього, пропонується класифікація форм р-кодів, що наведена на рис.1.

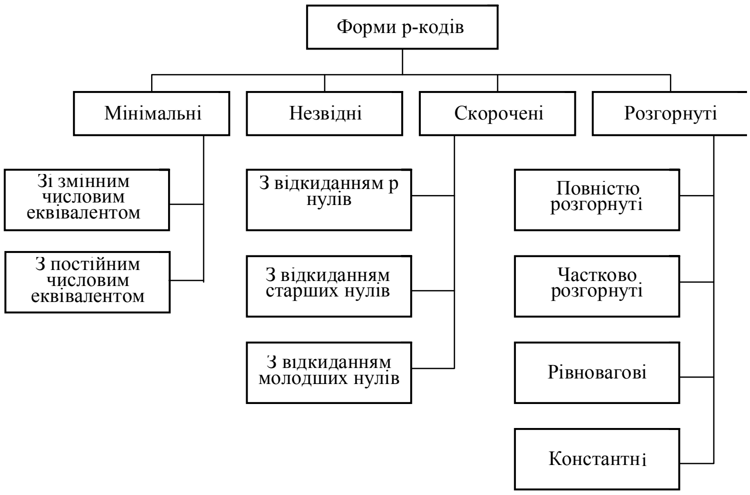

Рис.1. Класифікація форм р-кодів

Уся множина форм розподілена на мінімальні, незвідні, скорочені та розгорнуті форми.

Якщо М-форми кодів такі, що кожній з них відповідає свій числовий еквівалент, який відрізняється від інших, то вони входять до підгрупи М-форм зі змінним числовим еквівалентом. Такі форми кодів утворюються базисами φ_p, α_1 і α_2.

Якщо для представлення цілих чисел використовуються базиси φ_1^* і φ_2^*, то кожному числу відповідає своя М-форма коду, але числовий еквівалент усіх цих форм дорівнює нулю. Тому вони входять до підгрупи М-форм з постійним числовим еквівалентом. Ці форми кодів будемо називати MZ-*формами*.

Базиси φ_p^* і α_p при $p \geq 3$, у загальному випадку, не забезпечують отримання М-форм коду математичного об'єкта, тому виділяється форма р-коду, яка названа *незвідною*. Це така форма, в якій не можна виконати згортки, щоб отримати М-форму, її будемо називати Z-*формою*.

Скорочені форми отримуються з М- або MZ-форм шляхом відкидання деяких символів коду, що приводить до скорочення довжини коду.

Розгорнуті форми кодів отримуються шляхом виконання різних видів розгорток і в різних кількостях.

Повністю розгорнута форма утворюється як результат послідовного виконання усіх можливих розгорток одиниць коду М-форми.

Частково розгорнуті форми отримуються при "миттєвій", або, інакше кажучи, при одночасній розгортці усіх одиниць коду М-форми.

Виконуючи деяку кількість операцій розгортки М-форми коду, можна отримати для кожного числа код, який буде мати однакову кількість нулів і одиниць, тобто рівноваговий код.

Розгортки одиниць визначених розрядів М-форми дозволяють отримати для кожного числа таку форму коду, в якій один або декілька заданих розрядів мають або нулі, або одиниці. Ці форми названі *константними*.

Множина форм представлення одного й того ж числа дозволяє вибирати такі форми, які найбільш повно задовольняють вимоги конкретного застосування. У зв'язку з цим розглянемо властивості різних форм p-коду.

3. Мінімальні форми p-кодів

Характерною ознакою М- і MZ-форм p-кодів є наявність не менше p нулів праворуч від кожної одиниці, тобто у групі з p+1 розрядів може бути тільки одна одиниця і якщо виникає дві або більше одиниць, то це означає порушення ознаки форми коду. Якщо таке відбувається при зберіганні або передаванні p-кодів, то це свідчить про виникнення помилок.

Для n-розрядних кодів М-форми потенційний коефіцієнт знаходження помилок визначається за формулою:

$$S_{зн}^{M} = 1 - \varphi_p(n+1) / 2^{n+1} \,. \qquad (8)$$

В теорії надмірного кодування, крім потенційного коефіцієнта знаходження помилок, користуються коефіцієнтами знаходження помилок деякої кратності. Так, найбільш ймовірними помилками, які породжуються відмовами, є однократні помилки, тоді як збої призводять до багатократних помилок.

