Клочко В.І.
Кирилащук С.А.
Абрамчук І.В.
Дода А.Ф.

МАТЕМАТИКА.
ПОСІБНИК ДЛЯ ДОВУЗІВСЬКОЇ ПІДГОТОВКИ ІНОЗЕМНИХ СЛУХАЧІВ

ЧАСТИНА 2

УДК 621.382
І 23

Рецензенти:

В.А.Петрук, доктор педагогічних наук, професор
В.М.Михалевич., доктор технічних наук, професор
В.Б.Рудницький, доктор фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Клочко В.І. Кирилащук С.А. Абрамчук І.В.Дода А.Ф.
І 23**Математика. Посібник для довузівської підготовки іноземних слухачів**. **Частина 2**. Навчальний посібник. - Вінниця: ВНТУ, 2009. - 100 с.
У посібник включені завдання різної складності, які розраховані як для аудиторної, так і для самостійної роботи. Під час добору вправ і завдань враховувалися знання української мови студентами-іноземцями на кожному етапі навчання.
УДК 621.382

ЗМІСТ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Клочко В.І.
Кирилащук С.А.
Абрамчук І.В.
Дода А.Ф.

МАТЕМАТИКА.
ПОСІБНИК ДЛЯ ДОВУЗІВСЬКОЇ ПІДГОТОВКИ ІНОЗЕМНИХ СЛУХАЧІВ

ЧАСТИНА 2

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для слухачів підготовчого відділення для іноземних громадян. Протокол № 4 від "24" грудня 2008 р.

Вінниця ВНТУ 2009

Навчальне видання

Віталій Іванович Клочко
Світлана Анатоліївна Кирилащук
Ігор Васильович Абрамчук
Анастасія Федорівна Дода

МАТЕМАТИКА.
ПОСІБНИК ДЛЯ ДОВУЗІВСЬКОЇ ПІДГОТОВКИ ІНОЗЕМНИХ СЛУХАЧІВ
ЧАСТИНА 2

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор   ініціали та прізвище редактора

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 19.03.2010 р.
Гарнітура Times New Roman
Формат 60х84/8
Папір офсетний
Друк різографічний
Ум. друк. арк. 12,4
Тираж 300 прим.
Зам. № 10213

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

1. Лінійні рівняння з однією змінною

Кожне з рівнянь $5x = -4$, $-0{,}2x = 0$, $-x = -6{,}5$ має вигляд $ax = b$, де x– змінна, a і b – числа.

У першому рівнянні $a = 5$, $b = -4$, у другому $a = -0{,}2$, $b = 0$, у третьому - $a = -1$, $b = -6{,}5$.

Такі рівняння називають **лінійними рівняннями з однією змінною.**

Рівняння виду $ax = b$, де x – змінна, a і b – деякі числа, називається лінійним рівнянням з однією змінною.

З`ясуємо, скільки **коренів** може мати лінійне рівняння.

Розглянемо рівняння $ax = b$, в якому **коефіцієнт** a не дорівнює нулю. Поділивши обидві частини рівняння на a, дістанемо $x = b / a$. Отже, лінійне рівняння $ax = b$, в якому $a \neq 0$, має єдиний корінь b / a.

Розглянемо тепер лінійне рівняння $ax = b$, в якому коефіцієнт a дорівнює нулю. Якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то рівняння $ax = b$ не має коренів, оскільки рівність $0x = b$ не буде правильною ні при якому x. Якщо $a = 0$ і $b = 0$, то будь – яке значення x є коренем рівняння, оскільки рівність $0x = 0$ правильна при будь – якому x.

Отже, лінійне рівняння $ax = b$, якщо $a \neq 0$, має один корінь, якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, не має коренів, якщо $a = 0$ і $b = 0$, має безліч коренів (будь – яке число є його коренем).

Розв’язування багатьох рівнянь зводиться до розв’язування лінійних рівнянь.

Приклад 1.. Розв’яжемо рівняння $4(x + 7) = 3 - x$.

Розв’язання.

Розкриємо дужки:

$$4x + 28 = 3 - x.$$

Перенесемо **доданок** $-x$ у ліву частину рівняння, а доданок 28 у праву, змінивши при цьому їх знаки:

$$4x + x = 3 - 28.$$

Зведемо подібні доданки:

$$5x = -25.$$

Поділимо обидві частини рівняння на цей коефіцієнт:

$$x = -5.$$

Застосовуючи властивості рівнянь і виконуючи **тотожні перетворення**, ми послідовно заміняли одне рівняння іншим, **рівносильним** йому. Отже, коренем рівняння $4(x + 7) = 3 - x$ є число -5.

***Відповідь*:** *x= -5*

У цьому прикладі вихідне рівняння звелося до рівносильного лінійного рівняння, в якому коефіцієнт біля x відмінний від нуля.

Якщо під час розв’язування рівняння ми прийдемо до рівносильного йому лінійного рівняння виду $0x = b$, то у цьому випадку вихідне рівняння або не має коренів, або його коренем є довільне число.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2x + 5 = 2(x + 6)$.

Розв'язання.

Маємо:

$$2x + 5 = 2x + 12,$$
$$2x - 2x = 12 - 5,$$
$$0x = 7.$$

Останнє рівняння не має коренів. Отже, і рівняння $2x + 5 = 2(x + 6)$ не має коренів.

Рівняння $3(x + 2) + x = 6 + 4x$ зводиться до рівняння $0x = 0$, коренем якого є будь-яке число. Отже, коренем рівняння $3(x + 2) + x = 6 + 4x$ є будь-яке число.

Вправи

1.Знайдіть корінь рівняння:

а) $5x = -60$; б) $-10x = 8$; в) $7x = 9$; г) $6x = -50$; д) $-9x = -3$; е) $0,5x = 1,2$; є) $0,7x = 0$; ж) $-1,5x = 6$; з) $42x = 13$.

2. Розв'яжіть лінійне рівняння:

а) $1/3x = 12$; б) $2/3y = 9$; в) $-4x = 1/7$; г) $5y = -5/8$; д) $1/6y = 1/3$; е) $2/7x = 0$.

3. Знайдіть корінь рівняння:

а) $5x - 150 = 0$; б) $48 - 3x = 0$; в) $-1,5x - 9 = 0$; г) $12x - 1 = 35$; д) $-x + 4 = 47$; е) $1,3x = 54 + x$; є) $7 = 6 - 0,2x$; ж) $0,15x + 6 = 51$; з) $-0,7x + 2 = 65$.

4. Розв'яжіть рівняння:

а) $2x + 9 = 13 - x$; б) $14 - y = 19 - 11y$; в) $0,5a + 11 = 4 - 3a$; г) $1,2n + 1 = 1 - n$; д) $1,7 - 0,3m = 2 + 1,7m$; е) $0,8x + 14 = 2 - 1,6x$; є) $15 - p = 1/3p - 1$; ж) $1\frac{1}{3}x + 4 = 1/3x + 1$; з) $z - 1/2z = 0$; и) $x - 4x = 0$; і) $x = -x$; ї) $5y = 6y$.

5. Розв'яжіть рівняння:

а) $3x - 8 = x + 6$; б) $7a - 10 = 2 - 4a$; в) $1/6y - 1/2 = 3 - 1/2y$; г) $2,6 - 0,2b = 4,1 - 0,5b$; д) $p - 1/4 = 3/8 + 1/2p$; е) $0,8 - y = 3,2 + y$; є) $2/7x = 1/2$; ж) $2x - 0,7x = 0$.

6. Знайдіть корінь рівняння:

а) $(y + 4) - (y - 1) = 6y$; б) $3p - 1 - (p + 3) = 1$; в) $6x - (7x - 12) = 101$; г) $20x = 19 - (3 + 12x)$;

7. Знайдіть корінь рівняння:
а) $(13x - 15) - (9 + 6x) = -3x$;
б) $12 - (4x - 18) = (36 + 4x) + (18 - 6x)$;
в) $1{,}6x - (x - 2{,}8) = (0{,}2x + 1{,}5) - 0{,}7$;
г) $(0{,}5x + 1{,}2) - (3{,}6 - 4{,}5x) = (4{,}8 - 0{,}3x) + (10{,}5x + 0{,}6)$.

8. Розв'яжіть рівняння:
а) $5x + (3x - 3) = 6x + 11$;
б) $3a - (10 + 5a) = 54$;
в) $(x - 7) - (2x + 9) = -13$;
г) $0{,}6 + (0{,}5y - 1) = y + 0{,}5$.

9. При якому значенні змінної значення виразу $8b - 27$ дорівнює:
а) 5; б) –11; в) 1,8; г) –1?

10. При якому значення змінної:
а) значення виразів $2m - 13$ і $m + 3$ однакові;
б) значення виразу $3 - 5c$ на 1 менше від значення виразу $1 - c$;
в) значення виразу $2x + 1$ на 20 більше від значення виразу $8x + 5$;
г) значення x у 3 рази менше від значення виразу $45 - 10x$;
д) значення виразу $9 - y$ у 2 рази більше від значення y;

11. При якому значенні y:
а) значення виразів $5y + 3$ і $36 - y$ однакові;
б) значення виразу $7y - 2$ більше від значення виразу $2y$ на 10;
в)значення виразу $1{,}7y + 37$ менше від значення виразу $9{,}3y - 25$ на 14?

12. Розв'яжіть рівняння:
а) $2x + 5 = 2(x + 1) + 11$;
б) $3(2y + 4) = 2(5y - 10)$;
в) $3y - (y - 19) = 2y$;
г) $6x = 1 - (4 - 6x)$.

13. Розв'яжіть рівняння:
а) $15(x + 2) - 30 = 12x$;
б) $6(1 + 5x) = 5(1 + 6x)$;
в) $3y + (y - 2) = 2(2y - 1)$;
г) $6y - (y - 1) = 4 + 5y$.

14. Знайдіть корінь рівняння:
а) $5(3x + 1{,}2) + x = 6{,}8$;
б) $4(x + 3{,}6) = 3x - 1{,}4$;
в) $13 - 4{,}5y = 2(3{,}7 - 0{,}5y)$;
г) $5{,}6 - 7y = -4(2y - 0{,}9) + 2{,}4$.

15. Розв'яжіть рівняння:
а) $0{,}4x + 3 = 0{,}2(3x + 1) - x$;
б) $3{,}4 - 0{,}6x = 2x - (0{,}4x + 1)$;
в) $0{,}8x - (0{,}7x + 0{,}36) = 7{,}1$;
г) $x - 0{,}5 = 2(0{,}3x - 0{,}2)$.

Група А

16. Розв’яжіть рівняння:

1) $2x+3=0$;

2) $0{,}5+2x=1{,}5+3x$;

3) $\frac{1}{3}x+4=0$;

4) $5x-(x+3)=5$;

5) $2x=\frac{1}{4}$;

6) $7-2(x-4{,}5)=6-4x$;

7) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=2$;

8) $\frac{3}{5}x-\frac{x}{2}=0{,}2$;

9) $11x+5=5x-12-4-x$;

10) $\frac{3x}{0{,}2}=\frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{3}}$;

11) $(x+2)^2-5(x-4)=(x-6)(x+6)$;

12) $\frac{17x+26}{4x+3}-3=0$;

13) $6-\frac{x-1}{2}=\frac{3-x}{2}+\frac{x-2}{3}$;

14) $\frac{2}{3}(x+3)=\frac{6+2x}{3}$;

15) $\frac{1}{2x-3}-\frac{3}{x(2x-3)}=\frac{5}{x}$;

16) $\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}+\frac{4}{3}x=0$;

17) $\frac{3x-11}{4}-\frac{3-5x}{8}=\frac{x+6}{2}$;

18) $\frac{x-3}{6}+x=\frac{2x-1}{3}-\frac{4-x}{2}$;

Група Б

17. Розв’яжіть рівняння:

1) $3(-0{,}5+2x^2=(x+2)(2x-4))=5x-20$;

2) $\frac{x}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{20}+\frac{x}{30}+\frac{x}{42}=-6$;

3) $(x-3)^2-x(x+4)=15-10x$;

4) $\frac{8}{9}x+\frac{34}{72}-\frac{9}{8}x=0$;

5) $\frac{4+x}{4x-2}+\frac{3}{4}=0$;

6) $\frac{\sqrt[3]{9^2}\left(\frac{1}{3}\right)^6}{(\sqrt[3]{3})^{-1}27^{-\frac{2}{3}}}-\frac{x}{3(\sqrt[3]{3})^4}$;

7) $\frac{\sqrt[6]{64}\sqrt[3]{2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}16x}-2^{\frac{5}{3}}32^{-1}$;

8) $\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$;

9) $5-3(x-2(x-2(x-2)))=2$;

10) $\dfrac{3}{2-\dfrac{3}{2-\dfrac{3}{2-x}}}=\dfrac{21}{8}$.

18. Вкажіть, при яких значеннях параметрах a рівняння мають нескінченну кількість розв‘язків:

1) $\dfrac{3a}{x-a}-\dfrac{a}{x-2a}=\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{2a}{x-2a}$;

2) $6(ax-1)-a=2(a+x)-7$;

3) $0{,}5(5x-1)=4{,}5-2a(x-2)$.

19. Вкажіть, при яких значеннях параметрах a рівняння не мають розв‘язків:

1) $\dfrac{x-5}{x+7}=\dfrac{a-x}{x+7}$

2) $2(a-2x)=ax+3$

3) $a^2x=a(x+2)-2$

4) $\dfrac{8+5x}{2-x}=2a$

19) При яких значеннях параметра a пряма $y=ax-3$ проходить через точку А(-2; 9) ?

21. При яких значеннях параметра b пряма $y=3x+b$ проходить через точку А(-1; 5) ?

2. Лінійні рівняння з двома змінними та їх системи

2.1. Лінійне рівняння з двома змінними

Нехай відомо, що одне з двох чисел на 5 більше від другого. Якщо перше число позначити буквою x, а друге – буквою y, то **співвідношення** між ними можна записати у вигляді рівності $x - y = 5$, яка містить дві змінні. Такі рівності називаються ***рівняннями з двома змінними*** або рівняннями з двома невідомими.

Наведемо інші приклади рівнянь з двома змінними $5x + 2y = 10$, $-7x + y = 5$, $x^2 + y^2 = 20$, $xy = 12$. З цих рівнянь перші два мають вигляд $ax + by = c$, де a, b, c – числа. Такі рівняння називають ***лінійними рівняннями з двома змінними.***

Лінійним рівнянням з двома змінними називається рівняння виду $ax + by = c$, де x і y змінні, a, b, c – деякі числа.

Якщо $x = 8$, $y = 3$, рівняння $x - y = 5$ перетворюється у правильну рівність: $8 - 3 = 5$. Говорять, що пара значень змінних $x = 8$, $y = 3$ є ***розв'язком*** цього рівняння.

Розв’язком рівняння з двома змінними називається пара значень змінних, що перетворює це рівняння у правильну рівність.

Неважко перевірити, що розв’язками рівняння $x - y = 5$ є також пари:

$x = 105$, $y = 100$; $x = 4$, $y = -1$; $x = 3{,}5$, $y = -1{,}5$. Пари значень змінних записують іноді коротше. Наприклад, перелічені пари можна записати так: (105; 100), (4; –1), (3,5; –1,5). При такому запису необхідно знати: значення якої із змінних стоїть на першому місці, а якої – на другому. В запису розв’язків рівняння із змінними x і y умовимося на першому місці записувати значення x, а на другому – значення y.

Рівняння з двома змінними, які мають одні й ті самі розв’язки, називаються ***рівносильними.***

Рівняння з двома змінними, які не мають розв’язків, також вважають рівносильними.

Рівняння з двома змінними мають такі самі ***властивості***, як і рівняння з однією змінною:

1) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак, то дістанемо рівняння, рівносильне даному;

2) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Розглянемо рівняння:

$$5x+2y = 12.$$

Скориставшись властивостями рівнянь, виразимо з цього рівняння одну змінну через другу, наприклад y через x. Для нього перенесемо доданок $5x$ у праву частину рівняння, змінивши його знак:

$$2y = -5x + 12.$$

Поділимо обидві частини рівняння на 2:

$$y= -2{,}5x + 6. \qquad (2)$$

Рівняння (2) рівносильне рівнянню (1). Користуючись формулою $y = -2{,}5x + 6$, може знайти скільки завгодно розв’язків рівняння (1). Для цього достатньо взяти довільне x і обчислити відповідне йому значення y. Наприклад,

якщо $x = 2$, то $y = -2{,}5 \cdot 2 + 6 = 1$;

якщо $x = 0{,}4$, то $y = -2{,}5 \cdot 0{,}4 + 6 = 5$.

Пари чисел (2;1), (0,4;5) – розв’язки рівняння (1). Рівняння (1) має безліч розв’язків.

Вправи

1. Чи є рівняння з двома змінними лінійним:

а) $3x - y = 17$; в) $13x + 6y = 0$;

б) $x^2 - 2y = 5$; г) $xy + 2x = 9$?

2. Чи є лінійним рівняння:

а) $3x + 6y = 4$;

б) $xy = 11$;

в) $x - 2y = 5$;

г) $x + y = 9$?

3. Чи є пара чисел $x = 1\cdot5/7$ і $y = 4\cdot2/7$ розв’язком рівняння $x + y = 6$? Запишіть ще два розв'язки цього рівняння.

4. Пари значень змінних x і y подано в таблиці

x	–5	–4	–3	–1	0	4	5
y	0	3	4	–3	–5	–3	0

Які з них є розв’язками рівняння:

а) $2x + y = -5$; б) $x + 3y = -5$?

5. Які з пар (3;1), (0;10), (2;4) і (3;2,5) є розв’язками рівняння $3x + y = 10$?

6. Чи є розв’язком рівняння $10x + y = 12$ пара чисел: (3; –20), (–2;12), (0,1;11), (1;2), (2;1)?

7. Складіть яке–небудь лінійне рівняння з двома змінними, розв’язком якого є пара чисел:

а) $x = 2$, $y = 4{,}5$;

б) $x = -1$, $y = 2$.

8. З лінійного рівняння $4x - 3y = 12$ виразити:

а) y через x;

б) x через y.

9. Рівняння $2u + v = 4$ виразіть:

а) змінну v через u;

б) змінну u через v.

10. Виразіть: а) y через x з рівняння $6x - y = 12$;
б) x через y з рівняння $10x + 7y = 0$.

11. Виразіть із рівняння змінну y через x. Користуючись виведеною формулою, знайдіть три будь – яких розв’язки рівняння:

а) $x + y = 27$;

б) $2x - y = 4{,}5$;

в) $3x + 2y = 12$;

г) $5y - 2x = 1$.

12. Виразивши з рівняння $x - 6y = 4$ змінну x через y, знайдіть три яких–небудь розв’язки цього рівняння.

13. Виразивши змінну y через змінну x, знайдіть три яких–небудь розв’язки рівняння:

а) $3x - y = 10$; б) $6x + 2y = 7$.

14. Серед розв'язків рівняння $x + 2y = 18$ знайдіть таку пару, яка складена з двох однакових чисел.

15. Знайдіть значення коефіцієнта a в рівнянні $ax + 2y = 8$, коли відомо, що пара $x = 2$, $y = 1$ є розв'язком цього рівняння.

2.2. Системи лінійних рівнянь з двома змінними

Приклад 1. Сума двох чисел дорівнює 12, а їх різниця дорівнює 2. Знайдіть ці числа.

Розв'язання.

Позначимо перше число буквою x, а друге буквою y. За умовою задачі сума чисел дорівнює 12, тобто

$$x + y = 12.$$

Оскільки різниця чисел дорівнює 2, то

$$x - y = 2.$$

Ми склали два рівняння з двома змінними. Щоб відповісти на запитання задачі, треба знайти такі значення змінних, які перетворюють у правильну рівність кожне з рівнянь $x + y = 12$ і $x - y = 2$, тобто знайти спільні розв'язки цих рівнянь. У таких випадках говорять, що треба ***розв'язати систему рівнянь.***

Систему рівнянь прийнято записувати за допомогою **фігурної дужки.** Складену за умовою задачі систему рівнянь можна записати так:

$$\begin{cases} x + y = 12; \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Пара значень змінних $x = 7$, $y = 5$ є розв'язком кожного з рівнянь системи, оскільки обидві рівності $7 + 5 = 12$ і $7 - 5 = 2$ правильні. Таку пару називають ***розв'язком системи.***

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називається пара значень змінних, що перетворює кожне рівняння системи у правильну рівність.

Розв'язати систему рівнянь – означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Контрольні запитання.

1. Дайте означення лінійного рівняння з двома змінними. Наведіть приклад.

2. Що називається розв'язком рівняння з двома змінними? Чи є пара значень змінних $x = 7$, $y = 3$ розв'язком рівняння $2x + y = 17$?

3. Що називається розв'язком системи лінійних рівнянь з двома змінними? Що означає розв'язати систему рівнянь?

4. Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь з двома змінними?

2.3. Розв'язування систем лінійних рівнянь

Спосіб підстановки

Розглянемо спосіб розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними, який називається ***способом підстановки***. Почнемо з прикладу.

Приклад 1. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + y = 7, \\ -5x + 2y = 3. \end{cases} \qquad (3)$$

Виразимо з першого рівняння y через x:

$$y = 7 - 3x.$$

Підставивши у друге рівняння замість y вираз $7 - 3x$, дістанемо систему:

$$\begin{cases} 3x + y = 7, \\ -5x + 2(7 - 3x) = 3. \end{cases} \qquad (4)$$

Системи (3) і (4) мають одні й ті самі розв'язки. Доведемо це. Нехай деяка пара чисел (a; b) є розв'язком системи (3). Тоді правильні числові рівності

$$3a + b = 7і - 5a + 2b,$$

а отже, і рівність

$$b = 7 - 3a.$$

Замінивши у рівності $-5a + 2b = 3$ число b виразом $7- 3a$, значення якого дорівнює b, ми знову дістанемо правильну числову рівність

$$-5a + 2(7 - 3a) = 3.$$

Отже, кожний розв'язок системи (3) є розв'язком системи (4). Аналогічно доводиться, що кожний розв'язок системи (4) є розв'язком системи (3).

У системі (4) друге рівняння містить тільки одну змінну. Розв'яжемо це рівняння:

$$-5x + 14 - 6x = 3,$$
$$-11x = -11,$$
$$x = 1.$$

Підставивши у рівність $y = 7 - 3x$ замість x число 1, знайдемо відповідне значення y:

$$y = 7 - 3 \cdot 1,$$
$$y = 4.$$

Пара (1; 4) – розв'язок системи (4), а отже, і даної системи (3).

Розв'язання системи (3) ми звели до розв'язування системи (4). При цьому ми скористались тим, що системи (3) і (4) мають одні й ті самі розв'язки.

Системи рівнянь з двома змінними, які мають одні й ті самі розв'язки, називаються ***рівносильними.*** Системи, які не мають розв'язків, також називаються рівносильними.

Ми розв'язували систему (3), використовуючи спосіб підстановки. Розв'язуючи системи двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки роблять так:

1) виражають з якого-небудь рівняння системи одну змінну через іншу;
2) підставляють у друге рівняння системи замість цієї змінної утворений вираз;
3) розв'язують рівняння з однією змінною;
4) знаходять відповідне значення змінної.

Приклад 2. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7x + 6y = 6, \\ 3x + 4y = 9. \end{cases}$$

Розв'язання.

Виразимо з другого рівняння x через y:

$$3x = 9 - 4y,$$
$$x = \frac{9 - 4y}{3}.$$

Підставимо в перше рівняння замість x вираз $\frac{9 - 4y}{3}$:

$$7 \cdot \frac{9 - 4y}{3} + 6y = 6.$$

Розв'яжемо знайдене рівняння з однією змінною y:

$$7(9 - 4y) + 3 \cdot 6y = 3 \cdot 6,$$
$$63 - 28y + 18y = 18,$$
$$-10y = -45,$$
$$y = 4{,}5.$$

Підставимо в рівняння х = $\frac{9-4y}{3}$ замість у число 4,5:

х = $\frac{9-4\cdot 4{,}5}{3}$, х = -3.

***Віповідь*:** x = -3, y = 4,5.

Вправи

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} y = x-1, \\ 5x-2y=16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 2-y, \\ 3x-2y-11=0; \end{cases}$

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} y-2x=1, \\ 6x - y = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x-y=11, \\ 6x - 2y = 13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x-3y=13, \\ x - 2y = 5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y-x=20, \\ 2x - 15y = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y=6, \\ 3x - 5y = 2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 25-x=-4y, \\ 3x - 2y = 30. \end{cases}$

3. Знайдіть розв'язок системи рівнянь**:**

а) $\begin{cases} 2x+y=12, \\ 7\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 31; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8y-x=4, \\ 2\mathrm{x} - 21\mathrm{y} = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y-2x=4, \\ 7\mathrm{x} - \mathrm{y} = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x=y+0{,}5, \\ 3\mathrm{x} - 5\mathrm{y} = 13. \end{cases}$

4. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 2u+5v=0, \\ -8\mathrm{u}+15\mathrm{v}=7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4u+3v=14, \\ 5\mathrm{u} - 3\mathrm{v} = 25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5p-3q=0, \\ 3\mathrm{p}+4\mathrm{q}=29; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 10\mathrm{p}+7\mathrm{q}=-2, \\ 2\mathrm{p} - 22 = 5\mathrm{q}. \end{cases}$

5. Розв'яжіть систему:

а) $\begin{cases} 3x+4y=0, \\ 2\mathrm{x}+3\mathrm{y}=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x+6y=-20, \\ 9\mathrm{y}+2\mathrm{x}=25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7x+2y=0, \\ 4\mathrm{y}+9\mathrm{x}=10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3\mathrm{x}+1=8\mathrm{y}, \\ 11\mathrm{y} - 3\mathrm{x} = -11. \end{cases}$

6. Не виконуючи побудов знайдіть координати точок перетину графіків рівнянь:

а) $7x + 4y = 16$ і $8x - 10y = 19$;

б) $11x - 6y = 2$ і $-8x + 5y = 3$.

7. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь, не виконуючи побудови:

а) $5x - 4y = 16$ і $x - 2y = 6$;

б) $20x - 15y = 100$ і $3x - y = 6$.

8. Знайдіть розв'язок системи:

а) $\begin{cases} 3(x-5)-1=6-2x, \\ 3(x-y)-7y=-4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6(x+y)-y=-1, \\ 7(y+4)-(y+2)=0. \end{cases}$

9. Розв'яжіть систему рівнянь**:**

а) $\begin{cases} 2(3x-2y)+1=7x, \\ 12(x+y)-15=7x+12y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3(x+y)-7=12x+y, \\ 6(y-2x)-1=-45x. \end{cases}$

Спосіб додавання

Розглянемо ще один спосіб розв'язування систем лінійних рівнянь – ***спосіб додавання*.** Розв**'**язуючи системи цим способом, як і в разі розв'язування способом підстановки, переходимо від даної системи до іншої, рівносильної їй системи, в якій одне з рівнянь містить тільки одну змінну.

