Міністерство освіти і науки України

Донбаська державна машинобудівна академія

УДОСКОНАЛЕННЯ ПРОЦЕСІВ І ОБЛАДНАННЯ ОБРОБКИ ТИСКОМ В МЕТАЛУРГІЇ І МАШИНОБУДУВАННІ

Тематичний збірник наукових праць

КРАМАТОРСЬК 2006

УДК 621.77

Краєвський В.О., Михалевич В.М., Матвійчук В.А. (Вінниця, ВНТУ)

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗГИНАННЯ СМУГИ

В работе разработана математическая модель сгибания полосы переменной ширины и толщины матрицей и пуансоном, которые имеют радиусы закруглений, соизмеримые с расстоянием между ними. На основе модели предложен алгоритм, позволяющий определять точки соприкосновения полосы к матрице и пуансону и уравнение выгнутой оси полосы. Алгоритм реализован в среде Maple 9.

The article is devoted to the development of the mathematical model of the plate with a variable breadth and thickness flexure by lower die and a male mold which have bending radius, commensurable with distance between them. On base of the mathematical model the algorithm, which permits to determine contact point of plate with a lower die and a male mold and the equation of a plate cambered axle, is offered. The algorithm is implemented in software environment Maple 9.

У випадку, коли проектується оснастка для листового штампування на існуюче обладнання, яке призначене для виконання іншого виду робіт і має незначний діапазон робочого зусилля [1], важливим є точне визначення зусилля деформування. При визначенні зусилля деформування при операціях згинання здебільшого радіусами заокруглень матриці та пуансона або нехтували або вигнуту вісь смуги апроксимували прямою лінією [2,3]. Але у випадку, коли відстань між матрицею та пуансоном співрозмірна з їх радіусами заокруглень, то це може призвести до значної похибки. Похибка викликана невірним визначенням точок прикладення зусилля деформування. Це в свою чергу впливає як на величину повного зусилля деформування так і на його напрям, тобто на перерозподіл повного зусилля деформування на повздовжню та поперечну складові (рис. 1).

У даній роботі ставиться задача визначення вигнутої осі смуги під час операції згинання матрицею та пуансоном, що мають радіуси заокруглень, які співрозмірні із відстанню між ними.

Виберемо декартову систему координат, початок якої знаходиться у точці виходу смуги 1 з-під прижиму 2. На вільний кінець смуги із зусиллям P діє пуансон 4. Нехай поверхня матриці 3 у вибраній системі координат описується рівнянням

$$m = m(x), \tag{1}$$

а поверхня пуансона

$$p = p(x). \tag{2}$$

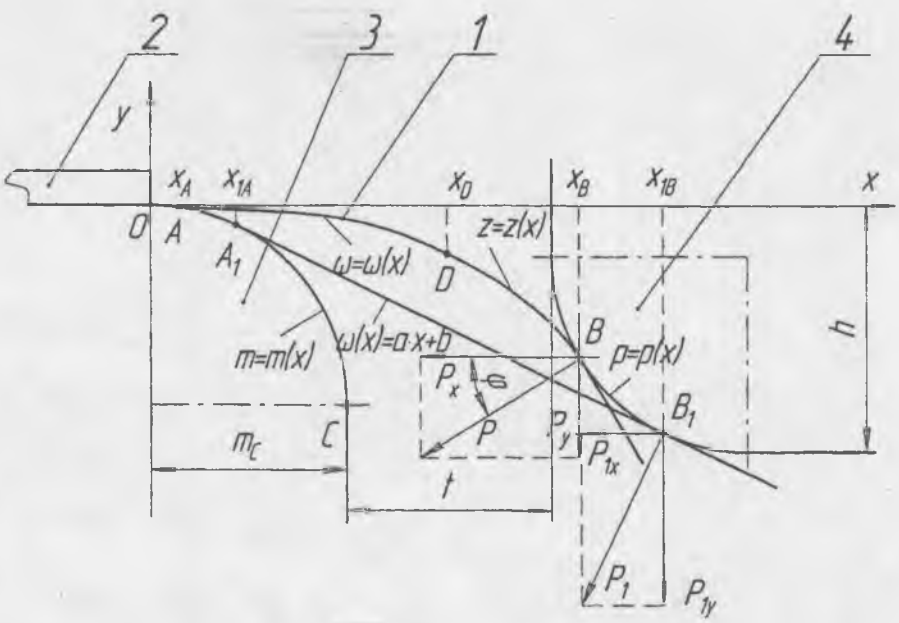

Рис. 1 - Розрахункова схема

Смуга має змінні товщину та ширину. Залежність товщини s та ширини b заготовки від координати x запишемо у вигляді

