

*І. В. Хом'юк, В. Л. Карпенко, В. В. Хом'юк*

**МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ**

**ЧАСТИНА І**

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

*І. В. Хом'юк, В. Л. Карпенко, В. В. Хом'юк*

## **Математичне програмування**

### **Частина I**

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей та форм навчання. Протокол № 4 від 27 листопада 2003р.

Вінниця ВНТУ 2004

УДК 378.147  
X 76

*Рецензенти:*

**О.В. Мороз**, доктор економічних наук, професор  
**В.І. Клочко**, доктор педагогічних наук, професор  
**В.С. Абрамчук**, кандидат фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

**Хом'юк І.В., Карпенко В.Л., Хом'юк В.В.**

X 76 **Математичне програмування.** Частина 1: Навчальний посібник.  
– Вінниця: ВНТУ, 2004. - 78 с.

У навчальному посібнику подано теоретичні відомості з тем математичного програмування: розв'язування систем лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса, знаходження опорних розв'язків, геометричний та симплексний методи розв'язування задач лінійного програмування, математичні моделі деяких економічних задач у вигляді означень, теорем, властивостей. Розглянуті розв'язки прикладів з кожної теми, надається 30 варіантів завдань для лабораторних робіт та завдань для типових розрахунків з кожної теми для самостійного розв'язування.

Розрахований на студентів технічних ВНЗ усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 378.147

© Хом'юк І.В., Карпенко В.Л., Хом'юк В.В. 2004

## Зміст

ВСТУП.....	4
1 Вступ до вивчення дисципліни. Приклади задач лінійного програмування .....	5
2 Метод Жордана-Гаусса.....	8
2.1 Знаходження опорних розв'язків.....	18
3 Геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування .....	20
3.1 Загальна і основні задачі лінійного програмування.....	20
3.2 Геометричний спосіб розв'язування задач лінійного програмування.....	22
4 Симплекс метод розв'язування задач лінійного програмування.....	29
4.1 Поняття про симплексний метод (симплекс метод).....	29
4.2 Метод штучного базису (М-метод).....	32
4.3 Поняття про вироджений розв'язок.....	35
5 Математичні моделі деяких економічних задач .....	37
6 Завдання для лабораторних робіт.....	42
6.1 Лабораторна робота № 1. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса.....	42
6.2 Лабораторна робота № 2. Геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування.....	47
6.3 Лабораторна робота № 3. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування.....	51
6.4 Лабораторна робота № 4. Розв'язування економічних задач...56	
7 Завдання для типових розрахунків.....	65
8 Відповіді до завдань типових розрахунків.....	75
Література.....	77

## ВСТУП

Бурхливий розвиток економічного життя, економічної науки спричинив у свою чергу застосування нових методів у математиці. Виникла нова галузь математики – лінійне програмування, за допомогою якого досліджуються задачі, що мають множину розв'язків, з яких треба вибрати оптимальний.

Програмуванням такої галузі обчислень називають тому, що вона дає в кожному конкретному випадку “програму дій” для побудови розв'язку, а лінійним тому, що програмування оперує задачами, в яких розглядаються тільки лінійні залежності.

Праця “Математичні методи організації і планування виробництва” видатного математика Л.В.Канторовича, опублікована в 1939 р., була першою в галузі лінійного програмування, в якій розв'язано задачу планування завантаження верстатів. Там же показано, що розроблений метод придатний і для розв'язання транспортної задачі.

Особливо інтенсивно почали займатися лінійним програмуванням і застосуванням його в різноманітних питаннях економіки, починаючи з другої половини 40-х років. У 1947 – 1948 рр. Дж. Данциг (США) розробив універсальний метод розв'язання екстремальних лінійних задач, який він назвав “симплекс методом”.

У посібнику описано і поставлено деякі техніко-економічні задачі й показано, що розв'язання таких задач зводиться до розв'язання задач лінійного програмування та економічної інтерпретації їх.

Даний навчальний посібник містить у собі відомості з тем математичного програмування: “Геометричний метод розв'язування задач лінійного програмування”, “Симплекс метод розв'язування задач лінійного програмування”, “Метод Жордана-Гаусса”, які вивчаються студентами технічних вищих навчальних закладів на I, II та III курсах навчання. Висвітлені в посібнику теоретичні відомості можна вважати скороченим курсом лекцій. Ці відомості підтверджуються прикладами. Після теоретичної частини в навчальному посібнику подано 30 варіантів для лабораторних робіт з кожної теми. Кількість розрахована на одну академічну групу. Якщо в групі більше студентів і викладач бажає видати всім різні варіанти, це можна зробити використовуючи літери прізвища, які відповідають алфавіту, поділеному на частини з номерами від 1 до 30 або скорелювати набір випадкових чисел. Наприклад, Іванов – 2, 8, 6, 5, 1, 4, 3; Петров – 30, 1, 8, 6, 25, 4, 17 і т. д. У даному посібнику наведені також завдання для виконання типових розрахунків, які передбачають застосування інформаційних технологій.

