Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Клочко В. І., Коломієць А. А.

Методичні вказівки до вивчення поняття функціональної залежності в його історичному розвитку

Вінниця
ВНТУ
2014

Рекомендовано до друку Методичною радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 5 від 20.01.2011 р.)

Рецензенти:
В. М. Михалевич, доктор технічних наук, професор
В. С. Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор

Методичні вказівки до вивчення поняття функціональної залежності в його історичному розвитку / Уклад. В. І. Клочко, А. А. Коломієць. – Вінниця : ВНТУ, 2014. – 40 с.

У методичних вказівках висвітлено розвиток поняття “функції”, наведено основні визначення цього поняття, що були сформульовані вченими у різний час, наведено сучасне означення цього поняття, наводяться типові приклади обчислення границь функцій. Також розкрито поняття інтегралу, диференціалу функції та їх історичний розвиток.

Призначений для студентів усіх спеціальностей.

ЗМІСТ

ВСТУП

Функціональна залежність є предметом вивчення майже усіх технічних дисциплін, але у різних формах, так, на заняттях вищої математики студенти вивчають функції, способи їх задання та властивості. Наприклад, на уроках фізики, теорії основ електротехніки, вивчаючи енергетичні установки, математичні задачі електроенергетики, основи метрології та електровимірювальної техніки, студенти сприймають функції не як об'єкт вивчення, а як носій певної інформації. Насправді функції виконують роль носія інформації, але водночас вони мають власний глибокий зміст. Тому дані методичні вказівки спрямовані на розкриття поняття функціональної залежності, на формування у студентів наукового образу мислення, який включає в себе розуміння історичного аспекту розвитку певного поняття. У роботі відображено хід думок науковців, котрі займалися дослідженням поняття функції.

Крім того, формування у студентів правильного розуміння математичних абстракцій в їх історичному розвитку сприяє формуванню мотивації студентів до вивчення даної дисципліни.

У методичних вказівках наведено основні типові приклади обчислення границь функцій, розкрито поняття диференціала та інтеграла в історичному аспекті.

Дані методичні вказівки є важливим допоміжним джерелом інформації для викладачів та студентів усіх технічних спеціальностей.

1 ПОНЯТТЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ, ІСТОРИЧНИЙ ЕКСКУРС

*Змінна **y** називається функцією від **x** в області її зміни **X**, якщо за деяким правилом чи законом кожному значенню **x** з **X** ставиться у відповідність одне певне значення **y** (з **Y**).*

Незалежна змінна *x* називається також *аргументом* функції.

Математики зустрічалися з конкретними функціями досить часто, однак мав бути пройдений тривалий шлях поступової кристалізації понять і їх узагальнення, поки вчені усвідомили необхідність загального означення функції і знайшли його.

Дослідження залежностей між змінними фізичними величинами розпочалося в XIV столітті. Серед філософів-схоластів виникла школа, представники якої стверджували, що якості можуть бути більш або менш інтенсивними.

Французький вчений Оресм (1323–1382 рр.) зображав інтенсивності довжинами відрізків. Він розміщував їх перпендикулярно до деякої прямої. Кінці відрізків утворювали лінію, названу ним “лінією інтенсивностей” або “лінією верхнього краю”. В сучасному розумінні це означало графік відповідної функціональної залежності. Оресм вивчав навіть “площинні” і “тілесні” якості, тобто функції двох або трьох змінних. У працях Оресма зустрічаються також поняття миттєвої швидкості і прискорення. Оресму вдалося за допомогою геометричних міркувань знайти шлях, пройдений тілом при рівноприскореному русі.

До кінця XVII століття загального означення поняття функції не було, тому що не було потреби в такому означенні. Зміст поняття функції в його початковому розумінні характеризується висловленнями типу “площа квадрата є функцією довжини його сторони”, “шлях, пройдений тілом у вільному падінні, є функцією часу падіння”, “довжина металевого стержня є функцією температури навколишнього середовища”. Поняття функції явно і свідомо використовується лише з XVII століття у зв'язку з появою в математиці ідеї змінних.