Розподілення коефіцієнта знаходження за кратністю помилок наведено на рис.2. З цих графіків випливає, що М-форма забезпечує найефективніше знаходження помилок великої кратності.

Крім того, М-форма є ефективною при знаходженні пакетів помилок. М-форма n-розрядного p-коду Фібоначчі для $p \ge 2$ забезпечує знаходження всіх пакетів помилок довжини $3 \le t \le n$.

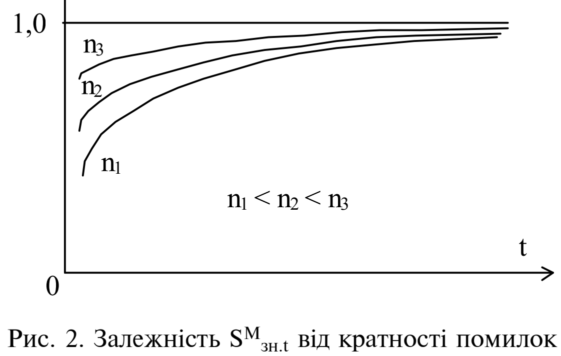

Рис. 2. Залежність $S^{M}_{зн.t}$ від кратності помилок та розрядності кодів

Потенційний коефіцієнт знаходження помилок для MZ-форми обчислюється за формулою:

$$S_{зн}^{MZ} = \begin{cases} 1 - \varphi_p\left(\frac{n+3}{2}\right) \Big/ 2^{n+1} & \text{для } p = 1; \\ 1 - \varphi_p\left(\frac{n+7}{3}\right) \Big/ 2^{n+1} & \text{для } p = 2. \end{cases}$$

MZ-форма має властивість не тільки М-форми, але й Z-форми, тому забезпечується знаходження помилок за ознаками М- і Z-форм. При цьому, частина помилок, що не знаходяться за допомогою ознаки М-форми, знаходяться за допомогою ознаки Z-форми, і навпаки. Є частина помилок, що відшукується за двома ознаками.

Ознакою Z-форми є рівність нулю числового еквівалента p-коду. Всі помилки будь-якої кратності, котрі приводять до того, що числовий еквівалент p-коду стає відмінним від нуля, знаходяться. Потенційний коефіцієнт знаходження помилок для Z-форми обчислюється за формулою:

$$S_{зн}^{Z} = 1 - \varphi_p\left(\frac{n+2p+3}{3}\right) \Big/ 2^{n+1}, \; p \ge 3.$$

Відзначимо ще одну властивість М-форми, яка полягає в тому, що кількість одиниць в ній завжди менша кількості нулів, за виключенням тільки одного випадку при p=1, коли кількості нулів і одиниць однакові: 10101010... Ця властивість забезпечує прискорення виконання арифметичних операцій, а також спрощення логічних схем.

Ймовірності $B_p(a_i)$ з'явлення одиниці в i-му розряді для різних p наведені в табл.2.

Таблиця 2

p	1	2	3	4	5
$B_p(a_i)$	0,286	0,196	0,110	0,095	0,082

4. Скорочені форми p-кодів

Використовуючи основну властивість мінімальних форм, можна зменшити надмірність p-кодів. Оскільки в М- і MZ-формах праворуч від кожної одиниці є p або більше нулів, то можна завжди відкинути p нулів тому, що вони не несуть інформації.

Означення 1. Форма коду, що отримана з М- або MZ-форм шляхом відкидання p нулів праворуч від кожної одиниці, називається C_1-*формою*.

Перетворення М- або MZ-форми в C_1-форму починається зі старших розрядів. Якщо i-й розряд має символ 0, то він зберігається і здійснюється аналіз наступного розряду. Якщо i-й розряд має символ 1, то наступні p нулів відкидаються і здійснюється аналіз (i+p+1)-го розряду.

Зворотне перетворення також починається зі старших розрядів. Якщо i-й розряд має символ 0, то переходять до аналізу наступного розряду. Якщо i-й розряд має символ 1, то після нього записують p нулів і переходять до аналізу наступного розряду початкового коду.

