УДК 621.7

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК РОЗВ'ЯЗКІВ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ, ЩО ПОБУДОВАНІ НА ОСНОВІ МОДЕЛІ НАКОПИЧЕННЯ ПОШКОДЖЕНЬ СПАДКОВОГО ТИПУ

В. О. Краєвський, м. Вінниця, ВНТУ

При проектуванні процесів обробки тиском кінцева деформація, яку має отримати заготовка, відома. Для оптимізації процесу бажано досягти її за найкоротший час. Стосовно гарячого пластичного деформування для вирішення цієї проблеми на основі скалярної моделі накопичення пошкоджень спадкового типу

$$\psi(t)=\int_0^t \varphi(t-\tau;I(\tau))\cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau))\cdot d\tau\,, \tag{1}$$

(де $0\le\psi\le 1$, $\psi(0)=0$, $\psi(t_*)=1$; t_* – граничний час, що відповідає руйнуванню зразка; t,τ – час; $\varphi(t-\tau,I(\tau))$ – ядро спадковості; f – деяка функція) і з врахуванням залежності накопиченої деформації ε_u від швидкості деформації $\dot{\varepsilon}_u$

$$\varepsilon_u=\int_0^t \dot{\varepsilon}_u(\tau)\cdot d\tau \tag{2}$$

була запропонована варіаційна задача [1]: визначити закон зміни швидкості деформації $\dot{\varepsilon}_u=\dot{\varepsilon}_u(t)$ при якому задана накопичена деформація ε_* досягається за найкоротший час $t_{\min}$

$$\begin{gathered} t_{\min}=t_{\min}(\dot{\varepsilon}_u(t))\to\min, \\ \varepsilon_*=\int_0^{t_{\min}}\dot{\varepsilon}_u(\tau)\cdot d\tau, \\ \int_0^{t_{\min}}\varphi(t_{\min}-\tau;I(\tau))\cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau))\cdot d\tau=1. \end{gathered} \tag{3}$$

Задача (3) не є класичною варіаційною задачею, так як значення визначеного інтеграла нам відоме, а мінімізується функціонал, який є верхньою межею визначеного інтеграла. Тому безпосереднє застосування класичних методів для її аналізу виявилось неможливим.

У роботі [2] сформульовано іншу варіаційну задачу для гарячого деформування: визначити закон зміни швидкості деформації

$\dot{\varepsilon}_u = \dot{\varepsilon}_u(t)$ при якому за заданий час t_* матеріал набуває найбільшої деформації $\varepsilon_{\max}$

$$\varepsilon_{\max} = \int_0^{t_*} \dot{\varepsilon}_u(\tau)\cdot d\tau \to \max,$$

$$\begin{cases} \int_0^{t_*} \varphi(t_* - \tau; I(\tau))\cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau))\cdot d\tau = 1, \\ \int_0^{t} \varphi(t - \tau; I(\tau))\cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau))\cdot d\tau \le 1,\ \forall t \in (0, t_*). \end{cases} \tag{4}$$

Задача (4) є варіаційною задачею ізопериметричного типу. В попередніх роботах [2] доведено відсутність розв’язку сформульованої задачі, показано, що для класу кусково-сталих функцій дана задача зводиться до задачі нелінійного програмування та отримано її розв’язки для декількох окремих випадків. На наш погляд задача (3) порівняно із задачею (4) має більш яскраво виражене практичне значення при розробці процесів обробки тиском (хоча закономірності, отримані при аналізі розв'язків задачі (4), зокрема, переваги ступеневих схем зі зменшенням швидкості деформації у порівнянні зі схемами із збільшенням швидкості деформації, є також досить важливими для практики). У цій роботі ставиться задача визначити взаємозв'язок розв'язків задач (3) та (4).

Теорема (про взаємозв'язок розв'язків варіаційних задач, що побудовані на основі моделі накопичення пошкоджень спадкового типу). Якщо $\varepsilon_{\max}$ є розв'язком задачі (4) для заданого t_*, то $t_{\min} = t_*$ буде розв'язком задачі (3) для заданого $\varepsilon_* = \varepsilon_{\max}$. Якщо $t_{\min}$ є розв'язком задачі (3) для заданого ε_*, то $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_*$ буде розв'язком задачі (4) для заданого $t_* = t_{\min}$.