Французькі математики Франсуа Вієт (1540-1603рр.) і Рене Декарт (1596-1650рр.) створили символіку, яка здобула загальне визнання. Невідомі позначалися останніми буквами латинського алфавіту – x, y, z, відомі – початковими буквами – a, b, c і т. д. Кожна буква могла означати не лише конкретні дані, але й бути змінною. З'явилася можливість записувати загальні формули. Увага матемаків спрямовувалася на вивчення відповідностей між величинами. З допомогою координат вдалося зображати ці відповідності графічно. Декарт писав: "Надаючи лінії y послідовно нескінченну множину різних значень, ми знайдемо також нескінченну кількість значень x і, таким чином, отримаємо нескінченну кількість різних точок, вони опишуть потрібну криву лінію". Тут чітко виражена ідея функціональної залежності величин y і x, ідея геометричного зображення цієї залежності, або, як би ми сказали, графіка функції. Але Декарт, як і його сучасники, зміст поняття функції розкривали мовою геометрії та механіки. Адже запас функцій, які використовували в той час математики, був дуже бідним. Навіть логарифми сприймалися лише як засіб обчислення, а не як логарифмічна функція. Щоб описати з єдиної точки зору різні випадки залежності величин, знадобилося нове, загальніше поняття.

Поступово поняття функції почали ототожнювати з поняттям аналітичного виразу – формули.

Слово "функція" (від латинського functio – здійснення, виконання) вперше було використане німецьким математиком Готфрідом Вільгельмом Лейбніцем в 1673 році у листі до Гюйгенса. Він використав цей термін в дуже вузькому розумінні слова, пов'язуючи його з геометричними образами. Йшлося про відрізки дотичних до кривих, їх проекції на осі координат і про “іншого роду лінії, що виконували для даної фігури деяку функцію”. Таким чином, функцією Лейбніц вважав відрізок, довжина якого змінюється за яким-небудь конкретним законом. З 1698 року Лейбніц ввів також терміни “змінна” і “константа”. Означення функції вперше з’явилося в одній з робіт учня і колеги Лейбніца – Йогана Бернуллі в 1718 р. Ним функція була означена як аналітичний вираз: “Функцією змінної величини називають кількість, утворену яким-небудь способом з цієї змінної величини і постійних”. Це так звана аналітична точка зору на поняття функції.

Запропоноване Й. Бернуллі означення викликало захоплення у Лейбніца, який зрозумів, що відмова від геометричних образів розпочинає нову епоху у вивченні функцій.

Для позначення довільної функції від x Бернуллі використовував символ, називаючи його характеристикою функції. Означення Бернуллі грунтувалося не лише на роботах Лейбніца і його школи, але й на дослідженнях великого математика і фізика Ісаака Ньютона (1643–1727), який вивчив різноманітні функціональні залежності і їх властивості. Замість слова функція Ньютон застосовував термін “ордината”. Учень Й. Бернуллі, Леонард Ейлер застосував символ $f:x$. Французький математик Жан Лерон Даламбер зробив крок вперед на шляху до сучасних позначень і відкинув двокрапку Ейлера, записуючи fx, ft. Остаточне формулювання означення функції з аналітичної точки зору запропонував у 1748 р. Леонард Ейлер:

“*Функція змінної кількості є аналітичним виразом, що складений яким-небудь чином з цієї кількості і чисел або постійних кількостей”.* Однак Ейлер не завжди дотримувався цього означення: в його роботах поняття функції досить динамічно розвивалось залежно від запитів математичного аналізу. Але з таким означенням функції погоджувалися протягом майже всього XVIII століття відомі математики, зокрема Лагранж, Фур'є, Даламбер.

Леонард Ейлер (1707-1783) — математик, механік, фізик та астроном. За походженням швейцарець. Л. Ейлер — вчений, надзвичайної широти інтересів і творчої продуктивності. Автор більш ніж 800 праць з математичного аналізу, диференціальної геометрії, теорії чисел, наближених обчислень, небесної механіки, математичної фізики, оптики, балістики, кораблебудування, теорії музики та інших галузей науки. Із 72 томів наукових праць Ейлера 29 відносяться до чистої математики, 31 – до механіки і астрономії, 12 – до фізики та різних питань. У математичній творчості Ейлера на першому місці стоїть аналіз нескінченно малих, якому відведено 18 томів. Л. Ейлер відрізнявся надзвичайною старанністю та працездатністю. Про нього Н. Фусс писав: "Він напружував свої думки, прагнучи того, щоб звести до мінімуму всі сумніви". В цій людині були поєднані справжня набожність та працелюбність і прагнення до порядку.

