ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

«СУЧАСНІ ЗАСТОСУВАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ НАУК У ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСАХ - 2013»

Матеріали II регіональної науково-практичної конференції молодих науковців

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ ТА ПРОДОВОЛЬСТВА УКРАЇНИ

ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕСИТЕТ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. М.КОЦЮБИНСЬКОГО
ВІННИЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра вищої математики, інформатики,
та математичних методів в економіці

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

«СУЧАСНІ ЗАСТОСУВАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ НАУК У ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСАХ – 2013»

Матеріали ІІ регіональної науково-практичної конференції
молодих науковців

30 квітня 2013 року

Вінниця-2013

Збірник наукових праць «Сучасні застосування фундаментальних наук у виробничих процесах - 2013». Матеріали II регіональної науково-практичної конференції молодих науковців. - Вінниця: ВНАУ, 2013. - 293 с.

За точність викладення матеріалу та достовірність використаних фактів відповідальність несуть автори. Рукописи не рецензуються.

У збірнику подаються наукові статті та тези доповідей учасників II регіональної науково-практичної конференції молодих науковців «Сучасні застосування фундаментальних наук у виробничих процесах - 2013».

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету обліку та аудиту ННІ аграрної економіки ВНАУ, протокол № 8 від 20 березня 2013 року

Відповідальний за випуск ***Найко Д.А.***
Верстка Віталія Лисого

ЗМІСТ

Секція 1. МАТЕМАТИКА

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{2}\left(2t - \sin 2t\right) + C_2, \\ y = \dfrac{C_1}{2}\left(1 - \cos 2t\right). \end{cases} \tag{13}$$

Якщо перетворити параметр підстановкою $2t = t_1$ і взяти до уваги, що $C_2 = 0$, бо $y(0) = 0$, то одержимо рівняння сімейства циклоїд в звичайній формі:

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{2}\left(t_1 - \sin t_1\right), \\ y = \dfrac{C_1}{2}\left(1 - \cos t_1\right). \end{cases} \tag{14}$$

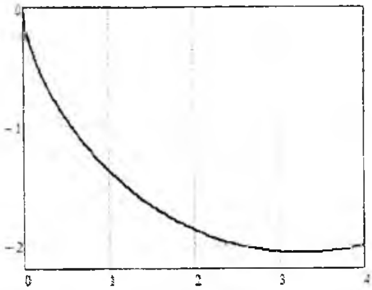

Рис. 1.

Отже, брахістохроною є циклоїда (рис. 1).

Література

1. Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Гостехиздат, 1957. – 424 с.

Краєвський В. О., к.ф.-м.н., доц.
Соловей Ю. К., студент
Вінницький національний технічний університет

ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ ІЗОПЕРИМЕТРИЧНОГО ТИПУ

Анотація

В роботі розглянуто варіаційні задачі ізопериметричного типу. Сформульовано необхідну умову існування екстремалей для відповідних задач

та визначено суть принципу взаємності. Із застосуванням розглянутого математичного апарату розв'язано задачі визначення рівняння лінії заданої довжини, що обмежує найбільшу площу та визначення форми підвішеного абсолютно гнучкого, нерозтяжного однорідного канату

Ізопериметричними задачами в вузькому розумінні цього слова називаються задачі про пошук геометричної фігури максимальної площі при заданому периметрі.

У сучасному розумінні ізопериметричними задачами називається значно загальніший клас задач, а саме: усі варіаційні задачі, в яких потрібно визначити екстремум функціонала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'\right) dx \tag{1}$$

при наявності так званих ізопериметричних умов

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'\right) dx = l_i, \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \tag{2}$$

де l_i – сталі, m може бути більше, менше чи дорівнювати n.

