МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ДОНБАССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ

ОБРАБОТКА МАТЕРИАЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

№ 1 (22) – 2010

Краматорск

УДК 621.77

Михалевич В. М.
Краевский В. А.

ПОИСК РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ПРИ ГОРЯЧЕМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

В работах [1–3] отмечается, что максимально возможная деформация до разрушения, которую воспринимает материал при горячем деформировании, зависит от скорости деформирования. Для использования этого свойства с целью интенсификации процесса горячего деформирования в работе [4] на основе скалярной модели накопления повреждений при горячем деформировании:

$$\psi(t)=\int_0^t \varphi(t-\tau;I(\tau))\cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau))\cdot d\tau, \tag{1}$$

где $0\le\psi\le1$, $\psi(0)=0$, $\psi(t_*)=1$; t_* – предельное время, соответствующее разрушению образца; t, τ – время; $\varphi(t-\tau, I(\tau))$ – ядро наследственности; f – некоторая функция) и с учетом зависимости накопленной деформации ε_u от скорости деформации $\dot{\varepsilon}_u$:

$$\varepsilon_u(t)=\int_0^t \dot{\varepsilon}_u(\tau)\cdot d\tau \tag{2}$$

сформулирована вариационная задача: определить закон изменения скорости деформации $\dot{\varepsilon}_u=\dot{\varepsilon}_u(t)$, при котором за заданное время t_* материал приобретает наибольшую деформацию ε_* при условии исчерпания ресурса пластичности материала, то есть $\psi(t_*)=1$:

$$\begin{gathered}\varepsilon_*=\int_0^{t_*}\dot{\varepsilon}_u(\tau)\cdot d\tau\to\max,\\ \int_0^{t_*}\varphi(t-\tau;I(\tau))\cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau))\cdot d\tau=1.\end{gathered} \tag{3}$$

Целью работы является поиск решения вариационной задачи (3).

Задача (3) – это классическая задача изопериметрического типа. Ее решение сводится к отысканию оптимума функционала [5]:

$$\varepsilon_*(\dot{\varepsilon}_u(t))=\int_0^{t_*}\left(\dot{\varepsilon}_u(t)+\lambda\left((t_*-\tau)^{n-1}\dot{\varepsilon}_u(t)\right)\right)d\tau\to\max, \tag{4}$$

возможные значения которого определяются решением уравнение Эйлера:

$$\lambda=-(t_*-\tau)^{1-n}=const. \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет решение только при $n=1$. Данный случай тривиален, поскольку при этом модель наследственного типа (1) вырождается в линейный принцип суммирования повреждений, который, как известно [1], не описывает эффекты, связанные с влиянием на предельную накопленную деформацию закономерностей изменения скорости деформаций. В тоже время из уравнения (5) следует, что при $n\ne1$ решения уравнения Эйлера (5) не существует, а это, в свою очередь, означает, что и вариационная задача в постановке (3), также не имеет решения. Такая ситуация возникла потому, что в (3) не учтено важное условие, которое из физических представлений об исследуемом процессе, учитывает то, что разрушение материала не может произойти до времени t_*, т. е.:

$$\int_0^t \varphi(t-\tau; I(\tau)) \cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau)) \cdot d\tau \le 1, \ \forall t \in (0, t_*). \tag{6}$$

Решить задачу (3) с учетом (6) не удалось в связи с тем, что (6) эквивалентно бесконечному количеству условий, которые формируют граничную поверхность возможных значений задачи (3). Поэтому решено было упростить задачу и искать решение (3) для класса кусочно-постоянных функций. В этой работе рассмотрены двух- и трехступенчатая схемы деформирования.