Першою проблемою, з якою математикам довелося зіткнутись з необхідністю загального означення функції, була проблема вивчення коливання струни. Нею займалися найсильніші математики середини XVIII ст. – Даламбер і Ейлер.

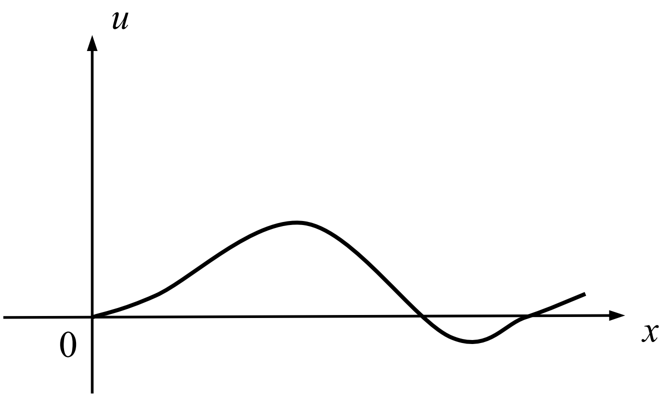


Рисунок 1

Пружній струні, що закріплена у двох точках осі абсцис $x=0$ і $x=1$, надають деяку початкову форму і потім відпускають без початкової швидкості. Струна починає коливатися. Потрібно визначити її форму в будь-який наступний момент часу.

Зараз нам відомо, що задача зводиться до відшукання функції $u(t,x)$, що задовольняє рівняння $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$, за початкових умов $u(0,x)=u_0(x),\ \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t}=0.$

Даламбер, а також Ейлер (роком пізніше) запропонували таке правило для розв'язання цієї задачі: функцію $u_0(x)$, що задає початкову формулу струни, потрібно формально продовжити з відрізка $0 \le x \le l$ на відрізок $-l \le x \le 0$ як непарну функцію; потім отриману функцію, визначену вже на відрізку $-l \le x \le l$, потрібно продовжити на всю вісь x як на періодичну з періодом $2l$. Якщо отриману періодичну функцію позначити тим самим символом $u_0(x)$, то шуканий розв'язок $u(t,x)$ можна отримати за формулою:

$$u(t,x)=\frac{u_0(x+t)+u_0(x-t)}{2}\ \ (x \le x \le l,\ t \ge 0).$$

Обидва вчені отримали результат в одній і тій же формі. Але кожен із них вважав, що його власний розв'язок має більш загальний характер, ніж у його колеги. Справа в тому, що розв'язок виражається через $u_0(x)$, початкову форму струни, яка є довільною функцією. А що таке довільна функція, кожен вчений розумів по-своєму. Для Даламбера, послідовника школи Й. Бернуллі, "довільна функція" означала "довільний аналітичний вираз", до того ж з самого початку непарний і який має період $2l$.

Для Ейлера "довільна функція" означала "довільно побудовану криву". Важко сказати, яке з понять – "довільно побудована крива" чи "довільний аналітичний вираз" – є більш загальніше, а яке більш вузьке. Між двома математиками протягом багатьох років продовжувалася дискусія.

Одним із аргументів Ейлера на користь власної точки зору було те, що кожен аналітичний вираз може бути зображений якою-небудь кривою, однак не кожна крива може бути подана аналітичним виразом. У відповідь Даламбер наголошував, що перед тим, як перевіряти, чи є крива розв'язком, потрібно записати її аналітичним виразом.

В суперечку втрутився молодий математик Д. Бернуллі (син Й. Бернуллі). Він запропонував будь-яку криву Ейлера писати у формі ряду:

$$u_0(x) = a_1 \sin\frac{x}{l} + a_2 \sin\frac{2x}{l} + \ldots + a_n \frac{nx}{l} + \ldots \qquad (1)$$

і тим самим подати її аналітичним виразом. Однак обидва вчені не погодилися з пропозицією молодого вченого.

“Далеко не кожен аналітичний вираз може бути поданий у вигляді даного ряду” – сказав Даламбер. – “Сума такого ряду має бути неперервною і мати неперервну кривизну, а аналітичний вираз, наприклад $\sqrt[3]{\sin x}$, не обов’язково має такі властивості”. “Далеко не кожна крива, – сказав Ейлер, – може бути подана даним рядом. Крива, яку я будую, може піти довільно і вираз (1) не допускає ніякої довільності, зокрема, ще з початку воно являє собою непарну і періодичну функцію. Далі дві криві можуть збігатися на одному проміжку і можуть не збігатися на іншому; аналітичні вирази Д. Бернуллі, що написані для двох цих кривих, збігалися б на одному проміжку і відрізнялися (не збігалися) на іншому, що для аналітичного виразу неможливо”.