Приклад 1. Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} 2x+3y=-5, \\ x-3y=38. \end{cases} \quad (5)$$

У рівняннях цієї системи коефіцієнти при y – протилежні числа. Додававши почленно ліві і праві частини рівнянь, дістанемо рівняння з однією змінною: $3x = 33$.

Замінимо одне з рівнянь системи (5), наприклад перше рівнянням $3x = 33$. Дістанемо систему:

$$\begin{cases} 3x = 33, \\ x - 3y = 38. \end{cases} \qquad (6)$$

Система (6) рівносильна системі (5). У цьому можна переконатися за допомогою міркувань, аналогічних до проведених у попередньому пункті під час розв'язування систем способом підстановки.

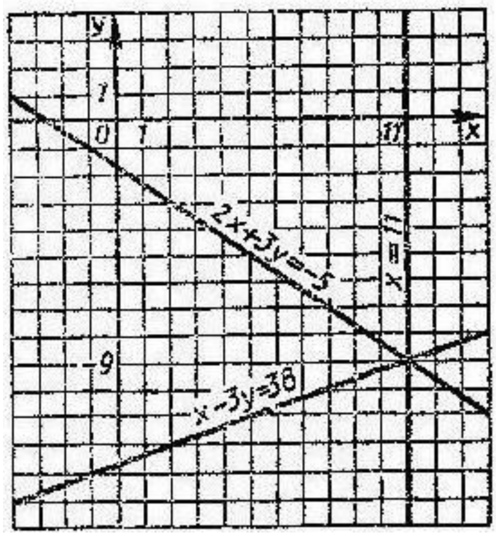


Рис.1.

Розв'яжемо систему (6). З рівняння 3x = 3 знаходимо, що x = 11. Підставивши це значення *x* у рівняння *x* – 3y = 38, дістанемо рівняння зі змінною *y*:

$$11 - 3y = 38.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$-3y = 27,$$
$$y = -9.$$

Пара (11; -9) – розв'язок системи (6), а отже, і даної системи (5). Скориставшись тим, що в рівняннях системи (5) коефіцієнт при *y* є протилежними числами, ми звели її розв'язування до розв'язування рівносильної системи (6), в якій одне з рівнянь має тільки одну змінну.

***Приклад* 2**. Розв'яжемо систему :

$$\begin{cases} 5x + 11y = 8, \\ 10x - 7y = 74. \end{cases}$$

Розв'язання

Почленне додавання рівнянь системи не приводить до виключення жодної із змінних. Проте, якщо спочатку помножити всі члени першого рівняння на -2, а друге рівняння залишити без зміни, то коефіцієнти при *x* в обох рівняннях будуть **протилежними числами**:

$$\begin{cases} -10x - 22y = -16, \\ 10x - 7y = 74. \end{cases}$$

Тепер почленне додавання приводить до рівняння з однією змінною

$$-29y = 58.$$

З цього рівняння знаходимо, що

$$y = -2.$$

Підставивши у друге рівняння замість y число -2, знайдемо значення x:

$$10x - 7 \cdot (-2) = 74,$$

$$10x = 60,$$

$$x = 6.$$

***Відповідь*:** $x = 6$, $y = -2$.

***Приклад* 3.** Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 93, \\ 5x - 4y = 103. \end{cases}$$

Розв'язання.

Підберемо **множники** до рівнянь системи так, щоб після множення на них коефіцієнти при y стали протилежними числами. Помножимо перше рівняння системи на -4, а друге на 5, дістанемо:

$$\begin{cases} -12x + 20y = -372, \\ 25x - 20y = 515. \end{cases}$$

Звідси знайдемо, що

$$13x = 143,$$

$$x = 11.$$

Підставивши значення x в рівняння

$$5x - 4y = 103,$$

знайдемо, що

$$y = -12.$$

***Відповідь*:** $x = 11$, $y = -12$.

Ми розглянули приклади розв'язування системи способом додавання. Розв'язуючи системи двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання, роблять так:

1) множать почленно рівняння системи, підбираючи множники так, щоб коефіцієнти при одній із змінних стали протилежними числами;

2) додають почленно ліві і праві частини рівнянь системи;

3) розв'язують утворене рівняння з однією змінною;

4) знаходять відповідне значення другої змінної.

Зауважимо, що коли коефіцієнти при одній зі змінних є протилежними числами, то розв'язування відразу починають з почленного додавання рівнянь.

Вправи

1. Розв'яжіть систему:

а) $\begin{cases} 2x+11y=15, \\ 10x-11y=9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x-7y=30, \\ 4x-5y=90; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 8x-17y=4, \\ -8x+15y=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 13x-8y=28, \\ 11x-8y=24. \end{cases}$

2. Знайдіть розв'язок системи:

а) $\begin{cases} x-6y=17, \\ 5x+6y=13; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ -5x+2y=45; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x-7y=-12, \\ -4x+3y=12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 9x-4y=-13, \\ 9x-2y=-20. \end{cases}$

3. Розв'жіть систему:

а) $\begin{cases} 40x+3y=10, \\ 20x-7y=5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 13x-12y=14, \\ 11x-4=18y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x-2y=1, \\ 15x-3y=-3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 10x-9y=8, \\ 21y+15x=0{,}5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 33a+42b=10, \\ 9a+14b=4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 9y+8z=-2, \\ 5z=-4y-11. \end{cases}$

4. Розв'яжіть систему:

а) $\begin{cases} 12x-7y=2, \\ 4x-5y=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6x=25y-1, \\ 5x-16y=-4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7u+2v=1, \\ 17u+6v=-9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4b+7a=90, \\ 5a-6b=20. \end{cases}$

5. Знайдіть розв'язок системи**:**

а) $\begin{cases} 0{,}75x+20y=95, \\ 0{,}32x-25y=7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 10x=4{,}6+3y, \\ 4y+3{,}2=6x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}5u-0{,}6v=0, \\ 0{,}4u+1{,}7v=10{,}9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -3b+10a-0{,}1=0, \\ 15a+4b-2{,}7=0. \end{cases}$

ЗАДАЧІ.

Група А

1. Розв‘язати систему рівнянь**:**

1) $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+5y=15 \\ x-2y=3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+5y=21 \\ 2x-y=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=1 \\ 3x-5y=-3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ \frac{y}{x}=0{,}75 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{1}{4}x-y=-5 \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{7}y=3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4x-3y=-4 \\ 4y-10x=3 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3x-2y=\frac{1}{2} \\ 4y-x=\frac{2}{3} \end{cases}$

9) $\begin{cases} 11x-5y=37 \\ 4y-x=25 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3y-x=-17 \\ 5x+3y=-5 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{3}{4} \\ \frac{x-1}{y+2}=\frac{1}{2} \end{cases}$

12) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ \frac{5}{3-2x}=\frac{2{,}5}{1-y} \end{cases}$

13) $\begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{3}{11y-27} \\ \frac{x+3}{5}=\frac{y+8}{11} \end{cases}$

14) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y=\frac{34}{15} \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{5}y=\frac{16}{15} \end{cases}$

15) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy+x^2=3 \end{cases}$

16) $\begin{cases} x+2y=4 \\ x^2-4y^2=0 \end{cases}$

17) $\begin{cases} 2x+5y=15 \\ 3x+8y=-1 \end{cases}$

18) $\begin{cases} \frac{x+y-4}{5}+\frac{x-y-4}{7}=9 \\ \frac{x+y+4}{5}+\frac{x-y-4}{7}=1 \end{cases}$

19) $\begin{cases} 4x+\frac{9}{y}=21 \\ \frac{18}{y}=17-3x \end{cases}$

20) $\begin{cases} \frac{3}{x}-\frac{2}{y}=21 \\ \frac{5}{x}+\frac{4}{y}=13 \end{cases}$

Група Б

1. При яких значеннях параметра a система не має розв‘язків?

1) $\begin{cases} x + ay = 1 \\ x - 3ay = 2a + 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -4x + ay = 1 + a \\ (6 + a)x + 2y = 3 + a \end{cases}$

3) $\begin{cases} 16x + ay = 4 \\ ax + 9y - 3 = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 2a \end{cases}$

5) $\begin{cases} (a + 1)x - 3y - 4 = 0 \\ 2x - ay - 3 = 0 \end{cases}$

2. При яких значеннях параметра a система має нескінчену кількість розв‘язків?

1) $\begin{cases} (a + 1)x + 8y = 4a \\ ax + (a + 3)y = 3a - 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax - 3ay = 2a + 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + ay = 3 \\ ax + 3y = 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} (a + 1)x - y = a + 2 \\ x + (a - 1)y = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} ax - (a + 1)y = 6 \\ 7ax - 28y = 6(a + 4) \end{cases}$

3. Розв‘язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x + y - z = 6 \\ 3x - y + 2z = 5 \\ 4x + 2y - 5z = 9 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 6x + 2y - z = 2 \\ 4x - y + 3z = -3 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 13 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$

3. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь

3.1. Квадратні корені

Квадратним коренем з числа a називають число, квадрат якого дорівнює a.

$(-3)^2 = 9,\ 3^2 = 9$ => -3 і 3 – квадратні корені числа 9.

1. Продовжити:

$(-4)^2 = 16,\quad 4^2 = 16$ => ....;

$(-2)^2 = ...,\quad 2^2 = ...$ =>..............;

.......=81, ...=81 =>..............;

.......=64, ...=64 =>..............;

.......=0,25, ...=0,25 =>..............;

.................................=> -7 і 7 – квадратні корені числа 49;

.................................=> -1 і 1 – квадратні корені числа 1.

Квадратний корінь з від'ємного числа не існує.

Арифметичним квадратним коренем називають невід'ємне значення цього кореня.

$\sqrt{9} = 3;\quad \sqrt{16} = 4;\quad \sqrt{0} = 0;\quad \sqrt{1} = 1;\quad \sqrt{64} = 8.$

Вправи

1. Обчислити:

$\sqrt{25} =$ $\qquad \sqrt{400} =$ $\qquad \sqrt{0,09} =$ $\qquad \sqrt{\frac{1}{4}} =$

$\sqrt{36} =$ $\qquad \sqrt{900} =$ $\qquad \sqrt{0,36} =$ $\qquad \sqrt{\frac{4}{9}} =$

$\sqrt{0} =$ $\qquad \sqrt{4900} =$ $\qquad \sqrt{0,81} =$ $\qquad \sqrt{\frac{16}{25}} =$

$\sqrt{1} =$ $\qquad \sqrt{10000} =$ $\qquad \sqrt{0,01} =$

$4 \cdot \sqrt{0,04} =$ $\qquad -\sqrt{25} \cdot \sqrt{36} =$ $\qquad 20 : \sqrt{16} - \sqrt{81} =$

$3 \cdot \sqrt{0,09} =$ $\qquad \sqrt{100} : \sqrt{0,25} =$ $\qquad \sqrt{0,36} \cdot 10 - \sqrt{49} =$

$10 : \sqrt{25} =$ $\qquad \sqrt{0,36} \cdot \sqrt{0,64} =$ $\qquad 0,1 \cdot \sqrt{100} - 2\sqrt{49} =$

$8 : \sqrt{16} =$ $\qquad \sqrt{0,09} : \sqrt{9} =$ $\qquad 0,4 : \sqrt{0,25} - 3 \cdot \sqrt{0,0} =$

2. Знайти значення числового виразу:

1) $(\sqrt{(ab+0{,}05)\cdot 3}-2\sqrt{a\cdot a}):b+\sqrt{0{,}4b}\cdot 5,$ якщо a=0,7, b=0,1;

2) $\sqrt{(\sqrt{4}-2:a):\sqrt{b:10}}:\sqrt{(\sqrt{0{,}2a}-\sqrt{b:b-1})\cdot 2:a:b},$ якщо a=5, b=0,1.

3. Обчислити:

$\sqrt{4};$ $\sqrt{1};$ $\sqrt{64};$ $\sqrt{2500};$ $\sqrt{90000};$ $\sqrt{0{,}04};$ $\sqrt{0{,}49};$ $\sqrt{0{,}0001};$

$\sqrt{\frac{4}{25}};$ $\sqrt{1\frac{7}{9}};$ $\sqrt{2\frac{1}{4}};$ $\sqrt{1\frac{9}{16}};$ $\sqrt{12\frac{1}{4}};$ $\sqrt{5\frac{1}{16}};$ $\sqrt{2\frac{14}{25}};$

$\sqrt{25}:\sqrt{4};$ $0{,}1\cdot\sqrt{100}-\sqrt{16};$ $\sqrt{0{,}81}\cdot\sqrt{0{,}09};$ $\sqrt{0{,}09}:\sqrt{0{,}01};$

$\sqrt{(0{,}4^2 a:0{,}05-(ab+\sqrt{0{,}09}):b)\cdot a:10}-\sqrt{(\sqrt{1}-\sqrt{0{,}16})\sqrt{400}\sqrt{4+}};$ якщо a=5, b=0,1;

$\sqrt{\sqrt{a}:0{,}2-\sqrt{b}}:\sqrt{\sqrt{\sqrt{6400}+1}-\sqrt{16+\sqrt{b}}},$ якщо a=25, b=81.

4. Обчислити:

$4\sqrt{0{,}64}-8\sqrt{1\frac{9}{16}};$ $5\sqrt{0{,}36}+6\sqrt{1\frac{7}{9}};$ $10:\sqrt{0{,}04}-2\sqrt{6\frac{1}{4}};$ $30\sqrt{0{,}09}-9\sqrt{7\frac{1}{9}}.$

Відповідь: 11, -6,8, 45, -15.

$4\sqrt{2\frac{1}{4}}-5\sqrt{0{,}81};$ $3:\sqrt{2\frac{1}{4}}-5\sqrt{0{,}25};$ $10\sqrt{3\frac{6}{25}}-21\sqrt{2\frac{2}{49}}.$

Відповідь: -12; -8; 1,5.

5. Користуючись таблицею квадратів, обчислити значення:

$\sqrt{5041}=$	$\sqrt{21{,}16}=$	$\sqrt{0{,}8464}=$
$\sqrt{4096}=$	$\sqrt{9{,}61}=$	$\sqrt{0{,}7744}=$
$\sqrt{9409}=$	$\sqrt{24{,}01}=$	$\sqrt{0{,}9801}=$

6. Обчислити:

$\sqrt{1405^2-1404^2}=\sqrt{(1405-1404)(1405+1404)}=\sqrt{2809}=53.$

1) $\sqrt{2813^2-2812^2};$ $\sqrt{2665^2-2664^2};$ $\sqrt{2381^2-2380^2};$ $\sqrt{1013^2-1012^2};$

2) $\sqrt{841^2-840^2};$ $\sqrt{613^2-612^2};$ $\sqrt{761^2-760^2};$ $\sqrt{4325^2-4324^2};$

7. Знайти вирази, які мають зміст, і обчислити їх значення:

$-\sqrt{(-2)^3}$ -змісту немає, $-\sqrt{(-2)^4}=-2$.

$\sqrt{-1}$; $-\sqrt{-49}$; $\sqrt{-4\cdot(-9)}$;

$\sqrt{(-1)^2}$; $-\sqrt{49}$; $\sqrt{-4\cdot 9}$;

$\sqrt{(-2)^3}$; $-\sqrt{(-3)^2}$; $\sqrt{-25\cdot(-1)}$;

$\sqrt{(-2)^2}$; $-\sqrt{(-3)^3}$; $\sqrt{-25\cdot 4}$.

8. Розв’язати рівняння:

1) $\sqrt{x}=2$; $\sqrt{x}=5$; $\sqrt{x}-3=0$; $4-\sqrt{x}=0$; $1+\sqrt{x}=0$;

Відповідь: 9, 16, 25, 4, розв’язку немає.

2) $2\sqrt{x}=8$; $4\sqrt{x}=8$; $\sqrt{x-3}=1$; $\sqrt{2-x}=4$; $\sqrt{2+x}=-4$;

Відповідь: -14, 16, 4, 4, розв’язку немає.

9. Обчислити:

1) $2\cdot\sqrt{0{,}04}-3\cdot\sqrt{5\frac{4}{9}}$; $4\cdot\sqrt{0{,}64}+5\cdot\sqrt{1\frac{11}{25}}$; $8\cdot\sqrt{0{,}01}-3\cdot\sqrt{1\frac{7}{9}}$;

Відповідь: -3,2; -6,6; 9,2.

2) $\sqrt{1849}$; $\sqrt{3364}$; $\sqrt{47{,}61}$; $\sqrt{54{,}76}$; $\sqrt{0{,}5184}$; $\sqrt{0{,}8836}$;

3) $\sqrt{481^2-480^2}$; $\sqrt{1861^2-1860^2}$; $\sqrt{4513^2-4512^2}$; $\sqrt{3961^2-3960^2}$;

Відповідь: 95, 89, 31, 61.

4) $-\sqrt{4^2}$; $\sqrt{4^2}$; $\sqrt{-3^2}$; $\sqrt{(-3)^2}$; $\sqrt{(-5)^2}$; $\sqrt{-6^2}$; $\sqrt{-25\cdot(-36)}$.

Відповідь: 30, 3, 5, 4, -4, змісту немає, змісту немає.

10. Розв’язати рівняння:

1) $\sqrt{x}=8$; $\sqrt{x}=7$; $\sqrt{x}-2=0$; $\sqrt{x}-4=0$; $2+\sqrt{x}=0$;

Відповідь: 16, 4, 64, 49, розв’язку немає.

2) $3\sqrt{x}=9$; $0{,}1\sqrt{x}=0{,}6$; $\sqrt{x+2}=8$; $\sqrt{4-x}=1$; $\sqrt{x-2}=-3$;

Відповідь: 3, 9, 62, 36, розв’язку немає.

11. Обчислити:

1) $(1-\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})+\sqrt{50}-\sqrt{2}(\sqrt{32}-\sqrt{18})$;

2) $5(5\sqrt{2}+2\sqrt{5})(2\sqrt{5}-5\sqrt{2})-\sqrt{3}(\sqrt{12}-\sqrt{27})-(2\sqrt{3}-1)^2+\sqrt{300}$;

3) $(4\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+4\sqrt{3})-(\sqrt{2}-1)^2+\sqrt{50}-\sqrt{3}(\sqrt{12}-\sqrt{27})-3\sqrt{72}$;

4) $2\sqrt{75}-(5\sqrt{4}+4\sqrt{5})(5\sqrt{4}-4\sqrt{5})+3\sqrt{300}-(3\sqrt{3}+2)^2-\sqrt{5}(\sqrt{20}-\sqrt{80})$

Відповідь: $46-11\sqrt{2}$, $28\sqrt{3}-1$, $3\sqrt{2}-6$, $14\sqrt{3}-160$

12. Спростити вираз:

1) $2\sqrt{3}-3\sqrt{3}$;	2) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$	3) $(1-\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}$;
$\sqrt{3}+2\sqrt{3}$;	$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$;	$(2+\sqrt{2})^2-4\sqrt{2}$;
$a\sqrt{3}-b\sqrt{3}$;	$(2-3\sqrt{2})(3\sqrt{2}+2)$;	$(\sqrt{5}-1)^2+2\sqrt{5}$;
$2\sqrt{3}+b\sqrt{3}$	$(4+2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-4)$;	$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+2\sqrt{6}$;

Відповідь: 1) $3\sqrt{3}$, $(2+b)\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $(a-b)\sqrt{3}$;
2) –4, 1, –14, 1; 3) 6, 4, 5, 6;

4) $\sqrt{81a}-\sqrt{49a}$;	5) $\sqrt{98}-3\sqrt{2}$;	6) $\sqrt{50}-\sqrt{200}$;
$\sqrt{25a}+\sqrt{4a}$;	$\sqrt{128}+\sqrt{2}$;	$\sqrt{20}+\sqrt{80}$;
$(\sqrt{3a})^2-(\sqrt{2a})^2$;	$\sqrt{300}-9\sqrt{3}$;	$2\sqrt{27}-\sqrt{75}$;
$(\sqrt{5a})^2-a\sqrt{9}$;	$\sqrt{200}+2\sqrt{2}$;	$3\sqrt{48}+2\sqrt{12}$.

Відповідь: 4) 2a, $2\sqrt{a}$, $7\sqrt{a}$; 5) $\sqrt{3}$, $12\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $9\sqrt{2}$;
6) $\sqrt{3}$, $-5\sqrt{2}$, $16\sqrt{3}$, $6\sqrt{5}$.

13. Розкласти на множники вираз:

$$a-\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2-\sqrt{a}=\sqrt{a}(\sqrt{a}-1).$$
$$a-2=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{2})^2=(\sqrt{a}-\sqrt{2})(\sqrt{a}+\sqrt{2}).$$

1) $a+\sqrt{a}=$	2) $\sqrt{3}+\sqrt{6}=$	3) $3-a=$
$2a+3\sqrt{a}=$	$\sqrt{2}+\sqrt{6}=$	$a-6=$
$a-2\sqrt{2}=$	$\sqrt{5}-\sqrt{10}$	$2-a=$
$3\sqrt{a}+a=$	$\sqrt{14}-\sqrt{7}=$	$a-5=$
$5-\sqrt{5}=$	$\sqrt{21}-\sqrt{14}=$	$a^2-3=$
$2+\sqrt{2}=$	$\sqrt{3}-\sqrt{15}=$	$5-a^2=$
$\sqrt{3a}+a=$	$\sqrt{5}+\sqrt{15}=$	$a^2-7=$
$a-\sqrt{2a}=$	$\sqrt{15}-\sqrt{10}=$	$2-a^2=$

Відповідь: 1) $\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)$, $\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)$, $\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)$, $\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{2})$, $\sqrt{a}($ $\sqrt{3}+\sqrt{a})$, $(3+\sqrt{a})$, $\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$, $\sqrt{a}(2\sqrt{a}+3)$;

2) $\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})$, $\sqrt{3}\,(1-\sqrt{5})$, $\sqrt{3}\,(1+\sqrt{2})$, $\sqrt{7}\,(\sqrt{3}+\sqrt{2})$, $\sqrt{5}\,(1+\sqrt{3})$, $\sqrt{7}\,(\sqrt{2}-1)$, $\sqrt{5}\,(1-\sqrt{2})$, $\sqrt{5}\,(\sqrt{3}-\sqrt{2})$;

3) $(\sqrt{5}-a)(\sqrt{5}+a)$, $(a-\sqrt{7})(a+\sqrt{7})$, $(\sqrt{3}-\sqrt{a})(\sqrt{3}+\sqrt{a})$, $(\sqrt{a}-\sqrt{5})(\sqrt{a}+\sqrt{5})$, $(\sqrt{2}-a)(\sqrt{2}-a)$, $(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})$, $(\sqrt{2}-\sqrt{a})(\sqrt{2}+\sqrt{a})$, $(\sqrt{a}-\sqrt{6})(\sqrt{a}+\sqrt{6})$.

14. Скоротити дріб:

1) $\dfrac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{51}}$; $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{18}}{\sqrt{6}}$;

Відповідь: $1-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}-1$, $2-\sqrt{3}$

2) $\dfrac{3+a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+a}$; $\dfrac{2\sqrt{a}-a}{2-\sqrt{a}}$; $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$; $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$;

Відповідь: $\sqrt{a}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

3) $\dfrac{a^2-3}{a-\sqrt{3}}$; $\dfrac{a^2-5}{a+\sqrt{5}}$; $\dfrac{2-a^2}{\sqrt{2}-a}$; $\dfrac{4-a}{\sqrt{a}-2}$;

Відповідь: $a-\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+a$, $a+\sqrt{3}$, $-\sqrt{a}-2$

4) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $\dfrac{b-a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; $\dfrac{4-a}{2+\sqrt{a}}$; $\dfrac{2b^2-3a^2}{b\sqrt{2}+a\sqrt{3}}$.

Відповідь: $2-\sqrt{a}$, $b\sqrt{2}-a\sqrt{3}$, $-\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

15. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}; \qquad \frac{2\sqrt{a}-a}{\sqrt{a}+3}=\frac{2(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-3)}=\frac{2\sqrt{a}-6}{a-9}.$$

1) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{a+1}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$; $\dfrac{a-1}{3\sqrt{2}}$; $\dfrac{4}{5\sqrt{3}}$;

Відповідь: $\dfrac{a\sqrt{2}-2}{6}$, $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$, $\dfrac{4\sqrt{3}}{15}$, $2\sqrt{2}$, $\dfrac{a\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3}$.

2) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}$; $\dfrac{1}{\sqrt{a}-2}$; $\dfrac{a}{3-\sqrt{a}}$; $\dfrac{a-1}{2-3\sqrt{a}}$; $\dfrac{a+2}{4+5\sqrt{a}}$;

Відповідь: $\dfrac{a\sqrt{a}+3a}{9-a}$, $\dfrac{\sqrt{a}+2}{a-4}$, $\dfrac{\sqrt{a}-1}{a-1}$, $\dfrac{(a+2)(4-5\sqrt{a})}{16-25a}$, $\dfrac{(a-1)(2+3\sqrt{a})}{4-9a}$.

16. Розкласти на множники:

a$-\sqrt{a}$; $3+\sqrt{3}$; $\sqrt{5}+\sqrt{10}$; $\sqrt{5}-\sqrt{15}$; $\sqrt{15}+\sqrt{35}$.

17. Скоротити дріб:

$\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{35}-\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$; $\frac{3\sqrt{a}-a}{3-\sqrt{a}}$; $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{5+}-\sqrt{3}}$; $\frac{a^2-6}{a+\sqrt{3}}$; $\frac{9-a}{\sqrt{a-3}}$; $\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$; $\frac{9-4a}{3-2\sqrt{a}}$.

18. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу:

$\frac{18}{\sqrt{3}}$; $\frac{25}{\sqrt{5}}$; $\frac{2}{\sqrt{2}}$; $\frac{3}{\sqrt{3}}$; $\frac{9}{2\sqrt{3}}$; $\frac{4}{3\sqrt{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{a}-1}$; $\frac{1}{\sqrt{a}+1}$; $\frac{3}{3-2\sqrt{a}}$; $\frac{4}{3\sqrt{a}+2}$.

