



$$I = \int_a^b f(x) dx$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$

# ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

«СУЧАСНІ ЗАСТОСУВАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ НАУК  
У ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСАХ - 2013»

---

*Матеріали II регіональної науково-практичної конференції  
молодих науковців*

*Матеріали II регіональної науково-практичної конференції молодих науковців*

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ  
МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ ТА ПРОДОВОЛЬСТВА  
УКРАЇНИ**

ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. М.КОЦЮБІНСЬКОГО  
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

*Кафедра вищої математики, інформатики,  
та математичних методів в економіці*

**ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ**

**«СУЧАСНІ ЗАСТОСУВАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ НАУК  
У ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСАХ – 2013»**

Матеріали II регіональної науково-практичної конференції  
молодих науковців

30 квітня 2013 року

*Вінниця-2013*

Збірник наукових праць «Сучасні застосування фундаментальних наук у виробничих процесах - 2013». Матеріали II регіональної науково-практичної конференції молодих науковців. - Вінниця: ВНАУ, 2013. - 293 с.

*За точність викладення матеріалу та достовірність використаних фактів відповідальність несуть автори. Рукописи не рецензуються.*

У збірнику подаються наукові статті та тези доповідей учасників II регіональної науково-практичної конференції молодих науковців «Сучасні застосування фундаментальних наук у виробничих процесах - 2013».

*Голова редакційної колегії:*

**Найко Д.А.**, к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедри вищої математики, інформатики та математичних методів в економіці ВНАУ

*Члени редакційної колегії:*

**Мороз О.В.**, д.е.н., професор, директор ННІ «Аграрної економіки» ВНАУ

**Михалевич В.М.**, д.т.н., професор, завідувач кафедри вищої математики ВНТУ

**Заболотний В.Ф.**, д.пед.н., професор, завідувач кафедри методики викладання фізики ВДПУ ім. М. Коцюбинського

**Дзись В.Г.**, к.т.н., доцент кафедри вищої математики, інформатики та математичних методів в економіці ВНАУ

**Левчук О.В.**, к.пед.н., доцент кафедри вищої математики, інформатики та математичних методів в економіці ВНАУ

**Коломісць А. М.**, д.пед.н., професор кафедри основ фундаментальних дисциплін

**Смілянець О.Г.**, к.пед.н., доцент кафедри вищої математики, інформатики та математичних методів в економіці ВНАУ

**Шевчук О.Ф.**, к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої математики, інформатики та математичних методів в економіці ВНАУ

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету обліку та аудиту ННІ аграрної економіки ВНАУ,  
протокол № 8 від 20 березня 2013 року