Д. Бернуллі твердив, що в його розпорядженні є нескінченна кількість вільних коефіцієнтів: a_1, a_2,… Однак, оскільки він не вмів їх знаходити (обчислювати), його аргументація не дістала визнання.

Таким чином, суперечка двох великих математиків не мала остаточного розв’язання.

Під впливом зауважень Даламбера Л. Ейлер у книзі “Диференціальне числення” (1755 р.) дає ще одне означення функції, яке було більш математичним по суті: “Коли деякі кількості залежать від інших таким чином, що при зміні останніх змінюються і перші, то перші називаються функціями других”. Коментуючи це означення, Ейлер наголошує, що воно має “надзвичайно загальний характер і охоплює всі способи, якими одна кількість визначається з допомогою інших”.

Це нове формулювання містить у собі і означення Даламбера, і попереднє “механічне” означення самого Ейлера водночас, оскільки воно не містило жодної інформації про характер залежності перших величин від других, то зміст цього означення ще залишався досить розмитим. Тому кожен з математиків XVIII ст. міг тлумачити його так, як вважав за потрібне.

В курсі диференціального і інтегрального числення, написаного французьким математиком С. Ф. Лакруа (1765–1843) для політехнічної школи в Парижі (1797 р.), прийняте, по суті, це ж означення. Додатково сказано, що характер залежності зазделегідь може і не бути відомим. “Всяка кількість, значення якої залежить від того, відомо чи не відомо, які саме дії (операції) потрібно здійснити, щоб прийти від них до першої”.

Отже, мета доповнення Лакруа полягала, не в тому, щоб узагальнити поняття функції, а щоб дати право на існування задачам, у яких невідомою є функція. Запитання, яке поняття є більш загальне – аналітичний вираз чи крива, залишалося відкритим. Водночас постало запитання, чи можна одну функцію задавати кількома аналітичними виразами? Тому в кінці XVIII століття математики, даючи означення функції, ухилялися від відповіді на запитання, яким чином задана функція. Наприклад, французький математик Сильвестр Лакруа писав: “Всяка кількість, значення якої залежить від того, відомо чи не відомо, які саме дії (операції) потрібно здійснити, щоб прийти від неї до першої”. Отже, Лакруа вже не ототожнював поняття функції і її аналітичного виразу.

Значний внесок у з’ясування змісту поняття функції, розв’язання конфліктів між Ейлером, Даламбером, Д. Бернуллі стосовно того, як потрібно розуміти функцію, зробив французький математик Жан Батіст Жозеф Фур’є (1768–1830), який займався переважно математичною фізикою.

Жозеф Фур'є

В поданих ним до Паризької Академії наук в 1870 і 1811 рр. мемуарах з теорії поширення тепла в твердому тілі Фур'є навів перші приклади функцій, які задані на різних проміжках різними аналітичними виразами.

З праць Фур'є випливало, що будь-яка крива, незалежно від того зі скількох і яких різнорідних частин вона складена, може бути подана у вигляді єдиного аналітичного виразу і що існують також перервні криві, що зображаються аналітичним виразом. Зокрема, початкова форма струни, що коливається – ламана лінія – виражається єдиним тригонометричним рядом (рядом Д. Бернуллі). Фур'є вказав правило для обчислення коефіцієнтів у ряді Бернуллі:

$$a_n = \frac{1}{\pi l}\int_{-l}^{l} u_0(x)\sin nx dx,\ n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Таким чином, навіть функції, що задані кількома виразами, можна подати у вигляді суми нескінченного числа тригонометричних функцій. Такі суми дістали назву рядів Фур'є. Хоча сам Фур'є не зміг належним чином обґрунтувати збіжність ряду (для цього йому не вистачало точних означень понять границі і неперервності), відкриття Фур'є нанесло руйнівний удар по догмах XVIII ст., якими оперували у своїй суперечці Даламбер та Ейлер.

Виявилося також, що значення функції на одних проміжках можуть бути пов'язані з її значеннями на інших проміжках, два різних аналітичних вирази можуть давати два однакові результати на одному проміжку, і різні – на іншому, крива, що відповідає аналітичному виразу, не обов'язково мусить бути неперервною і мати неперервну кривизну. У своєму "Курсі алгебраїчного аналізу", французький математик О. Коші обґрунтував дослідження і висновки Фур'є.