19. Обчислити:

1) $(2\sqrt{0{,}7})^2$; $(0{,}5\sqrt{0{,}8})^2$; $(4\sqrt{0{,}9})^2$; $(6\sqrt{0{,}5})^2$; $(3\sqrt{0{,}2})^2$; $(4\sqrt{0{,}1})^2$;

2) $\sqrt{221^2-220^2}$; $\sqrt{313^2-312^2}$; $\sqrt{761^2-760^2}$; $\sqrt{841^2-840^2}$; $\sqrt{421^2-420^2}$;

3) $2\sqrt{0{,}25}-5\sqrt{\frac{9}{25}}$; $4\sqrt{0{,}64}-6\sqrt{\frac{4}{9}}$; $8\sqrt{0{,}01}-4\sqrt{1\frac{9}{16}}$; $2\sqrt{0{,}09}-12\sqrt{1\frac{13}{36}}$;

4) $\sqrt{31{,}5}\cdot\sqrt{\frac{2}{7}}$; $\sqrt{15\frac{10}{11}}\cdot\sqrt{1\frac{4}{7}}$; $\sqrt{2\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{14{,}4}$; $\sqrt{1\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{34{,}3}$;

5) $\sqrt{75}\cdot\sqrt{0{,}12}$; $\sqrt{205}\cdot\sqrt{0{,}45}$; $\sqrt{0{,}48}\cdot\sqrt{27}$; $\sqrt{98}\cdot\sqrt{50}$; $\sqrt{98}\cdot\sqrt{72}$; $\sqrt{32}\cdot\sqrt{200}$.

Відповідь: 1) 1,8; 1,6; 2,8; 14,4; 0,2; 18; 2) 41; 29; 25; 21; 39;
3) –4,2; –13,4; –0,8; –2; 4)7; 6; 5; 3; 5) 3; 84; 80; 3; 3,6; 70.

20. Спростити вираз:

1) $3\sqrt{20}-4\sqrt{45}+2\sqrt{80}$; $5\sqrt{20}+\sqrt{500}-2\sqrt{45}$; $2\sqrt{48}-3\sqrt{12}+3\sqrt{27}$;

2) $(1-\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}$; $(2\sqrt{3}+1)^2-4\sqrt{3}$; $(3\sqrt{2}-4\sqrt{3})^2+24\sqrt{6}$; $(5\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+10\sqrt{6}$;

3) $3-(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$; $5-(4\sqrt{5}-3\sqrt{2})(4\sqrt{5}+3\sqrt{2})$; $6-(\sqrt{5}-7\sqrt{6})(\sqrt{5}+7\sqrt{6})$;

4) $3\sqrt{20}(2\sqrt{80}-4\sqrt{45})$; $4\sqrt{32}(2\sqrt{50}-3\sqrt{18})$; $3\sqrt{45}(2\sqrt{20}-\sqrt{80})$.

Відповідь: 1) $14\sqrt{5}$, $11\sqrt{3}$, $2\sqrt{5}$; 2) 13, 53, 3, 66;
2) 295, 5, – 57; 3) 0, 32, –120.

3.2. Корінь n – го степеня і його властивості

З поняттям квадратного кореня з числа a ви вже знайомі: це таке число, квадрат якого дорівнює a. Аналогічно означається корінь n-го степеня з числа a, де n- довільне натуральне число, більше за 1.

Коренем n-го степеня з числа a називається таке число, n-й степінь якого дорівнює a.

Приклад 1. Корінь третього степеня з числа 27 дорівнює 3, бо $3^3=27$. Числа 2 і -2 є кореннями шостого степення з числа 64, оскільки

$$2^6=64 \text{ і } (-2)^6=64.$$

За даним означенням корінь n-го степеня з числа a – це довільний розв‘язок рівняння $x^n = a$. Число коренів цього рівняння залежить від n і a. Розглянемо функцію $f(x)= x^n$. Як відомо, на проміжку $[0; \infty]$ ця функція при будь-якому n зростає і набуває всіх значень з проміжку $[0; \infty]$. За теоремою про корінь рівняння $x^n = a$ для будь-якого a є $[0; \infty]$ має невід'ємний корінь і притому тільки один. Його називають ***арифметичним коренем*** n-го степеня з числа a і позначають $\sqrt[n]{a}$; число n називають ***показником кореня***, а саме число a – ***підкореневим виразом.***

Арифметичним коренем n-го степеня з числа a називають невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

Приклад 2. Знайдемо значення а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$

а) $\sqrt[3]{8}=2$, бо $2^3=8$ і $2>0$;

б)) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$ $\frac{3}{2}$, бо $(\frac{3}{2})^4=\frac{81}{16}$ і $\frac{3}{2}>0$.

При парних функція $f(x)= x^n$ парна. Звідси випливає, що коли $a>0$, то рівняння $x^n = a$, крім кореня $x_1 =\sqrt[n]{a}$, має також корінь $x_2 = -\sqrt[n]{a}$.Якщо $a = 0$, то корінь один: $x=0$; якщо $a<0$, то це рівняння коренів не має, бо парний степінь будь-якого числа невід'ємний.

Отже, при парному n існує два корені n-го степеня з будь-якого додатного числа a; корінь n-го степеня з числа 0 дорівнює 0; коренів парного степеня з невід'ємних чисел не існує.

Приклад 3. Рівняння $x^4 =81$ має два корені: це 3 і -3. Отже, існують два корені четвертого степеня з 81. При цьому $\sqrt[4]{81}=3$, а $-3 = -\sqrt[4]{81}$.

Приклад 4. Додатним коренем рівняння $x^4 =3$ є число $\sqrt[4]{3}$. Це число (так само, як і число $-\sqrt[4]{3}$) **ірраціональне**. Його десяткові знаки можна обчислювати послідовно:

$$1 < \sqrt[4]{3} < 2, \qquad \text{бо } 1^4 < 3 < 2^4;$$

$$1{,}3 < \sqrt[4]{3} < 1{,}4, \quad \text{бо } 1{,}3^4 < 3 < 1{,}4^4, \text{ і т.д.}$$

При непарних значеннях n функція $f(x)= x^n$ зростає на всій числовій прямій; її **область значень** – множина всіх дійсних чисел. Застосовуючи теорему про корінь, знаходимо, що рівняння $x^n = a$ має точно один корінь при будь-якому a і, зокрема, при a<0. Цей корінь для будь-якого значення a (в тому числі й a від'ємного) позначають c.

Отже, при непарному n існує корінь n-го степеня з будь-якого числа a, і притому тільки один.

Для коренів непарного степеня справджується рівність

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$$

Справді, $(\sqrt[n]{-a})^n = (-1)^n \cdot (\sqrt[n]{a})^n = -1 \cdot a = -a$, тобто число $-\sqrt[n]{a}$ є коренем n-го степеня з –a. Але такий корінь при непарному a єдиний. Отже,

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$$

Рівність $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ (при непарному n) дає змогу виразити корінь непарного степеня з від'ємного числа через арифметичний корінь такого самого степеня. Наприклад, $\sqrt[5]{-71} = -\sqrt[5]{71}$; $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$.

Зауваження1. Для будь-якого x

$$\sqrt[n]{x^n} = \{ \begin{matrix} |õ|, \\ õ, \end{matrix}$$

Зауваження 2. Як ви вже знаєте, корінь другого степеня з числа називають ***квадратним коренем***, а показник 2 кореня в запису опускають (наприклад, корінь квадратний із 7 позначають просто $\sqrt{7}$). Корінь третього степеня називають ***кубічним коренем***.

Приклад 5. Розв'яжемо рівняння

$$\text{а) } x^5 = -11; \text{ б) } x^8 = 7.$$

а) За означенням кореня n-го степеня число x – корінь п'ятого степеня з -11. Показник кореня – непарне число 5, тому такий корінь існує і притому тільки один: це $\sqrt[5]{-11}$.

Відповідь записують так: $x = -\sqrt[5]{-11}$.

б) За означенням кореня n-го степеня розв'язком рівняння $x^8 = 7$ є число $\sqrt[8]{7}$. Окільки 8- число парне, $-\sqrt[8]{7}$ також є розв'язком даного рівняння. Отже, $x_1 = \sqrt[8]{7}$, $x_2 = -\sqrt[8]{7}$.

Відповідь можна записати так: $x = \pm\sqrt[8]{7}$.

Сформулюємо і доведемо основні *<u>властивості арифметичних коренів n-го степеня.</u>*

Для будь-яких натуральних чисел n і k, більших від 1, і невід'ємних чисел a і b виконуються рівності:

$$1^\circ.\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}. \quad 2^\circ.\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b\neq 0). \quad 3^\circ.\ \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

$$4^\circ.\ \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}. \quad 5^\circ.\ \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k.$$

Доведемо властивість 1°. За означенням $\sqrt[n]{ab}$ - це таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює ab. Число $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ невід'ємне. Тому достатньо перевірити правильність вірності $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n = ab$, яка випливає з властивості степеня з натуральним показником і означення кореня n-го степеня:

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n = ab.$$

Аналогічно доводимо такі три властивості:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geq 0 \text{ і } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geq 0 \text{ і } (\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk} = ((\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^n)^k = (\sqrt[k]{a})^k = a.$$

$$\sqrt[n]{a} \geq 0 \text{ і } (\sqrt[n]{a})^{nk} = ((\sqrt[n]{a})^n)^k = a^k.$$

Доведемо тепер властивість 5°. Зауважимо, що n-й степінь числа

$$(\sqrt[n]{a})^k = a^k : ((\sqrt[n]{a})^k)^n = (\sqrt[n]{a})^{nk} = ((\sqrt[n]{a})^n)^k = a^k.$$

За означенням арифметичного кореня $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$ (бо $\sqrt[n]{a^k} \geq 0$).

Наведемо приклади застосування властивостей 1°- 5° до розв'язування задач на перетворення числових виразів, що містять корені.

Приклад 6. Перетворимо вирази:

а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$; б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$; г) $\sqrt[21]{128}$; д) $\sqrt[7]{128^3}$.

а) За властивістю 1° $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{32} = 2$;

б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$ (властивість 2°);

в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$ (властивість 3°);

г) за властивість 4° $\sqrt[21]{128} = \sqrt[21]{2^7} = \sqrt[3]{2}$;

д) застосовуючи властивість 5°, маємо: $\sqrt[7]{128^3} = (\sqrt[7]{128})^3 = 2^3 = 8$.

Доведемо таку властивість арифметичного кореня.

6°. Для будь-яких чисел a і b, таких, що $0 \leq a \leq b$, виконується нерівність $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Проведемо доведення методом від супротивного.

Припустимо що $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$. Тоді за властивістю степенів з натуральним показником $(\sqrt[n]{a})^n \geq (\sqrt[n]{b})^n$, тобто $a \geq b$. Це суперечить умові $a<b$.

Приклад 7. Порівняємо числа $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[5]{3}$.

Подамо $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[5]{3}$ у вигляді коренів з одним і тим самим показником:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{32}, \quad \text{а}$$

$$\sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{27} \text{ (властивість } 4^\circ) .$$

З нерівності 32 > 27 і властивості 6° випливає, що

$$\sqrt[15]{32} > \sqrt[15]{27} \quad \text{і,}$$

отже,
$$\sqrt[3]{2} > \sqrt[5]{3}.$$

Приклад 8. Розв'яжемо нерівність $x^6 > 20$.

Ця нерівність рівносильна нерівності $x^6 - 20 > 0$. Оскільки функція $x^6 - 20$ неперервна, можна застосувати метод інтервалів. Рівняння $x^6 - 20 = 0$ має два корені: $\sqrt[6]{20}$ і $-\sqrt[6]{20}$. Ці числа розбивають пряму на три проміжки. Розвязок даної нерівності – об'єднання двох з них: $(-\infty; -\sqrt[6]{20})$ і $(\sqrt[6]{20}; \infty)$.

Вправи

1.Перевірте правильність рівності:

а) $\sqrt[4]{16} = 2$; б) $\sqrt[7]{-1} = -1$; в) $\sqrt[4]{625} = 5$; г) $\sqrt[17]{1} = 1$; д) $\sqrt[19]{0} = 0$;
е) $\sqrt[10]{1024} = 2$; є) $\sqrt[3]{343} = 7$; ж) $\sqrt[5]{-243} = -3$.

2.Чи правильна рівність:

а) $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}$; б) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3}$;
в) $\sqrt[3]{19 \cdot \sqrt{7} - 50} = \sqrt{7} - 2$; г) $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$?

3.Обчисліть:

а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[5]{-32}$; в) $\sqrt[4]{81}$; г) $\sqrt[3]{64}$;
д) $\sqrt[3]{-\frac{27}{8}}$; е) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}}$; є) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; ж) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$.

4.Спростіть:

а) $(-\sqrt[4]{11})^4$; б) $(\sqrt[3]{7})^3$; в) $(3\sqrt[5]{-3})^5$; г) $\sqrt[7]{-3^7}$; д) $7\sqrt[8]{(-3)^8}$; е) $\sqrt[6]{64^2}$.

5.Обчисліть значення числового виразу .

а) $\sqrt[4]{16 \cdot 625}$; б) $\sqrt[3]{8 \cdot 343}$; в) $\sqrt[5]{32 \cdot 243}$;
г) $\sqrt[5]{0{,}00001 \cdot 32}$; д) $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$; е) $\sqrt[4]{48 \cdot 27}$;
є) $\sqrt[5]{160 \cdot 625}$; ж) $\sqrt[3]{75 \cdot 45}$.

6.Обчисліть значення числового виразу .

а) $\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{9}$; б) $\sqrt[7]{16} \cdot \sqrt[7]{-8}$; в) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{9}$;
г) $\sqrt[3]{-25} \cdot \sqrt[6]{25}$; д) $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$; е) $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$; є) $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$;
ж) $\frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}}$.

7.Обчисліть значення числового виразу .

а) $\sqrt[4]{3\frac{3}{8}\cdot 1\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}}$;   б) $\sqrt[5]{1\frac{11}{16}\cdot 4{,}5}-\frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{288}}$;

в) $\sqrt[5]{-\frac{243}{1024}}\cdot\sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$;   г) $\sqrt[6]{\frac{64}{100000000}}\cdot\sqrt[4]{39\frac{1}{16}}\div\sqrt[3]{-3\frac{19}{27}}$.

8.Користуючись **калькулятором**, знайдіть **наближене значення** кореня:

а) $\sqrt{71}$;   б) $\sqrt{13{,}21}$;   в) $\sqrt[3]{11}$;   г) $\sqrt[3]{10{,}17}$;

д) $\sqrt[4]{28}$;   е) $\sqrt[8]{13}$;   є) $\sqrt[6]{10}$;   ж) $\sqrt[9]{13{,}7}$.

9.Яке з чисел більше:

а) $\sqrt[5]{2}$ чи $\sqrt[5]{3}$;   б) $\sqrt[8]{0{,}2}$ чи $\sqrt[8]{0{,}3}$;   в) $\sqrt[8]{1{,}8}$ чи 1;

г) $\sqrt[10]{0{,}8}$ чи 1;   д) $\sqrt[12]{\frac{5}{11}}$ чи $\sqrt[12]{0{,}4}$;   е) $\sqrt[18]{\frac{3}{7}}$ чи $\sqrt[18]{0{,}43}$;

є) $\sqrt[5]{-0{,}2}$ чи 0;   ж) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ чи $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)^2$?

10. Порівняйте числа:

а) $\sqrt[3]{7}$ і $\sqrt[6]{40}$;   б) $\sqrt{5}$ і $\sqrt[8]{500}$;   в) $\sqrt[3]{4}$ і $\sqrt[10]{87}$;

г) $\sqrt{0{,}3}$ і $\sqrt[5]{0{,}05}$;   д) $\sqrt[3]{-2}$ і $\sqrt[3]{-4}$;   е) $\sqrt[5]{-5}$ і $\sqrt[3]{-3}$;

є) $\sqrt[3]{-5}$ і $\sqrt[5]{-3}$;   ж) $\sqrt[3]{-0{,}4}$ і $\sqrt[5]{0{,}3}$.

11. Знайдіть перших два десяткові знаки (після коми) числа:

а) $\sqrt{7}$;   б) $\sqrt[3]{3}$;   в) $\sqrt[3]{5}$ г) $\sqrt[4]{2}$.

12. Винесіть множники за знак кореня (*a > 0, b >0)*:

а) $\sqrt{4a}$;   б) $\sqrt{18b}$;   в) $\sqrt[3]{64c}$ г) $\sqrt[5]{a^6}$;

д) $\sqrt[4]{32b^5}$;   е) $\sqrt[6]{64a^8b^{11}}$;   є) $\sqrt[5]{-128a^7}$;   ж) $\sqrt[4]{6a^{12}b^2c^4}$.

13. Внесіть множник під знак кореня: (*a > 0, b > 0*):

а) $2\sqrt{3}$;   б) $3\sqrt[3]{5}\,4$ в) $2\sqrt[5]{\frac{1}{16}}$;   г) $a\sqrt[4]{7}$;

д) $b\sqrt[6]{2}$;   е) $-b\sqrt[4]{3}$;   є) $-ab\sqrt[3]{-4}$;   ж) $ab^2\sqrt[8]{\frac{5b^3}{a^7}}$.

14. Звільніться від ірраціональності в знаменнику (зведіть до вигляду $a\sqrt[n]{b}$, де *a* – раціональне число, а *b* - натуральне):

а) $\frac{5}{\sqrt{3}}$;   б) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$;   в) $\frac{7}{\sqrt[3]{49}}$;   г) $\frac{15}{\sqrt[3]{25}}$;

д) $\frac{3}{\sqrt[4]{12}}$;   е) $\frac{10}{\sqrt[5]{8}}$;   є) $\frac{20}{\sqrt[4]{40}}$;   ж) $\frac{6}{\sqrt[5]{27\cdot 25}}$.

15. Подайте у вигляді $\sqrt[n]{b}$ число:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$; б) $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}$; в) $\sqrt[5]{a^2\sqrt[4]{a}}$;

г) $\sqrt[18]{36^3}$; д) $\sqrt[12]{25^3}$; е) $\sqrt[8]{16^5 b^4}$.

16. Розв'яжіть рівняння :

а) $x^3 = 4$; б) $x^3 + 4 = 0$; в) $x^4 = 10$; г) $x^4 = 10$;

д) $x^5 = 3$; е) $x^{10} - 15 = 0$; є) $x^6 - 64 = 0$; ж) $x^7 + 128 = 0$.

17. Розв'яжіть рівняння :

а) $16x^4 - 1 = 0$; б) $0{,}01x^3 + 10 = 0$;

в) $0{,}02x^6 - 1{,}28 = 0$; г) $12\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0$.

18. Розв'яжіть рівняння :

а) $\sqrt{x} = 5$; б) $\sqrt[3]{x} = -0{,}7$; в) $\sqrt[7]{x} = 0$; г) $\sqrt[4]{x} = 2$.

19. Розв'яжіть рівняння за допомогою підстановки $t = \sqrt[4]{x}$ або $t = \sqrt[6]{x}$:

а) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0$; б) $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 2$;

в) $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$; г) $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} = 6$.

20. Розв'яжіть нерівність:

а) $x^3 < 5$; б) $x^4 < 3$; в) $x^7 \geq 11$; г) $x^{10} > 2$;

д) $\sqrt[3]{x} > -2$; е) $\sqrt[3]{x < -7}$; є) $\sqrt[4]{x} \leq 3$; ж) $\sqrt[6]{x} \geq -2$.

21. При яких значеннях a правильна рівність:

а) $\sqrt{a^2} = -a$; б) $\sqrt[4]{a^4} = a$; в) $\sqrt[3]{a^3} = a$;

г) $\sqrt[4]{a^4} = |a|$; д) $\sqrt[5]{a^5} = |a|$; $\sqrt[3]{a^3} = -a$?

22. Спростити вираз:

а) $\sqrt{a^2}$, де $a > 0$; б) $\sqrt[4]{a^2}$, де $a < 0$;

в) $\sqrt[6]{a^6}$, де $a \geq 0$; г) $\sqrt[6]{a^6}$, де $a \leq 0$;

д) $\sqrt[5]{a^5}$; е) $\sqrt[4]{a^4}$;

є) $\sqrt[5]{a^5} - \sqrt[4]{a^4}$, де $a > 0$; ж) $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt{a^2}$, де $a \leq 0$.

23.Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}}$; б) $\sqrt[4]{9-\sqrt{65}} \cdot \sqrt[4]{9+\sqrt{65}}$;

в) $\sqrt[3]{10+\sqrt{73}} \cdot \sqrt[3]{10-\sqrt{73}}$; г) $\frac{\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}} + \sqrt{17}$.

24. Подайте у вигляді дробу, знаменник якого не містить знака кореня:

а) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; в) $\frac{a-\sqrt{2}}{a+\sqrt{2}}$; г) $\frac{b-\sqrt{7}}{2b-\sqrt{5}}$;

д) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$; е) $\frac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}}$; є) $\frac{2}{a-\sqrt[3]{b}}$; ж) $\frac{3a}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$.

4. Квадратні рівняння

4.1. Неповні квадратні рівняння

Квадратним називають рівняння виду $ax^2 + bx+c = 0$, де x — ***змінна,*** а a, b, c — дані числа, причому $a \neq 0$.

Числа a, b, c — коефіцієнти квадратного рівняння: a — перший коефіцієнт, b — другий, c — вільний член.

Наприклад**,** одне з двох чисел більше від другого на 6, а їх **добуток** дорівнює 112**.** Знайдіть ці числа.

Позначимо менше із шуканих чисел буквою x. Тоді більше число дорівнює $x + 6$. Їх добуток 112**.** Отже,

$$x(x + 6) = 112, \text{ або } x^2 + 6x - 112 = 0.$$

Це — рівняння другого степеня з однією змінною**.** Такі рівняння називають також квадратними.

Згідно з означенням, перший коефіцієнт квадратного рівняння не може дорівнювати нулю. Якщо хоч один коефіцієнт b або c дорівнює нулю, то квадратне рівняння називають ***неповним.*** Неповні квадратні рівняння бувають трьох видів:

$$\mathbf{1)\ } \boldsymbol{ax^2 = 0;} \quad \mathbf{2)\ } \boldsymbol{ax^2 + bx = 0;} \quad \mathbf{3)\ } \boldsymbol{ax^2 + c = 0.}$$

1. Рівняння виду $ax^2 = 0$ рівносильне рівнянню $x^2 = 0$ і тому завжди має тільки один корінь $x = 0$.
2. Рівняння виду $ax^2+bx=0$ рівносильне рівнянню $x(ax + b) = 0$ і завжди має два корені: $x_1 = 0$, $x_2 = -b/a$
3. Квадратне рівняння виду $ax^2 + c = 0$ рівносильне рівнянню $x^2 = -c/a$. Якщо $-c/a>0$, воно має два розв'язки, якщо $-c/a<0$ – жодного розв'язку.

Приклад1. Розв'яжіть рівняння $5x^2 + 4x = 0$.

Розв'язання.

Винесемо змінну x за дужки:

$$x(5x + 4) = 0.$$

Отже, $x = 0$, або $bx + 4 = 0$, звідки $x = -0{,}8$.

Відповідь: $x_1 = 0$**,** $x_2 = -0{,}8$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $4x^2 - 3 = 0$.

Розв'язання.

Перетворимо дане рівняння: $4x^2 - 3 = 0$,

$$4x^2 = 3,$$

$$x^2 = 3/4$$

x — число, квадрат якого дорівнює 3/4, тобто квадратний корінь із числа 3/4. Квадратних коренів із числа 3/4 є два: $\sqrt{3/4}$ і – $\sqrt{3/4}$.

Відповідь: $x_1 = \sqrt{3/4}$ і $x_2 = -\sqrt{3/4}$.

Якщо знаки коефіцієнтів *a* і *c* різні, то число - *c/a* додатне і рівняння має два корені. Якщо знаки коефіцієнтів *a* і *c* однакові, то число –*c/a* – від'ємне і рівняння $ax^2 + c = 0$ не має коренів. Квадратне рівняння називається зведеним, якщо коефіцієнт при дорівнює 1.

Вправи

1. Яке з даних рівнянь квадратне:
а) $x^2 = 1/x + 3$; б) $2x^2 - 3x = 0$; в) $-x^2 + 5x + 4 = 0$; г) $2x^2 + x^3 = 0$;
ґ) $5x^2 = 4 - 3x$; д) $2z(z + 5) = 7$?

2. Яке з рівнянь є неповним квадратним:
а) $x^2 + 8 = 0$; б) $2x^2 = 0$; в) $x^2 + 3x = 1$;
г) $x^2 + 2/x = 0$; ґ) $5x^2 + 7 = 0$; д) $2x^3 - x = 0$?

3. Запишіть дане рівняння рівносильним йому квадратним рівнянням:
а) $2x(x - 3) = 50$; б) $(3 - y)y = 5y^2 - 4$;
в) $4z^2 = 2z(3z + 5)$; г) $(1 - x)(3x - 2) = 2x + x^2$;
ґ) $(x - 1)(x - 2) = 4x$; д) $3(x + 5) - 8 = -5x(x + 2)$.

4. Розв'яжіть рівняння (***1-11***).
1) а) $3x^2 = 0$; б) $7y^2 = 0$; в) $-z^2 = 0$.
2) а) $x^2 - 2x = 0$; б) $3z^2 - 6z = 0$; в) $2c = c^2$.
3) а) $y^2 - 9 = 0$; б) $2x^2 - 8 = 0$; в) $-x^2 + 1 = 0$.
4) а) $(x - 1)x + x = 0$; б) $2y(y + 3) = 6y$.
5) а) $(2 + z)(2 - z) = 0$; б) $(x + 2)(x - 2) = 4$.
6) а) $2x(x + 5) = 7x$; б) $-x(2x + 3) = 8x$.
7) а) $4x^2 - 2x = x(x - 2)$; б) $8 - 6z = 2(z - 3)$.
8) а) $5x^2 + 3x + 7 = 7(x + 1)$; б) $15 - 2y = 8y^2 + 3(y + 5)$.
9) а) $-2x^2 + 6 = 3(x^2 + x + 2)$; б) $3(x^2 + 5) = 4x^2 + x(1 - x)$.
10) а) $2(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$; б) $(x + 3)^2 = (x - 3)(x + 3)$.
11) а) $(2x + 1) : 13 = 3 : (2x - 1)$; б) $(3x^2 - 4) : 5 = 3 : 20$.

5. Знайдіть периметр квадрата, площа якого дорівнює:
а) 289 $см^2$; б) 0,81 $м^2$; в) S.

6. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа дорівнює 484 $м^2$.

7. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа дорівнює S.

8. Знайдіть довжини катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, площа якого 0,72 дм^2.
9. Добуток двох послідовних натуральних чисел на 625 більший від меншого числа. Знайдіть більше число.