*Відповідальний за випуск Найко Д.А.  
Вістка Віталія Лисого*

© Колегія авторів  
©ВНАУ-2013

ЗМІСТ

Секція 1. МАТЕМАТИКА

1. <i>Абрамчук В.С., д. пед. н., проф., Байдацький О.П., Войтовик О. В., студенти</i> ЗАСТОСУВАННЯ ЕРМІТОВОЇ СПЛАЙН-ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ КОНСТРУЮВАННЯ, ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ.....	4
2. <i>Бурдейна Л.І., к. пед.н., доц., Дрижук Н.В., студентка</i> МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ЕКОНОМІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ.....	8
3. <i>Бурдейна Л.І., к. пед.н., доц., Ковель О.О., студентка</i> ВИРОБНИЧА ФУНКЦІЯ ЯК ЕКОНОМІКО-СТАТИСТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ВИРОБНИЦТВА В ЕКОНОМІЧНІЙ СИСТЕМІ.....	10
4. <i>Дубчак В. М., к.т.н., доц., Прокопчук С. М., Поп'як О. Г., студенти</i> ІСТОРІЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЕЛ $\pi$ ТА $e$ .....	13
5. <i>Дубчак В.М., к.т.н., доц., Василенко Т.С., студентка</i> МАТРИЧНА МОДЕЛЬ ПАРАЛЕЛЬНОГО ОБЧИСЛЕННЯ МНОЖИНИ МОМЕНТНИХ ОЗНАК ЦИФРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ.....	20
6. <i>Краєвський В. О., к.ф.-м.н., доц., Антонюк Л. Е., студент</i> ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ В СТРУКТУРІ НАУКОВОГО ЗНАННЯ.....	24
7. <i>Краєвський В. О., к.ф.-м.н., доц., Гаїна А. О., студент</i> З ІСТОРІЇ ВАРІАЦІЙНИХ ПРИНЦИПІВ.....	26
8. <i>Краєвський В. О., к.ф.-м.н., доц., Живелюк О. Л., студент</i> ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОНЯТТЯ ФУНКЦІОНАЛА.....	29
9. <i>Краєвський В. О., к.ф.-м.н., доц., Щербань Д. П., студент</i> ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА ТА ПРИКЛАДИ ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ.....	33
10. <i>Краєвський В. О., к.ф.-м.н., доц., Соловей Ю. К., студент</i> ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ ІЗОПЕРИМЕТРИЧНОГО ТИПУ.....	37
11. <i>Найко Д.А., к. ф.-м. н., доц.</i> МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІЖГАЛУЗЕВОГО ДИНАМІЧНОГО БАЛАНСУ.....	42
12. <i>Найко Д. А., к. ф.-м. н., доц.</i> СТАТИЧНА МАКРОЕКОНОМІЧНА МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЄВА.....	49
13. <i>Найко Д.А., к. ф.-м. н., доц., Пацалюк О.А., студентка</i> ПРО ДЕЯКІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІКО-ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.....	55
14. <i>Наконечна Л.Й., к. пед. н., доц., Гнатюк І.І., студент</i> ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ, ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ТА РІЗНІ СПОСОБИ ДОВЕДЕННЯ.....	62
15. <i>Тимошенко О.З., к.ф.-м.н., доц., Романчук А.А., студентка Романчук О.А., студентка</i> ЧАСТИНИ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ НЬЮТОНА-ЛОРЕНЦА, ЯКІ ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО АБЕЛЕВИХ ТРІЙОК ОПЕРАТОРІВ.....	67
16. <i>Бубновська І.А., асистент, Чіков І., студент</i> СИНТЕЗ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА КОМП'ЮТЕРНОЇ	

127.

3. Аккурин И.А. Единство естественнонаучного знания. – М.: Наука, 1974. – 228 с.

*Краєвський В. О., к.ф.-м.н., доц.*

*Гайна А. О., студент*

*Вінницький національний технічний університет*

### З ІСТОРІЇ ВАРІАЦІЙНИХ ПРИНЦИПІВ

#### *Анотація*

*У роботі розглянуто передумови виникнення та розвиток варіаційних принципів у геометричній оптиці, механіці та термодинаміці. У різні етапи варіаційні принципи розглядалися, як панацея, як основа математизації фізичних процесів, так і просто як гарна математична «обгортка», яка не несе жодної нової інформації. У роботі проаналізовано причини такого відношення математиків до варіаційних принципів*

Думка про те, що «природа діє найпростішим способом» (Й. Бернуллі), тобто «найощадливіше», надзвичайно стара й є джерелом багатьох наукових ідей і методичних прийомів. Ще І. Ньютон у своїх «Початках» говорив, що «не потрібно приймати в природі інших причин понад тих, які істинні й достатні для пояснення явищ, що природа нічого не дає дарма, а було б даремним робити більшим те, що може бути зроблено меншим, що природа проста й не розкошує зайвими причинами речей» [1]. Незабаром у математиці й фізиці ідея «економії» у природі одержала втілення в розвитку екстремальних принципів. Історично першим таким принципом був «принцип Ферма» у геометричній оптиці.

Ще Герон Олександрійський виводив закон відбиття світла з принципу найкоротшого шляху. Однак уже у випадку заломлення світла цей принцип явно порушувався; тому П. Ферма припустив (1662 р.), що світловий промінь обирає не найкоротший шлях, а шлях найменшого часу. Так був сформульований перший екстремальний принцип, що залишився непорушним і донині: «Істинний шлях світлового променя відрізняється від всіх можливих (мислимих) шляхів тим, що час руху уздовж нього мінімальний» [2].

Вся геометрична оптика міститься в цьому принципі, як рослина в зерні, і може бути отримана з нього шляхом методичного розгортання з урахуванням конкретних умов руху світла (щільність середовища, наявність поверхонь, що відбивають та заломлюють світло та ін.).