Для двухступенчатой схемы:

$$\dot{\varepsilon}_u(t) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1}, 0 \le t \le t_1; \\ \dot{\varepsilon}_{u2}, t_1 < t \le t_*. \end{cases} \tag{7}$$

Задача (3) с учетом (6) сведена к задаче нелинейного программирования:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_* = \dot{\varepsilon}_{u1} \cdot t_1 + \dot{\varepsilon}_{u2} \cdot (t_* - t_1) \to \max; \\ &\left(\frac{t_*}{t_{*1}}\right)^n + \left(\frac{t_* - t_1}{t_{*2}}\right)^n - \left(\frac{t_* - t_1}{t_{*1}}\right)^n = 1, \\ &t_1 \le t_{*1}, \end{aligned} \tag{8}$$

в которой целевая функция зависит от трех неизвестных $\dot{\varepsilon}_{u1}, \dot{\varepsilon}_{u2}, t_1$, где:

$$t_{*i} = t_{*c}(\dot{\varepsilon}_{ui}), \tag{9}$$

где t_{*c} – известная функция, которая характеризует свойства материала.

Второе уравнение (8) с учетом (9) запишем в виде:

$$\dot{\varepsilon}_{u1}\left[t_*^n - (t_* - t_1)^n\right] + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_1)^n - \gamma^n = 0. \tag{10}$$

Найдем условные экстремумы целевой функции (8) при условии (10). С помощью метода множителей Лагранжа для этой цели составлена вспомогательная функция:

$$F(\dot{\varepsilon}_{u1}, \dot{\varepsilon}_{u2}, t_1, \lambda) = \dot{\varepsilon}_{u1} \cdot t_1 + \dot{\varepsilon}_{u2} \cdot (t_* - t_1) + \lambda\left[\dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_*^n - (t_* - t_1)^n\right) + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_1)^n - \gamma^n\right]. \tag{11}$$

Тогда необходимое условие существования условного экстремума запишется в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \dot{\varepsilon}_{u1}} = t_1 + \lambda\left[t_*^n - (t_* - t_1)^n\right] = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \dot{\varepsilon}_{u2}} = t_* - t_1 + \lambda(t_* - t_1)^n = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial t_1} = (\dot{\varepsilon}_{u1} - \dot{\varepsilon}_{u2})\left(\lambda n (t_* - t_1)^{n-1} + 1\right) = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_*^n - (t_* - t_1)^n\right) + (t_* - t_1)^n - \gamma^n = 0. \end{cases} \tag{12}$$

В результате получили такие критические точки:

$$\lambda = -t_*^{1-n}; t_1 = 0; \dot{\varepsilon}_{u1} = \dot{\varepsilon}_{u2} = \left(\frac{\gamma}{t_*}\right)^n; \tag{13}$$

$$\lambda = -t_*^{1-n}; t_1 = t_*; \dot{\varepsilon}_{u1} = \dot{\varepsilon}_{u2} = \left(\frac{\gamma}{t_*}\right)^n. \tag{14}$$

Обе критические точки соответствуют режиму деформирования с постоянной скоростью, что согласно анализу, проведенному в работе [4] не является оптимальной схемой.

Максимальное значение целевой функции (8) возможно также на границе области, которая определяется третьим неравенством (8):

$$t_1 = \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}. \qquad (15)$$

Учитывая, что при этом

$$\dot{\varepsilon}_{u2} = \frac{\gamma^n - \dot{\varepsilon}_{u1}\left[t_*^n - \left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right)^n\right]}{\left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right)^n}, \qquad (16)$$

сводим задачу к поиску экстремума функции одного переменного:

$$\varepsilon_*\left(\dot{\varepsilon}_{u1}\right) = \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{1-\frac{1}{n}} + \left[\gamma^n - \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_*^n - \left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right)^n\right)\right] \cdot \left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right). \qquad (17)$$

В результате искомое решение задачи (8) определяется из системы:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\dot{\varepsilon}_{u1}}\left\{\gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{1-\frac{1}{n}} + \left[\gamma^n - \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_*^n - \left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right)^n\right)\right] \cdot \left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right)^{1-n}\right\} = 0; \\ \dot{\varepsilon}_{u2} = \dfrac{\gamma^n - \dot{\varepsilon}_{u1}\left[t_*^n - \left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right)^n\right]}{\left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right)^n}; \\ t_1 = \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}. \end{cases} \qquad (18)$$

