№ 3 (95)

2016

Техніка, енергетика, транспорт АПК

УДК 621.77

АНАЛІЗ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ МАКСИМІЗАЦІЇ НАКОПИЧЕНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ БАГАТОСТУПЕНЕВОМУ ГАРЯЧОМУ ДЕФОРМУВАННІ

Краєвський Володимир Олександрович *к.т.н., доцент*
Вінницький національний технічний університет
Krajewski V.
Vinnytsia National Technical University

Анотація: *у роботі розглянуто метод Куна-Таккера та метод введення додаткових змінних для розв'язання задачі максимізації накопиченої деформації під час багатоступеневого гарячого деформування. Визначено, що метод введення додаткових змінних дає найбільш громіздкі співвідношення. Проблеми виникають вже при двохступеневому деформуванні. Тому у подальшій роботі при розгляді трьохступеневого деформування та узагальнення для k - ступеневого деформування даний метод ми виключимо. Метод Куна-Таккера дає задовільні результати для двох- та трьохступеневого, але необхідно ще проаналізувати його можливості для узагальнення на випадок k - ступеней.*

Ключові слова: *гаряче деформування, варіаціне числення, нелінійне програмування, накопичення пошкоджень, спадкова модель, теорема Куна-Таккера.*

Вступ

З метою оптимального керування механізмом накопичення пошкоджень при гарячому пластичному деформуванні у роботі [1] запропоновано варіаційну задачу максимізації накопиченої деформації: визначити закон зміни швидкості деформації $\dot{\varepsilon}_u\left(t\right)$ при якому за заданий час t_* матеріал здобуває найбільшу деформацію $\varepsilon_{\max}$

$$\varepsilon_{\max} = \int_0^{t_*} \dot{\varepsilon}_u\left(\tau\right)\cdot d\tau \to \max, \tag{1}$$
$$\begin{cases} \int_0^{t_*} \varphi\left(t_* - \tau; I\left(\tau\right)\right)\cdot f\left(\dot{\varepsilon}_u\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau = 1, \\ \int_0^{t} \varphi\left(t - \tau; I\left(\tau\right)\right)\cdot f\left(\dot{\varepsilon}_u\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \le 1, \ \forall t \in \left(0, t_*\right), \end{cases}$$

де t, τ – час; $I\left(\tau\right)$ – сукупність безрозмірних інваріантів напружено-деформованого стану; $\varphi\left(t-\tau, I\left(\tau\right)\right)$ – ядро спадковості моделі накопичення пошкоджень при гарячому пластичному деформуванні [2]; f – деяка функція.

Доведено [3], що розв'язки поставленої задачі існують лише на межі області, що визначається нерівностями

$$\int_0^{t} \varphi\left(t - \tau; I\left(\tau\right)\right)\cdot f\left(\dot{\varepsilon}_u\left(\tau\right)\right)\cdot d\tau \le 1, \ \forall t \in \left(0, t_*\right)\cdot \tag{2}$$

Перед знаходженням розв'язку задачі (1) у загальній постановці, було проаналізовано шляхи розв'язання задачі максимізації накопиченої деформації для окремих класів функцій, для яких відповідна задача зводиться до задачі нелінійного програмування. У цьому напрямку розглядався клас кусково-сталих функцій, що з технологічної точки зору еквівалентно простому багатоступеневому гарячому деформуванню [2] (у межах ступеня матеріал деформується з постійною швидкістю, а на границі ступенів відбувається одномоментна зміна швидкості)

$$\dot{\varepsilon}_u = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1}, \ 0 \le t \le t_1; \\ \dot{\varepsilon}_{u2}, \ t_1 \le t \le t_2; \\ \ldots \\ \dot{\varepsilon}_{uk}, \ t_{k-1} \le t \le t_*. \end{cases} \tag{3}$$

Стосовно найпростішої схеми багатоступеневого гарячого деформування – двохступеневої, при апроксимації залежності часу деформування від швидкості деформації степеневою функцією

$$t_{*i} = \gamma\left(\eta, D\right)\dot{\varepsilon}_{ui}^{\alpha\left(\eta, D\right)}, \tag{4}$$

отримали наступну задачу нелінійного програмування

$$\varepsilon_* = \dot{\varepsilon}_{u1} \cdot t_1 + \dot{\varepsilon}_{u2} \cdot (t_* - t_1) \to \max,$$
$$\left(\frac{t_*}{t_{*1}}\right)^n + \left(\frac{t_* - t_1}{t_{*2}}\right)^n - \left(\frac{t_* - t_1}{t_{*1}}\right)^n = 1, \tag{5}$$
$$t_1 \le t_{*1},$$

де $n = -\frac{1}{\alpha(\eta, D)}$; $a(\eta, D)$, $\gamma(\eta, D)$ – деякі функції, що характеризують властивості матеріалу при даній температурі; η – показник жорсткості напруженого стану; D – відношення третього і другого інваріантів девіатора швидкостей деформацій.