Навчальний посібник можна використовувати як для підготовки до колоквиумів, практичних занять з поданих тем, так і для типових розрахунків, контрольних домашніх робіт для студентів заочної форми навчання.

## 1 Вступ до вивчення дисципліни. Приклади задач лінійного програмування

**Математичне програмування** є математичною дисципліною, яка займається вивченням екстремальних задач і розробкою методів їх розв'язання.

В загальному вигляді математична постановка екстремальної задачі полягає у визначенні найбільшого або найменшого значення цільової функції  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при умовах  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ), де  $f$  і  $g_i$  – задані функції, а  $b_i$  – деякі дійсні числа.

В залежності від функцій  $f$  і  $g_i$  математичне програмування можна розглядати як ряд самостійних дисциплін, що займаються вивченням і розробкою методів розв'язування певного класу задач.

Перш за все задачі математичного програмування поділяються на задачі лінійного і нелінійного програмування. При цьому якщо всі функції  $f$  і  $g_i$  лінійні, то відповідна задача є задачею лінійного програмування. Якщо хоча б одна із вказаних функцій нелінійна, то відповідна задача є задачею нелінійного програмування.

Окремим класом задач є задачі цілочисельного програмування. У цих задачах невідомі можуть приймати тільки цілі значення.

Задача, процес знаходження розв'язку якої є багатоетапним, відноситься до задачі динамічного програмування. У динамічному програмуванні цільова функція має спеціальну структуру (представляє собою суму або добуток функцій, які залежать від різних параметрів).

Розглянемо деякі із задач планування і управління, математичні моделі яких зводяться до оптимізаційних задач або до так званих задач лінійного програмування.

**Визначення найкращого складу суміші.** Іноді така задача називається задачею про вибір дієти. Нехай відомо вміст поживних речовин у різних продуктах харчування. Відомо також калорійність одиниці кожного виду продукту. Потрібно вибрати раціон так, щоб кожна корисна речовина, що міститься в продуктах і сумарна калорійність дієти були мінімальними.

До задач про суміші відносяться також задачі нижче наведеного типу. Бензини різних сортів отримують змішуванням різних нафтопродуктів. Задані показники якості бензину повинні витримуватись максимально точно. Але вихідні нафтопродукти мають різні технічні характеристики, і від того які нафтопродукти змішувати залежить рентабельність виробництва. У даній задачі потрібно скласти такий план змішування нафтопродуктів, який дав би змогу забезпечити максимальну рентабельність виробництва і дозволяв отримувати бензини заданих сортів у необхідних пропорціях.

**Задача про оптимальний план випуску продукції.** Нехай деяке підприємство випускає продукцію заданого асортименту. Затрати певного виду ресурсів на випуск одного виробу з вказаного асортименту, а також повні об'єми ресурсів є фіксованими. Прибуток, що отримують від реалізації кожного виду продукції величина постійна. Підприємству потрібно скласти такий план випуску продукції, який би був технологічно здійсненним за наявності вказаних ресурсів і в той же час приносив максимальний прибуток.

**Транспортна задача.** Ця задача виникає, коли мова йде про раціональне перевезення деякого однорідного продукту від виробників до споживачів. Припускається, що споживачам немає різниці звідки, з яких пунктів буде надходити продукт, головне, щоб він надходив в потрібному об'ємі. Але від того, наскільки раціонально будуть прикріплені пункти потреби до пунктів призначення, залежить об'єм транспортної роботи. У зв'язку з цим виникає задача про найбільш раціональне прикріплення до правильного напрямку перевезень вантажу, при якому потреби задовольняються, а витрати на транспортування мінімальні.

**Задача розміщення.** Нехай у відомих пунктах є або можуть бути розміщені підприємства, які виробляють деякий продукт. Цей продукт споживають в інших відомих пунктах. Відомі витрати на виробництво одиниці продукту і можливий максимальний об'єм виробництва в усіх пунктах виробництва, а також витрати на транспортування із пунктів виробництва в пункти споживання. Необхідно так вибрати місця розміщення нових підприємств, об'єми виробництва у них і план перевезення, щоб сумарні витрати на виробництво і транспортування всього необхідного об'єму продукту були мінімальними.

