

**Міністерство освіти і науки України
Вінницький державний технічний університет**

В. А. Петрук, І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТИНА II

Міністерство освіти і науки України
Вінницький державний технічний університет

В. А. Петрук, І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТИНА II

Навчальний посібник

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей
Протокол № 9 від 27 квітня 2001р.

Вінниця ВДТУ - 2001

УДК 51/077
П 31

Рецензенти:

І.В. Кузьмін, доктор технічних наук, професор
В.Л. Карпенко, кандидат фізико-математичних наук, професор
В.А. Найко, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України.

Петрук В.А., Хом'юк І.В., Хом'юк В.В.

Х 76 **Збірник завдань з вищої математики. Частина 2.** Навчальний посібник для студентів усіх спеціальностей. – Вінниця: ВДТУ, 2001. - 118 с.

В навчальному посібнику подано теоретичні відомості з тем вищої математики: визначений інтеграл, кратні та криволінійні інтеграли, диференціальні рівняння в вигляді означень, теорем, властивостей. Розглянуті розв'язки прикладів з кожної теми, надається 30 варіантів з кожної теми для самостійного розв'язування. З теми «Диференціальні рівняння» подані задачі для ігрових занять.

Розрахований на студентів технічних вузів усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 51/077

© В. Петрук, І.Хом'юк, В. Хом'юк 2001

Зміст

ВСТУП.....	4
1. Розділ I. Визначений інтеграл.....	5
2. Розділ II. Кратні та криволінійні інтеграли.....	21
3. Розділ III. Диференціальні рівняння.....	48
4. Задачі для самостійного розв'язування	
1) Визначений інтеграл.....	66
2) Кратні та криволінійні інтеграли	84
3) Диференціальні рівняння.....	104
5. Література.....	118

ВСТУП

Даний навчальний посібник містить в собі відомості з тем вищої математики: “Визначений інтеграл”, “Кратні та криволінійні інтеграли”, “Диференціальні рівняння”, які вивчаються студентами технічних вузів на I курсі навчання. Висвітлені в посібнику теоретичні відомості можна вважати скороченим курсом лекцій. Ці відомості підтверджуються прикладами. Після теоретичної частини в навчальному посібнику подано 30 варіантів для самостійної роботи студентів з кожної теми. Кількість розрахована на одну академічну групу. Якщо в групі більше студентів і викладач бажає видати всім різні варіанти, це можна зробити використовуючи літери прізвища, які відповідають алфавіту, поділеному на частини з номерами від 1 до 30 або скорелювати набір випадкових чисел. Наприклад, Іванов – 2, 8, 6, 5, 1, 4, 3; Петров – 30, 1, 8, 6, 25, 4, 17 і т. д.

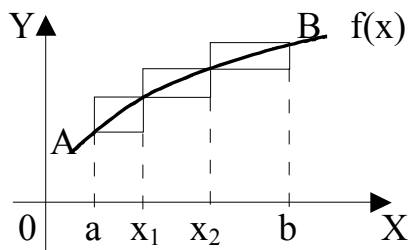
Навчальний посібник можна використовувати як для підготовки до колоквіумів, практичних занять з поданих тем, так і для типових розрахунків, контрольних домашніх робіт для студентів заочної форми навчання.

Тема “Диференціальні рівняння” має завдання для ігрових занять, які можна проводити на перших практичних заняттях з цієї теми.

1 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1 Поняття визначеного інтегралу

Нехай $f(x)=y$ неперервна на $x \in [a, b]$.



$aABb$ - криволінійна трапеція.

Відшукаємо її площу.

Для цього $[a,b]$ розіб'ємо точками на n рівних частин. Точки m_i і M_i є \min та $\max f(x)$ - інтервалу $[x_i, x_{i+1}]$,

$aABb$ - розіб'ється на n частин, площа i -ої частини більше або дорівнює $m_i (x_i - x_j)$ і менше або дорівнює $M_i (x_i - x_j)$.

$$\text{Нехай } S_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad S'_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$S_n \leq S_{aABb} \leq S'_n$, т.ч. S_n і S'_n прямують до S_{aABb} , коли $n \rightarrow \infty$

Означення. Нехай $f(x)$, $x \in [a, b]$ - неперервна невід'ємна функція, а границі послідовностей S_n і S'_n існують і рівні, їх значення називаються площиною криволінійної трапеції.

Таким чином, нехай $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ тоді $m_i \leq f(c_i) \leq M_i$ домножимо його на $\Delta x_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_n \leq \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \leq S'_n, \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = S_{aABb}$$

$n \rightarrow \infty$

Означення Нехай $f(x)$ визначена в будь-якому $x \in [a,b]$.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ існує і не залежить від вибору т. c_i , то $f(x)$

називають інтегрованою на проміжку $[a; b]$, а границя називають визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на $[a; b]$ і

позначають $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$

Властивості :

1. Для будь-якого числа α : $\int_a^b \alpha dx = \alpha(b - a)$

2. Якщо $f(x)$ інтегрована на $[a; b]$, то $\forall \alpha$ ф-я $\alpha f(x)$ також інтегрована на $[a; b]$:

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

3. Інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, якщо ф-її $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a; b]$:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

4. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a; b]$ і $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

5. Для інтегрованої функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ виконується:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

6. Якщо $f(x)$ інтегрована на $[a; b]$, то вона інтегрована на \forall проміжку $[a; b]$ крім того, якщо $f(x)$ інтегрована на $[a; c]$ і $[c; b]$, то вона інтегрована на проміжку $[a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Доведення: Нехай $a < c < b$, т.я. границя інтегрованої суми не залежить від способу ділення відрізка $[a; b]$ то будемо ділити його таким чином, щоб точка C була точкою ділення, наприклад: $C = x_m$ тоді інтегральна сума розіб'ється на дві суми:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

переходячи до границі, коли $n \rightarrow \infty$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Якщо a, b, c розташовані іншим чином, наприклад $a < b < c$, властивість зберігається, дійсно:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \Rightarrow$$

Література:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1985.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1989.
3. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1981.
4. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для втузов, ч.2. – М.: Наука, 1990.

Навчальне видання
Петрук В. А., Хом'юк І. В., Хом'юк В. В.

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТИНА II

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами

Редактор С.А. Малішевська

Підписано до друку 30.11.2001р.

Формат 29,7×42 ¹/₄

Гарнітура Times New Roman

Друк різнографічний

Ум. друк. арк. 6,27

Тираж 100 прим.

Зам. № 2001-256

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького державного технічного університету
21021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВДТУ, ГНК, 9-й поверх
Тел. (0432) 44-01-59