Задачу (5) ми розв'язали у попередніх роботах [4] звівши до задачі знаходження найбільшого значення функції двох змінних у області, яка визначається нерівністю $t_1 \le t_{*1}$. Незручність відповідного алгоритму зумовлюється необхідністю окремо шукати локальні екстремуми функції ε_* та досліджувати її на границі області. Тобто для знаходження розв'язку задачі (5) необхідно знайти розв'язок системи двох нелінійних рівнянь з двома невідомими, а потім знайти умовний екстремум на границі, тобто знайти розв'язок нелінійного рівняння. Потім отримані розв'язки порівняти і вибрати той, де забезпечується максимальне значення цільової функції. Відповідний алгоритм ще суттєво ускладнюється для випадку триступеневого деформування і досить важко робити узагальнення на випадок k - ступеней [5].

Метою роботи є аналіз існуючих методів розв'язання задач нелінійного програмування та вибір такого, який найкраще підходить для розв'язання поставленої задачі (5) і з можливістю узагальнення на випадок k-ступеневого гарячого деформування.

Основна частина

Один з основних методів, який застосовується у нелінійному програмуванні – метод, який базується на теоремі Куна-Таккера. Даний метод використовується для знаходження оптимального значення цільової функції

$$f(x) \to \max(\min); \tag{6}$$

при двох типах обмежень: рівнянь і нерівностей

$$\begin{cases} g_i(x) \le 0,\ i = 1,...,k, \\ h_j(x) = 0,\ j = 1,...,m. \end{cases} \tag{7}$$

Складемо для даної задачі функцію Лагранжа, що залежить від $n + k + m$ змінних $(x_1,...,x_n; \lambda_1,...,\lambda_k; \mu_1,...,\mu_m)$:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j h_j(x),$$

де $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_k)$ – вектор множників Лагранжа для обмежень-нерівностей, $\mu = (\mu_1,...,\mu_k)$ – вектор множників Лагранжа для обмежень-рівностей.

У формулюванні необхідної ознаки буде використовуватись градієнт функції L по x:

$$\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla h_j(x)$$

Теорема Куна-Таккера (необхідна умова існування розв'язку задачі (6)): Для того, щоб точка x^0 була точкою локального мінімуму (максимуму) задачі (6) необхідно виконання наступних умов:

Умови стаціонарності:

$$\nabla_x L(x^0, \lambda, \mu) = 0;$$

Умови нежорсткості:

$$\lambda_i g_i(x^0) = 0,\ i = 1,...,k;$$

Умови невід'ємності:

$$\lambda_i \ge 0,\ i = 1,...,k.$$

При цьому усі множники Лагранжа λ_i та μ_i одночасно не можуть бути рівними нулю.

Для задачі (5) функція Лагранжа має вигляд

$$L(\varepsilon_1, t_1, \lambda) = \dot{\varepsilon}_{u1} t_1 + \frac{\gamma^n - \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_*^n - \left(t_* - t_1\right)^n\right)}{\left(t_* - t_1\right)^{n-1}} + \lambda\left(t_1 - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right).$$

Тоді умова стаціонарності

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}_{u1}} = t_1 + \left(t_* - t_1\right)^{1-n}\left[\left(t_* - t_1\right)^n - t_*^n\right] + \frac{\gamma \cdot \lambda}{\dot{\varepsilon}_{u1}^{\frac{1}{n}+1} \cdot n} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_1} = \lambda + \dot{\varepsilon}_{u1} - \dot{\varepsilon}_{u1} \cdot n + \frac{(n-1)\cdot\left[\dot{\varepsilon}_{u1} \cdot \left[\left(t_* - t_1\right)^n - t_*^n\right] + \alpha^n\right]}{\left(t_* - t_1\right)^n} = 0,$$

умова нежорсткості

$$\lambda \cdot \left(t_1 - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}}\right) = 0,$$