#### **Інші види оптимізаційних задач.**

Наведемо типові класи задач:

1) **управління запасами** (із збільшенням запасів збільшуються витрати на зберігання, але при цьому зменшуються втрати через можливість їх нестачі);

2) **розподілення ресурсів** (для певного набору робіт необхідно так розподілити ресурси, щоб отримати найбільший прибуток під час виконання цих робіт або мінімізувати втрати, що пов'язані із неповним забезпеченням ресурсами);

3) **ремонт і заміна обладнання** (робоче обладнання з часом зношується і має бути замінено, тому потрібно визначити найкращі строки поновленого ремонту і момент заміни обладнання модернізованим);

4) **масове обслуговування** (має місце в організаціях, що обслуговують черги замовлень або вимог, наприклад на телефонних станціях, ремонтних майстернях; тут задача полягає в тому, щоб мінімізувати сумарні очікувані втрати від несвоєчасного обслуговування замовлень);

5) **календарне планування** (дозволяє скласти такий розклад для завантажування обладнання, щоб сумарна тривалість комплексу завершуваних робіт була мінімальною);

6) **сітьове планування і управління** (має місце під час виконання важких об'єктів, які потребують значних коштів та коли необхідно узгодження строків завершення окремих комплексів робіт і моментів запуску операцій всього комплексу);

7) **вибір маршруту** (при проектуванні комунікацій або трубопроводів необхідно вибирати найкраще їх розміщення, щоб оптимізувати потоки в мережах);

8) **комбіновані задачі** (містять декілька типових задач одночасно).

Приклад. Для виготовлення трьох видів виробів А, В і С використовують токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного із типів обладнання наведені в таблиці.

Тип обладнання	Затрати часу на обробку одного виду виробу			Загальний фонд робочого часу обладнання (год)
	А	В	С	
Фрезерне	2	4	5	120
Токарне	1	8	6	280
Зварювальне	7	4	5	240
Шліфувальне	4	6	7	360
Прибуток	10	14	12	

Скласти математичну модель задачі, щоб прибуток від реалізації був максимальним.

Розв'язання. Припустимо, що буде виготовлено  $x_1$  одиниць виробів виду А,  $x_2$  одиниць – виду В і  $x_3$  одиниць – виду С. Тоді для виробництва такої кількості виробів потрібно затратити  $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$  станкогодин фрезерного обладнання. Оскільки, як загальний фонд робочого часу станків даного типу не може перевищувати 120, то повинна виконуватись нерівність  $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120$ . Аналогічно складаємо такі обмеження:

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120$$

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280$$

$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240$$

$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360$$

Оскільки кількість виготовлених виробів не може бути від'ємною, то слід додати ще обмеження:  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq 0$ .

Прибуток від їх реалізації складає :  $F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \rightarrow \max$ .



## Література:

1. Пак В.В., Носенко Ю.А. Вища математика. –К.: "Либідь", 1996.
2. Ермольев Ю.М. и др. Математические методы исследования операций. – М., Высшая школа, 1998.
3. Калихман И.Л. Линейная алгебра и математическое программирование - М.: Высшая школа, 1967.
4. Карпелевич Ф.М., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. – М.: Наука, 1967.
5. Кузнецов Ю.Н., Козубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980.
6. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
7. Терехов Л.Л. Экономико-математические методы. – М.: Статистика, 1972.
8. Балашевич В.А. Основы математического программирования. – Мн: Вышш. шк., 1985.
9. Гетманцев В.Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування.: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2001.
10. Мину Мишель. Математическое программирование: Теория и алгоритмы. – М.: Наука, 1990.
11. Новіков В.В., Яценко С.А. Лінійне і нелінійне програмування.: Навч. посібник / МВО України. –К.: НМК ВО, 1992.
12. Роїк О.М., Месюра В.І. Математичні методи дослідження операцій. – Вінниця: ВДТУ, 2002.

*Навчальне видання*

Ірина Володимирівна Хом'юк  
Володимир Леонідович Карпенко  
Віктор Вікторович Хом'юк

## **МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ**

### **ЧАСТИНА I**

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Хом'юк І.В.

Редактор С.А. Малішевська

Навчально-методичний відділ ВНТУ  
Свідоцтво Держкомінформу України  
серія ДК №746 від 25.12.2001  
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку  
Формат 29,7×42 <sup>1</sup>/<sub>4</sub>  
Друк різнографічний  
Тираж прим.  
Зам. №

Гарнітура Times New Roman  
Папір офсетний  
Ум. друк. арк..

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі  
Вінницького національного технічного університету  
Свідоцтво Держкомінформу України  
серія ДК №746 від 25.12.2001  
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