Рассмотрим трехступенчатое деформирование:

$$\dot{\varepsilon}_u = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1}, & 0 \le t \le t_1; \\ \dot{\varepsilon}_{u2}, & t_1 \le t \le t_2; \\ \dot{\varepsilon}_{u3}, & t_2 \le t \le t_*. \end{cases} \qquad (19)$$

Тогда вариационную задачу с учетом условия (6) можем записать в следующем виде:

$$\varepsilon_* = \dot{\varepsilon}_{u1} t_1 + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_2 - t_1) + \dot{\varepsilon}_{u3}(t_* - t_2) \to \max$$

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1} t_*^n - \dot{\varepsilon}_{u1}(t_* - t_1)^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_1)^n - \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_2)^n + \dot{\varepsilon}_{u3}(t_* - t_2)^n - \gamma^n = 0; \\ -\dot{\varepsilon}_{u1}(t_2 - t_1)^n + \dot{\varepsilon}_{u1} t_2^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_2 - t_1)^n - \gamma^n = 0; \\ t_1 < \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}, \end{cases} \tag{20}$$

где целевая функция ε_* зависит от пяти переменных $\dot{\varepsilon}_{u1}$, $\dot{\varepsilon}_{u2}$, $\dot{\varepsilon}_{u3}$, t_1, t_2.

Используем вышеописанный алгоритм, который разработан применительно к двухступенчатой схеме. Таким образом, оптимальное значение может находиться или в критических точках, которые находятся в середине области допустимых значений, определяемой неравенствами системы (20):

$$F_1(\dot{\varepsilon}_{u1}, \dot{\varepsilon}_{u2}, t_1, t_2) = \dot{\varepsilon}_{u1} t_1 + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_2 - t_1) + \frac{\dot{\varepsilon}_{u1}(t_* - t_1)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_*^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_2)^n - \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_1)^n + \gamma^n}{(t_* - t_2)^{n-1}}, \tag{21}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial \dot{\varepsilon}_{u1}} = 0; \; \dfrac{\partial F_1}{\partial \dot{\varepsilon}_{u2}} = 0; \; \dfrac{\partial F_1}{\partial t_1} = 0; \; \dfrac{\partial F_1}{\partial t_2} = 0; \\ -\dot{\varepsilon}_{u1}(t_2 - t_1)^n + \dot{\varepsilon}_{u1} t_2^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_2 - t_1)^n - \gamma^n = 0; \\ t_1 < \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}; \\ \dot{\varepsilon}_{u3} = \dfrac{\dot{\varepsilon}_{u1}(t_* - t_1)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_*^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_2)^n - \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_1)^n + \gamma^n}{(t_* - t_2)^n}, \end{cases} \tag{22}$$

или на границе этой области, то есть при значениях неизвестных, которые являются решениями систем (24), (26), (28):

$$F_2(\dot{\varepsilon}_{u1}, \dot{\varepsilon}_{u2}, t_2) = \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{1-\frac{1}{n}} + \dot{\varepsilon}_{u2}\rho(t_2) + \frac{\dot{\varepsilon}_{u1} \cdot \rho(t_*)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_*^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_2)^n - \dot{\varepsilon}_{u2} \cdot \rho(t_*)^n + \gamma^n}{(t_* - t_2)^{n-1}}, \tag{23}$$

$$\rho(t) = t - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}};$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_2}{\partial \dot{\varepsilon}_{u1}} = 0; \; \dfrac{\partial F_2}{\partial \dot{\varepsilon}_{u2}} = 0; \; \dfrac{\partial F_2}{\partial t_2} = 0; \\ -\dot{\varepsilon}_{u1}(t_2 - t_1)^n + \dot{\varepsilon}_{u1} t_2^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_2 - t_1)^n - \gamma^n = 0; \\ \dot{\varepsilon}_{u3} = \dfrac{\dot{\varepsilon}_{u1}(t_* - t_1)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_*^n + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_2)^n - \dot{\varepsilon}_{u2}(t_* - t_1)^n + \gamma^n}{(t_* - t_2)^n}; \\ t_1 = \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}, \end{cases} \tag{24}$$