та умова невід'ємності

$$\lambda \geq 0.$$

У результаті для знаходження можливих точок існування розв'язку задачі (5) отримали сукупність систем нелінійних рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t_1 + \left(t_* - t_1\right)^{1-n}\left[\left(t_* - t_1\right)^n - t_*^n\right] = 0, \\ \dot{\varepsilon}_{u1} - \dot{\varepsilon}_{u1} \cdot n + \dfrac{(n-1)\cdot\left[\dot{\varepsilon}_{u1} \cdot \left[\left(t_* - t_1\right)^n - t_*^n\right] + \alpha^n\right]}{\left(t_* - t_1\right)^n} = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} t_1 + \left(t_* - t_1\right)^{1-n}\left[\left(t_* - t_1\right)^n - t_*^n\right] + \dfrac{\gamma \cdot \lambda}{\dot{\varepsilon}_{u1}^{\frac{1}{n}+1} \cdot n} = 0, \\ \lambda + \dot{\varepsilon}_{u1} - \dot{\varepsilon}_{u1} \cdot n + \dfrac{(n-1)\cdot\left[\dot{\varepsilon}_{u1} \cdot \left[\left(t_* - t_1\right)^n - t_*^n\right] + \alpha^n\right]}{\left(t_* - t_1\right)^n} = 0, \\ t_1 - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}} = 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{8}$$

Застосуємо отриману сукупність систем рівнянь (8) для знаходження оптимального режиму двоступеневого гарячого кручення зразків із сталі 14Х17Н2 при температурі 1150^{0}С.

Розв'язок першої системи дає нам єдину точку, яка відповідає режиму деформуванню із сталою швидкістю, що згідно із аналізом проведеним у роботі [4] не може бути оптимальною схемою деформування. Розв'язок другої системи визначає режим деформування із зниженням швидкості на другій ступені:

$$\dot{\varepsilon}_u(t) = \begin{cases} 0.4329\ c^{-1}, 0 \leq t \leq 3.4268; \\ 0.0164\ c^{-1}, 3.4268 < t \leq 30, \end{cases} \tag{9}$$

Дана схема аналогічна тій, яку ми отримали у роботі [4]. При цьому максимальна накопичена деформація $\varepsilon_* = 1.914$, що на 6.3% більше ніж при деформуванні із сталою швидкістю.

Спробуємо застосувати інший метод розв'язання задач нелінійного програмування, який базується на приведенні обмежень-нерівностей до рівнянь шляхом введення додаткових (невід'ємних) змінних і далі використання методу множників Лагранжа для пошуку умовного екстремуму функції багатьох змінних.

Для задачі (5) отримаємо

$$\begin{gathered}\varepsilon_* = \dot{\varepsilon}_{u1} \cdot t_1 + \dot{\varepsilon}_{u2} \cdot \left(t_* - t_1\right) \to \max, \\ \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1}\left[t_*^n - \left(t_* - t_1\right)^n\right] + \dot{\varepsilon}_{u2}\left(t_* - t_1\right)^n - \gamma^n = 0, \\ t_1 - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{-\frac{1}{n}} + \lambda = 0,\ \lambda \ge 0. \end{cases}\end{gathered}$$

Звідки

$$\varepsilon_*\left(t_1, \lambda\right) = \left(\frac{\gamma}{t_1 + \lambda}\right)^n \cdot \left[t_1 + \frac{\left(t_1 + \lambda\right)^n - t_*^n + \left(t_* - t_1\right)^n}{\left(t_* - t_1\right)^{n-1}}\right] \to \max,$$

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1} = \left(\dfrac{\gamma}{t_1 + \lambda}\right)^n, \\ \dot{\varepsilon}_{u2} = \left(\dfrac{\gamma}{t_1 + \lambda}\right)^n \dfrac{\left(t_1 + \lambda\right)^n - t_*^n + \left(t_* - t_1\right)^n}{\left(t_* - t_1\right)^n},\ \lambda \ge 0. \end{cases}$$

У результаті необхідно знайти максимум функції двох змінних. На етапі знаходження стаціонарних точок отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими. Рівняння нелінійні і досить громіздкі. Тому ми навіть їх не приводимо. Тим не менше дану систему також вдалось розв'язати за допомогою системи Maple і також отримали оптимальну схему деформування, що аналогічна отриманій у попередніх дослідженнях.

Висновки

Метод із введенням додаткових змінних дає найбільш громіздкі співвідношення. Проблеми виникають вже при двохступеневому деформуванні. Тому у подальшій роботі при розгляді трьохступеневого деформування та узагальнення для k - ступеневого деформування даний метод ми виключимо із розгляду. Метод Куна-Таккера дає задовільні результати для двох- та трьохступеневого, але необхідно ще проаналізувати його можливості для узагальнення на випадок k - ступеневого деформування.