Оскільки середня кількість одиниць, що містяться в M-формі, дорівнює $B_p(a_i)n$, то середнє скорочення розрядності - $pB_p(a_i)n$. Виходячи з цього, випливає, що C_1-форма забезпечує відносне скорочення розрядності у порівнянні з M-формою, яке дорівнює $pB_p(a_i)$.

Оскільки C_1-форми різних кодів мають різну розрядність, то при їх перетворенні в M-форму виникає необхідність визначення початку або закінчення кожного коду. Це здійснюється таким чином. Починаючи зі старших розрядів, здійснюється лічба кількості розрядів з урахуванням записів p нулів після кожної одиниці. Як тільки підрахована кількість розрядів стане дорівнювати n, формується ознака закінчення одного коду і початок наступного.

Таким чином, C_1-формі не потрібні спеціальні символи (розряди кодів) для відокремлення кодів один від одного при передаванні або зберіганні.

Означення 2. Форма коду, що отримана з M- або MZ-форм шляхом відкидання усіх нулів старших розрядів до першої одиниці, називається C_2-*формою.*

Перетворення M- або MZ-форми в C_2-форму починається зі старших розрядів. Якщо i-й розряд має символ 0, то він відкидається, і здійснюється аналіз наступного розряду. Якщо ж i-й розряд має символ 1, то перетворення закінчено. Перетворення також закінчується, якщо i=p і символ цього розряду 0.

Зворотне перетворення C_2-форми в M- або MZ-форму починається з молодших розрядів. Здійснюється лічба кількості символів коду до його завершення. Якщо ця кількість менша кількості розрядів M- або MZ-форм, то до коду з боку старших розрядів дописується кількість символів 0, якої не вистачає.

Для різних кодів їх C_2-форми будуть мати різну кількість розрядів, тому при перетворенні послідовно записаних C_2-форм в M- або MZ-форми необхідно визначати кінець кожної C_2-форми.

Оскільки C_2-форма задовольняє ознаці M-форми, то на межі двох C_2-форм необхідно розмістити групу символів, яка не задовольняє цій ознаці. Для цього пропонується записувати символ 1 в самий молодший розряд C_2-форми *p*-коду і в додатковий молодший розряд. Тоді будемо мати такі набори символів на межі кодів:

для ненульових кодів

$$\text{— код 1 — \quad — код 2 —}$$
$$\ldots x\ x\ 0\ \underbrace{0\ldots0}_{p-1}\ 1\,1\,1\ \underbrace{0\ldots0}_{p}\ x\ x\ldots$$

$$\text{— код 1 — \quad — код 2 —}$$
$$\ldots x\ x\ \underbrace{0\ldots0}_{p}\ 1\ \underbrace{0\ldots0}_{p-1}\ 1\,1\,1\ \underbrace{0\ldots0}_{p}\ x\ x\ldots$$

і для нульових кодів

$$\text{код1 код 2}$$
$$\overline{011}\,\overline{011}\,.$$

Таким чином, ознаками межі між двома кодами є наявність двох або трьох одиниць у сусідніх розрядах при p >1 і чотирьох одиниць при p=1.

Означення 3. Форма коду, що отримана з M- або MZ-форм шляхом відкидання усіх нулів молодших розрядів, крім одного, до першої одиниці, називається C_3-*формою.*

Перетворення M- або MZ-форм в C_3-форму починається з молодших розрядів. Якщо i-й і (i+1)-й розряди мають символи 00, то символ i-го розряду відкидається, і здійснюється аналіз наступної пари розрядів. Якщо ж i-й розряд має символ 0, а (*i*+1)-й - символ 1, то перетворення закінчено. Перетворення також закінчується, якщо (i+1)-й розряд має 0 і є найстаршим розрядом.