$$s = s(x); \tag{3}$$

$$b = b(x). \tag{4}$$

Знаючи розподілення напружень по товщині заготовки, можна визначити величину згинального моменту, що необхідний для здійснення згинання на необхідний радіус. Радіальні напруження при $r >> s$ за абсолютним значенням значно менші за тангенціальні. Якщо знехтувати впливом радіальних напружень можна розглядати напружений стан у товщині заготовки як лінійний і умову початку ділянки текучості записати у вигляді [2]

$$\sigma_\theta = \sigma_m, \tag{5}$$

де σ_θ - напруження текучості матеріалу смуги.

Частину смуги, що згинається, можна розділити на дві ділянки. На першій ділянці напружено-деформований стан смуги пружно-пластичний, на другій – пружний. Точка D є границею між цими двома ділянками.

Розподілення тангенційних напружень без врахування зміцнення по товщині заготовки на ділянці AD, де смуга має пластичні деформації, представлено на рис. 2.

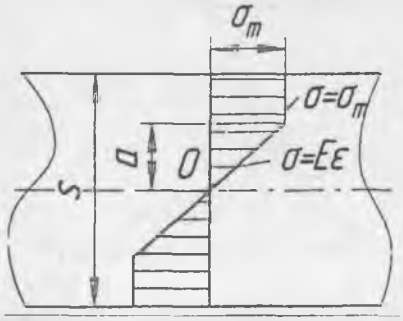

Рис. 2 - Розподілення тангенційних напружень на ділянці пружно-пластичних деформацій

Момент, що створюється тангенціальними напруженнями відносно точки O [2]:

$$M = b(x) \cdot \left[\frac{\sigma_m \cdot s(x)^2}{4} - \frac{\sigma_m^3 \cdot \rho_{cp}^2}{3 \cdot E^2} \right]. \tag{6}$$

У точці A

$$\rho_{cp} = R_M(x_A) = \frac{\sqrt{\left(1 + m'(x_A)^2\right)^3}}{m''(x_A)}, \tag{7}$$

тоді з формули (6) момент, який необхідний для згинання смуги по радіусу матриці обчислюється за формулою

$$M_A = b(x_A) \cdot \left[\frac{\sigma_m \cdot s(x_A)^2}{4} - \frac{\sigma_m^3 \cdot R_M(x_A)^2}{3 \cdot E^2} \right]. \tag{8}$$

Загальний момент створюється двома складовими повного зусилля P. Осьова та поперечна складові створюють моменти M_1 та M_2 відповідно

$$M_1 = P_y \cdot (x_B - x_A), \tag{9}$$

$$M_2 = P_x \cdot \big(m(x_A) - p(x_B)\big). \tag{10}$$

Враховуючи, що

$$P_x = \frac{P_y}{tg\varphi} = -P_y \cdot p'(x_B) \tag{11}$$

осьове зусилля, яке забезпечує момент, що достатній для виникнення пластичних деформацій та згинання смуги на радіус $R_M(x_A)$, обчислюється за формулою

$$P_y = \frac{M_A}{x_B - x_A - p'(x_B)\big(m(x_A) - p(x_B)\big)}. \tag{12}$$

Для того, щоб визначити координати точок A та B, необхідно знати рівняння вигнутої осі смуги $\omega = \omega(x)$. З формули (6)

$$\rho_{cp} = \frac{\sqrt{3}\cdot E}{2\cdot b(x)\cdot \sigma_m^2}\cdot\sqrt{b(x)\cdot\sigma_m\cdot\Big(s(x)^2\cdot\sigma_m\cdot b(x) - 4\cdot M(x)\Big)}. \tag{13}$$

Із вищої математики відомо, що

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\omega''}{\sqrt{\big(1+\omega'^2\big)^3}}. \tag{14}$$

Тоді диференційне рівняння зігнутої осі смуги при пружно-пластичних деформаціях запишемо у вигляді

$$\frac{\omega''}{\sqrt{\big(1+\omega'^2\big)^3}} = -\frac{2\cdot b(x)\cdot\sigma_m^2}{\sqrt{3}\cdot E\cdot\sqrt{b(x)\cdot\sigma_m\cdot\Big(s(x)^2\cdot\sigma_m\cdot b(x) - 4\cdot M_{пл}(x)\Big)}}, \tag{15}$$