10. Добуток двох послідовних цілих чисел в 1,5 раза більший від квадрата меншого з них. Знайдіть ці числа.

11. Периметр одного квадрата на 8 см менший від периметра другого, а їх площі відносяться, як 1:4. Знайдіть довжини сторін квадратів.

12. Сторона одного квадрата на 3 дм довша від сторони другого квадрата, а їх площі відносяться, як 9:4.Знайдітьїхпериметри.

4.2. Формула коренів квадратного рівняння

Розв'яжемо рівняння $x^2 + 6x - 112 = 0$. Якщо до виразу $x^2 + 6x$ додати 9, дістанемо квадрат **двочлена** $x + 3$. Тому дане рівняння рівносильне рівнянню

$$x^2 + 6x + 9 - 9 - 112 = 0, \text{ або } (x + 3)^2 = 121.$$

Отже,

$$x + 3 = 11,$$

звідки

$$x = 8;$$

або

$$x + 3 = -11,$$

звідки

$$x = -14.$$

Відповідь: $x_1 = 8$, $x_2 = -14$.

Такий спосіб розв'язування квадратного рівняння називають способом *виділення квадрата двочлена*.

Розв'яжемо цим способом ще рівняння

$$5x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Щоб перший його член став квадратом одночлена з цілим коефіцієнтом, помножимо обидві частини даного рівняння на 5:

$$25x^2 - 10x - 15 = 0,$$
$$25x^2 - 2\cdot 5x + 1 - 1 - 15 = 0,$$
$$(5x - 1)^2 = 16.$$

Отже,

$$5x - 1 = 4,$$

звідки

$$5x = 5,\ x = 1;$$

або

$$5x - 1 = -4,$$

звідки

$$5x = -3,\ x = -0{,}6.$$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = -0{,}6$.

Розв'яжемо подібним способом рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Помножимо обидві частини рівняння на $4a$ (пам'ятаємо, що $a \neq 0$):

$$4a^2x^2+4ax\cdot b+4ac=0$$

$$(2ax)^2 + 2\cdot 2ax\cdot b + b^2 - b^2 + 4ac =0,$$

$$(2ax +b)^2 =b^2 - 4ac.$$

Вираз b^2—$4ac$ називають **дискримінантом** (латинське discriminans — розрізняючий) даного квадратного рівняння і позначають буквою D).

Якщо D<0**,** то дане рівняння не має коренів: не існує такого значення x, при якому значення виразу $(2ax +b)^2$ було б від'ємним.

Якщо $D= 0$, то $2ax + b = 0$, звідки $x=-b/2a$ - єдиний корінь.

Якщо D > 0, то дане квадратне рівняння рівносильне рівнянню

$(2ax+b)^2 = \sqrt{D}$

Звідки

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} D>0, \\ \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\sqrt{D}}{2a}, \\ x+\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{\sqrt{D}}{2a}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D>0, \\ \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{D}}{2a}, \\ x=-\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{D}}{2a}. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

Це формула коренів квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$. Користуючись цією формулою можна розв’язати будь-яке квадратне рівняння, коли D >0.

Зробимо **узагальнення** у вигляді таблиці.

<u>Знаходження коренів квадратного рівння</u>

Знак дискримінанта	Корені квадратного рівняння
$D=b^2-4ac>0$	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$
$D=b^2-4ac=0$	$x_{1,2}=-\dfrac{b}{2a}$ йсних коренів немає
$D=b^2-4ac<0$ коренів немає	дійсних коренів немає

Приклад1. Розв’яжіть рівняння:

$$x^2-3x+2=0.$$

Розв'язання: D=3^2 – 4·2=1

D > 0, тому рівняння має два розв'язки:

Відповідь: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.
Приклад2. $x^2 + 6x + 9 = 0$.
Розв'язання:
$D = 36 – 36 = 0$, $x = –3$.
Відповідь: $x = –3$.

Приклад3. $8x^2 - 10x + 16 = 0$
Розв'язання:
$D = 100 – 4\cdot8\cdot16 = – 412$; $D < 0$, тому рівняння коренів не має.
Відповідь: коренів немає.

Вправи

1. Способом виділення квадрата двочлена розв'яжіть рівняння.

1) $x^2 – 6x + 8 = 0$; ***2)*** $x^2 – 12x + 35 = 0$.
3) $x^2 – 4x – 12 = 0$; ***4)*** $z^2 + 4z – 12 = 0$.
5) $x^2 – 11x + 18 = 0$; ***6)*** $y^2 – 5y – 24 = 0$.
7) $m^2 – 12m + 36 = 0$; ***8)*** $x^2 + 14x + 49 = 0$.
9) $4y^2 + 4y – 15 = 0$; ***10)*** $9y^2 + 18y + 8 = 0$.
11) $6n^2 – 13n + 6 = 0$; **12)** $5k^2 + 31k – 28 = 0$.
13) $2z^2 = 9z – 10$; ***14)*** $8 = 3c + 5c^2$.

2. Яке з рівнянь не має коренів:

а) $x^2 + x + 1 = 0$; б) $2y^2 - 3y + 2 = 0$;
в) $0{,}5v^2 + 2v + 2 = 0$; г) $8c^2 – c + 4 = 0$?

3. Користуючись формулою коренів, розв'яжіть наступні рівняння.

1) а) $2x^2 – 7x – 30 = 0$; б) $4x^2 + 3x – 10 = 0$.
2) а) $9y^2 – 13y + 4 = 0$; б) $5x^2 + 31x – 28 = 0$.
3) а) $16x^2 – 24x + 27 = 0$; б) $25c^2 + 15c – 4 = 0$.
4) а) $6x^2 – 5x – 6 = 0$; б) $4x^2 – 19x + 12 = 0$.
5) а) $2p^2 - 7p + 6 = 0$; б) $10m^2 – 53m + 15 = 0$.
6) а) $6x^2 – 12{,}5x + 6 = 0$; б) $8x^2 – 8{,}8x + 2{,}1 = 0$.
7) а) $10y^2 - 0{,}8y = 1{,}92$; б) $4n^2 + 11n + 7{,}36 = 0$.
8) а) $6x^2 – 19x/6 – 1 = 0$; б) $6x^2 – 25{,}5x + 261 = 0$.
9) а) $x(x - 6) = 7$; б) $2z(z + 4) = 10$.
10) а) $1{,}5y(3y - 15) = 27$; б) $6n(5 – 0{,}1n) = 48$.
11) а) $x(7 – x) = 5x – 8$; б) $2x(3x + 4) = 4x^2 + 5x + 21$.
12) а) $3x(2x – 5) = 2(x^2 + 2)$; б) $3x(5x + 3) = 2x(6x + 5) + 2$.
13) а) $(x – 5)^2 = 3x + 25$; б) $(x + 4)^2 = 3x^2 - 8$.
14) а) $(2x + 4)^2 = 11x^2 + 1$; б) $(9 – 4x)^2 = 5(4x + 1)$.

15) а) $(x + 4)(2x – 3) – (5x – 6)(x – 3) = 10$;

б) $(2x – 8)(3x + 1) = (4x – 12)(x – 2) + 8$.

16) а) $(2,5x – 7)(2x + 3) + 3x + 4 = (4x - 9)(1,5x + 1)$;

б) $(3z – 5)(4z + 1) + (2z + 3)(5z – 4) = 6z(3 + 2z) – 11$.

4. Користуючись калькулятором, розв'яжіть рівняння:

а)$37,2x^2 + 12,8x – 14,3 = 0$;

б)$5,83x^2 – 8,38x + 16,8 = 0$.

5. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; б) $x^4 – 8x^2 – 9 = 0$;

в) $x^4 – 4x^2 + 3 = 0$; г) $x – 7\sqrt{z}\,x + 12 = 0$;

4.3.Розв'язування задач складанням квадратних рівнянь

За допомогою квадратних рівнянь можна **спростити** розв'язування багатьох задач.

Приклад 1. Знайдіть **довжини** сторін прямокутника, **периметр** якого дорівнює 42 см, а **площа** 108 см^2.

Розв'язання. **Півпериметр прямокутника** дорівнює 21 см. Отже, якщо одна з його сторін має x см, то друга $(21 - x)$ см. Площа прямокутника дорівнює добутку цих довжин:

$$x\,(21 - x) = 108,$$

або

$$x^2 - 21x + 108 = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння: $D = 21^2 – 4\cdot 108 = 9$,

$$x_1=9,\ x_2=12.$$

Якщо $x = 9$, то $21 – x = 12$; якщо $x = 12$, то $21 – x = 9$.

Відповідь: 9 см і 12 см.

Приклад 2. Власна **швидкість** моторного **човна** 18 км/год. Відстань 12 км за **течією** річки він проходить на 9 хв. швидше, ніж проти течії. Знайдіть швидкість течії річки.

Розв'язання. 9хв = 0,15 год. Якщо швидкість течії річки дорівнює x км/год, то швидкість човна за течією $(18 + x)$ км/год, а проти течії $(18 – x)$км/год. 12 км за течією він проходить за $12/(18 + x)$ год, а проти течії — за $12/ (18 – x)$ год.

Маємо рівняння:

$$12/(18 – x) – 12/(18 + x) = 0,15.$$

Поділимо ліву і праву частини рівняння на 3 і домножимо на $(18 – x)(18+x)$.

$$4(18 + x) – 4(18 – x) - 0,05(18 – x)(18 + x) = 0,$$

$$x^2 + 160x - 324 = 0,$$
$$D = 160^2 + 4 - 324 = 26\,896.$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = -162.$$

Задачу задовольняє тільки додатний корінь.

Відповідь: 2 км/год.

Вправи

1. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 61, а добуток 900.
367°. Знайдіть два числа, різниця яких дорівнює 11**,** а добуток 312.

2. Знайдіть довжину і **ширину** ділянки прямокутної форми, якщо її площа дорівнює 800 м^2, а довжина на 20 м більша від ширини.

3. Периметр поля прямокутної форми дорівнює 6 км, а його площа 200 га. Знайдіть довжину і ширину поля.

4. Добуток двох послідовних цілих чисел більший від їх суми на 239. Знайдіть ці числа.

5 . Знайдіть число, знаючи, що, додавши до його квадрата 108, дістанемо число в24 рази більше від шуканого.

6. Квадрат суми двох послідовних **натуральних чисел** більший від суми їх квадратів на 264. Знайдіть числа.

7. Знайдіть три послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 434.

8. Знайдіть звичайний **дріб**, **чисельник** якого на 2 більший від **знаменника** і на 40 менший від квадрата знаменника.

9. Знаменник дробу на 3 більший від чисельника. Якщо до цього дробу додати обернений до нього дріб, утвориться149/70. Знайдіть дріб.

10. У **кінотеатрі** було 320 місць. Після того як число місць у кожному ряді збільшими на 4 і додали ще один ряд, у залі стало 420 місць. Скільки стало рядів у кінотеатрі?

11. Теплохід пройшов за течією річки 48 км і стільки ж проти течії і затратив на весь шлях 5 год. Знайдіть власну швидкість теплохода, якщо швидкість течії річки 4 км/год.

12. Човен пройшов проти течії 22,5 км і за течією 28,5 км, затративши на весь шлях 8 год. Швидкість течії річки 2,5 км/год. Знайдіть власну швидкість човна.

13. Електропоїзд затримався в дорозі на 4 хв. і ліквідував запізнення на перегоні в 20км, пройшовши його зі швидкістю на 10 км/год більшою, ніж за розкладом. З якою швидкістю йшов поїзд на цьому перегоні?

14.З пункту А відправили за течією річки **пліт.** Через 5 год 20 хв. з пункту А слідом за плотом вийшов моторний човен, який догнав пліт, пройшовши 20 км. Знайдіть швидкість течії річки, знаючи, що човен проходив щогодини на 12 км більше, ніж пліт.

15. На середині шляху між А і Б **поїзд** затримали на 10 хв. Щоб прибути в Б за **розкладом**, довелось початкову швидкість поїзда збільшити на 12 км/год. Знайдіть початкову швидкість поїзда, якщо відстань між А і Б дорівнює 120 км.

16.**Теплохід** пройшов униз річкою 150 км і повернувся назад, витративши на весь шлях 5,5 год. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість теплохода в стоячій воді 55 км/год.

17. **Турист** проплив моторним човном вгору річкою 25 км, а назад спустився плотом. Човном він плив на 10 год менше, ніж плотом. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість човна в стоячій воді 12 км/год.

18. **Велосипедист** проїхав 96 км на 1,6 год швидше, ніж передбачав і при цьому за кожну годину він проїжджав на 2 км більше, ніж розраховував проїжджати. З якою швидкістю він їхав?

19. З А до Б, відстань між якими 350 км, вийшов **автобус.** Якби він зменшив швидкість на 5 км/год, то в дорозі був би на 1 - год довше. Скільки годин їде автобус від А до Б?

20. **Мотоцикліст** їхав з одного міста в друге 4 год. Повертаючись назад, він перші 100 км їхав з тією самою швидкістю, а потім зменшив її на 10 км/год і тому на зворотний **шлях** витратив на 30 хв. більше. Знайдіть відстань між містами.

4.4. Теорема Вієта

Квадратне рівняння називають ***зведеним***, якщо перший його коефіцієнт дорівнює одиниці. У таблиці наведено приклади трьох зведених квадратних рівнянь, їх корені, а також суми і добутки коренів.

Зв'язок коренів квадратного рівняння з його коефіцієнтами

Рівняння	x_1 і x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 5x + 6 = 0$	2 і 3	5	6

$x^2 - 3x - 4 = 0$	1 і 4	3	– 4
$x^2 + 8x + 15 = 0$	5 і – 3	– 8	15

Порівняйте суму коренів кожного зведеного квадратного рівняння з його другим коефіцієнтом, а добуток коренів — з вільним членом.

<u>Теорема</u> *<u>Вієта.</u> Якщо зведене квадратне рівняння має два корені, то їх сума дорівнює другому коефіцієнту рівняння, взятому з протилежним знаком, а добуток — вільному члену.*

Кожне квадратне рівняння виду

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

рівносильне зведеному квадратному рівнянню

$$x^2 + b/a \cdot x + c/a = 0.$$

Тому якщо таке рівняння має корені x_1 *і* x_2, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

<u>Теорема</u> *<u>(обернена до теореми Вієта).</u>* *Якщо сума і добуток чисел* m *і* n *дорівнюють відповідно* — p *і* q, *то* m *і* n — *корені рівняння* $x^2 + px + q = 0$.

Доведення.

Нехай $m + n = -p$ *і* $m \cdot n = q$.

За цих умов рівняння

$$x^2 + px + q =- 0$$

рівносильне рівнянню

$$x^2 - (m + n)\, x + mn = 0.$$

Підставимо у це рівняння замість змінної x числа m і n:

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - nm + mn = 0,$$

$$n^2 - (m+ n)n + mn = n^2 - mn - n^2 + mn = 0.$$

Отже, m і n — корені даного рівняння. А це й треба було довести.

З теореми Вієта можемо зробити висновок, що цілі розв'язки рівняння $x^2 + px + q = 0$ є дільниками числа q. Користуючись оберненою теоремою, можна перевіряти, чи є та чи інша пара чисел коренями зведеного квадратного рівняння, чи ні. Це дає можливість усно розв'язувати багато таких рівнянь.

Приклад. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 12x + 11 = 0$.

Розв'язання (усне). Якщо рівняння має цілі корені, то їх добуток дорівнює 11. Це можуть бути числа 1 і 11 або —1 і —11. Другий коефіцієнт рівняння додатний, тому корені від'ємні.

Відповідь: $x_1 = -1, x_2 = -11$.

Вираз виду $ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, називають ***квадратним тричленом.***

Теорема Вієта дає можливість вивести **правило** розкладання квадратних тричленів на множники. Якщо *m і n,* — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$, то

$$x^2 + px + q = (x - m)(x - n).$$

$$x^2 + px + q = x^2 - (m + n)x + mn = x^2 - mx - nx + mn = (x - m)(x - n).$$

Приклад. Розкладіть на множники тричлен: $x^2 + 4x - 21$.

Розв'язання. Корені рівняння $x^2 + 4x - 21 = 0$ дорівнюють 3 і – 7. Тому $x^2 + 4x - 21 = (x - 3)(x + 7)$.

Взагалі, якщо x_1 і x_2 — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Вправи

1. Перевірте, чи є дані числа коренями рівняння:

а) $x^2 - 8x + 1 = 0$, 1 і 7; б) $x^2 + 8x + 15 = 0$, 3 і 5;

в) $v^2 - 12v - 13 = 0$, – 1 і 13; г) $d^2 - 6d + 9 = 0$, 3 і 3.

2. Визначте знаки коренів рівняння (якщо вони є), не розв'язуючи рівняння:

а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; г) $x^2 + 6x + 21 = 0$;

б) $x^2 - 7x + 10 = 0$; д) $y^2 - 15y + 44 = 0$;

в) $x^2 - 6x + 8 = 0$; ж) $d^2 - 8d - 48 = 0$.

3. Розв'яжіть усно рівняння:

а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $x^2 - 4x - 5 = 0$;

в) $x^2 + 5x + 6 = 0$; г) $x^2 + x - 20 = 0$;

д) $y^2 + by - 14 = 0$; є) $f^2 - 2f - 15 = 0$;

ж) $c^2 + 2c - 8 = 0$; з) $h^2 + 9h - 10 = 0$.

4. Рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корені 0,7 і 10. Знайдіть його коефіцієнти *p і q*.

5. Складіть зведене квадратне рівняння, корені якого дорівнюють:

а) 2 і 4; б) – 3 і 5; в) 0,5 і 4; г) 23і 7; ґ) 2 і – 9.

6.Один із коренів рівняння $x^2 + 14x + c = 0$ дорівнює 7.Знайдіть другий корінь і число с.

7.Один із коренів рівняння $x^2 + px + 8 = 0$ дорівнює – 4.Знайдіть другий корінь і коефіцієнт *p*.

8.Різниця коренів рівняння $x^2 + 6x + q = 0$ дорівнює 8.Знайдіть його корені і число *q*.

Рівняння $ax^4+bx^2+c=0$ називають ***біквадратним.*** Біквадратне рівняння може мати 4 дійсні корені. За допомогою підстановки $x^2=t$ рівняння $ax^2+bx+c=0$ зводиться до квадратного рівняння відносно t: $at^2+bt+c=0$. Якщо корені квадратного рівняння $at^2+bt+c=0$ невід'ємні, то корені біквадратного ріняння знаходять за формулами $x_{1,2}=\pm\sqrt{t_1}$ і $x_2=\pm\sqrt{t_2}$. Таким чином біквадратне рівняння може мати 4 дійсні корені.

<u>Корені біквадратного рівняння</u>

$at^2+bt+c=0.$		$ax^4+bx^2+c=0$
t_1	t_2	x_1, x_2, x_3, x_4
Невід'ємний	*Невід'ємний*	$x_{1,2}=\pm\sqrt{t_1}$; $x_2=\pm\sqrt{t_2}$
Від'ємний	*Від'ємний*	*Немає дійсних коренів*
Невід'ємий	*Від'ємний*	*2 корені:* $x_{1,2}=\pm\sqrt{t_1}$;
Від'ємний	*Невід'ємий*	*2 корені:* $x_{1,2}=\pm\sqrt{t_2}$.

Приклад.

$$x^4-5x^2+6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=t, \\ t\ge 0, \\ t^2-5t+6=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=t, \\ t\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=3; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2}, \\ x=-\sqrt{2}, \\ x=\sqrt{3}, \\ x=-\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

5. Ірраціональні рівняння

Ірраціональним називається рівняння, що містить невідоме під знаком кореня (**радикалу**). Прикладами ірраціональних рівнянь є

$$\sqrt{x}=3, \sqrt{8-x}+x=2, \sqrt[3]{2x+7=3}, 3-\sqrt[5]{4x+1}=7, \sqrt{3x-8}-\sqrt{x-6}=5.$$

Загальний метод розв'язування ірраціональних рівнянь полягає в наступному: спочатку ізолюють один радикал, потім обидві частини підносять до степеня, потім знову ізолюють радикал і т.д. При піднесенні обох частин рівняння до одного і того ж степеня отримуємо рівняння, яке в загальному випадку не є рівносильним до даного, тому обов'язково потрібно перевіряти, чи знайдені значення невідомої змінної задовольняють початкове рівняння. Другий спосіб розв'язку спосіб заміни. Розв'язуючи ірраціональне рівняння, необхідно також перевірити область допустимих значень.

Отже, при розв'язуванні ірраціональних рівнянь:

1) знаходимо ОДЗ рівняння;
2) розв'язуємо рівняння одним з методів;
3) робимо перевірку отриманих коренів.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2+45}=5+x$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату. Отримаємо:

$$x^2+45=(5+x)^2$$

$$(x^2+45)=25+10x+x^2,$$

отримали рівняння:

$$10x=20, x=2.$$

Перевірка: $\sqrt{2^2+45}=5+2,7=7$.

Відповідь: $x=2$.

Приклад 2. $\sqrt{8-x}+x=2.$

Розв'язання. Відокремимо радикал (залишимо його в лівій частині), а решту перенесемо в праву частину:

$$\sqrt{8-x}=2-x.$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$(\sqrt{8-x})^2=(2-x)^2,$$

звідси

$$8-x=4-4x+x^2.$$

Зведемо рівняння до стандартного вигляду і розв'яжемо його:

$$x^2-3x-4=0, x_1=-1, x_2=4.$$

Перевірка:

$\underline{x_1=-1}$.

У лівій частині маємо

$$\sqrt{8-(-1)}+(-1)=\sqrt{8+1}-1=\sqrt{9}-1=3-1=2.$$

Права частина дорівнює 2. Отже, $x_1=-1$ є коренем даного ірраціонального рівняння.

$\underline{x_2=4}$.

$$\sqrt{8-4}+4=\sqrt{4}+4=6.$$

Але 6≠2. тому, $x_2=4$ не є коренем рівняння, це сторонній корінь. Ми йоговідкидаємо.

Відповідь: $x_1=-1$.

Приклад 3. $\sqrt{2x+15}-\sqrt{x-1}=3,$

Розв'язання.

$$(\sqrt{2x+15})^2=(3+\sqrt{x-1})^2,$$

$$2x+15=9+6\sqrt{x-1}+x-1, x+7=6\sqrt{x-1},$$

$$(x+7)^2=(6\sqrt{x-1})^2, x^2-22x+85=0;\ x_1=5, x_2=17.$$

Перевіримо, чи є числа 5 і 17 коренями вихідного рівняння.

При $x_1 = 5$ у лівій частині дістанемо

$$\sqrt{25} - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3.$$

Маємо: 3 = 3

При $x_2 = 17$, у лівій частині отримаємо:

$$\sqrt{49} - \sqrt{16} = 3{,}3 = 3.$$

Отже, дане ірраціональне рівняння має два корені:

Відповідь: $x_1 = 5$ і $x_2 = 17$.

Приклад 4. $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = \sqrt{5x-10}$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$(2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2})^2 = (\sqrt{5x-10})^2,$$

$$4(x-1) - 4\sqrt{(x-1)(x+2)} + x + 2 = 5x - 10.$$

Відокремимо радикал і зведемо подібні:

$$4 4\sqrt{(x-1)(x+2)} = 8, \sqrt{(x-1)(x+2)} = 2,$$

$$(\sqrt{(x-1)(x+2)}\ )^2 = 2^2, (x-1)(x+2) = 4,$$

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

$$x_1 = -3, x_2 = 2.$$

Перевіримо знайдені корені за вихідним рівнянням:

$x_1 = -3$.

У лівій частині вираз

$$2\sqrt{-3-1} - \sqrt{-3+2}$$

не має змісту, отже

$x_1 = -3$ - сторонній корінь,

$x_2 = 2$.

Ліва частина

$$2\sqrt{2-1} - \sqrt{2+2} = 0,$$

права частина

$$\sqrt{5 \cdot 2 - 10} = \sqrt{10 - 10} = 0.$$

Отже, $x_2 = 2$ - корінь даного ірраціонального рівняння.

Відповідь: $x_2 = 2$

Вправи

Розв'язати ірраціональні рівняння.

а) $\sqrt{2x-7}=5$, в) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x+3}=1$

б) $\sqrt{x-3}=5$, г) $3\sqrt{x^2-4}+1=3x+7$

6. Нерівності

6.1. Лінійні нерівності

Якщо число a менше аба більше від числа b, то записують відповідно a < b або a > b. Наприклад, 4 < 6, –5 > –12. Число a вважається більшим від b, якщо різниця a – b – число додатнє; число a менше від b, якщо різниця a – b –число від´ємне.

Нерівністю з однією змінною називається нерівність, що містить одну незалежну змінну. Розв´язком нерівності називається будь-яке значення змінної, при якому початкова нерівність зі змінною обертається у правильну числову нерівність. Розв´язати нерівність зі змінною – значить знайти всі її розв´язки або довести, що розв´язків немає. Дві нерівності називаються рівносильними (еквівалентними), якщо розв´язки цих нерівностей збігаються; зокрема нерівності рівносильні, якщо вони не мають розв´язків.

Основні теореми про рівносильні нерівності:

1. Якщо з однієї частини нерівності перенести до іншої доданок із **протилежним** знаком, то дістанемо нерівність, рівносильну початковій.
2. Якщо до обох частин нерівності додати (або відняти) будь-яке число, то дістанемо нерівність, рівносильну початковій.
3. Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на додатнє число, то дістанемо нерівність, рівносильну початковій; якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на від´ємне число, то рівносильною початковій буде нерівність протилежного змісту.

Лінійною нерівністю з однією змінною називається нерівність виду $ax>b$ (або $ax<b, ax\le b, ax\ge b$) аба ті, які зводяться до них.

Якщо a > 0, то нерівність $ax>b \;\Leftrightarrow\; x>\dfrac{b}{a} \;\Leftrightarrow\; x\in\left(\dfrac{b}{a};\infty\right)$.

Якщо a < 0, то нерівність $ax>b \Leftrightarrow\; x<\dfrac{b}{a} \;\Leftrightarrow\; x\in\left(-\infty;\dfrac{b}{a}\right)$.

Якщо a = 0, b < 0, то нерівність набуває вигляду $0\cdot x>b$ і вона правильна для будь-якого $x\in(-\infty;\infty)$.

Якщо a = 0, b ≥ 0, то нерівність розв´язків немає.

Приклад 1. Розв´язати нерівність $4x>12$.

Розв´язання. Поділимо обидві частини нерівності на 4:

$$x>\frac{12}{4}\Leftrightarrow x>3\Leftrightarrow x\in(3;\infty).$$

Приклад 2. Розв´язати нерівність $-3x\le 21$.