Для того щоб забезпечити відокремлення кодів, в i-й і додатковий молодший розряд записують символи 11. При цьому можливі такі випадки:

для ненульових кодів

$$\text{— код 1 — \quad — код 2 —}$$
$$\ldots x\ x\ 0\ \underbrace{0\ldots0}_{p}\ 1\,1\,1\,1\ \underbrace{0\ldots0}_{p}\ x\ x\ldots$$

$$\text{— код 1 — \quad — код 2 —}$$
$$\ldots x\ x\ \underbrace{0\ldots0}_{p}\ 1\,1\,1\,0\,1\ \underbrace{0\ldots0}_{p}\ x\ x\ldots$$

і для нульових кодів

$$\text{код 1 код 2}$$
$$\overline{011}\ \overline{011}\,.$$

В першому випадку ознакою межі кодів є наявність чотирьох одиниць у сусідніх розрядах, у другому - наявність трьох одиниць, у третьому - двох.

Зворотне перетворення C_3-форми в M- або MZ-форму починається зі старших розрядів. Здійснюється лічба кількості символів коду до знаходження межі між кодами. Якщо ця кількість менше за кількість розрядів M- або MZ-форми, то до коду з боку молодших розрядів дописується кількість символів 0, якої не вистачає.

5. Розгорнуті форми *p*-кодів

Означення 4. Форма коду, що отримана з M- або MZ-форми шляхом послідовного виконання усіх можливих розгорток одиниць, називається *повністю розгорнутою формою* (ПР-*формою*).

Характерною ознакою ПР-форми є наявність не більше p нулів праворуч від кожної одиниці.

Зворотне перетворення ПР-форми в M-форму здійснюється шляхом послідовного виконання усіх можливих згорток одиниць.

Здатність ПР-форми щодо знаходження помилок така ж, як M-форми, тільки відрізняється вид помилок, які знаходяться. Якщо ознака M-форми дозволяє знаходити появу одиниць в коді, то ознака ПР-форми - появу нулів.

Означення 5. Форма коду, що отримана з М- або MZ-форми шляхом “миттєвої” (одночасної) розгортки усіх одиниць, називається *частково-розгорнутою формою* (ЧР-*формою*).

Виходячи з основного рекурентного співвідношення для р-чисел Фібоначчі (2) і “золотої” р-пропорції (4), можна виконати різні розгортки одиниць і отримати р різних ЧР-форм.

При цьому k-а $ЧР_k$-форма утворюється на підставі співвідношення

$$\varphi_p^{(k)}(i)=\varphi_p(i-k)+\sum_{j=0}^{k-1}\varphi_p(i-p-1-j). \qquad (9)$$

Виходячи з цього, код $ЧР_k$-форми буде містити однакові (р+1)-розрядні групи, кількість котрих дорівнює числу одиничних розрядів у М-формі. Будь-яка ЧР-форма має таку ж розрядність, як М-форма.

ЧР-форми можуть містити однакові групи одного з двох видів: із симетричною і несиметричною структурою. При цьому вид структури залежить від значення k.

Симетричні структури $1\underbrace{0\ldots0}_{p-1}1$ й $\underbrace{1\ldots1}_{p+1}$ утворюються при k=1 і k=p, відповідно.

При $1<k<p$ використовується несиметрична структура такого вигляду:

$$1\underbrace{0\ldots0}_{p-k}\underbrace{1\ldots1}_{k}.$$

У випадку симетричного каналу мінімальна кодова відстань для ЧР-форм при $p\geq 1$ і k=1 або k=p дорівнює 2. З цього випливає, що такі форми забезпечують знаходження всіх помилок непарної кратності.

ЧР-форми при $p\geq 3$ і $2\leq k<p$ мають такі мінімальні кодові відстані:

$$d_{min}=\begin{cases}3 & \text{для} \quad k=2;\\ 4 & \text{для} \quad 2<k<p.,\end{cases}$$

тобто вони забезпечують виправлення однократних помилок і знаходження помилок кратності 2 і 3 при k=2 і $2\leq k<p$, відповідно.

Таким чином, структура твірної кодової групи істотно впливає на здатності ЧР-форми щодо виправлення і знаходження помилок.

В асиметричних каналах k-а ЧР-форма забезпечує знаходження помилок кратності k.

Слід зазначити, що ЧР-форми дозволяють також знаходити деякі помилки, кратність котрих вище тієї, що визначається мінімальною кодовою відстанню. У n-розрядному коді може бути $]n/(p+1)[$ (p+1)-розрядних груп, що мають структуру твірної групи або містять усі нулі. Якщо помилки виникають у кожній із цих груп, то вони знаходяться.