Для одержання основної необхідної умови в ізопериметричній задачі про знаходження екстремуму функціонала (1) при наявності зв'язків (2) потрібно скласти допоміжний функціонал [1]

$$v^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i \right) dx, \tag{3}$$

де λ_i – сталі, і написати для нього рівняння Ейлера

$$\Phi_{y_k} - \frac{d}{dx}\Phi_{y_k'} = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad \Phi = F + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i. \tag{4}$$

Довільні сталі $C_1, C_2, ..., C_{2n}$ в загальному розв'язку системи рівнянь Ейлера та сталі $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ визначаються з граничних умов

$$y_k\left(x_0\right) = y_{k0}, \; y_k\left(x_1\right) = y_{k1}, \left(k = \overline{1, n}\right) \tag{5}$$

і з ізопериметичних умов

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i, \left(i = \overline{1, m}\right). \tag{6}$$

Система рівнянь Ейлера (4) для функціоналу v^* не змінюється, якщо (3) помножити на деякий сталий множник μ_0 і, отже, подати його у вигляді

$$\mu_0 v^* = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=0}^{m} \mu_i F_i dx, \tag{7}$$

де введено позначення $F_0 = F$, $\mu_j = \lambda_j \mu_0$, $j = \overline{1,m}$. Тепер усі функції F_i входять симетрично, тому екстремалі у вихідній варіаційній задачі (1) та в задачі $\int_{x_0}^{x_1} F_s dx$ на знаходження екстремуму функціонала при наявності ізопериметричних умов

$$\int_{x_0}^{x_1} F_i dx = l_i,\ (i = 0,1,2,...,s-1,s+1,...,m) \tag{8}$$

збігаються при будь-якому виборі s $(s = 0,1,...,n)$.

Ця властивість називається принципом взаємності. Наприклад, задача про максимум площі, що обмежена замкненою кривою заданої довжини, і задача про мінімум довжини замкненої кривої, що обмежує задану площу, взаємні і мають спільні екстремалі.

Приклад 1. Знайти криву $y = y(x)$ заданої довжини l, для якої площа зображеної на рис. 1 криволінійної трапеції досягає максимуму.

Математична формалізація задачі така: $S = \int_{x_0}^{x_1} y dx \to \max,$

$$\begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = l; \\ y(x_0) = y_0;\ y(x_1) = y_1. \end{cases} \tag{9}$$

Розв'язання. Складаємо спочатку допоміжний функціонал

$$S^* = \int_{x_0}^{x_1} \left(y + \lambda\sqrt{1 + y'^2} \right) dx.$$

Оскільки підінтегральна функція не містить x, то загальний розв'язок рівняння Ейлера шукаємо, як $F - y'F'_{y'} = C_1$ [2]. Тоді

$$y + \lambda\sqrt{1 + y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1,$$

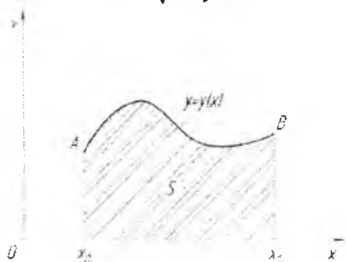

Рис. 1.

звідки

$$y - C_1 = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Введемо параметр t, вважаючи $y' = \operatorname{tg} t$; тоді отримаємо

$$y - C_1 = -\lambda \cos t;$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t,$$

звідки

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} t} = \frac{\lambda \sin t \, dt}{\operatorname{tg} t} = \lambda \cos t \, dt;$$

$$x = \lambda \sin t + C_2.$$

Отже, рівняння екстремалей у параметричній формі має вигляд:

$$\begin{cases} y - C_1 = -\lambda \cos t; \\ x - C_2 = \lambda \sin t, \end{cases}$$

чи, виключивши t, одержимо $(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2$ – сімейство кіл. Сталі визначаються з умов (9).

Приклад 2. Знайти форму абсолютно гнучкого, нерозтяжного однорідного канату довжиною l, що підвішений у точках A і B (рис. 2).