Доведемо першу частину теореми. Припустимо, що розв'язком оптимізаційної задачі (3) при заданому $\varepsilon_* = \varepsilon_{\max}$ є $t_{\min} < t_*$. Позначимо $\Delta t = t_* - t_{\min}$. За час Δt матеріал здобуває деформацію $\Delta\varepsilon > 0$. Тоді за час t_* матеріал може здобути деформацію $\varepsilon_{\max} + \Delta\varepsilon$ – а це неможливо, так як $\varepsilon_{\max}$ є розв'язком оптимізаційної задачі (4) при заданому t_* (тобто є найбільшою можливою деформацією за заданий час t_*).

Припустимо, що розв'язком оптимізаційної задачі (3) при заданому $\varepsilon_* = \varepsilon_{\max}$ є $t_{\min} > t_*$. Це твердження є неможливим, так як згідно введених позначень $t_{\min}$ – найменший час, за який досягається деформація ε_*. Отже, в обох випадках, коли $t_{\min} < t_*$ та $t_{\min} > t_*$, ми дійшли до суперечності, тому $t_{\min} = t_*$. Першу частину теореми доведено.

Аналогічно, методом від супротивного, доведемо другу частину теореми. Припустимо, що розв'язком оптимізаційної задачі (4) при заданому $t_* = t_{\min}$ є $\varepsilon_{\max} \neq \varepsilon_*$. Ситуація $\varepsilon_{\max} < \varepsilon_*$ неможлива, так $\varepsilon_{\max}$ – максимальна деформація, яку здобуває матеріал за час t_*. Розглянемо випадок, коли $\varepsilon_{\max} > \varepsilon_*$. Позначимо $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_*$. Деформацію $\Delta\varepsilon$ матеріал здобуває за час $\Delta t > 0$. Тоді деформацію $\varepsilon_* = \varepsilon_{\max} - \Delta\varepsilon$ матеріал може здобути за час, який обчислимо за формулою $t_{\min} - \Delta t$ – а це неможливо, оскільки $t_{\min}$ є розв'язком оптимізаційної задачі (3) при заданому ε_* (тобто є найменшим часом за який матеріал може здобути задану деформацію ε_*). Отже, ми дійшли до суперечності, тому $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_*$. Теорему доведено.

Практичне значення сформульованої теореми полягає у тому, що основні висновки отримані при аналізі задачі (4) можливо узагальнити на задачу (3). Зокрема важливим є висновок, що розв'язку для постановки (3) взагалі не існує. Необхідно додатково, як і в задачі (4), ввести умову, що руйнування матеріалу не повинно відбутись до часу $t_{\min}$

$$\int_0^t \varphi(t-\tau; I(\tau)) \cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau)) \cdot d\tau \le 1, \ \forall t \in (0, t_{\min}). \tag{5}$$

Крім того, стає очевидним, що час деформування зменшуватиметься із застосуванням схем зі зменшенням швидкості деформування.

Висновки

У роботі сформульовано та доведено теорему про взаємозв'язок розв'язків варіаційних задач, що побудовані на основі моделі накопичення пошкоджень спадкового типу. Визначено, що в структуру задачі (3) необхідно додатково ввести умову, що руйнування матеріалу не повинно відбутись до часу $t_{\min}$. Розв'язком задачі (3) є схема зі зменшенням швидкості деформування.

Література

1. Mikhalevich V. M., Kraevskiy V. O. Variational problems for damage accumulation models heritable type // The nonlinear analysis and application 2009: Materials of the international scientific conference (April 02-04th 2009, Kyiv). – Kyiv: NTUU "KPI", 2009. – p. 109-110.

2. Михалевич В. М., Краєвський В. О. Постановка и решение оптимизационных задач в теории деформируемости // Вісник національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". Серія машинобудування. – К.: НТУУ "КПІ", 2010. – С. 142-145.