Розв´язання.

$$-3x \le 21 \Leftrightarrow x \ge \frac{21}{-3} \Leftrightarrow x \ge -7 \Leftrightarrow x \in [-7;\infty).$$

Приклад 3. Розв´язати нерівність $2x+3 \le x-8$.

Розв´язання. Перенесемо доданки зі змінними в одну частину, а **вільні члени** – в іншу частину:

$$2x - x \le -3 - 8 \Leftrightarrow x \le -11 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-11].$$

Приклад 4. Розв´язати нерівність $2{,}7(x+3) < 7{,}2(x-3)$.

Розв´язання. Розкриємо дужки:

$$2{,}7x + 8{,}1 < 7{,}2x - 21{,}6$$

зведемо **подібні** доданки:

$$2{,}7x - 7{,}2x < -21{,}6 - 8{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad -4{,}5x < -29{,}7 \Leftrightarrow x > 6{,}6 \Leftrightarrow x \in (6{,}6;\infty).$$

Приклад 5. Розв´язати подвійну нерівностей: $\frac{x-6}{9} \le \frac{x-3}{4} \le \frac{x+7}{24}$.

Розв´язання. Дану подвійну нерівність можна записати у вигляді **системи** двох нерівностей:

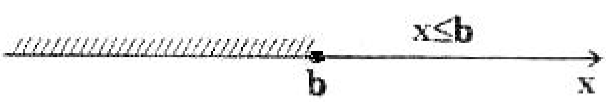
$$\begin{cases} \frac{x-6}{9} \le \frac{x-3}{4}, \\ \frac{x-3}{4} \le \frac{x+7}{24}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4(x-6)-9(x-3)}{36} \le 0, \\ \frac{6(x-3)-(x+7)}{24} \le 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 24 - 9x + 27 \le 0, \\ 6x - 18 - x - 7 \le 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -5x \le -3, \\ 5x \le 25. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge \frac{3}{5}, \\ x \le 5. \end{cases} \Rightarrow x \in \left[\frac{3}{5};5\right].$$

Розв´язування нерівностей можна показати геометрично на **числовій осі**. Так, якщо ми маємо строгу нерівність $x > a$, то геометрично ця множина зображається у вигляді тієї частини **числової прямої**, яка лежить праворуч від точки з **абсцисою** $x = a$. При цьому правіше точки $x = a$ звичайно зображають у вигляді світлового кружочка (говорять, що точку $x = a$ “виколюють”).

$x > a \Leftrightarrow x \in (a;\infty)$

Якщо маємо **нестрогу** нерівність $x \le b$, то на числовій осі наносять штриховку ліворуч від точки $x = b$, при цьому точку $x = b$ звичайно зафарбовують в чорний колір, тобто зображають темною точкою.



$x \le b \Leftrightarrow x \in (-\infty; b]$.

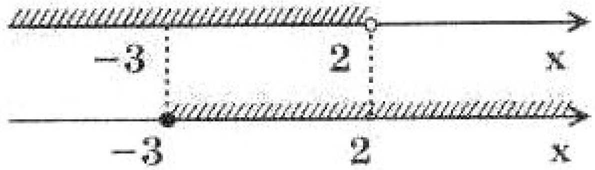
На прикладі системи нерівностей покажемо чотири варіанти **геометричної інтерпритації:**

Приклад 6. Розв´язати систему нерівностей $\begin{cases} 2x - 1 < 3, \\ 3x + 2 \ge -7. \end{cases}$

Розв´язання.

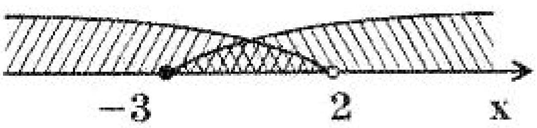
$$\begin{cases} 2x - 1 < 3, \\ 3x + 2 \ge -7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 1 + 3, \\ 3x \ge -2 - 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 4, \\ 3x \ge -9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \ge -3 \end{cases}.$$

1 варіант (з використанням двох числових осей):



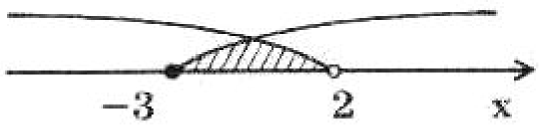
2 варіант (з використанням однієї числової осі і **штриховок** знизу і згори осі):

3 варіант (з використанням однієї осі, **дуг** і штриховок).



Шукана множина зображена **подвійною штриховкою** за допомогою накладання двох штриховок.

4 варіант (з використанням однієї осі і дуг):



Штриховку наносимо лише там, де задані множини **перетинаються**.

Відповідь: $x \in [-3; 2)$.

Вправи

1. Розв´язати нерівності:

1) $-4x \le 48$.

2) $0{,}25x \ge -8$.

3) $2x - 4 > 5 - x$.

4) $2 - 5x \ge 14 - x$.

5) $6x < 0{,}2x - 2(x + 3)$.

6) $0{,}5x - 4(x-3) > 3x.$

7) $0 < y - 0{,}3(2-y).$

8) $4 \geq 5z - 0{,}2(1-z).$

9) $x + 2 < 5(2x+8) + 13(4-x) - 3(x-2).$

10) $y + 7 > 4(2-y) - 12(4-2y) + 17(y-1).$

11) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} < \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$

12) $x - \frac{2}{5}(x-3) > 0{,}4.$

13) $2y - \frac{1}{2} < 0{,}2(y+3).$

14) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} < 4.$

15) $\frac{2x+1}{7} \geq 1.$

16) $\frac{x}{4} - \frac{x}{2} - \frac{x}{6} \leq 5.$

17) $\frac{3-y}{4} - \frac{y+2}{5} \geq 2.$

18) $\frac{x-1}{4} + \frac{x+3}{2} > 1 - \frac{x}{6}.$

19) $\frac{2-x}{4} + 1 < \frac{2x-1}{10} - \frac{2x-3}{6}.$

20) $x - \frac{3+2x}{2} \geq \frac{1-x}{4}.$

21) $\frac{a-1}{2} - \frac{2a+3}{8} > 2 + a.$

22) $\frac{x+2}{0{,}3} + \frac{2-x}{0{,}4} < \frac{x+4}{1{,}2}.$

23) $\frac{c-3}{0{,}5} - \frac{2-c}{1{,}5} \geq \frac{2c}{3}.$

24) $2 - \frac{x}{3} < \frac{x-1}{4} < 1 + \frac{x}{6}.$

25) $\frac{2x-1}{6} < \frac{x+3}{12} < \frac{3x+7}{18}.$

2. Розв´язати системи нерівностей:

1) $\begin{cases} 2x + 3 > x, \\ 4x - x < 3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2 - 5x < 7, \\ 3x + 1 < -8. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 8 \leq 4x + 8, \\ 0 > 3x + 6. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4-3y \ge -2y, \\ y-3 \ge 4. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-1 > \dfrac{x}{3}, \\ x-1 < 7. \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{z-1}{2} < \dfrac{z-2}{3}, \\ 2z-3 \ge 0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x \le 2-3(x+1), \\ 5x \ge 3+(x-4). \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4-\dfrac{x-1}{3} \ge x, \\ 7x-1 \ge 48. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3(3+2x)-2(18-x) < 7x, \\ 6(2+x) > 9(9+x)-5x. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 8(1+x)-3(2x-1) > 4, \\ 5 < 3x-2(8x-3). \end{cases}$

11) $\begin{cases} (x+1)^2 > x^2+4, \\ (x-1)^2 > x^2-4. \end{cases}$

12) $\begin{cases} c^2-3 < (c+3)^2, \\ 2c-c^2 > (c-2)^2. \end{cases}$

13) $\begin{cases} (x-1)^2 \ge x^2+7, \\ (x-2)^2 \ge x^2-8. \end{cases}$

6.2. Квадратні нерівності

Нехай потрібно розв´язати нерівність $ax^2+bx+c>0$ (**аналогічні** міркування проводяться при розв´язуванні нерівностей

$$ax^2+bx+c \ge 0, ax^2+bx+c < 0,\ \ ax^2+bx+c \le 0).$$

У залежності від знака **дискримінанта квадратного тричлена** $D=b^2-4ac$ потрібно розглянути два випадки.

1) Якщо D<0, а старший **коефіцієнт** *a* додатний, то при всіх значеннях *x* виконується нерівність $ax^2+bx+c>0$.

2) Якщо D≥0, то для розв´язання нерівності $ax^2+bx+c>0$ потрібно розкласти квадратний тричлен ax^2+bx+c на множники за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, потім поділити обидві частини нерівності $a(x-x_1)(x-x_2)>0$ на число *a*, зберігши знак нерівності, якщо *a>0,* і змінивши знак нерівності на додатний, якщо *a<0*, і перейти до нерівності $a(x-x_1)(x-x_2)>0$.

Приклад 1. Розв´язати нерівність $x^2-5x+6>0$.

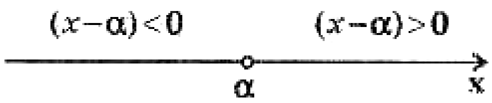
Розв´язання. $x^2-5x+6=0$ Розв´язавши дане квадратне рівняння, одержимо корені $x_1=2, x_2=3$. Тоді квадратний тричлен розкладеться на такі множники: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

Звідси

$$x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2>0,\\ x-3>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-2<0,\\ x-3<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>2,\\ x>3;\end{cases}\\ \begin{cases}x<2,\\ x<3;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<2;\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;2)\cup(3;\infty).$$

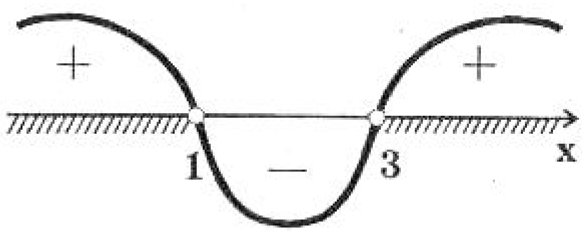
Відповідь: $x\in(-\infty;2)\cup(3;\infty)$.

Квадратні нерівності, а також нерівності вищих степенів можна розв´язувати **методом інтервалів (методом проміжків).** В його основі лежить така властивість двочлена $(x-\alpha)$: точка $x=\alpha$ ділить числову вісь на дві частини – праворуч від точки α двочлен $(x-\alpha)>0$, а ліворуч від точки α $(x-\alpha)<0$.



Приклад 2. Розв´язати нерівність $(x-1)(x-3)>0$

Розв´язання. Многочлен $f(x)=(x-1)(x-3)$ перетворюється в нуль у точках $x=1, x=3$. Ці точки розбивають координатну пряму на проміжки $(-\infty;1),(1;3),(3;+\infty)$, усередині кожного з яких функція $f(x)$ зберігає знак.



Оскільки в проміжку $(3;+\infty)$ **співмножники** $(x-1),(x-3)$ додатні, то їхній **добуток** додатний, тобто $f(x)>0$. Відзначимо **проміжок** $(3;+\infty)$ знаком “+”. Далі знаки в проміжках чергуються. Проводимо через визначені точки “криву знаків”. На тих проміжках, де ставиться знак “+”, виконується нерівність $f(x)>0$; на тих проміжках, де знак “– “, виконується нерівність $f(x)<0$. Отже, розв´язком початкової нерівності є **об´єднання** проміжків: $(-\infty;1),(3;+\infty)$.

Відповідь: $x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Приклад 3. Розв´язати нерівність $x^2+4x+20<0$.

Розв´язання. Якщо прирівняти до нуля **многочлен** $f(x)=x^2+4x+20$, то D<0. А це означає, що квадратний тричлен додатний при всіх **дійсних** значеннях змінної *x*, тому при $f(x)<0$ нерівність розв´язків немає.

Відповідь: нерівність розв´язків немає.

Приклад 4. Розв´язати нерівність $x^2-8x+16>0$

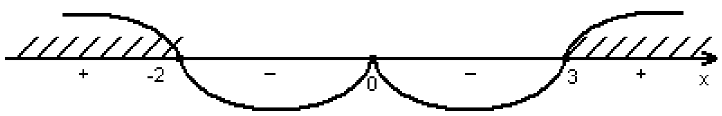
Розв´язання. $f(x)=x^2-8x+16=(x-4)^2$,

даний многочлен є **невід´ємним** при будь-якому дійсному значенні змінної *x,* тому нерівність $(x-4)^2>0$ справджується при всіх дійсних значеннях змінної *x*, крім 4.

Відповідь: $x\in(-\infty;4)\cup(4;\infty)$.

Приклад 5. Розв´язати нерівність: $x^2(x+2)(x-3)\ge 0$.

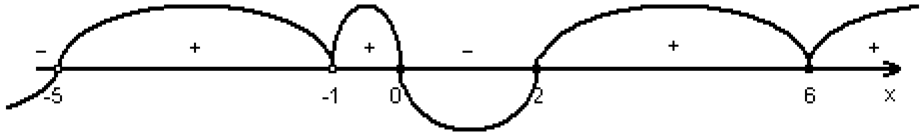
Розв´язання. Многочлен $f(x)=x^2(x+2)(x-3)$ перетворюється в нуль в точках $x=0, x=-2, x=3$. Ці точки **розбивають** координатну пряму на чотири проміжки. Оскільки даний многочлен містить множник у **парному степені** – це x^2, то при переході "змійки" через "0" знак не буде змінюватись. Зазначимо, що точка $x=0$ входить у множину розв´язків, тому що при $x=0$ дістаємо $0\le 0$.



Відповідь: $x\in(-\infty;-2]\cup\{0\}\cup[3;\infty)$.

Приклад 6. Розв´язати нерівність: $\dfrac{(x-6)^2(x-2)x}{(x+1)^4(x+5)}\ge 0.$

Розв´язання. Наносимо точки $x=6;2;0;-1;-5$ на числову вісь. Відзначимо точки $x=-1$ і $x=6$, при переході через них "змійки" знаки не будуть змінюватись. За допомогою "**кривої знаків**" дістаємо розв´язки, які позначені на малюнку зі знаком "+".



Відповідь: $x\in(-5;-1)\cup(-1;0]\cup[2;\infty)$.

Вправи

1. Розв´язати нерівності другого степеня:

Рівень А

1) $x^2 > 9.$

2) $x^2 \geq 0.$

3) $x^2 \leq 10.$

4) $x^2 < 0.$

5) $3(x-5)^2 \leq 0.$

6) $3x^2 < 8.$

7) $(x-1)^2 < 16.$

8) $(3x-2)^2 \leq 0.$

9) $(6x-5)^2 < -7.$

10) $(3x-4)^2 \geq 13.$

11) $2x^2 + 7x + 3 \leq 0.$

12) $x^2 - x + 6 < 0.$

13) $-x^2 + 2x + 8 \leq 0.$

14) $x^2 + x > 0.$

15) $3x^2 + x - 2 \geq 0.$

Рівень Б

1) $-x^2 - x + 20 \geq 0.$

2) $0 \leq (2x+3)^2 < 5.$

3) $0 < (6x-7)^2 \leq 3.$

4) $0 < x^2 \leq 1.$

5) $-4 < x^2 - 4x \leq 0.$

6) $-3 < 2x^2 + 7x < 0.$

7) $-9 \leq x^2 < 25.$

8) $2 \leq x^2 + x < 6.$

9) $-2 < 3x^2 - 4x < 0.$

10) $0 < 5x - 7x^2 \leq 1.$

2. Розв´язати раціональні нерівності, що розв´язуються методом інтервалів:

Рівень А

1) $(x-1)(x-4) > 0.$

2) $(3x+2)(4x+3) \geq 0.$

3) $(x-2)(4-x) > 0.$

4) $(x+3)(5-x) < 0.$

5) $(7x-4)(2-9x) \geq 0.$

6) $\frac{x-2}{x+3}<0.$

7) $\frac{2x+1}{x-4}>0.$

8) $\frac{x}{x-2}<0.$

9) $\frac{x+1}{2-x}>0.$

10) $\frac{2x}{3-x}\le 0.$

11) $\frac{x}{x^2+9}\ge 0.$

12) $(x-1)(x+3)(x-4)<0.$

13) $x(x-2)(x+2)\ge 0.$

14) $(x-5)(x+1)(6-x)>0.$

15) $(x+4)(x+1)(1-x)(2-x)>0.$

Рівень Б

1) $\frac{2x}{x+3}\ge 1.$

2) $\frac{2-x}{x-8}\le 1.$

3) $\frac{x+4}{2x-7}<2.$

4) $(x^2-3)(x^2+3)<0.$

5) $\frac{x(x-4)}{(x+8)(x-6)}\le 0.$

6) $\frac{(x+2)(x+4)}{(x-1)(5-x)}<0.$

7) $\frac{(x-1)(3-x)}{x(x-4)}\ge 0.$

8) $\frac{x^2+3x}{x^2+x}\ge 0.$

9) $\frac{1}{x-2}\le 6.$

10) $\frac{6x+7}{3x-5}<4.$

11) $\frac{7x-6}{x+2}<3.$

12) $\frac{2x+3}{2-x}<5.$

13) $\frac{x}{x-6}>\frac{1}{3}.$

14) $\frac{6x-3}{x^2+5}<1.$

15) $\frac{2}{x+9}<\frac{x}{x-6}.$

16) $3+\frac{4}{x+2}>\frac{3}{x}.$

17) $1-\frac{2}{x-3}>\frac{2}{x}.$

18) $\frac{x-3}{x}-\frac{x+3}{x-3}<2.$

19) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}\le 0.$

20) $\frac{1-6x}{2x^2-3x-2}<2.$

21) $\frac{x-8}{x^2-5x+4}>\frac{2}{x+1}.$

22) $\frac{1}{3x-2-x^2}-\frac{3}{7x-4-3x^2}>0.$

23) $x^3-6x^2+11x-6<0.$

24) $x^3-3x^2+x+1\ge 0.$

25) $x^6-9x^3+8>0.$

26) $x^2(x+1)^3>0.$

27) $(x+4)^5(x-1)^4(x-2)^7<0.$

28) $x^4(x+6)^5(x-9)^3\ge 0.$

29) $(2x-1)^3(3x+4)(x-6)^2>0.$

30) $(x+5)^7(x-1)^4(x+3)^2(7-x)^3\le 0.$

31) $(6-x)^5(7+x)^2(3-x)^4(x+8)^6\le 0.$

32) $\frac{x(x+2)^5}{(x-1)^3(x-3)^6}\le 0.$

33) $\frac{x^2(x+3)^5}{(x-1)(x-2)^4}\ge 0.$

34) $\frac{5x^2(x-2)^8(x-4)^5}{(x+2)^3}<0.$

35) $\frac{(x+3)^2(x^2+x+1)^9}{(4-x)x^3}\ge 0.$

36) $\frac{(-x^2+2x-5)^3(x+2)^4(3-x)}{(x+4)^5(x-1)^9}>0.$

37) $\frac{(9x^2-12x+4)^5(4-3x-x^2)}{(x^2+2x-8)(x+3)^{11}}\ge 0.$

38) $\frac{x^3-x^2-x+1}{(x+8)^7}>0.$

39) $\frac{x^4-2x^2-8}{(x^2+2x+1)^3}<0.$

40) $\quad \dfrac{x^4+2x^3-x-2}{3x^2}<0.$

6.3. Метод заміни змінної при розв´язанні раціональних нерівностей

Приклад. Розв´язати нерівність $\left(x^2+x\right)^2-8\left(x^2+x\right)+12>0.$

Розв´язання. Зробимо **заміну** $t=x^2+x$,

тоді

$$t^2-8t+12>0\,.$$

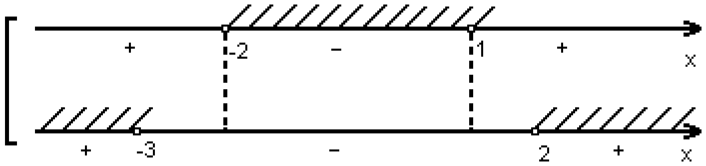
Розкладемо на множники квадратний тричлен, який стоїть у лівій частині нерівності:

$$(t-2)(t-6)>0 \text{ або } t\in(-\infty;2)\cup(6;\infty).$$

Оскільки

$$t=x^2+x,$$

то дістаємо $\left[\begin{array}{l} x^2+x<2, \\ x^2+x>6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-2<0, \\ x^2+x-6>0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)(x+2)<0, \\ (x-2)(x+3)>0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\in(-2;1), \\ x\in(-\infty;-3)\cup(2;\infty) \end{array}\right.$



$x\in(-\infty;-3)\cup(-2;1)\cup(2;\infty).$

Відповідь: $x\in(-\infty;-3)\cup(-2;1)\cup(2;\infty).$

6.4. Нерівності з модулем

При розв´язуванні нерівностей, що містять змінну під знаком **модуля,** використовується визначення модуля функції:

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), f(x)\ge 0 \\ -f(x), f(x)<0. \end{cases}$$

Якщо $a>0$, нерівність виду $\quad |f(x)|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a$.

Якщо $a\le 0$, то нерівність $\quad |f(x)|<a$ розв´язків немає.

Якщо $a>0$, нерівність виду $\quad |f(x)|>a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>a, \\ f(x)<-a, \end{array}\right.$

Якщо $a<0$, то розв´язком нерівності $|f(x)|>a$ буде **множина** припустимих значень функції $f(x)$.

Якщо $a=0$, то розв´язком нерівності $|f(x)|>a$ буде множина тих x, для яких

$f(x) \neq 0$.

Для розв´язку нерівностей, які містять більше одного модуля, застосовують метод інтервалів для модулей.

Приклад 1. Розв´язати нерівність $|5x-3| > 2$.

Розв´язання. Дану нерівність можна замінити сукупністю двох систем нерівностей:
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x-3\geq 0,\\ 5x-3>2;\end{cases}\\ \begin{cases}5x-3<0,\\ -(5x-3)>2\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq \frac{3}{5},\\ x>1;\end{cases}\\ \begin{cases}x<\frac{3}{5},\\ x<\frac{1}{5}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in(1;\infty)\\ x\in\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)\end{array}\right. \Rightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)\cup(1;\infty).$$

Відповідь: $x\in\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)\cup(1;\infty)$.

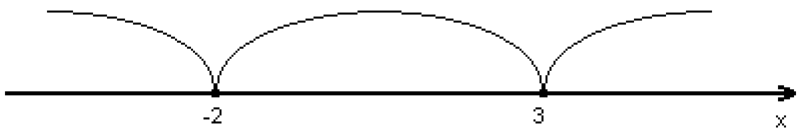
Приклад 2. Розв´язати нерівність $|3x+50| < -4$.

Розв´язання. Оскільки $|3x+50| \geq 0$, то початкова нерівність розв´язків не має.

Відповідь: $\varnothing$.

Приклад 3. Розв´язати нерівність $|x-3|+|x+2|-x>5$.

Розв´язання. Для розв´язування даної нерівності використаємо метод інтервалів для модулів. Відзначимо на числовій прямій точки, в яких вирази, що знаходяться під знаком модулів, перетворюються в нуль. Це точки $x=-2$ і $x=3$. Вся числова пряма розбивається цими точками на три **проміжки:**



1)Розглянемо проміжок **(інтервал**) $x\in(-\infty;-2)$.

Підставивши в підмодулеві вирази замість змінної х **довільне** значення з даного інтервалу, виявивши тим самим знак підмодулевого виразу, отримаємо нерівність
$$-x+3-x-2-x>5,\ \Rightarrow -3x-4>0,\ \Rightarrow x<-\frac{4}{3}.$$

Тоді $\left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;-2)\\ x<-\frac{4}{3}\end{array}\right. \Rightarrow x<-2.$

2)Розглянемо проміжок $x\in[-2;3)$:

За тим самим принципом, що і на попередньому пролиіжку, маємо

$$-x+3+x+2-x>5 \quad \Rightarrow -x>0 \ \Rightarrow x<0.$$

Тоді $\left[\begin{array}{l} -2 \le x < 3, \\ x<0 \end{array}\right. \Rightarrow -2 \le x < 0.$

3)Розглянемо проміжок $x \ge 3$:

Маємо $x-3+x+2-x>5 \ \Rightarrow x>6$.

Тоді $\left[\begin{array}{l} x \ge 3, \\ x>6 \end{array}\right. \Rightarrow x>6.$

Об´єднаємо всі отримані розв´язки:

$$\left[\begin{array}{l} x<-2, \\ -2 \le x < 0, \\ x>6 \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-\infty;0)\cup(6;\infty).$$

Відповідь: $x \in (-\infty;0)\cup(6;\infty)$.

Вправи

1.Розв´язати нерівності, що містять знак модуля:

Рівень Б

1) $|-3x| \le 0.$

2) $|x-3| \ge 5.$

3) $|x-1| < 2.$

4) $|5-2x| \le 7.$

5) $|x+2| > 3.$

6) $|2x-9| < -1.$

7) $|3x-5| > -3.$

8) $|x^2+6x| \le 0.$

9) $|x^2-9x| > 0.$

10) $0<|x|<1.$

11) $0 \le |x+3| < 5.$

12) $1<|x-2|<5.$

13) $-1<|2x-1|<7.$

14) $x^2-|x|-2 \ge 0.$

15) $x^2-3|x|+2<0.$

16) $|2x-1|<|3x+1|.$

17) $|x^2-x+1| \ge |x^2-3x+4|.$

18) $|3x-5| > 9x+1.$

19) $|3x-8| < x-2.$

20) $|x+1| > -x.$

21) $|x| < x+1.$

22) $|x^2+x-6| < x.$

23) $|x-1|+|x+1| < 4.$

24) $|x|-|x+2| > \frac{1}{3}.$

25) $|x-3|+|x-5| \geq 6-x.$

26) $|2x-1|-|x-4| > 4.$

27) $|x^2+x-6| \geq -x^2-x+6.$

28) $|x^2+5x+6| \leq -x^2-5x-6.$

29) $|x^3-1| \leq 1-x.$

30) $\left|\frac{2x+5}{4x+1}\right| < 1.$

Рівень В

1) $\left|x^2-|x|\right| \geq 0{,}25.$

2) $\frac{x^2-3|x|-4}{x+1} < -3x.$

3) $\frac{x^2-|x|-6}{x^2+5x+6} > x-\frac{3}{2}.$

4) $\frac{|x+7|}{x^2+8x+7} < 5.$

5) $\left|\frac{1}{x+1}\right| < \left|\frac{2}{x-2}\right|.$

6) $\frac{(x+2)(x+1)}{x^2-|x|-2} \leq -3x.$

7) $\frac{|x-18|}{|x-9|-9} < 1.$

8) $\left||x^2-3x+2|-1\right| \leq x-2.$

9) $|3x^2-4|x|+1| \geq |x^2-6|x|+5|.$

10) $\frac{|x^2-2x|-1-2x}{x^2-2+|x^2+3x|} < 0.$

6.5. Ірраціональні нерівності.