де $M_{пл}(x)$ - згинальний момент, який діє у перерізі із координатою x, що належить ділянці пружно-пластичних деформацій, і обчислюється за формулою

$$M_{пл}(x) = P_y\cdot\big[x_B - x - p'(x_B)\big(\omega(x) - p(x_B)\big)\big]. \tag{16}$$

Підставивши (12) та (8) у (16) матимемо остаточний вираз для визначення згинального моменту $M_{пл}(x)$

$$M_{пл}(x) = \frac{M_A}{x_B - x_A - p'(x_B)\big(m(x_A) - p(x_B)\big)}\cdot\big[x_B - x - p'(x_B)\big(\omega(x) - p(x_B)\big)\big]. \tag{17}$$

Отже, для визначення рівняння зігнутої осі смуги і визначення точок x_A та x_B (тобто плеча прикладення сили), матимемо нелінійне диференційне рівняння другого порядку. Початкові умови для розв'язання задачі Коші представимо у вигляді

$$\begin{cases}\omega(x_A) = m(x_A);\\ \omega'(x_A) = m'(x_A).\end{cases} \tag{18}$$

При введенні початкових умов вважали, що відстань між пуансоном і матрицею t набагато більша за товщину s.

Після точки D до точки B смуга буде мати лише пружні деформації. Знайдемо координати точки D, де проходить границя між частиною смуги, що має пружно-пластичні деформації, та частиною смуги, де деформації лише пружні. Тоді

$$\rho_{cp} = \frac{s\cdot E}{2\cdot\sigma_m}. \tag{19}$$

Взявши (13) разом із (19) отримаємо одне рівняння із одним невідомим x_D

$$\frac{s(x_D)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\cdot b(x_D)\cdot\sigma_m}\cdot\sqrt{b(x_D)\cdot\sigma_m\cdot\Big(s(x_D)^2\cdot\sigma_m\cdot b(x_D) - 4\cdot M_{пл}(x_D)\Big)}, \tag{20}$$

розв'язавши яке знаходимо координату точки D, в якій відбувається зміна напружено-деформованого стану смуги із пружно-пластичного у пружний.

Тоді диференційне рівняння осі смуги набуде вигляду [4]:

$$\frac{z''}{\sqrt{\left(1+z'^2\right)^3}} = -\frac{12 \cdot M_{np}(x)}{E \cdot s(x)^3 \cdot b(x)}, \tag{21}$$

де $M_{np}(x)$ - згинальний момент, який діє у перерізі із координатою x, що належить ділянці пружних деформацій, і обчислюється за формулою:

$$M_{nл}(x) = \frac{M_A}{x_B - x_A - p'(x_B)\left(m(x_A) - p(x_B)\right)} \cdot \left[x_B - x - p'(x_B)\left(z(x) - p(x_B)\right)\right]. \tag{22}$$

Так як положення точки D визначається як рівнянням (15), так і рівнянням (21), то початкові умови запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} z(x_D) = \omega(x_D); \\ z'(x_D) = \omega'(x_D). \end{cases} \tag{23}$$

Додатковими умовами для визначення невідомих параметрів x_A та x_B у рівняннях (15) та (21) слугуватимуть вирази:

$$\begin{cases} z(x_B) = p(x_B); \\ z'(x_B) = p'(x_B). \end{cases} \tag{24}$$

Отже, маємо у загальному вигляді задачу на власні значення – систему двох диференційних рівнянь другого порядку, у яких права частина залежить від параметрів x_A та x_B, значення яких невідомі і повинні бути визначені із самої задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{\omega''}{\sqrt{\left(1+\omega'^2\right)^3}} = -\dfrac{2 \cdot b(x) \cdot \sigma_m^2}{\sqrt{3} \cdot E \cdot \sqrt{b(x) \cdot \sigma_m \cdot \left(s(x)^2 \cdot \sigma_m \cdot b(x) - 4 \cdot M_{nл}(x)\right)}}; \\ \omega(x_A) = m(x_A); \\ \omega'(x_A) = m'(x_A); \\ \dfrac{z''}{\sqrt{\left(1+z'^2\right)^3}} = -\dfrac{12 \cdot M_{np}(x)}{E \cdot s(x)^3 \cdot b(x)}; \\ z(x_D) = \omega(x_D); \\ z'(x_D) = \omega'(x_D); \\ z(x_B) = p(x_B); \\ z'(x_B) = p'(x_B). \end{cases} \tag{25}$$