Крім того, кожен із кодів k-ї ЧР-форми містить кількість одиниць, що кратна k+1. Це ще одна ознака ЧР-форми. Виходячи з цього, пропонується другий варіант знаходження помилок, що виникають у ЧР-формі. У коді підраховується кількість одиниць за модулем k+1:

$$q=\left(\sum_{i=0}^{n-1}x_i\right)_{\mathrm{mod}(k+1)},$$

і якщо $q\neq 0$, то цей код містить помилки.

Така організація контролю дозволяє знаходити всі помилки, кратності яких не дорівнюють $j(k+1)$, $j=1,2,\ldots,]n/(k+1)[$. Але в цьому випадку вказується місце розташування помилок не в групі розрядів, а у всьому коді.

Таким чином, ЧР-форма описується двома ознаками: груповою і кодовою. Групова ознака має структурно-кількісний характер, а кодова - тільки кількісний характер.

Можливості ЧР-форм щодо знаходження пакетів помилок наведені у табл.3.

Таблиця 3

Параметр ЧР-форми	Симетричний канал		Асиметричний канал	
	p	Довжина пакета	p	Довжина пакета
$k=1$	2	$t\neq 2ip$	≥2	$2\leq t\leq n$
	≥3	$2\leq t\leq n$		
1<k<p	≥2	$2\leq t\leq n$	≥2	$2\leq t\leq n$
k=p	≥1	$t\neq i\,(p+1)$	≥1	$t\neq i\,(p+1)$

Порівняльний аналіз показує, що ЧР-форма більш ефективно знаходить пакети помилок, які виникають в асиметричному каналі.

При k<p ЧР-форми містять послідовності одиниць, довжина яких не перевищує k+1. Ця властивість є важливою для організації самосинхронізації при передаванні інформації.

Як вже відмічалося вище, в М- або MZ-формах кількість одиниць завжди менша, ніж кількість нулів. Але виконуючи розгортки одиниць, можна збільшити їх кількість так, щоб вона дорівнювала кількості нулів.

Отже, для будь-якої М-форми можна отримати рівновагову форму (РВ-форму).

Перетворення М-форми в РВ-форму здійснюється таким чином. Підраховується кількість одиниць N. Якщо N=0,5n (n - розрядність коду), то маємо РВ-форму. Якщо N<0,5n, то виконується одна розгортка, і знов здійснюється підрахування N. При цьому може виникнути ситуація, коли жодна з одиниць, яка є в коді, не може бути розгорнута. Тоді здійснюється розгортка одиниці неіснуючого старшого розряду. Це ж виконується і у випадку нульового коду М-форми.

Зворотне перетворення РВ-форми в М-форму здійснюється шляхом виконання усіх можливих згорток.

РВ-форма має усі властивості відомих рівновагових кодів.

Означення 6. Форма p-коду, що отримується з M-форми і яка має усі нулі в будь-якій наперед заданій групі p сусідніх розрядів, називається *константною нульовою формою* (*КН-формою*).

Можливість отримання КН-форми випливає з такої теореми.

Теорема 2. *Базисна послідовність* φ_p *залишається повною, якщо з неї вилучити не більше p будь-яких сусідніх чисел.*

Д о в е д е н н я . Нехай є базисна послідовність

$$\varphi_p(1), \varphi_p(2), \ldots, \varphi_p(n-p-1). \qquad (10)$$

Визначимо суму усіх її елементів:

$$\varphi_p(1) = \varphi_p(p+2) - \varphi_p(p+1),$$
$$\varphi_p(2) = \varphi_p(p+3) - \varphi_p(p+2),$$
$$\varphi_p(3) = \varphi_p(p+4) - \varphi_p(p+3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_p(n-p-2) = \varphi_p(n-1) - \varphi_p(n-2),$$
$$\varphi_p(n-p-1) = \varphi_p(n) - \varphi_p(n-1).$$

Додавши усі ці рівності, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n-p-1} \varphi_p(i) = \varphi_p(n) - \varphi_p(p+1) = \varphi_p(n) - 1,$$

тобто максимальне число, яке можна зобразити за допомогою послідовності (10), дорівнює $\varphi_p(n) - 1$.