Нерівностями виду $f(x)>0$ $\left(f(x)<0\right)$, де $f(x)-$ будь-яка ірраціональна функція, називаються **ірраціональними** нерівностями.

При розв´язуванні ірраціональних нерівностей використовуються ті ж прийоми, що і при розв´язуванні ірраціональних рівнянь: зведення обох частин нерівності до того самого **натурального степеня**, введення нових змінних, відокремлення **радикалу** і т. д.

Розглянемо найпростіші ірраціональні нерівності.

Приклад 1. Розв´язати нерівність: $\sqrt{2x+1} \le 3$.

***Розв´язання*. Область визначення** лівої частини нерівності

$$2x+1 \ge 0,$$

тобто

$$x \ge -\frac{1}{2}.$$

Звідси дістаємо, що початкова нерівність **еквівалентна** такій системі нерівностей:

$$\begin{cases} 2x+1 \ge 0, \\ \left(\sqrt{2x+1}\right)^2 \le 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2}, \\ 2x+1 \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2}, \\ x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x \le 4.$$

Відповідь: $x \in \left[-\frac{1}{2};4\right]$.

Приклад 2. Розв´язати нерівність: $\sqrt{x-5} \ge -3$.

***Розв´язання*.** Оскільки $\sqrt{x-5} \ge 0$, то початкова нерівність виконується для всіх x з області визначення функції $f(x) = \sqrt{x-5}$. $D(f): x-5 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 5$.

Відповідь: $x \in [5;\infty)$.

Приклад 3. Розв´язати нерівність: $\sqrt{x+6} < -3$.

Розв´язання. Оскільки $\sqrt{x+6} \ge 0$, то початкова нерівність не виконується при жодних значеннях x.

***Відповідь:* ∅.**

Розглянемо більш складні нерівності. Ірраціональні нерівності виду

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$$

розписують у вигляді сукупності двох систем **раціональних** нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > g^{2n}(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ірраціональні нерівності виду

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$$

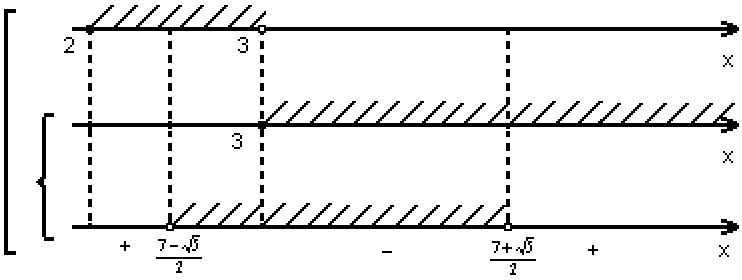
розписують у вигляді системи нерівностей:

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$$

Приклад 4. Розв´язати нерівність: $\sqrt{x-2} > x-3$.

Розв´язання.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3<0, \\ x-2 \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 \ge 0, \\ x-2 > (x-3)^2, \\ x-2 \ge 0. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<3, \\ x \ge 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 3, \\ x^2-7x+11<0, \\ x \ge 2. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [2;3); \\ \begin{cases} x \ge 3, \\ \left(x-\frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$



Відповідь: $\left[2;\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Приклад 5. Розв´язати нерівність: $\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$

Розв´язання. Позначимо $\sqrt{2-x}$ через t, $t>0$. Тоді одержимо рівняння:

$$\frac{4}{t} - t - 2 < 0, \quad \frac{4-t^2-2t}{t} < 0.$$

Так як $t>0$, то

$$4-t^2-2t<0$$

або

$$t^2+2t-4>0.$$

Розкладемо на множники ліву частину отриманої нерівності:

$(t-(-1-\sqrt{5}))(t-(\sqrt{5}-1))>0$; тобто $\left[\begin{array}{l} t>\sqrt{5}-1, \\ t<-\sqrt{5}-1. \end{array}\right.$

Повернувшись до заміни, маємо:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2-x}>\sqrt{5}-1, \\ \sqrt{2-x}<-\sqrt{5}-1. \end{array}\right.$$

Так як друга нерівність сукупності немає **сенсу**, то розв´яжемо нерівність

$$\sqrt{2-x} > \sqrt{5}-1 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x \ge 0, \\ 2-x > \left(\sqrt{5}-1\right)^2 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 2, \\ x < 2\sqrt{5}-4 \end{array}\right. \quad \Rightarrow x < 2\sqrt{5}-4.$$

Відповідь: $x \in \left(-\infty; 2\sqrt{5}-4\right)$.

Приклад 6. Розв´язати нерівність: $\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1} \ge 1$.

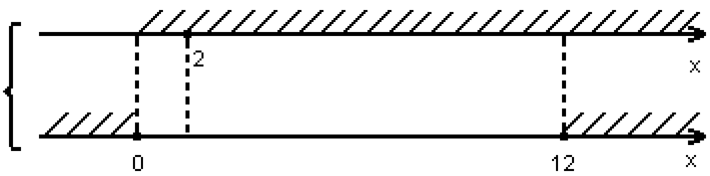
Розв´язання. Перенесемо один з радикалів в праву частину для того, щоб полегшити **перетворення**:

$$\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1} \ge 1 \iff \sqrt{3x} \ge 1+\sqrt{2x+1}.$$

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату і отримаємо:

$$3x \ge 1+2\sqrt{2x+1}+2x+1 \iff x-2 \ge 2\sqrt{2x+1} \iff$$

$$\begin{cases} x-2 \ge 0, \\ 2x+1 \ge 0, \\ (x-2)^2 \ge 4(2x+1) \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge 2, \\ x \ge -\dfrac{1}{2}, \\ x^2-12x \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 2, \\ x(x-12) \ge 0 \end{cases}$$

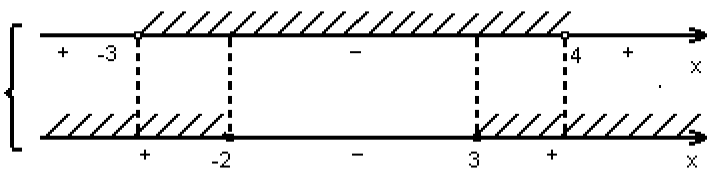


Відповідь: $x \in [12; \infty)$.

Приклад 7. Розв´язати нерівність: $\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{12+x-x^2}} \ge 0.$

Розв´язання. Так як знаменник дробу, що стоїть у лівій частині нерівності, завжди додатній, то чисельник цього ж дробу буде **невід´ємний**. Тому дану нерівність розпишемо системою двох нерівностей:

$$\begin{cases} 12+x-x^2 > 0, \\ x^2-x-6 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-12 < 0, \\ x^2-x-6 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-4) < 0, \\ (x+2)(x-3) \ge 0 \end{cases}$$



Відповідь: $x \in (-3; -2] \cup [3; 4)$.

Вправи

1. Розв´язати ірраціональні нерівності:

Рівень А

1) $\sqrt{x} \geq 0$.

2) $\sqrt{x} > -1$.

3) $\sqrt{x} \leq 4$.

4) $\sqrt{-3x} \leq 0$.

5) $\sqrt{x+3} \geq 0$.

6) $\sqrt{1-4x} < 0$.

7) $\sqrt{4-2x} \leq 0$.

8) $\sqrt[3]{-4x} \geq 0$.

9) $\sqrt{2+x} \geq 4$.

10) $\sqrt{3-2x} > 5$.

11) $\sqrt[4]{-x} > 2$.

12) $\sqrt{2x-4} \leq -2$.

13) $\sqrt{3-x} > -6$.

14) $\sqrt{x-1} < 3$.

15) $\sqrt{x+4} \geq 5$.

16) $\sqrt{2x+4} + \sqrt{x-3} \geq -3$.

17) $\sqrt{4x+7} + \sqrt{3x-8} < 0$.

18) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} \geq 0$.

19) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} \leq -1$.

20) $\sqrt{1-3x} < \sqrt{8-3x}$.

Рівень Б

1) $\sqrt{3x} < x$.

2) $\sqrt{x} > -x$.

3) $\sqrt{-7x} < x$.

4) $(x-6)\sqrt{x} \geq 0$.

5) $(x-3)\sqrt{x} > 0$.

6) $(x-5)\sqrt{x-2} \geq 0$.

7) $(x+1)\sqrt{x-3} \leq 0$.

8) $(x-8)\sqrt{4-x} \geq 0$.

9) $\sqrt{x} < x-6$.

10) $\sqrt{x} < 2x-1$.

11) $\sqrt{x-1} < 3-x$.

12) $\sqrt{x^2-9} < x$.

13) $\sqrt{3-x} \leq x+3$.

14) $2\sqrt{x-1} < x.$

15) $2\sqrt{4-x^2} < x+4.$

16) $3\sqrt{1-x^2} < 3-x.$

17) $\sqrt{x^2-3x-10} < 8-x.$

18) $\sqrt{x^2+3x+3} < 2x+1.$

19) $\sqrt{2x^2-3x-5} < x-1.$

20) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x.$

21) $\sqrt{-x^2-3x+4} > x+1.$

22) $\sqrt{-x^2-6x-5} > x+2.$

23) $(x+4)\sqrt{x^2+x-6} \geq 0.$

24) $\sqrt{x^2+6x+5} < 1+\sqrt{x^2+2x+4}.$

25) $\dfrac{(1-x)^7}{\sqrt{2x-x^2+3}} < 0.$

Рівень B

1) $\sqrt{x^4-8x^2+16} > 2-x.$

2) $x^2 \geq x\left(4+\sqrt{24-2x-x^2}\right).$

3) $\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{2x^2-x-5} \geq 2.$

4) $\sqrt{x^2-12x+36}-x\sqrt{5} < x\sqrt{41-12\sqrt{5}}.$

5) $\dfrac{\sqrt{x}(x-5)^3(x-2)^2}{(x^2+2)(x+10)^5} < 0.$

6) $\dfrac{x+2\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} > 0.$

7) $\sqrt{25-10x^3+x^6} > x-\sqrt[3]{5}.$

8) $\sqrt[4]{13+x}-\sqrt[4]{4-x} > 1.$

9) $\dfrac{\sqrt{x+9}}{2-x} < 1.$

10) $\dfrac{\sqrt{x^2-3x}-3}{x} > 1.$

11) $\dfrac{11-\sqrt{25-x^2}}{x} \leq 2.$

12) $\dfrac{\sqrt{4x-x^2-3}-1}{x-2} > -1{,}5.$

13) $\dfrac{9x^2-4}{\sqrt{5x^2-1}} \leq 3x+2.$

14) $\sqrt{25-x^2} \leq \dfrac{12}{x}.$

15) $\sqrt{5-x^2} < \dfrac{2}{|x|}$.

16) $x\sqrt{10-x^2} < x^2 - 6$.

17) $x\sqrt{17-x^2} \ge x^2 - 12$.

18) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}} \le \dfrac{2}{x}$.

19) $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}} - \sqrt{1-\dfrac{1}{x}} \le \dfrac{x-1}{x}$.

20) $4x^2 + \sqrt{3x} > \sqrt{x+1} + 1$.

7. Показникова й логарифмічна функція

7.1. Показникова функція

Вам уже відомі властивості степеня з дробовим показником. Нехай $\dfrac{m}{n}$ - раціональне число (m - ціле число, n - натуральне число).

За означенням

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ (a > 0), \text{ якщо } n > 2 \text{ і } a^{\frac{m}{2}} = \sqrt{a^m}.$$

Нагадаємо основні властивості таких степенів:

1) $$a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdot a^{\frac{m_2}{n_2}} = a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}}; \qquad a^{\frac{m_1}{n_1}} : a^{\frac{m_2}{n_2}} = a^{\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n_2}};$$

$$(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}; \qquad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}.$$

2) Якщо $a > 1$, з умови $\dfrac{m_1}{n_1} > \dfrac{m_2}{n_2}$ отримаємо, що $a^{\frac{m_1}{n_1}} > a^{\frac{m_2}{n_2}}$.

Якщо $0 < a < 1$, з умови $\dfrac{m_1}{n_1} > \dfrac{m_2}{n_2}$ отримаємо, що $a^{\frac{m_1}{n_1}} < a^{\frac{m_2}{n_2}}$.

Зауважимо, нарешті, що за означенням

$$a^0 = 1$$

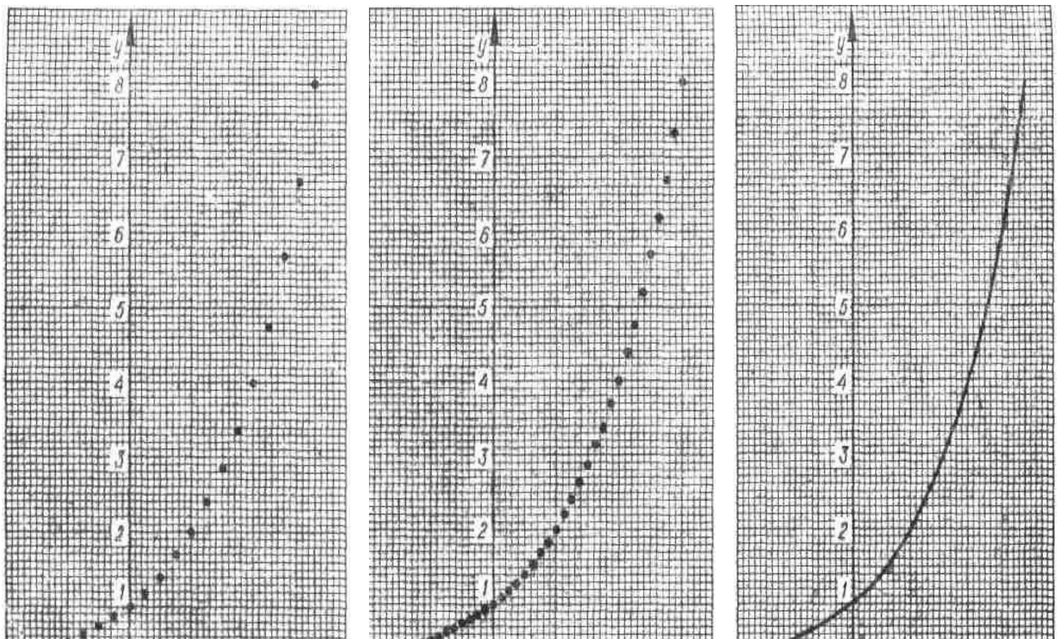
для будь-якого додатного a;

$$1^{\frac{m}{n}} = 1$$

для будь-якого раціонального числа $\dfrac{m}{n}$.

Зафіксуємо додатне число a й поставимо у відповідність кожному числу $\dfrac{m}{n}$ число $a^{\frac{m}{n}}$. Внаслідок цього дістанемо числову функцію $f(x) = a^x$, що визначена на множині Q раціональних чисел і має властивості 1), 2). Якщо $a = 1$, функція a^x стала, бо $1^x = 1$ для будь-якого раціонального x.

Позначимо кілька точок графіка функції 2^x, спочатку обчисливши за допомогою калькулятора значення 2^x на відрізку $[-2;3]$ з кроком $\frac{1}{4}$ (рис. 2, а), а потім – з кроком $\frac{1}{8}$ (рис 2, б). Продовжуючи в думці такі самі побудови з кроком $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ і т. д., бачимо, що ці точки можна сполучити плавною кривою, яку природно вважати графіком деякої функції, що визначена і зростає вже на всій числовій прямій і набуває значень $2^{\frac{m}{n}}$ у раціональних точках $x = \frac{m}{n}$ (рис 2, в). Побудувавши достатньо велику кількість точок графіка функції $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис.3, а, б), бачимо, що аналогічну властивість має і ця функція (відмінність полягає в тому, що функція $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ спадає на R, рис.3, в).



а) б) в)

Рис.2

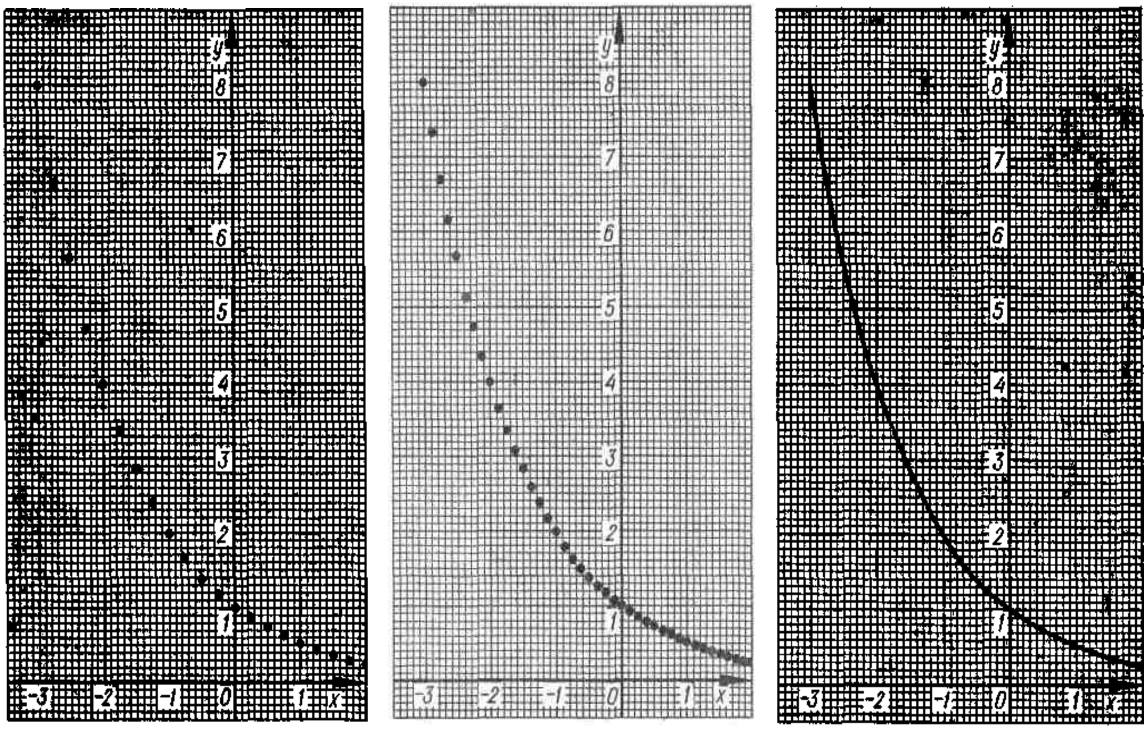


Рис.3

Ці спостереження підказують, що справджується таке твердження.

Для будь-якого додатного числа a існує, і притому тільки одна, функція, яка визначена на всій числовій прямій, і зростає при $a>1$ (спадає при $0<a<1$) і набуває значень $a^{\frac{m}{n}}$ при раціональних значеннях $x=\frac{m}{n}$ аргументу. Цю функцію і називають показниковою функцією з основою a (позначають a^x). Графіки функції a^x для деяких значень a зображено на рисунку 4.

Розглянемо схему доведення сформульованого твердження у випадку, коли $a>1$. Оскільки функція a^x має бути зростаючою, то при будь-яких раціональних r_1 і r_2, таких, що $r_1<x<r_2$, значення a^x має задовольняти нерівності $a^{r_1}<a^x<a^{r_2}$.

Вибираючи значення r_1 і r_2, які наближаються до x, можна помітити, що й відповідні значення a^{r_1} і a^{r_2} мало відрізнятимуться. Можна довести, що існує і притому тільки одне, число y, більше за всі ar_1 для всіх раціональних $r_1<x$ і менше за всі ar_2 для всіх раціональних $r_2>x$. Це число y за означенням є a^x.

Наприклад, обчисливши за допомогою калькулятора значення функції 2^x у точках x_n і x'_n, де x_n і x'_n - десяткові наближення числа $x=\sqrt{3}$, переконаємося, що чим ближче x_n і x'_n до $\sqrt{3}$, тим менше відрізняються 2^{x_n}

і $2^{x'_n}$.

Оскільки $1<\sqrt{3}<2^1$, $2^1=2<2^{\sqrt{3}}<2^2=4$. $1,7<\sqrt{3}<1,8$ і, отже, $2^{1,7}\approx 3,2490096<2^{\sqrt{3}}<2^{1,8}\approx 3,1822022$.

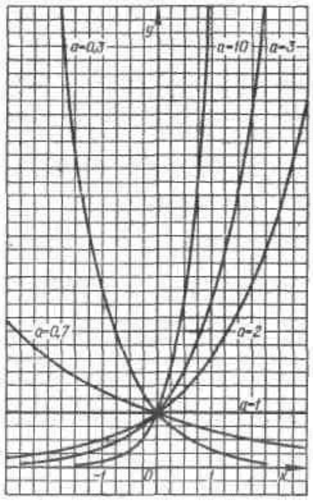


Рис.4

Аналогічно, розглянувши такі десяткові наближення $\sqrt{3}$ з недостачею і надлишком, приходимо до нерівностей:

$2^{1,73}\approx 3,3172782<2^{\sqrt{3}}<2^{1,74}\approx 3,3403517$;

$2^{1,732}\approx 3,3218801<2^{\sqrt{3}}<2^{1,733}\approx 3,3241834$;

$2^{1,7320}\approx 3,3218801<2^{\sqrt{3}}<2^{1,7321}\approx 3,3221104$;

$2^{1,73205}\approx 3,3219952<2^{\sqrt{3}}<2^{1,73206}\approx 3,3220182$;

$2^{1,732050}\approx 3,3219952<2^{\sqrt{3}}<2^{1,732051}\approx 3,3219975$.

Значення $2^{\sqrt{3}}$, обчислене на калькуляторі, таке: $2^{\sqrt{3}}\approx 3,321997$.

Після того як означено показникові функцію, слід довести її основні властивості.

Перелічимо основні властивості показниковою функції $y=a^x$ (їх доведення виходить за межі шкільного курсу).

1) Область визначення функції a^x - множина **R** дійсних чисел.

2) Область значень функції a^x (якщо $a\neq 1$) – множина $\mathbf{R}_+$ всіх додатних дійсних чисел. Якщо $a=1$, функція a^x при всіх x стала: вона дорівнює 1.

3) Якщо $a>1$, функція a^x зростає на всій числовій прямій; якщо $0<a<1$, функція a^x спадає на множині **R** (рис.5).

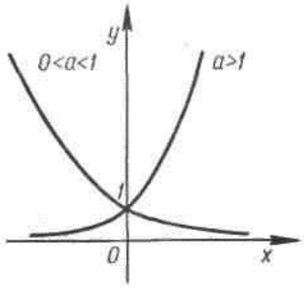


Рис.5

4) При будь-яких дійсних значеннях x і y виконуються рівності

$$a^x a^y = a^{x+y}; \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \qquad (ab)^x = a^x b^x;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \qquad \left(a^x\right)^y = a^{xy}.$$

Ці формули називають основними властивостями степенів.

Властивості 3) і 4) означають, що для функції a^x, визначеної на всій числовій прямій, правильними є властивості функції a^x, яка спочатку була визначена тільки для раціональних x .

Вправи

1. Зобразіть схематично графік функції:

а) $y = 5^x$; б) $y = 0,3^x$; в) $y = 1^x$; г) $y = 0^x$.

2. Обчисліть:

а) $8^{\sqrt{2}} : 2^{3\sqrt{2}}$; б) $3^{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} \cdot 9^{\sqrt{3}}$;

в) $24^{\sqrt{3}} : 2^{\sqrt{27}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}}$; г) $18^{\sqrt{2}} \cdot 3^{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}-1}$;

д) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; е) $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$;

є) $\left(5^{\sqrt[4]{27}}\right)^{\sqrt[4]{27}}$; ж) $\left(3^{\sqrt[5]{8}}\right)^{-\sqrt[5]{4}}$.

3. Яке з чисел більше:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ чи $2^{-1,5}$; б) $3^{\sqrt{5}}$ чи $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2,25}$;

в) $5 \cdot 0{,}4^{\sqrt{2}}$ чи $2 \cdot 2{,}5^{-0{,}5}$;

г) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}$ чи $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\sqrt{7}+1}$?

4. Спростіть вираз:

а) $a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$;

б) $b -^{\sqrt{3}} : (\sqrt{b}^{(\sqrt{3}-1)^2}$;

в) $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1{,}3} : \sqrt[3]{a^{3\sqrt{2}}}$;

г) $x^{\pi} \cdot \sqrt[4]{x^2 : x^{4\pi}}$;

д) $\left(a^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$;

е) $\left(a^{\sqrt[3]{25}}\right)^{\sqrt[3]{5}}$;

є) $\frac{\left(a^{2\sqrt{3}}-1\right)\left(a^{4\sqrt{3}}-a^{\sqrt{3}}\right)^{1}}{\left(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+a^{3\sqrt{3}}\right)^{-1}}$;

ж) $\sqrt{\left(x^{\pi}+y^{\pi}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}xy\right)^{\pi}}$.

5. Знайдіть область визначення функції:

а) 3^x; б) $0{,}7^x$; в) 1^x; г) 0^x;

д) $2^{|x|}$; е) $0{,}7^{|x|}$; є) 3^x-1; ж) $2-0{,}7^x$.

6. Обчисліть з точністю до 0,0001 (користуючись калькулятором) значення:

а) $10^{1,7}$ і $10^{1,8}$; б) $10^{1,73}$ і $10^{1,74}$;

в) $10^{1,732}$ і $10^{1,733}$; г) $10^{1,7320}$ і $10^{1,7321}$.

7. Знайдіть, користуючись здобутими результатами, значення $10^{\sqrt{3}}$ з точністю до 0,01.

7.2. Розв'язування показникових рівнянь і нерівностей

1. Розглянемо найпростіше показникове рівняння

$$a^x = a^c, \tag{1}$$

де $a>0$ й $a \neq 1$. Функція a^x на проміжку $(-\infty;+\infty)$ зростає, якщо $a>1$ (спадає, якщо $0<a<1$), і набуває всіх додатних значень. Застосувавши теорему про корінь, дістанемо, що рівняння (1) при будь-якому додатному а, відмінному від 1, коренем є число с (рис.6).

а) б)

Рис.6

Приклад 1. Розв'яжемо рівняння

$$7^{x-2}=\sqrt[3]{49}.$$

Розв'язання. Зауважимо, що

$$49=7^2,\ \text{а}\ \sqrt[3]{49}=7^{\frac{2}{3}}.$$

Тому дане рівняння можна записати у вигляді

$$7^{x-2}=7^{\frac{2}{3}}.$$

Отже, коренями даного рівняння є тільки такі числа x, для яких

$$x-2=\frac{2}{3},$$

тобто $x=2\frac{2}{3}$.