Оскільки в положенні рівноваги центр ваги повинен займати найнижче положення, то задача зводиться до знаходження мінімуму статичного моменту P щодо горизонтальної осі Ox. Досліджуємо на екстремум функціонал

$$P = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

за умови, що

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l.$$

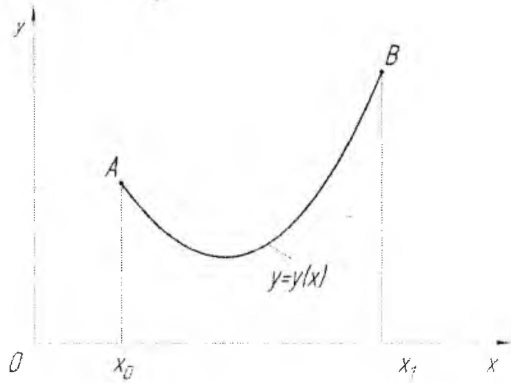

Рис. 2.

Розв'язання. Складаємо допоміжний функціонал

$$P^* = \int_{x_0}^{x_1} (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

для якого рівняння Ейлера має вигляд

$$F - y'F'_{y'} = C_1$$

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - \frac{(y+\lambda)y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1,$$

звідки

$$y+\lambda = C_1\sqrt{1+y'^2}.$$

Вводимо параметр t, вважаючи, що

$$y' = \operatorname{sh} t.$$

Звідки

$$y+\lambda = C_1 \operatorname{ch} t;$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} t;$$

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{sh} t} = C_1 dt;$$

$$x = C_1 t + C_2,$$

чи виключаючи параметр t отримаємо

$$y+\lambda = C_1 \operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1},$$

тобто форма абсолютно гнучкого, нерозтяжного однорідного канату є ланцюговою лінією (рис. 3).

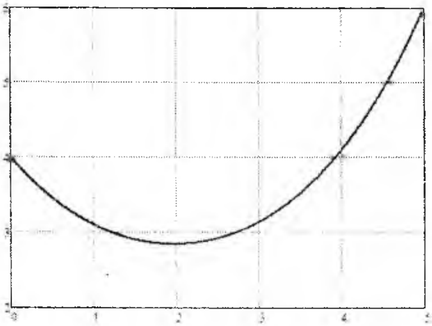

Рис. 3.

Література

1. Гельфанд И. М., Фомин С. В., Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.

2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Гостехиздат, 1957. – 424 с.

Найко Д.А., к. ф.-м. н., доц.
Вінницький національний аграрний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МІЖГАЛУЗЕВОГО ДИНАМІЧНОГО БАЛАНСУ

Анотація

Дана робота носить оглядово – аналітичний характер та стосується математичного моделювання міжгалузевого динамічного балансу

1. Динамічна модель Леонтьєва. Нехай економічна система має в своєму складі n галузей (і виробничу і споживчу) та n типів продуктів (товарів). Кожна галузь виробляє лише один продукт, різні галузі виробляють різні продукти. Коефіцієнти a_{ij} матриці прямих витрат $A = \| a_{ij} \|$ не залежать від часу та масштабу виробництва.

Час в моделі дискретний і змінюється через проміжки, що дорівнюють року $t = 1, 2, \dots T$. Оскільки модель подаватимемо у вигляді матриці, то нижній індекс означатиме номер року.

В моделі використовуватимемо $(n+1)$ змінних, що характеризують стан економіки в динаміці.

x_t – вектор-стовпець валових випусків галузей;

$\overline{x}_t$ – вектор-стовпець галузевих потужностей (максимально можливих випусків);

ν_t – вектор введення потужностей;

L_t – трудові ресурси.

Крім того розглядаємо такі матриці зі сталими коефіцієнтами (ліворуч вказуємо їхні розмірності):

$(n \times n)$ $B = \| b_{ij} \|$ – матриця фондомісткості;

$(n \times 1)$ $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)'$ – вектор-стовпець споживання в розрахунку на одного зайнятого;

$(1 \times n)$ $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ – вектор-рядок трудомісткості.

В цих позначеннях модель записується так:

$$x_t \geq Ax_t + B\nu_t + L_t c; \tag{1}$$

$$x_t \leq \overline{x}_{t-1}; \tag{2}$$

$$\overline{x}_t \leq \overline{x}_{t-1} + \nu_t; \tag{3}$$