Список літератури

1. Mikhalevich V.M. Variational problems for damage accumulation models heritable type / V.M. Mikhalevich, V.O. Kraevsky // The nonlinear analysis and application 2009: Materials of the international scientific conference (April 02-04th 2009, Kyiv). – Kyiv: NTUU "KPI", 2009. – p. 109-110.

2. Михалевич В.М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В.М. Михалевич // Вінниця: "УНІВЕРСУМ- Вінниця", 1998 – 195 с.

3. Михалевич В.М. Постановка и решение оптимизационных задач в теории деформируемости / В.М. Михалевич, В.А. Краевский // Вісник національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". Серія машинобудування. – К.: НТУУ "КПІ", 2010. - С. 142-145.

4. Михалевич В.М. Поиск решения вариационной задачи при горячем деформировании / В.М. Михалевич, В.А. Краевский // Обработка материалов давлением. – Краматорск: ДГМА. – 2010. – №1(22). – С. 38-43.

5. Михалевич В.М. Определение оптимальных параметров многоступенчатой схемы изменения скорости деформаций / В.М. Михалевич, В.А. Краевский // Обработка материалов давлением. – 2011. – №2(27). – С. 10-13.

References

1. Mikhalevich V. M., Kraevsky V. O. Variational problems for damage accumulation models heritable type // The nonlinear analysis and application 2009: Materials of the international scientific conference (April 02-04th 2009, Kyiv). – Kyiv: NTUU "KPI", 2009. – p. 109-110.

2. Mykhalevych V.M. Tenzorni modeli Nakopychennya poshkodzhen / V.M. Mykhalevych // Vinnytsya : " UNIVERSUM- Vinnytsya " , 1998 - 195 s.

3. Mikhalevich V.M. Postanovka i resheniye optimizatsionnykh zadach v teorii deformiruyemosti / V.M. Mikhalevich, V.A. Krayevskiy // Vísnik natsíonal'nogo tekhníchnogo uníversitetu Ukraíni "Kiívs'kiy polítekhníchniy ínstitut". Seríya mashinobuduvannya. - K .: NTUU "KPÍ", 2010. - S. 142-145.

4. Mikhalevich V.M. Poisk resheniya variatsionnoy zadachi pri goryachem deformirovanii / V.M. Mikhalevich, V.A. Krayevskiy // Obrabotka materialov davleniyem. - Kramatorsk: DGMA. - 2010. - №1 (22). - S. 38-43.

5. Mikhalevich V.M. Opredeleniye optimal'nykh parametrov mnogostupenchatoy skhemy izmeneniya skorosti deformatsiy / V.M. Mikhalevich, V.A. Krayevskiy // Obrabotka materialov davleniyem. - 2011. - №2 (27). - S. 10-13.

АНАЛИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ НАКОПЛЕННОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ МНОГОСТУПЕНЧАТОМ ГОРЯЧЕМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Аннотация: *в работе рассмотрены методы Куна-Таккера и введения дополнительных переменных для решения задачи максимизации накопленной деформации при многоступенчатом горячем деформировании. Определено, что метод введения дополнительных переменных дает наиболее громоздкие соотношения. Проблемы возникают уже при двухступенчатом режиме деформации. Поэтому в дальнейшей работе при рассмотрении трехступенчатого деформирования и обобщения для* k *-ступенчатого деформирования данный метод мы исключим. Метод Куна-Таккера дает удовлетворительные результаты для двух- и трехступенчатого деформирования, но необходимо еще проанализировать его возможности для обобщения на случай* k *-ступеней.*

Ключевые слова: *горячее деформирование, вариационное исчисление, нелинейное программирование, накопление повреждений, наследственная модель, теорема Куна-Таккера.*

ANALYSIS OF THE METHODS FOR SOLVING OF THE PROBLEM MAXIMIZATION ACCUMULATED STRAIN AT MULTISTAGE HOT DEFORMATION

Summary: *in the work the Kuhn-Tucker method and the method of introducing additional variables to solve the problem of maximizing the accumulated deformation during multistage hot deformation are* considered. *It was determined that the method of introducing additional variables provides the most complicated expressions. Problems arise even for two-stage deformation mode. Therefore, in future work when considering the three-stage deformation and* k *-step deformation this method will eliminated. Kuhn-Tucker method gives satisfactory results for the two- and three-stage deformation, but must also analyze its ability for the case of* k *-step.*

Keywords: *hot deformation, the calculus of variations, nonlinear programming, the accumulation of damage, genetic model, the Kuhn-Tucker theorem.*