Відповідь: $x=2\frac{2}{3}$.

Приклад 2. Розв'яжемо рівняння $5^{x^2-2x-1}=25$.

Розв'язання. Запишемо його у вигляді

$$5^{x^2-2x-1}=5^2.$$

Коренями цього рівняння є тільки такі числа x, для яких

$$x^2-2x-1=2.$$

Ми дістали квадратне рівняння, коренями якого є числа 3 і -1.

Відповідь: 3; -1.

Приклад 3. Розв'яжемо рівняння $6^{x+1}+35\cdot 6^{x-1}=71$.

Розв'язання. Зауважимо, що

$$6^{x+1}=36\cdot 6^{x-1}.$$

Тому дане рівняння можна записати у вигляді

$$36\cdot 6^{x-1}+35\cdot 6^{x-1}=71,$$

тобто

$$71\cdot 6^{x-1}=71,$$

звідки

$$6^{x-1}=1, x-1=0 \text{ і } x=1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 4. Розв'яжемо рівняння $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0.$

Розв'язання. Зробимо заміну змінної

$$t = 2^x.$$

Зауважимо, що

$$4^x = \left(2^x\right)^2 = t^2.$$

Тому дане рівняння набирає вигляду

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Знайдемо розв'язки цього квадратного рівняння:

$$t_1 = 1 \text{ і } t_2 = 4.$$

Розв'язавши рівняння заміни

$$2^x = 1 \text{ і } 2^x = 4,$$

маємо:

$$x=0 \text{ і } x=2.$$

Відповідь: 0; 2.

Приклад 5. Розв'яжемо нерівність $0{,}5^{7-3x} < 4.$

Розв'язання. Користуючись тим, що

$$0{,}5^{-2} = 4,$$

запишемо дану нерівність у вигляді

$$0{,}5^{7-3x} < 0{,}5^{-2}.$$

Показникова функція $0{,}5^t$ спадає, бо $0{,}5 < 1$. Тому дана нерівність рівносильна нерівності

$$7 - 3x > -2,$$

звідки

$$x < 3.$$

Відповідь: $(-\infty; 3)$.

Приклад 6. Розв'яжемо нерівність $6^{x^2+2x} > 6^3.$

Розв'язання. Показникова функція 6^t зростає, бо $6 > 1$. Тому дана нерівність рівносильна нерівності

$$x^2 + 2x > 3.$$

Розв'язком цієї нерівності, а отже, і вихідної є об'єднання інтервалів $(-\infty; -3)$ і $(1; \infty)$.

Відповідь: $(-\infty; -3)$ і $(1; \infty)$.

Приклад 7. Розв'яжемо нерівність $\left(\frac{1}{9}\right)^x - \frac{28}{3^{x+1}} + 3 < 0.$

Розв'язання. Зробимо заміну

$$t = \left(\frac{1}{3}\right)^x,$$

тоді

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x = t^2$$

і нерівність набере вигляду:

$$t^2 - \frac{28}{3}t + 3 < 0.$$

Розв'язком цієї квадратичної нерівності є інтервал $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$, тобто всі числа t, що задовольняють нерівність $\frac{1}{3} < t < 9$. Отже, розв'язком даної нерівності є числа x, які задовольняють нерівність $\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$, і тільки такі числа. Але $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$, $9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, а функція $\left(\frac{1}{3}\right)^t$ спадає, бо $\frac{1}{3} < 1$. Тому розв'язком нерівності

$$\frac{1}{3} < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 9$$

будуть числа x, що задовольняють нерівність

$$1 > x > -2.$$

Відповідь: $(-2; 1)$.

Вправи

1. Розв'яжіть рівняння.

1) а) $4^x = 64;$ б) $3^x = 81;$ в) $25^x = \frac{1}{5};$

г) $8^x = 16;$ д) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64};$ е) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27;$

є) $\left(\frac{1}{49}\right)^x = 7;$ ж) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{1}{27}.$

2) а) $2^x = 1;$ б) $\pi^x = 1;$ в) $3^{x^2-5x-10} = 1;$

г) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2-9x}=1;$ д) $\sqrt{3^x}=9;$ е) $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x}=36;$

є) $\left(\frac{2}{5}\right)^x=\left(\frac{5}{2}\right)^4;$ ж) $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}.$

3) а) $3^{6-x}=3^{3x-2};$ б) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1}=\left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9};$ в) $\sqrt{8^{x-1}}=\sqrt[3]{4^{2-x}};$

г) $2^x5^x=0,1\cdot\left(10^{x-1}\right)^5;$ д) $3^{x^2-x-2}=81;$ е) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+2x-5}=25;$

є) $2^{x^2+x-0,5}=4\sqrt{2};$ ж) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-0,5}=\frac{\sqrt{7}}{7}.$

4) а) $4^{x+1}+4^x=320;$ б) $2\cdot3^{x+1}-4\cdot3^{x-2}=150;$

в) $7^{x+2}+4\cdot7^{x-1}=347;$ г) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}-\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}=4,8.$

5) а) $3^x+3^{3-x}=12;$ б) $2\cdot3^{x+1}-2\cdot3^{2-x}=56;$

в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x}-\left(\frac{1}{5}\right)^x=4,96;$ г) $4^{\sqrt{x-2}}+16=10\cdot2^{\sqrt{x-2}}.$

2.Розв’яжіть нерівність.

1) а) $2^x>\frac{1}{2};$ б) $\left(\frac{3}{7}\right)^x<1;$ в) $(0,3)^x>0,09;$

г) $\left(\sqrt{3}\right)^x\le\frac{1}{9};$ д) $(0,2)^x>\frac{1}{25};$ е) $\frac{1}{3^x}\ge27;$

є) $0,5^{2x}<1;$ ж) $\frac{1}{7^{3x}}<49.$

2) а) $2^{3-5x}\le8;$ б) $0,4^{2x+1}>0,16;$ в) $3^{2-x}>27;$

г) $0,7^{5-2x}\le0,49;$ д) $10^{3x+2}>100;$ е) $4^{5-2x}\le0,25;$

є) $(0,3)^{7+4x}>0,027;$ ж) $0,6^{5-2x}<0,36.$

3) а) $3^{x^2} < 3^{x+6}$; б) $0{,}7^{8-x^2} > 0{,}7^{2x}$; в) $\left(\frac{5}{6}\right)^{x^2-x} \le \left(\frac{5}{6}\right)^{6}$;

г) $10^{x^2-12} > 10^{x}$; д) $2^{x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$; е) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} > 4^{1-2x}$;

є) $3\cdot 9^{2x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{3x-1}$; ж) $2\cdot 8^{4-5x} < \left(\frac{1}{16}\right)^{x+2}$.

4) а) $4^{x} - 10\cdot 2^{x} + 16 < 0$;

б) $0{,}04^{x} - 26\cdot\left(0{,}2\right)^{x} + 25 \le 0$;

в) $9^{x} - \frac{28}{3^{2x-1}} + \frac{1}{3} > 0$;

г) $25^{x} - 4\cdot 5^{x} - 5 \ge 0$.

5) а) $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$; б) $3^{4x+3} \le \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2}$;

в) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < \left(\sqrt{5}\right)^{x^2+3{,}75}$; г) $\left(\frac{1}{16}\right)^{x^2} < 8\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{16-2x}$.

7.3. Поняття про обернену функцію

Досліджуючи різні функції, ви не раз розв'язували таку задачу: обчислити значення функції f за даним значенням x_0 аргументу. Часто доводиться розглядати і обернену задачу: знайти значення аргументу, при яких функція f набуває даного значення y_0.

Розглянемо два приклади.

1) Нехай $f(x) = kx + b$ $(k \ne 0)$. Щоб знайти значення аргументу x, при яких $f(x) = y_0$, треба розв'язати рівняння $f(x) = y_0$, тобто рівняння

$$kx + b = y_0.$$

Розв'язавши його, знаходимо, що при будь-якому y_0 воно має розв'язок, і причому тільки один:

$$x = \frac{y_0 - b}{k}.$$

2) Для функції $f\left(x\right) = x^2$ рівняння $f(x) = y_0$, якщо $y_0 > 0$, має два розв'язки: $x_1 = \sqrt{y_0}$, $x_2 = -\sqrt{y_0}$ (якщо $y_0 = 0$, розв'язок один: $x_0 = 0$). Функцію, що набуває кожного свого значення в єдиній точці області

визначення, називають оборотною. Таким чином, якщо $k \neq 0$, функція $f(x) = kx + b$ оборотна, а функція $f(x) = x^2$ (визначена на всій числовій прямій) не є оборотною.

Зауваження. З означення оборотної функції випливає, що коли функція f оборотна, а число a належить області значень $E(f)$, то рівняння $f(x) = a$ має розв'язок, і причому тільки один.

Нехай f - довільна оборотна функція. Для будь-якого числа y_0 з її області значень $E(f)$ є точно одне значення x_0, яке належить області визначення $D(f)$, таке, що $f(x_0) = y_0$. Поставивши у відповідність кожному y_0 це значення x_0, матимемо нову функцію g з областю визначення $E(f)$ і областю значень $d(f)$. Наприклад, для оборотної функції $f(x) = kx + b \ (k \neq 0)$ значення нової функції g у довільній точці y_0 задається формулою

$$g(y_0) = \frac{y_0 - b}{k}.$$

Вибравши для аргументу функції g звичне позначення x, знаходимо, що

$$g(x) = \frac{x - b}{k}.$$

Означення. Функцію g, яка в кожній точці x області значень оборотної функції f набуває такого значення y, що $f(y) = x$, називають **оберненою** до функції f.

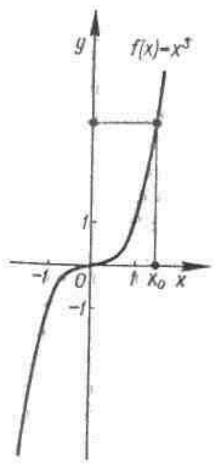
Як показано вище, функцією, оберненою до функції $f(x) = kx + b \ (k \neq 0)$ є функція $g(x) = \dfrac{x - b}{k}$. Розглянемо інший приклад.

Приклад 1. Доведемо, що функція $f(x) = x^3$ оборотна, й виведемо формулу, яка задає функцію $y = g(x)$, обернену до f.

Розв'язання. За означенням оберненої функції спочатку треба довести, що рівняння $f(y) = x$ при будь-якому значенні x має єдиний розв'язок y. У даному випадку це рівняння таке:

$$y^3 = x.$$

Воно має єдиний розв'язок $y = \sqrt[3]{x}$ при будь-якому x. Тому функція $f(x) = x^3$ оборотна і оберненою до неї є функція $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Графіки цих функцій зображено на рисунках 7 і 8.



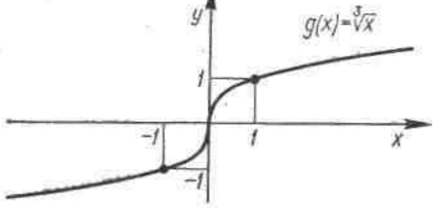


Рис. 7 Рис.8

Якщо задано графік оборотної функції f, то графік функції g, оберненої до f, неважко побудувати, користуючись таким твердженням: графік функції g, оберненої до функції f, симетричний до графіка f

відносно прямої $y = x$.

Доведемо цю властивість. Зауважимо, що за графіком функції f можна знайти графічно значення оберненої до f функції g у довільній точці a. Для цього треба взяти точку з координатою a не на горизонтальній осі (як це звичайно роблять), а на вертикальній (Рис. 9).

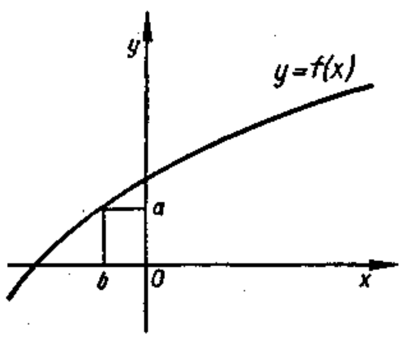


Рис.9

З означення оберненої функції випливає, що значення $g(a)$ дорівнює b (див. рис.9).

Отже, якщо вибрана трохи незвичайна система координат (аргумент відкладаємо на вертикальній осі, а значення функції – на горизонтальній), то можна сказати, що графік оберненої до f функції g - це графік функції f, побудований у звичайній системі координат. Щоб зобразити графік g у звичайній системі координат, слід відобразити графік f відносно прямої $y = x$ (рис.10).

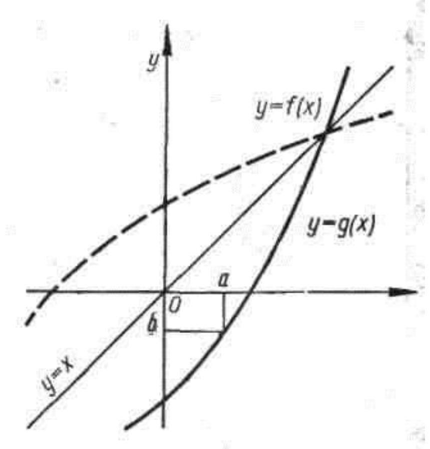


Рис.10

Теорема (про обернену функцію). Якщо функція f **зростає** (або **спадає**) на проміжку I, то вона оборотна. Обернена до f функція g, визначена в області значень f, також зростає (відповідно спадає).

Доведення. Покладемо для певності, що функція f зростає. Оборотність функції f - очевидний наслідок теореми про корінь. Тому залишається довести, що функція g, обернена до f, зростає на множині $\log_5^2 x - \log_{\sqrt{5}} x - 3 = 0.$.

Нехай x_1 і x_2 - довільні значення з $E(f)$, такі, що $x_1 > x_2$, і нехай $y_1 = g(x_1)$, $y_2 = g(x_2)$.За означенням оберненої функції $x_1 = f(y_1)$, $x_2 = f(y_2)$. Скориставшись умовою (f - зростаюча функція), знаходимо, що припущення $y_1 \le y_2$ приводить до висновку $f(y_1) \le f(y_2)$, тобто $x_1 \le x_2$. Це суперечить припущенню $x_1 > x_2$. Тому $y_1 > y_2$, тобто з умови $x_1 > x_2$ випливає, що $g(x_1) > g(x_2)$. Це й треба було довести.

Приклад 2. Як зазначалося вище, функція $f(x)=x^2$ не є оборотною. Проте функція f^*, визначена на проміжку $\{0;\infty)$ формулою $f^*(x)=x^2$, зростає на цьому проміжку і, отже, має обернену. Оберненою до функції f^*

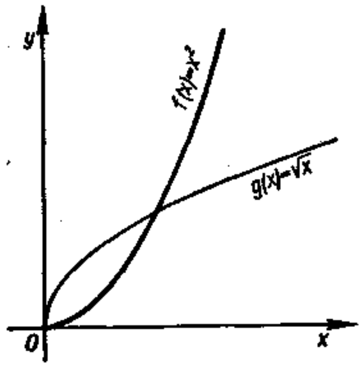


Рис.11

є функція $\sqrt{x}$. Графіки цих функцій зображено на рисунку 11.

Взагалі, функція x^n при будь-якому натуральному n зростає на проміжку $\{0;\infty)$ і тому має обернену. Оберненою до функції x^n є функція $\sqrt[n]{x}$ зображено на рисунках 12,13.

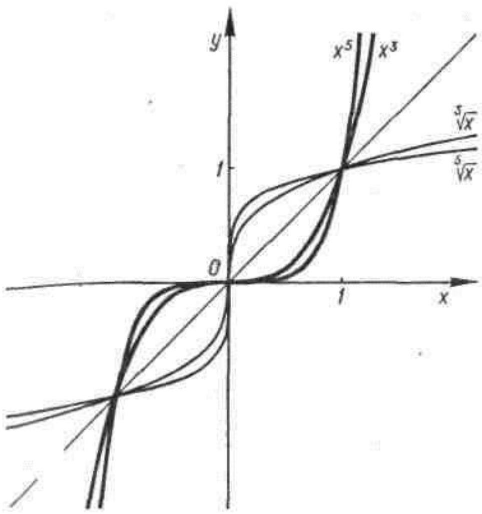


Рис.12

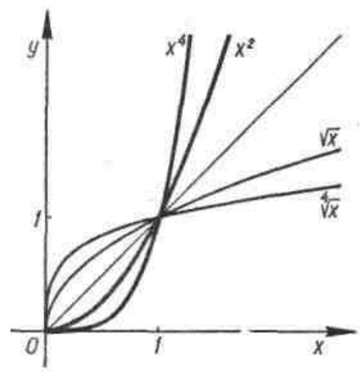


Рис.13

Вправи

1. Виведіть формулу, що задає функцію g, обернену до даної функції f. Знайдіть область визначення і область значень функції g:

а) $f(x) = 2x + 1;$ б) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1;$

в) $f(x) = -2x + 1;$ г) $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1;$

д) $f(x) = -\frac{1}{x};$ е) $f(x) = \frac{x}{x+2};$

є) $f(x) = 2x^2 \ (x \geq 0);$ ж) $f(x) = \sqrt{x+1}.$

2. Складіть таблицю значень функції $f(x)$ на відрізку $[-1; 1]$ з кроком 0,1 і потім побудуйте на міліметровому папері графік цієї функції на відрізку $[-1; 1]$. Побудуйте графік функції, оберненої до $f(x)$:

а) $f(x) = 2x^3 + 1;$ б) $f(x) = -2x^3 + 1.$

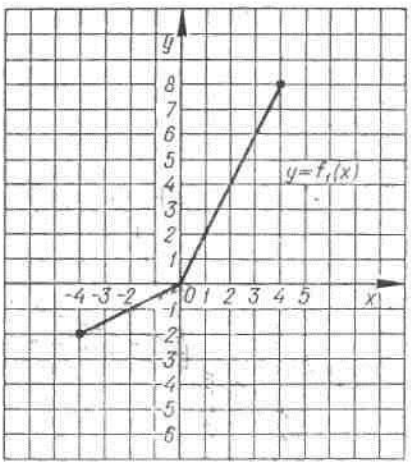


Рис.14

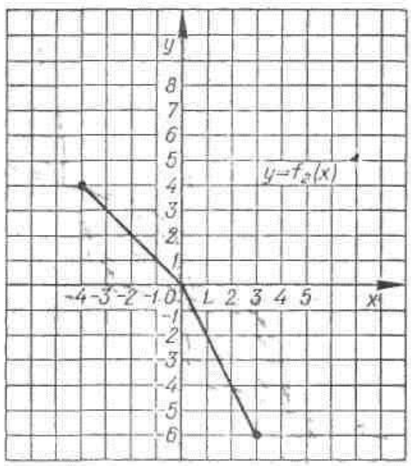


Рис.15

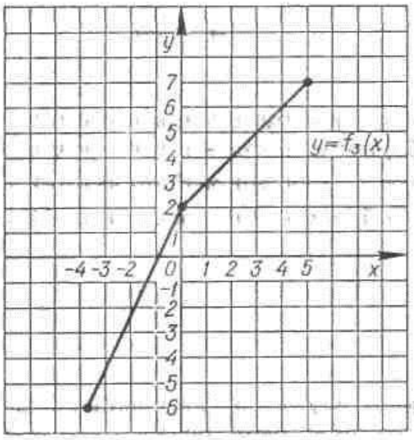


Рис.16

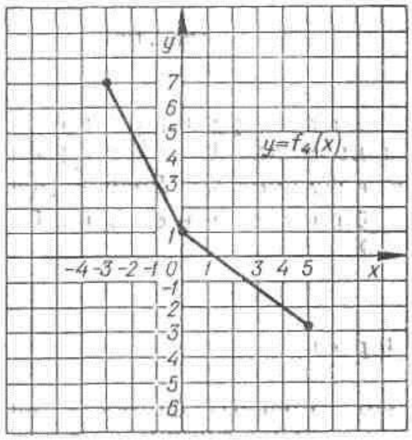


Рис.17

3. За даним графіком функції f знайдіть значення оберненої до f функції g у точках -2,1 і 3. Побудуйте графік функції g, знайдіть її область визначення і область значень:

а) $f(x)=f_1(x)$ (мал. 14); б) $f(x)=f_2(x)$ (мал. 15);

в) $f(x)=f_3(x)$ (мал. 16); г) $f(x)=f_4(x)$ (мал. 17);

4. Доведіть, що функція f має обернену на зазначеному проміжку. Побудуйте графік функції, оберненої до f:

а) $f(x)=x^2+1,\ x\ge 0;$

б) $f(x)=x,\ x\in(-\infty;\infty);$

в) $f(x)=\sqrt[4]{x},\ x\ge 0;$

г) $f(x)=x^3+1,\ x\in(-\infty;\infty);$

д) $f(x)=\sin x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$

е) $f(x)=\cos x,\ x\in[0;\pi];$

є) $f(x)=\operatorname{tg} x,\ x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];$

ж) $f(x)=\operatorname{ctg} x,\ x\in(0;\pi).$

7.4. Логарифмічна функція

Показникова функція $f(x)=a^x$, якщо $a>1$, зростає на R, а якщо $0<a<1$, спадає на R; область її значень – множина R_+. Отже, вона оборотна і для неї визначена обернена функція $g(x)$, областю визначення якої є множина R_+ додатних чисел, а областю значень – множина R. Цю функцію називають логарифмічною з основою a і позначають $g(x)=\log_a x$. Логарифмічну функцію з основою 10 позначають $\lg$.

За означенням функції g, оберненої до f, її значенням $g(x)$ є таке число y, що $f(y)=x$. У даному випадку $y=\log_a x$, а $f(y)=a^y=a^{\log_a x}$. Отже,

$$a^{\log_a x}=x \text{ для будь-якого } x>0. \tag{1}$$

Іншими словами, логарифм числа x за основою a – це показник степеня, до якого треба піднести число a, щоб дістати x.

Тотожність

$$a^{\log_a x}=x \;(\text{де } x>0,\ a>0 \text{ і } a\neq 1)$$

називають основною логарифмічною тотожністю.

Приклад 1. Знайти значення: а) $\log_2 32$; б) $\log_5 0,04$.

Розв'язання.

а) Зауважимо, що

$$32=2^5,$$

тобто щоб дістати число 32, слід 2 піднести до п'ятого степеня. Отже,

$$\log_2 32=5.$$

б) Зауважимо, що

$$0,04=\frac{1}{25}=5^{-2},$$

тому

$$\log_5 0,04=-2.$$

Приклад 2. Знайти логарифм числа $\frac{1}{9}$ за основою $\sqrt{3}$.

Розв'язання. Зауважимо, що

$$\sqrt{3}^{-4}=\frac{1}{9}.$$

Тому за означенням логарифма

$$\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{9}=-4.$$

Приклад 3. Знайдемо число x таке, що : а) $\log_8 x = \frac{1}{3}$; б) $\log_8 x = -\frac{3}{4}$.

Розв'язання. Використаємо основну логарифмічну тотожність:

а) $x = 8^{\log_8 x} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$;

б) $x^{\log_x 8} = 8$, тобто $x^{-\frac{3}{4}} = 8$, звідки $x = 8^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{16}$.

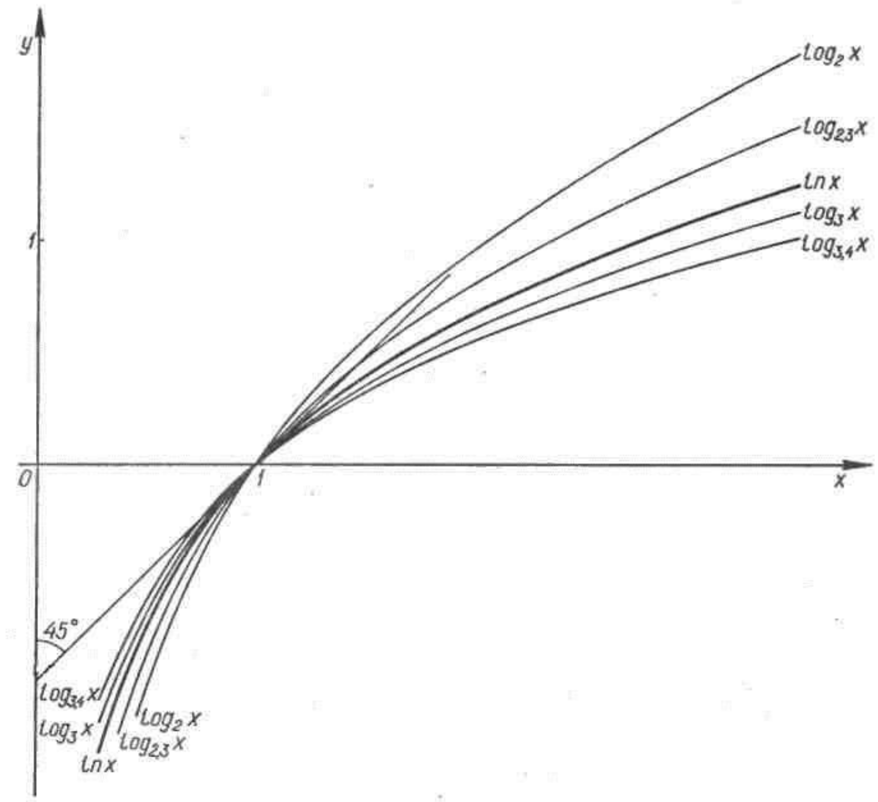


Рис.18

Функція $g(x) = \log_a x$ як обернена до функції $f(x) = a^x$ (зростаючої, якщо $a > 1$, і спадає, якщо c) зростає, якщо $a > 1$, і спадає, якщо $0 < a < 1$ на всій області визначення. Графік функції $y = \log_a x$ симетричний до графіка функції $y = a^x$ відносно прямої $y = x$, оскільки ці функції взаємно обернені. Графіки логарифмічної функції при різних основах наведено на рисунку 18.

Основні властивості логарифмічної функції випливають з властивостей показниковою функції і теореми про обернену функцію. Перелічимо їх.

1. Область визначення логарифмічної функції – множина всіх додатних чисел: $D(\log_a) = R_+$.

2. Область значень логарифмічної функції – множина всіх дійсних чисел: $E(\log_a) = R$.

3. Логарифмічна функція на всі області визначення R_+ зростає, якщо $a > 1$, і спадає, якщо $0 < a < 1$.

4. Для будь-якого $a > 0$ $(a \neq 1)$ виконуються рівності:

а) $\log_a 1 = 0$;

б) $\log_a a = 1$;

в) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ якщо $x > 0, y > 0$;

г) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ якщо $x > 0, y > 0$;

д) для будь-якого числа $x > 0$ і будь-якого $p \in R$

$$\log_a x^p = p\log_a x.$$

Приклад 4. Знайти область визначення функції $f(x) = \log_8(4 - 5x)$.