На цьому прикладі можна бачити дві основні риси, що властиві всім екстремальним принципам: крайній лаконізм і простота й, у той же час, украй загальний і універсальний характер. Знаючи принцип Ферма, можна розрахувати будь-яку оптичну систему, не потребуючи жодних інших законів

і геометричної оптики – всі вони є лише наслідком цього принципу.

Отже, змістом будь-якого екстремального принципу є твердження про мінімум (або максимум) деякої величини. Розрахунок траєкторії розглядається як знаходження «істинного» шляху серед усієї множини можливих. Істинний рух відрізняється від всіх можливих своєю «оптимальністю», тобто тим, що для нього деяка величина досягає мінімуму (або максимуму). Таким чином, основна проблема полягає в тому, щоб знайти величину, яка мінімізується, з'ясувати її конструкцію. Не завжди це так просто зробити, як в оптиці: механіці довелося чекати біля ста років, перш ніж відповідна конструкція була знайдена для неї.

15-го квітня 1744 року П. Мопертюї подав Паризькій Академії мемуар, у якому пропонувався новий універсальний принцип механіки – принцип найменшої дії: істинний рух відрізняється від всіх можливих тим, що для нього величина дії мінімальна.

Саме поняття дії – як добутку маси, швидкості й шляху – було введено ще Г. Лейбніцем, причому йому, напевно, навіть було відомо, що в «істинних» рухах дія має завжди мінімальне значення. Однак Лейбніц утримався від формулювання якого-небудь загального принципу, пов'язаного із цією властивістю дії.

Мопертюї ж проголосив його найзагальнішим законом природи. Закони руху й спокою, на думку Мопертюї, виведені з цього принципу, є точно тими, які спостерігаються в природі, і ми можемо захоплюватися результатами його застосування до всіх явищ: рух тварин, виростання рослин, обертання світил є лише його наслідками.

Мемуар викликав серед вчених того часу запеклу полеміку, яка далеко виходить за рамки механіки. Головним предметом суперечки було: чи є події, що відбуваються у світі, причинно зумовленими або вони телеологічно спрямовуються якимось вищим розумом за допомогою «кінцевих причин», тобто цілей? Сам Мопертюї підкреслював і відстоював телеологічний характер свого принципу й прямо стверджував, що «економія дії» у природі доводить існування бога.

Остання теза викликала різку відсіч з боку матеріалістично налаштованих учених і публіцистів того часу (Д'Аламбер, Дарсі, Вольтер). Дискусія велася й в інших напрямках, зокрема, критикувалося визначення дії, запропоноване Мопертюї. Ряд авторів заперечував універсальний характер цього принципу, деякі наводили приклади «істинних» рухів, у яких «дія» не мінімальна, а навпаки, максимальна.

Л. Ейлер виступив на захист Мопертюї, хоча сам сформулював принцип найменшої дії в чіткішій і обережній формі ще раніше за нього. Заслугою Мопертюї Ейлер вважав універсальність його принципу; сам Ейлер розглядав свій принцип лише як засіб розв'язання деяких задач механіки.

Остаточне формулювання принципу найменшої дії, що вільне від усякої «метафізики», належить Ж. Лагранжу.

Лагранжа найбільше цікавить формальна сторона механіки й мало турбує фізичне тлумачення її рівнянь. Відповідно до цього він розглядає мінімізацію дії «не як метафізичний принцип, а як простий і загальний висновок із законів

механіки». Якщо Мопертюа й Ейлер розглядали принципи найменшої дії як первинний і основний закон механіки, а всі інші закони як його наслідки, то після робіт Лагранжа встановилася позитивістська точка зору, відповідно до якої екстремальні принципи лише витончена й компактна обгортка для великої кількості дослідних фактів, що не вносить нічого нового у вже відомі закони. Будь-які спроби повернути екстремальним принципам їхнє колишнє положення – фундаменту науки – клеймувалися як теологічні. І лише в XX столітті революція, викликана у фізиці теорією відносності й квантовою механікою, привела до перегляду ролі й місця екстремальних принципів.