$$F_3\left(\dot{\varepsilon}_{u1}, t_1, t_2\right) = \dot{\varepsilon}_{u1} t_1 - \frac{\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_2 - t_1\right)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_2^n}{\left(t_2 - t_1\right)^n}\left(t_2 - t_1\right) + \frac{\dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_* - t_1\right)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_*^n + \gamma^n}{\left(t_* - t_2\right)^{n-1}} +$$
$$+ \frac{\left(\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_2 - t_1\right)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_2^n\right)\left(t_* - t_2\right)^n - \left(\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_2 - t_1\right)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_2^n\right)\left(t_* - t_1\right)^n}{\left(t_* - t_2\right)^{n-1}\left(t_2 - t_1\right)^n}, \qquad (25)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_3}{\partial \dot{\varepsilon}_{u1}} = 0; \quad \dfrac{\partial F_3}{\partial t_1} = 0; \quad \dfrac{\partial F_3}{\partial t_2} = 0; \\ t_1 < \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{\,[illegible]}; \\ \dot{\varepsilon}_{u2} = \dfrac{\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_2 - t_1\right)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_2^n}{\left(t_2 - t_1\right)^n}; \\ \dot{\varepsilon}_{u3} = \dfrac{\dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_* - t_1\right)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_*^n + \gamma^n}{\left(t_* - t_2\right)^n} + \dfrac{\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_2 - t_1\right)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_2^n}{\left(t_2 - t_1\right)^n} - \\ - \dfrac{\left(\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_2 - t_1\right)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_2^n\right)\left(t_* - t_1\right)^n}{\left(t_2 - t_1\right)^n\left(t_* - t_2\right)^n}, \end{cases} \qquad (26)$$

$$F_4\left(\dot{\varepsilon}_{u1}, t_2\right) = \dot{\varepsilon}_{u1}^{\,[illegible]} \text{[illegible]} + \dot{\varepsilon}_{u1} \cdot \rho\left(t_2\right)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_2^n\Big) \cdot \rho\left(t_2\right)^{1-n} +$$
$$+ \frac{\dot{\varepsilon}_{u1} \cdot \rho\left(t_*\right)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_*^n + \gamma^n}{\left(t_* - t_2\right)^{n-1}} + \frac{\left(\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1} \cdot \rho\left(t_2\right)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_2^n\right)\left(t_* - t_2\right)}{\rho\left(t_2\right)^n} -$$
$$- \frac{\left(\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1} \cdot \rho\left(t_2\right)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_2^n\right) \cdot \rho\left(t_*\right)^n}{\text{[illegible]}}, \qquad (27)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_4}{\partial \dot{\varepsilon}_{u1}} = 0; \quad \dfrac{\partial F_4}{\partial t_2} = 0; \quad t_1 = \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}; \\ \dot{\varepsilon}_{u2} = \dfrac{\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_2 - t_1\right)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_2^n}{\text{[illegible]}}; \\ \dot{\varepsilon}_{u3} = \dfrac{\dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_* - \text{[illegible]}\right) - \text{[illegible]}\, t_*^n + \gamma^n}{\text{[illegible]}} + \dfrac{\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_2 - t_1\right)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_2^n}{\left(t_2 - t_1\right)^n} - \\ - \dfrac{\left(\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_2 - t_1\right)^n - \dot{\varepsilon}_{u1} t_2^n\right)\left(t_* - t_1\right)^n}{\left(t_2 - t_1\right)^n\left(t_* - t_2\right)^n}. \end{cases} \qquad (28)$$