Для представлення числа $\varphi_p(n)$ в послідовність необхідно ввести саме це число. Після цього виникає можливість представляти будь-яке число від 0 до $2\varphi_p(n) - 1$. При цьому $2\varphi_p(n) - 1 > \varphi_p(n+1) - 1$, тобто є можливість зобразити усі числа до $\varphi_p(n+1) - 1$. Це означає, що послідовність

$$\varphi_p(1), \varphi_p(2), \ldots, \Box\, \varphi_p(n-p-1), \varphi_p(n)$$

повна, але в ній немає таких p сусідніх чисел:

$$\varphi_p(n-p), \varphi_p(n-p+1), \varphi_p(n-1).$$

Таким чином, теорема 2 доведена.

Наслідок. Якщо з послідовності φ_p вилучити будь-які k<p сусідніх чисел, то вона залишається повною.

Перетворення M-форми p-коду в КН-форму виконується так. Аналізується група заданих p розрядів. Якщо ця група має усі нулі, то КН-форма збігається з M-формою. Якщо ж k-й розряд (k =1,2, ...,p) групи має одиницю, то виконується "миттєва" розгортка згідно з (2) для цього розряду і усіх розрядів, що розміщені праворуч від нього.

Відзначимо, що КН-форма p-коду має на p-1 розрядів більше, ніж M-форма.

Приклад. Перетворити M-форму 2-коду 01001001 0001000 в КН-форму, в якій 10-й і 11-й розряди є нульовими:

```
15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
0  1  0  0  1  0  0 1 0 0 0 1 0 0 0   M-форма

0  1  0  0  0  0  1 1 1 1 1 0 1 1 1   КН-форма
```

Зворотне перетворення КН-форми в M-форму здійснюється шляхом виконання усіх можливих згорток і відкидань p-1 наймолодших нулів у коді.

Означення 7. Форма p-коду, що отримується з M-форми і має усі одиниці в будь-якій наперед заданій групі p сусідніх розрядів, називається *константною одиничною формою* (КО-*формою*).

Перетворення M-форми p-коду в КО-форму здійснюється таким чином. Спочатку M-форма перетворюється у КН-форму, а потім усі символи коду КН-форми інвертуються.

При зворотному перетворенні КО-форми в M-форму спочатку здійснюється інвертування коду, а потім виконуються усі можливі згортки.

Властивість КН- і КО-форм забезпечує можливість правильного представлення інформації при наявності відмов апаратури.

Висновки

1. Існує множина різних форм p-кодів Фібоначчі і кодів золотої p-пропорції одного і того ж числа, серед яких можна виділити форми з певними визначальними властивостями, котрі забезпечують розв'язання різних задач, що виникають перед розробниками обчислювальної техніки.

2. M-, Z-, MZ-, ПР- і ЧР-форми забезпечують найбільш ефективне знаходження помилок великої кратності, а також пакетів помилок.

3. КН- і КО-форми доцільно використовувати для побудови відмовостійких функціональних вузлів і пристроїв пам'яті.

4. В тих випадках, коли рівень завад незначний і не треба знаходити помилки, можна зменшити надмірність p-кодів, використовуючи їх скорочені форми.

Література: 1. *Лужецький В.А.* Адитивні системи позиційного кодування математичних об'єктів // Вісник ВПІ. 1996. № 3. С.28-36. 2. *Стахов А. П.* Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984. 152 с. 3. *Carlitz L.,* Richard Scoville, Hoggatt V. E., Jr. Fibonacci Representations // The Fibonacci Quarterly. 1972. Vol. 10, № 1. P. 1-28. 4. *Стахов А.П.* Алгоритмическая теория измерения и основания компьютерной арифметики // Измерение. Контроль. Автоматизация. 1988. № 2. С. 6-12.

Надійшла до редколегії 23.06.2000

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Хаханов В.І.

Лужецький Володимир Андрійович, канд. техн. наук, доцент кафедри обчислювальної техніки Вінницького державного технічного університету. Наукові інтереси: рекурентні послідовності й їх застосування в обчислювальній техніці, цифрова обробка сигналів, ущільнення інформації, криптографічний захист інформації. Захоплення: поезія. Адреса: Україна, 21021, Вінниця, вул. Келецька, 84, кв. 196, тел.(0432)-43-30-93.