Один з методів, за допомогою якого можна розв'язати дану задачу, є метод стрільби. Даний метод рекомендується застосовувати до задачі на власні розв'язки, яка містить один параметр. Ми ж маємо справу із двома параметрами. Тому для того, щоб можна було застосовувати метод стрільби, необхідно провести оцінку інтервалів зміни параметрів. Параметр x_A належить інтервалу $(0; x_{1A})$, а параметр x_B - $(m_C + t; x_{1B})$. Точки x_{1A} та x_{1B} знайдемо, апроксимувавши рівняння осі смуги прямою лінією, тобто представити $\omega(x) = a \cdot x + b$. Тоді задача (25) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \omega(x) = a \cdot x + b; \\ \omega(x_{1A}) = m(x_{1A}); \omega'(x_{1A}) = m'(x_{1A}); \\ \omega(x_{1B}) = p(x_{1B}); \omega'(x_{1B}) = p'(x_{1B}). \end{cases} \tag{26}$$

Маємо систему 4-х нелінійних рівнянь із 4-ма невідомими, яку розв'язуємо відомими методами, наприклад методом Ньютона. Розв'язавши цю систему ми знайдемо точки x_{1A} та x_{1B}, які є правими границями інтервалів зміни параметрів x_A та x_B.

Алгоритм застосування методу стрільби для розв'язання задачі (25) наступний. Спочатку ми знаходимо інтервали зміни параметрів x_A та x_B, розв'язавши систему(26). Потім отримані інтервали ділимо на N проміжків. Знаходимо крок зміни параметрів

$$h_A = \frac{x_{1A}}{N}; h_B = \frac{x_{1B} - m_C - t}{N}. \tag{27}$$

У циклі змінюємо параметр x_A від 0 до x_{1A} із кроком h_A. У вкладеному циклі змінюємо параметр x_B від $m_C + t$ до x_{1B} із кроком h_B. На кожній ітерації знаходимо рівняння осі смуги на ділянці AD, розв'язавши задачу Коші відомими методами, наприклад методом Рунге-Кутта,

$$\begin{cases} \dfrac{\omega''}{\sqrt{\left(1+\omega'^2\right)^3}} = -\dfrac{2 \cdot b(x) \cdot \sigma_m^2}{\sqrt{3} \cdot E \cdot \sqrt{b(x) \cdot \sigma_m \cdot \left(s(x)^2 \cdot \sigma_m \cdot b(x) - 4 \cdot M_{пл}(x)\right)}}; \\ \omega(x_A) = m(x_A); \omega'(x_A) = m'(x_A). \end{cases} \tag{28}$$

Далі знаходимо координати точки D розв'язавши рівняння (20) відносно x_D. Потім знаходимо рівняння осі смуги на ділянці DB, розв'язавши наступну задачу Коші

$$\begin{cases} \dfrac{z''}{\sqrt{\left(1+z'^2\right)^3}} = -\dfrac{12 \cdot M_{пр}(x)}{E \cdot s(x)^3 \cdot b(x)}; \\ z(x_D) = \omega(x_D); z'(x_D) = \omega'(x_D). \end{cases} \tag{29}$$

Отримаємо $N \times N$ розв'язків задачі Коші (29). Із цих розв'язків обираємо той, який найкраще відповідає додатковим умовам (24).

Нехай смуга має постійні товщину та ширину, тобто $b(x) = const$ та $s(x) = const$; радіуси заокруглень матриці та пуансона постійні і дорівнюють R_M та R_n відповідно.

Отже, матимемо наступні рівняння у вибраній системі декартовій координат

$$\begin{aligned} b(x) &= b;\ s(x) = s; \\ m(x) &= \sqrt{R_M^2 - x^2} - R_M; \\ p(x) &= -\sqrt{R_n^2 - \left(x - t - R_M - R_n\right)^2} - h + R_n. \end{aligned} \tag{30}$$

