УДК 004.627+517.962.27

**В.А. Лужецький, д.т.н., проф.; В. М. Михалевич, д.т.н., проф.;
О.В. Михалевич, студ.**

ПІДХІД ДО УЩІЛЬНЕННЯ ДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛІНІЙНИХ РЕКУРЕНТНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Рекурентною послідовністю називають послідовність a_n, в якій задані перші m членів a_0, a_1,…, a_{m-1}, а наступні ($n \geq m$) визначаються за правилом

$$a_{n+m} = f\left(a_n, a_{n+1}, ..., a_{n+m-1}\right), \tag{1}$$

де $f\left(a_n, a_{n+1}, ..., a_{n+m-1}\right)$ - деяка задана функція. В першу чергу нас цікавитимуть лінійні рекурентні послідовності, тобто такі числові рекурентні послідовності a_0, a_1,…, що визначаються лінійним рекурентним співвідношенням

$$a_n = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot a_{n-i} \quad \text{ï ðè } n \geq m, \tag{2}$$

з початковими членами a_0, a_1,…, a_{m-1}, та заданими натуральним числом m і числовими коефіцієнтами c_1,…, c_m. Число m і називається порядком послідовності. Загальна послідовність другого порядку визначається рекурентним співвідношенням

$$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2}\,. \tag{3}$$

Відомо, що характеристичним рівнянням даного рекурентного рівняння є квадратне рівняння

$$x^2 - c_1 \cdot x - c_2 = 0\,. \tag{4}$$

У випадку коли це рівняння має два різних корені x_1 та x_2, загальний розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$a_n = b_1 \cdot x_1^n + b_2 \cdot x_2^n\,. \tag{5}$$

де b_1, b_2 визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = a_0 \\ b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 = a_1 \end{cases}. \tag{6}$$

Для всіх випадків, коли один із коренів характеристичного рівняння менше одиниці, розроблено алгоритм, який дозволяє для достатньо великих чисел a_n визначити їх порядковий номер та перші два члени послідовності a_0, a_1. При цьому може виявитися, що отримані числа є компактним представленням вихідного числа. Дослідження можливості подібного підходу до ущільнення даних зумовлює необхідність оцінки щільності заповнення ряду натуральних чисел членами відповідних послідовностей. Подібні оцінки виконано для окремої множини послідовностей, що задовольняють рівнянню (3) при c_1=c_2=1. Установлено, що для кожної окремої послідовності число q-значних чисел послідовності дорівнює 4 або 5. Отримано співвідношення для обчислення кількості k_q q-значних чисел послідовності залежно від значень q, a_0, a_1:

$$k_q = \begin{cases} 5, & \left\{ \left\{ \dfrac{0,5 \cdot \lg 5 - \lg\left(\dfrac{a_1 - a_0}{\alpha} + a_0\right)}{\lg \alpha} \right\} + \left\{ \dfrac{q}{\lg \alpha} \right\} \right\} \leq \left\{ \dfrac{1}{\lg \alpha} \right\} \approx 0,78 \\ 4, & \left\{ \left\{ \dfrac{0,5 \cdot \lg 5 - \lg\left(\dfrac{a_1 - a_0}{\alpha} + a_0\right)}{\lg \alpha} \right\} + \left\{ \dfrac{q}{\lg \alpha} \right\} \right\} > \left\{ \dfrac{1}{\lg \alpha} \right\} \approx 0,78 \end{cases}. \tag{7}$$

де $\alpha = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$; $\{y\}$ - дробова частина числа y.

На основі отриманих співвідношень отримано оцінку кількості унікальних послідовностей за певних обмежень на перші два члени, та щільність заповнення членами цих послідовностей послідовності натуральних чисел. Множина унікальних послідовностей – це набір послідовностей, для кожної з яких виконується така умова: дана послідовність не може бути отримана відкиданням скінченої кількості $p>0$ перших членів будь-якої іншої послідовності даної множини.