Розв'язання.

Область визначення логарифмічної функції $f(t) = \log_8 t$ - множина R_+. Тому задана функція визначена тільки для тих x, при яких

$$4 - 5x > 0,$$

тобто якщо

$$x < 0{,}8.$$

Відповідь: областю визначення заданої функції є інтервал $(-\infty; 0{,}8)$.

Приклад 5. Знайти область визначення функції $f(x) = \log_2(x^2 - 3x - 4)$.

Розв'язання.

Як і в попередньому прикладі, функція f визначена для всіх тих x, при яких

$$x^2 - 3x - 4 > 0.$$

Розв'язавши цю квадратну нерівність, дістанемо, що $D(f)$ - об'єднання інтервалів $(-\infty; -1)$ і $(4; \infty)$.

Приклад 6. Знайти область визначення функції $f(x) = \log_7 \frac{2x + 3}{5 - 7x}$.

Розв'язання.

Розв'язавши методом інтервалів нерівність

$$\frac{2x + 3}{5 - 7x} > 0,$$

знайдемо, що $D(f) = \left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{7}\right)$ (рис.19).

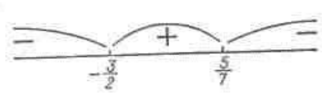


Рис.19

Вправи

1. Знайдіть логарифм за основою а числа, поданого у вигляді степеня з основою а .

1) а) $3^2 = 9;$ б) $3^3 = 27;$ в) $3^4 = 81;$ г) $3^{-1} = \frac{1}{3};$

д) $2^{-3} = \frac{1}{8};$ е) $5^{-2} = 0{,}04;$ є) $5^0 = 1;$ ж) $9^{\frac{1}{2}} = 3.$

2) а) $\sqrt[4]{16} = 2;$ б) $\sqrt[3]{125} = 5;$ в) $\sqrt{49} = 7;$ г) $\sqrt[4]{81} = 3;$

д) $27^{\frac{2}{3}} = 9;$ е) $32^{\frac{3}{5}} = 8;$ є) $81^{\frac{3}{4}} = 27;$ ж) $125^{\frac{2}{3}} = 25.$

2. Перевірте правильність рівності .

1) а) $\log_2 16 = 4;$ б) $\log_5 125 = 3;$ в) $\log_3 \frac{1}{81} = -4;$ г) $\log_3 \frac{1}{243} = -5;$

д) $\log_7 343 = 3;$ е) $\log_5 0{,}04 = -2;$ є) $\log_{16} 1 = 0;$ ж) $\lg 0{,}01 = -2.$

2) а) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2;$ б) $\log_{0{,}5} 4 = -2;$ в) $\log_{\sqrt{2}} = 8;$ г) $\log_{2\sqrt{2}} 128 = \frac{14}{3};$

д) $\log_{0{,}2} 0{,}008 = 3;$ е) $\log_{0{,}2} 125 = -3;$ є) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27 = -6;$ ж) $\log_{\sqrt{5}} 0{,}2 = -2.$

3.Спростіть вираз, користуючись основною логарифмічною тотожністю:

а) $2^{\log_2 7};$ б) $1{,}7^{\log_{1{,}7} 2};$ в) $3{,}8^{\log_{3{,}8} 11};$ г) $\pi^{\log_\pi 5{,}2}.$

4. Знайдіть число x .

1) а) $\log_5 x = 2;$ б) $\log_3 x = -1;$ в) $\log_7 x = -2;$ г) $\log_4 x = -3;$

д) $\log_{\frac{1}{2}} x = -3;$ е) $\log_{\sqrt{5}} x = 0;$ є) $\log_{\frac{1}{6}} x = -3;$ ж) $\log_{\frac{1}{7}} x = 2.$

2) а) $\log_x 81 = 4;$ б) $\log_x 27 = 3;$ в) $\log_x 0{,}25 = -2;$ г) $\log_{\sqrt{8}} x = \frac{2}{3}.$

3) а) $\log_x \sqrt{2} = -4;$ б) $\log_x 16 = -0{,}8;$ в) $\log_x \frac{1}{9} = -1;$ г) $\log_x 0{,}64 = -2;$

4) а) $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{4};$ б) $\log_x 16 = 0{,}8;$ в) $\log_x \frac{1}{9} = -\frac{1}{3};$ г) $\log_x 16 = \frac{4}{3}.$

5. Знайдіть область визначення функції .

1) а) $\log_3(x-5)$; б) $\log_{0,3}(7-3x)$; в) $\log_7(2x+3)$;

г) $\log_\pi(10-5x)$; д) $\log_5(9-x^2)$; е) $\log_{0,1}(x^2-4)$;

є) $\log_{\sqrt{10}}(6+x-x^2)$; ж) $\log_{3\sqrt{2}}(x^2-2x-3)$.

2) а) $\log_8\dfrac{2-x}{x+1}$; б) $\log_7\dfrac{2x+5}{x-1}$;

в) $\log_{0,9}\dfrac{2+3x}{5-2x}$; г) $\log_{3,1}\dfrac{7-2x}{2-3x}$.

6. Зобразіть схематично графік функції:

а) $y=\log_2 x$; б) $y=\log_{\sqrt{5}} x$;

в) $y=\log_{0,3} x$; г) $y=\log_{\sqrt{0,7}} x$.

7.5. Основні властивості логарифмів

Доведемо властивості 4, а) – д) логарифмічної функції, сформульовані в попередньому пункті (нагадаємо, що $a>0,\ a\neq 1$):

а) $\log_a 1=0$, бо $a^0=1$ для будь-якого a.

б) $\log_a a=1$, бо $a^1=a$.

в) Доведемо, що для будь-яких додатних чисел x і y

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y.$$

Коротко говорять так: «Логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів». Для доведення використаємо основну логарифмічну тотожність: $x=a^{\log_a x}$, $y=a^{\log_a y}$.

Помноживши почленно ці рівності, маємо: $xy=a^{\log_a x}\cdot a^{\log_a y}=a^{\log_a x+\log_a y}$,

тобто $xy=a^{\log_a x+\log_a y}$.

Отже, за означенням логарифма $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$.

г) Доведемо, що для будь-яких додатних чисел x і y

$$\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y.$$

Коротко говорять так: «Логарифм частки дорівнює різниці логарифмів».

Для доведення використаємо рівності (1)

$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$. Отже, за означенням логарифма $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

д) Для будь-якого числа $x > 0$ і будь-якого дійсного p

$$\log_a x^p = p \log_a x,$$

тобто логарифм степеня дорівнює добутку показника цього степеня на логарифм його основи.

Використаємо основну логарифмічну тотожність $x = a^{\log_a x}$, тому $x^p = \left(a^{\log_a x}\right)^p = a^{p \log_a x}$.

Отже, за означенням логарифма $\log_a x^p = p \log_a x$.

Основні властивості логарифмів широко застосовують, перетворюючи вирази, які містять логарифми.

Доведемо, наприклад, формулу переходу від однієї основи логарифма до другої основи:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \qquad (2)$$

Ця формула правильна, якщо обидві її частини мають зміст, тобто якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, $b > 0$ і $b \neq 1$.

За правилом логарифмування степеня й основною логарифмічною тотожністю маємо:

$$\log_b x = \log_b \left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x \cdot \log_b a,$$

тобто

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на $\log_b a$, приходимо до формули (2).

За допомогою формули переходу можна знайти значення логарифма з довільною основою a за таблицями логарифмів, складеними для якоїсь однієї основи b. Найчастіше використовують таблиці десяткових і натуральних логарифмів (десятковими називають логарифми за основою 10, з натуральними логарифмами ви ознайомитесь у п. 45).

Приклад 1. Знайдемо $\log_{0,3} 7$.

Розв‘язання. Користуючись калькулятором, знайдемо:

$$\lg 7 \approx 0,8451 \text{ і } \lg 0,3 \approx 0,4771 - 1 = -0,5229.$$

Отже, за формулою (2)

$$\log_{0,3} 7 \approx \frac{0,8451}{-0,5229} \approx -1,6162.$$

Приклад 2. Відомо, що $\log_2 5 = a$ і $\log_2 3 = b$. Подати $\log_2 300$ через a і b.

Розв'язання. Скориставшись основними властивостями логарифмів, маємо:

$$\log_2 300 = \log_2\left(3\cdot 5^2\cdot 2^2\right) = \log_2 3 + 2\log_2 5 + 2\log_2 2 = b + 2a + 2.$$

Приклад 3. Подати логарифм за основою 2 чисел a і b виразу $8a^3\sqrt[7]{b^4}$ (Коротко говорять: «Прологарифмуємо даний вираз за основою 2».)

Розв'язання. Скориставшись основними властивостями логарифмів, маємо:

$$\log_2\left(8a^3\sqrt[7]{b^4}\right) = \log_2\left(2^3\cdot a^3\cdot b^{\frac{4}{7}}\right) = 3\log_2 2 + 3\log_2 a +$$

$$+\frac{4}{7}\log_2 b = 3 + 3\log_2 a + \frac{4}{7}\log_2 b.$$

Приклад 4. Знайти x, якщо $\log_5 x = \log_5 7 + 2\log_5 3 - 3\log_5 2.$

Розв'язання. Спочатку перетворимо праву частину даної рівності, користуючись основними властивостями логарифмів:

$$\log_5 x = \log_5 7 + \log_5 3^2 - \log_5 2^3 = \log_5\frac{7\cdot 9}{8} = \log_5\frac{63}{8},$$

тобто

$$\log_5 x = \log_5\frac{63}{8}$$

і тому

$$x = \frac{63}{8}.$$

Приклад 5. Знайти значення виразу $\dfrac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7}.$

Розв'язання. Користуючись основними властивостями логарифмічної функції, перетворимо чисельник і знаменник цього дробу:

$$\lg 72 - \lg 9 = \lg\frac{72}{9} = \lg 8 = 3\lg 2;$$

$$\lg 28 - \lg 7 = \lg\frac{28}{7} = \lg 4 = 2\lg 2.$$

Отже,

$$\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7} = \frac{3\lg 2}{2\lg 2} = \frac{3}{2}.$$

Приклад 6. Що більше: $\log_2 3+\log_2 7$ чи $\log_2(3+7)$?

Розв'язання. За основною властивістю логарифмів

$$\log_2 3+\log_2 7=\log_2 21.$$

Оскільки

$$\log_2(3+7)=\log_2 10 \text{ і } 10<21,$$

а основа логарифма $2(2>1)$, то

$$\log_2 10<\log_2 21, \text{ отже, } \log_2 3+\log_2 7>\log_2(3+7).$$

Вправи

1. Відомо, що $\log_2 5=a$ і $\log_5 3=b$. Подайте через a і b:

а) $\log_5 12$; б) $\log_5 1{,}5$; в) $\log_5 72$; г) $\log_5 30$.

2. Прологарифмуйте за основою 3:

а) $9a^4\sqrt[5]{b}$; б) $\dfrac{b^2}{27a^7}$; в) $\left(\sqrt[5]{a^3b}\right)^{\frac{2}{3}}$; г) $\left(\dfrac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0,2}$.

3. Прологарифмуйте за основою 10:

а) $\left(100c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$; б) $\dfrac{0{,}1a}{\sqrt{a\sqrt[3]{ab}}}$; в) $\dfrac{10p^{\frac{1}{3}}q^{-\frac{1}{5}}}{p^{-\frac{1}{6}}q^{\frac{4}{5}}}$; г) $\dfrac{r^2s^6t^{-1,7}}{r^{\frac{1}{9}}t^{0,3}}$.

4. Обчисліть без таблиць і обчислювальних інструментів:

а) $\log_{12}4+\log_{12}3$; б) $\log_3 2+\log_3 4{,}5$; в) $\log_2 7+\log_2\dfrac{7}{16}$;

г) $\lg 8+\lg 125$; д) $\lg 13-\lg 130$; е) $\log_6 3+\log_6 12$;

є) $\log_{\sqrt{5}}2+\log_5 6{,}25$; ж) $\log_{\sqrt{3}}25-\log_3 7\dfrac{58}{81}$.

5. Доведіть, що:

а) $\log_3 7+\log_7 3>2$; б) $\log_{\frac{1}{2}}3+\log_3\dfrac{1}{2}<-2$;

в) $4^{\log_5 7}=7^{\log_5 4}$; г) $3^{\log_2 5}=5^{\log_2 3}$.

6. Знайдіть x, якщо:

а) $\log_3 x = \log_3 1{,}5 + \log_3 8$;

б) $\log_7 x = \log_7 12 - \log_7 4$;

в) $\log_{0,3} x = 2\log_{0,3} 6 - \log_{0,3} 12$;

г) $\log_\pi x = 3\log_\pi 4 - 2\log_\pi 6$.

7. Знайдіть значення виразу:

а) $\dfrac{\log_3 16}{\log_3 4}$; б) $\log_2 11 - \log_2 44$;

в) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$; г) $\dfrac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$.

8. Що більше:

а) $\log_3 4 + \log_3 7$ чи $\log_3(4+7)$;

б) $\log_5 2 + \log_5 1{,}5$ чи $\log_5(2+1{,}5)$;

в) $\log_{0,7} 3 + \log_{0,7} 4$ чи $\log_{0,7}(3+4)$;

г) $\log_{0,6} 1{,}3 + \log_{0,6} 1{,}2$ чи $\log_{0,6}(1{,}3+1{,}2)$?

7.6. Розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей

Розглянемо найпростіше логарифмічне рівняння

$$\log_a x = b.$$

Функція $\log_a x$ зростає (або спадає) на проміжку $(0;\infty)$ і набуває на цьому проміжку всіх дійсних значень (рис.20). За теоремою про корінь, звідси випливає, що для будь-якого b дане рівняння має, і притому тільки один, розв'язок. З означення логарифма числа випливає, що a^b є таким розв'язком.

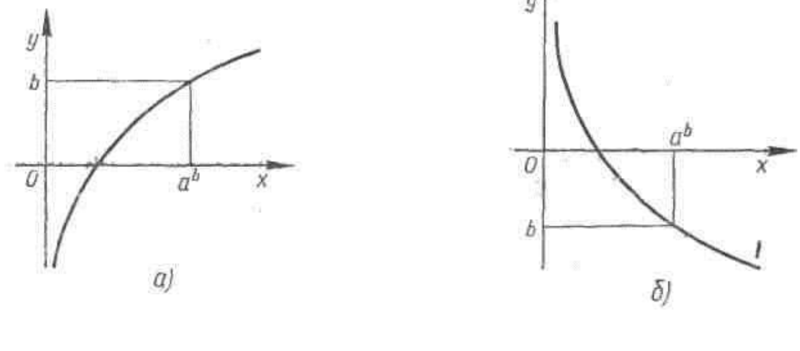


Рис.20

Приклад 1. Розв'яжемо рівняння $\log_2(x^2+4x+3)=3.$

Розв'язання. Дане рівняння задовольняють тільки ті значення x, для яких виконується рівність

$$x^2+4x+3=2^3.$$

Ми дістали квадратне рівняння

$$x^2+4x-5=0.$$

Його корені – числа 1 і -5.

Відповідь: 1 і -5.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\log_5(2x+3)=\log_5(x+1).$

Розв'язання. Це рівняння визначене тільки для тих значень x, при яких виконуються нерівності

$$2x+3>0 \text{ і } x+1>0.$$

Для цих x дане рівняння рівносильне рівнянню

$$2x+3=x+1.$$

Звідси знаходимо

$$x=-2.$$

Число x=-2 не задовольняє нерівності $x+1>0$. Отже, дане рівняння коренів не має.

Відповідь: коренів не має.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\log_x(x^2-2x+2)=1.$

Розв'язання. Це рівняння задовольняють тільки такі числа x, для яких виконуються дві нерівності

$$x>0 \text{ і } x\neq 1$$

(x – основа логарифмічної функції) і рівність

$$x^2-2x+2=x^1,$$

тобто

$$x^2-3x+2=0.$$

Це квадратне рівняння має корені 1 і 2. Але x=1 не може бути розв'язком даного рівняння. Отже, розв'язком даного рівняння є тільки число 2.

Відповідь:2.

Приклад 4. Розв’язати рівняння

$$\log_{\frac{1}{3}}(5-2x) > -2. \qquad (1)$$

Розв‘язання. Число -2 дорівнює $\log_{\frac{1}{3}}9$. Тому дану нерівність можна записати у вигляді

$$\log_{\frac{1}{3}}(5-2x) > \log_{\frac{1}{3}}9. \qquad (2)$$

Функція $\log_{\frac{1}{3}}t$ визначена для $t>0$ і спадає на R_+, бо $\frac{1}{3}<1$. Отже, нерівність (2) задовольняють тільки такі числа x, для яких виконується умова $0<5-2x<9$, звідки $-2<x<2{,}5$. Тому розв’язком даної нерівності є інтервал (-2; 2,5).

Відповідь: (-2; 2,5).

Приклад 5. Розв’язати рівняння $\log_5^2 x - \log_{\sqrt{5}} x - 3 = 0.$

Розв‘язання. Перейдемо в другому доданку до основи 5 і зробимо заміну змінної

$$t = \log_5 x,$$

тоді

$$\log_{\sqrt{5}} x = \frac{\log_5 x}{\log_5 \sqrt{x}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t.$$

Тепер дане рівняння запишемо у вигляді

$$t^2 - 2t - 3 = 0.$$

Коренями цього квадратного рівняння є 3 і -1. Розв’язавши рівняння заміни

$$\log_5 x = 3 \text{ і } \log_5 x = -1,$$

знайдемо:

$$x = 5^3 = 125 \quad \text{і} \quad x = 5^{-1} = 0{,}2.$$

Відповідь: 125; 0,2.

Приклад 6. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} \lg\left(x^2+y^2\right)=2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$

Розв‘язання. Перше рівняння системи рівносильне рівнянню

$$x^2 + y^2 = 100,$$

а друге – рівнянню

$$\frac{x}{16} = \frac{3}{y},$$

причому

$$x>0 \text{ і } y>0.$$

Таким чином, ми приходимо до системи, що складається з двох рівнянь $x^2+y^2=100$ і $xy=48$

на двох нерівностей

$$x > 0 \text{ і } y > 0.$$

Віднявши почленно від рівняння, дістанемо:

$$x^2 + y^2 - 2xy = 4,$$

тобто

$$(x - y)^2 = 4,$$

звідки

$$x - y = 2,$$

або

$$x - y = -2.$$

Отже,

$$y = x - 2 \text{ або } y = x + 2.$$

Підставивши ці вирази для y в друге рівняння системи, маємо:
а) якщо $\underline{y = x - 2}$, то

$$x(x - 2) = 48,$$
$$x^2 - 2x - 48 = 0,$$
$$x = 8 \text{ àáî } x = -6.$$

Оскільки $x > 0$, то залишаємо корінь

x=8 і тоді y=6;

б) якщо $\underline{y = x + 2}$, то

$$x(x + 2) = 48,$$
$$x^2 + 2x - 48 = 0,$$
$$x = -8 \text{ àáî } x = 6.$$

Оскільки $x > 0$, то

x=6 і тоді y=8.

Отже, дана система рівнянь має два розв'язки: а) x=8, y=6; б) x=6, y=8.

Відповідь: (8;6), (6;8).

Зауважимо, що за допомогою логарифмів можна записати корінь будь-якого показникового рівняння виду

$$a^x = b, \text{ де } b > 0.$$

Цей корінь має вигляд:

$$x = \log_a b.$$

Приклад 7. Розв'яжемо рівняння $5^{1-3x} = 7$.

Розв'язання. За основною логарифмічною тотожністю

$$7 = 5^{\log_5 7}$$

і рівнянням запишемо у вигляді

$$5^{1-3x} = 5^{\log_5 7},$$

звідки

$$1-3x = \log_5 7 \text{ і } x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\log_5 7.$$

Вправи

1. Розв’яжіть рівняння.

1) а) $2^x = 10$; б) $(0,3)^x = 7$;

в) $9^x = 0,7$; г) $10^x = \pi$;

д) $\log_3 x = 2$; е) $\log_{0,4} x = -1$;

є) $\lg x = -2$; ж) $\log_9 x = -\frac{1}{2}$.

2) а) $\log_2(3-x) = 0$; б) $\log_{0,3}(5+2x) = 1$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4) = -2$; г) $\log_\pi(x^2+2x+3) = \log_\pi 6$.

3) а) $3^{2-5x} = 7$; б) $0,2^{4-x} = 3$;

в) $5^{x^2} = 7$; г) $3^{x^2+4x} = 9$.

2. Розв’яжіть нерівність.

1) а) $\log_3 x > 2$; б) $\log_7 x < 0,1$;

в) $\log_{0,7} x > 5$; г) $\log_{0,2} x < -2$.

2) а) $3^x < 5$; б) $0,8^x < 11$;

в) $1,7^{2x-1} \ge 7$; г) $0,3^{2-x} > 12$.

3) а) $\log_2(x^2-x-4) < 3$; б) $\log_3(12-2x-x^2) > 2$;

в) $\lg(x^2-x+8) \ge 1$; г) $\log_\pi(x+1) + \log_\pi x < \log_\pi 2$.

4) а) $\lg^2 x + 2\lg x > 3$; б) $\log_2^2 x - \log_2 x \le 6$;

в) $4^x - 2^x \le 2$;

г) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 2\left(\frac{1}{3}\right)^x > 3$.

3. Що більше:

а) $\log_3 5$ чи $\log_7 4$;

б) $\log_{0,3} 2$ чи $\log_5 3$;

в) $\log_2 10$ чи $\log_5 30$;

г) $\log_3 10$ чи $\log_8 57$?

4. Подайте $\lg x$ через $\lg a$ і $\lg b$, де $a > 0$, $b > 0$, $x > 0$.

а) $x = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^2}}$;

б) $x^2 = a^{2,5}\sqrt[4]{b^3}$;

в) $\sqrt[3]{x} = a^{\sqrt{2}}\sqrt[5]{b^2}$;

г) $\sqrt[7]{x^2 a} = \left(\sqrt{a}\right)^{\sqrt{10}} b^{\frac{1}{3}\lg a}$.

5. Розв’яжіть рівняння .

1) а) $\log_a x = \log_a 3 + \log_a 5$;

б) $\log_a x = \log_a 12 - 2\log_a 2$;

в) $\log_a x = \log_{\sqrt{a}} 2 + \log_{\frac{1}{a}} 3$;

г) $\log_a x + \frac{1}{3}\log_a 2 = \log_{a^2} 3$;

д) $\lg^2 x = 1$;

е) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$;

є) $\log_3^2 x + \log_{0,2} x = 2$;

ж) $\log_2^2(x+1) - \log_{\frac{1}{4}}(x+1) = 5$.

2) а) $x^{\lg x} = 10000$;

б) $x^{\log_5 x} = 125x^2$;

в) $x^{\log_2 x - 2} = 8$;

г) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$.

3) а) $\frac{1}{\lg x - 6} + \frac{1}{\lg x + 2} = 1$;

б) $\frac{1}{\lg x + 1} + \frac{1}{\lg x + 5} = 1$;

в) $\log_2 x + \frac{4}{\log_x 2} = 5$;

г) $2\log_{\sqrt{3}} x + \log_x \frac{1}{3} = 3$.

6. Розв'яжіть систему рівнянь.

1) а) $\begin{cases} x+y=7, \\ \lg x+\lg y=1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_4 x-\log_4 y=1+\log_4 9, \\ x+y-20=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=2, \\ \log_{48} x+\log_{48} y=1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+y)=2, \\ \log_5(x-y)=2. \end{cases}$

2) а) $\begin{cases} 3^x+3^y=12, \\ 3^{x+y}=27; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} y=2, \\ \log_{\frac{1}{3}} x-\log_{\frac{1}{3}} y=4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)}=50, \\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3^{2x}-2^y=725, \\ 3^x-2^{\frac{y}{2}}=25. \end{cases}$

3) а) $\begin{cases} y-\log_3 x=1, \\ x^y=3^{12}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3^y\cdot 9^x=81, \\ \lg(x+y)^2-\lg x=2\lg 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)}=48, \\ 2\log_5(2y-x-12)=\log_5(y-x)+\log_5(y+x); \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{1}{\lg y-1}+\dfrac{1}{\lg y+1}=2^{-x}, \\ \lg^2 y-2^x=5. \end{cases}$

Українсько-англійський словник

арифметичний корінь – arifthmetical root
біквадратне рівняння - biquadratic
велосипедист - cyclist
властивість - property
двочлен - binomial
дискримінант – discriminant
добуток - product
довжина - length
доданок - item
дріб - fraction
заміна - replacement
зведення - interval
змінна - change
знаменник - denominator
інтервал - interval
ірраціональнисть - irrationality
калькулятор - calculator
квадратний корінь - square root
квадратний тричлен- quadratic trinomial
квадратний тричлена
кінотеатр - cinema
коефіцієнт - factor
корені рівняння – equation roots
корень n-го степеня n-th power root
крива знаків – singns curve
кубічний корінь – cubical root
лінійна залежність –dependence
лінійне рівняння з однією змінною – linear equation with one variable
метод інтервалів – intervals method
многочлен - polynomial
множина - multiple
множник - multiplier
модуль - module
мотоцикліст - motorcyclist

наближене значення – approximate value
натуральне число - natural number
натуральний степінь – natural power
невід´ємний - integral
неповне рівняння – incomplete equation
нестрога нерівність - unstrict inequality
об´єднання - integration
область визначення - definitional domain
область значень - value area
парний степінь – paired power
пересікаються - crossing
перетворення - conversion
периметр - perimeter
півпериметр half perimeter
пліт - raft
подвійна штрихова - dual hatching
подібні члени – similar terms
показник кореня – root exponent
правило - rule
проміжки - spaces
проміжок - space
протилежні числа - opposite number
прямокутник - rectangle
радикал - radical
раціональність - rationality
рівносильність - equivalence
рівняннями з двома змінними – equation with two variates
розбивають - devide
розв´язок - solution
розв’язати систему рівнянь – to solute the equation system
розв’язок системи – system solution
розклад - timetable
сенс - sence
система - system
співвідношення - ratio
співмножники - co multipliers

спосіб додавання – the way of adding
спосіб підстановки – way of substitution
спростити - simplify
теплохід - motor ship
тотожні перетворення – similar conversion
турист – turist
узагальнення - summarizing
фігурна дужка. - brace
чисельник - numerator
числова ось - axle
числова пряма – numerical line
човен - boat
швидкість - speed
ширина - width
штриховка – shading