Решение системы [illegible] с решением двухступенчатого деформирования (11), определяет класс [illegible] [illegible]мирования с постоянной скоростью, что не является оптимальной схемой деф[illegible]. [illegible]оэтому для конкретного материала, который идентифицируется коэффици[illegible], необходимо найти решения трех систем (24), (26), (28) и среди них выбрать то, [illegible] [illegible]ответствует наибольшей деформации. Для определения оптимальных схем [illegible] и трехступенчатого деформирования разработаны MathCad и Maple програм[illegible]

Рассмотрим экспе[illegible] [illegible]данные непрерывного кручения образцов из стали 14Х17Н2 при температур[illegible] [illegible]ри деформировании с постоянной скоростью максимальная деформация, к[illegible] [illegible]ыдержать материал до разрушения $\varepsilon_* = 1{,}8$.

При использовании двухступенчатой [illegible] параметры которой определяются решением системы (18):

$$\dot{\varepsilon}_u(t) = \begin{cases} 0{,}432 \ldots [illegible] \\ 0{,}0164 \ldots [illegible], \end{cases} \tag{29}$$

получим деформацию $\varepsilon_* = 1{,}914$. Согласно [illegible] деформация при трехступенчатой схеме, определяется системой [illegible] получим:

$$\dot{\varepsilon}_u = \begin{cases} 1{,}59\ c^{-1} \ldots [illegible] \\ 0{,}048 \ldots [illegible] \\ 0{,}01\ c^{-1} \ldots [illegible] \end{cases} \tag{30}$$

Накопленная деформация при [illegible] $\varepsilon_* = 1{,}939$. Следует отметить, что эффект от оптимизации будет [illegible] с ярко выраженной зависимостью граничных деформаций от скорости [illegible]

Полученные результаты показывают, [illegible] трехступенчатого деформирования оптимальными являются схемы с [illegible] деформирования. При этом с увеличением количества ступеней ε_* также [illegible] тогда, возможно, оптимальную схему мы получим при неограниченном [illegible] ступеней, следовательно, существует закон изменения скорости [illegible] является решением задачи (3) с учетом условия (6), который описывается [illegible] функцией. Поиск этой функции и является предметом последующих исследований.

ВЫВОДЫ

Показано, что вариационная задача [illegible] типа для модели накопления повреждений наследственного типа применительно [illegible] двух и трехступенчатого деформирования сводится к задаче нелинейного [illegible]. Получено решение задачи нелинейного программирования по определению [illegible] закона изменения скорости деформации, при котором материал за [illegible] получает наибольшую деформацию для случаев двух- и трехступенчатого [illegible] скоростей деформации. Отмечено, что оптимальными являются схемы с понижением [illegible] деформации. При этом увеличение количества ступеней приводит к увеличению [illegible] деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення [illegible] Михалевич. – Вінниця : «УНІВЕРСУМ-Вінниця», 1998. – 195 с.

2. Кривые текучести и пластичности стали [illegible] нагружении / А. М. Галкин, П. И. Полухин, С. П. Ефименко, В. Л. Пилюшенко // Изв. АН [illegible] – 1984. – № 6. – С. 185–188.

3. Богатов А. А. Влияние горячей прерывистой [illegible] пластичность металла / А. А. Богатов, М. В. Смирнов, В. А. Криницын [и др.] // Изв. вузов. Черная [illegible] – № 12. – С. 37–40.

4. Михалевич В. М. Формулювання варіаційної задачі [illegible] накопичення пошкоджень при гарячому деформуванні / В. М. Михалевич, В. О. Раєвський // Обробка [illegible] тиском. Збірник наукових праць. – Краматорськ : ДДМА, 2009. – № 2(21). – С. 12–16.

5. Гельфанд И. М. Вариационное исчисление / И. М. [illegible] Фомин. – М. : Гос. издат. физ.-мат. лит., 1961. – 230 с.

Михалевич В. М. – д-р техн. наук, проф. [illegible]

Краевский В. А. – канд. техн. наук, доц. [illegible]

ВНТУ – Винницкий национальный технический [illegible] университет, г. Винница.

E-mail: vkraevsky@mail.ru