З'ясувалося, що поняття й закони, які лежать у основі ньютонівської фізики, не є абсолютними: вони змінюються при переході від однієї системи відліку до іншої. Справді, основними законами природи можуть вважатися лише ті, які залишаються незмінними в будь-якій системі відліку. Виявилось, що цій вимозі відповідають лише екстремальні принципи. Можна вважати, що в цей час ця суперечка вирішена остаточно: основні закони фізики (а досить імовірно, що й будь-якої іншої науки) повинні мати екстремальну форму [3].

Якщо стихійний розвиток наукової теорії спрямовано до певного ідеалу, то вчений, мабуть, заощадить собі сили й час, якщо усвідомить собі форму цього ідеалу й буде прагнути до нього свідомо. Особливо успішним може виявитися такий підхід в областях знань, які ще не знайшли строгої теоретичної форми.

Історія дійсно знає спроби такого роду. Відкриття екстремальних принципів у свій час породило надію, що до законів природи можна йти не тільки «знизу», шляхом індукції, узагальнення фактів, але й «зверху», шляхом дедукції від екстремальних принципів. Ейлер, зокрема, вважав, що для цього лише потрібно шляхом загальних «метафізичних» міркувань знайти величину, яку «заощаджує» природа в даній області природознавства (тобто «цільову функцію», «функціонал»), і сформулювати відповідний екстремальний принцип. У прихованому вигляді він містить всі потрібні нам закони; одержати їх у явній формі – справа простої математичної спритності.

Незважаючи на звабну простоту цієї програми, реалізувати її в той час жодного разу не вдалося – ні самому Ейлеру, ні тим, хто намагався йти за ним. Причина цього досить очевидна: не існувало ніякого регулярного методу для відшукування оптимальної величини. Механіці й оптиці в цьому змісті пощастило: відповідні величини були для них досить простими й, по суті, могли бути знайдені шляхом перебирання. Але вже в термодинаміці для величини, що максимізується – ентропії – не характерна ні простота, ні досить очевидний фізичний зміст. Враховуючи сучасний стан математичних методів та інформаційних технологій, у ідеї Ейлера з'являються нові перспективи.

### *Література*

1. Ньютон Исаак. Математические начала натуральной философии. – М.: Наука, 1989. – 690 с.
2. Самохин В. Н. Необходимое условие экстремума и вариационный принцип Ферма // Соросовский образовательный журнал. – 1999, №6. – С. 123-

127.

3. Полак Л.С. Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике. – М.: Физматгиз, 1960. – 600 с.

*Красевський В. О., к.ф.-м.н., доц.*

*Живелюк О. Л., студент*

*Вінницький національний технічний університет*

### ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОНЯТТЯ ФУНКЦІОНАЛА

#### Анотація

*У роботі розглянуто поняття функціонала. Наведено математичну формалізацію задач визначення максимальної площі, що обмежується лінією заданої довжини, про мінімальну поверхню обертання, про брахістохрону, про геодезичні лінії*

Функціоналами називаються змінні величини, значення яких визначаються вибором однієї або декількох функцій [1].

Наприклад, функціоналом є довжина  $l$  дуги плоскої (рис. 1) (або просторової) кривої, яка з'єднує дві задані точки  $A(x_0; y_0)$  і  $B(x_1; y_1)$ . Величина  $l$  може бути обчислена, якщо задане рівняння кривої  $y = y(x)$ ; тоді

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (1)$$

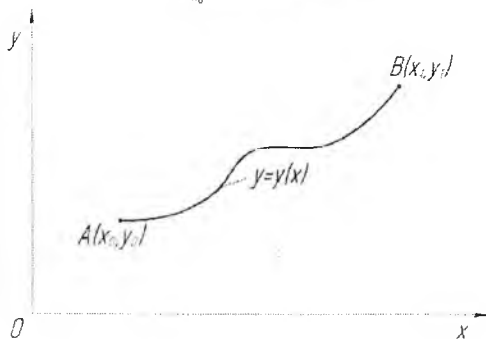


Рис. 1.

Площа  $S$  деякої поверхні також є функціоналом, бо вона визначається вибором поверхні, тобто вибором функції  $z(x, y)$ , що входить у рівняння поверхні,  $z = z(x, y)$ . Як відомо,