Тоді задача (25) набуде дещо спрощеного вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{\omega''}{\sqrt{\left(1+\omega'^2\right)^3}} = -\dfrac{2 \cdot b \cdot \sigma_m^2}{\sqrt{3} \cdot E \cdot \sqrt{b \cdot \sigma_m \cdot \left(s^2 \cdot \sigma_m \cdot b - 4 \cdot M_{пл}(x)\right)}}; \\ \omega(x_A) = \sqrt{R_M^2 - x_A^2} - R_M; \omega'(x_A) = -\dfrac{x_A}{\sqrt{R_M^2 - x_A^2}}; \\ \dfrac{z''}{\sqrt{\left(1+z'^2\right)^3}} = -\dfrac{12 \cdot M_{пр}(x)}{E \cdot s^3 \cdot b}; \\ z(x_D) = \omega(x_D); z'(x_D) = \omega'(x_D); \\ z(x_B) = -\sqrt{R_n^2 - \left(x_B - t - R_M - R_n\right)^2} - h + R_n; \\ z'(x_B) = \dfrac{x_B - t - R_M - R_n}{\sqrt{R_n^2 - \left(x_B - t - R_M - R_n\right)^2}}. \end{cases} \tag{31}$$

Запропонований алгоритм розв'язання задачі (31) був реалізований у математичному додатку Maple 9. Результати розрахунку приведено на рис. 3.

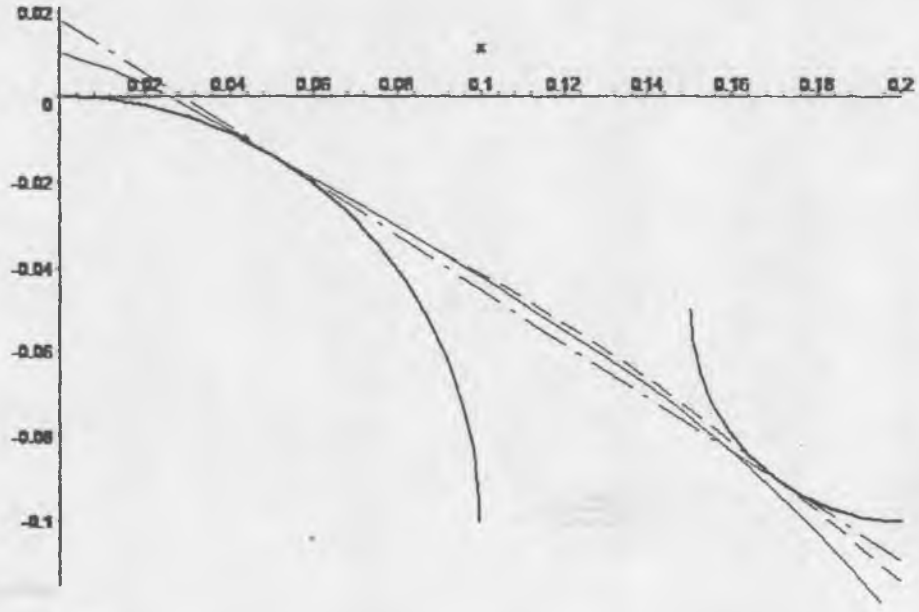

Рис. 3 - Розрахунок положення нейтральної поверхні під час згинання: суцільна лінія – положення при пружно-пластичних деформаціях; штрихова лінія – положення при пружних деформаціях; штрих-пунктирна лінія – апроксимація нейтральної поверхні прямою

Висновки

У роботі розроблено математичну модель згинання смуги змінної ширини та товщини матрицею та пуансоном, які мають радіуси заокруглень, що співрозмірні із відстанню між ними. На основі моделі запропоновано алгоритм, який дозволяє визначати точки дотику смуги до матриці та пуансона, координату перерізу, при якому відбувається перехід смуги із пружно-пластичного напружено-деформованого стану у пружний, рівняння вигнутої осі ділянки смуги, що знаходиться у пружно-пластичному напружено-деформованому стані, та рівняння вигнутої осі ділянки смуги, що не має пластичних деформацій. На основі алгоритму складено програми у середовищі Maple.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розробка маловідходних процесів формування тонкостінних циліндричних деталей / В.А Матвійчук., В. М. Михалевич, В. О. Раєвський // Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні. – Краматорськ: ДДМА. – 2004. – С. 281-286.

2. Попов Е. А. Основы теории листовой штамповки. – М.: Машиностроение, 1977. – 278 с.

3. Зубцов М. Е. Листовая штамповка. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1980. – 432 с.

4. Сопротивление материалов / Под ред. Писаренко Г. С. – 5-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища шк., 1986. – 775 с.