Отже, фізикам і математикам доводиться користуватись і такими функціями, означити які дуже складно або навіть неможливо, обмежуючись лише аналітичним апаратом.

В 1834 р. М. І. Лобачевский (1792-1856 рр.), розвиваючи ейлерове розуміння функції, запропонував таке означення: “Загальне поняття потребує, щоб функцією від *x* називати число, яке дається для кожного *x* і разом з цим *x* поступово змінюється. Значення функції може бути задане або аналітичним виразом, або умовою, яка подає засоби випробовувати всі числа і вибирати одне з них; або, нарешті, залежність може існувати, але залишатись невідомою... Загальний погляд теорії допускає існування залежності лише у тому смислі, коли числа, одні з одними в зв’язку приймати наче разом”. В сучасному розумінні означення функції за Лобачевским було таким: “Функція від *x* – це число, яке дається для кожного *x* і разом з *x* поступово змінюється. Значення функції може бути дано або аналітичним виразом, або умовою, яка визначає спосіб перевіряти всі числа”.

До Лобачевского аналогічну точку зору на поняття функції висловив чеський математик Б. Больцано.

В 1837р. німецький математик П. Л. Діріхле так сформулював означення поняття функції: “*y* є функцією від *x,* якщо кожному значенню *x* відповідає цілком визначене значення *y*, причому зовсім не важливо, яким саме чином встановлена вказана відповідність”.

Діріхле відмовляється від правила, яким задається функція: “зовсім не важливо, яким саме чином встановлена вказана відповідність”. Прикладом, який ілюструє це означення, може бути так звана функція Діріхле:

$$D(x)=\begin{cases}0, \ \textit{якщо } x - \textit{ірраціональне число},\\ 1, \ \textit{якщо } x - \textit{раціональне число}.\end{cases}$$

З точки зору математика XVIIIст., така рівність не задає жодної функції, оскільки не вказана формула, за якою її можна обчислити.

Означення Діріхле містило ключові слова: *функція* – це *відповідність,* і здавалося таким прозорим, що було без обговорення сприйнято усіма математиками. По суті, розвиток математики в XIX ст. визначався можливостями закладеними в цьому означенні.

Інтерес М. І. Лобачевского і Діріхле до поняття функції був пов'язаний з тим, що вони займалися питаннями про розклад функції в ряди Фур'є.

В другій половині XIX ст., після створення теорії множин, в поняття функції, крім ідеї відповідності, було включено також ідею множини. Таким чином, в повному обсязі означення поняття функції формулюється таким чином: "якщо кожному елементу x множини A поставлено у відповідність деякий конкретний елемент y з множини B, то кажуть, що на множині A задано функцію $y=f(x)$, або, що множина A відображається на множину B. У першому випадку елементи x множини A називають значеннями аргумента, а елементи з множини B – значеннями функції; в другому випадку x – прообрази, y – образи".

Було виділено окремі класи функцій: неперервні, диференційовні, аналітичні; математичний аналіз отримав назву "теорія функцій".

Досить міцну основу набули теорія функцій комплексної змінної і теорія диференціальних рівнянь. Математики XIX ст. вважали, що означенням Діріхле межі розвитку математичного аналізу визначені раз і назавжди.

Однак математики змушені були визнати, що означення Діріхле, яке здавалося ясним і доступним, містить в собі несподівані труднощі принципового характеру, настільки серйозні, що деякі науковці відмовилися визнавати в ньому зміст, віддаючи перевагу традиції.

Протягом 25 років після появи робіт Діріхле вивчення "патологічних" функцій не викликало особливого інтересу. Дослідженням подібних функцій зайнявся німецький математик Бернгардт Ріман (1826 –

1866). Він писав: "…область застосування рядів Фур'є не обмежується лише фізичними задачами; ці ряди застосовуються зараз з успіхом також виключно в області математики, а саме в теорії чисел, і можна думати, що тут якраз ті функції, представлення яких за допомогою тригонометричних рядів не було встановлено Діріхле, повинні відіграти важливу роль."

Науковий авторитет Рімана був дуже великим. Тому після появи його робіт виник інтерес до функцій типу:

$$D(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x-\text{ірраціональне число},\\ 1, & \text{якщо } x-\text{раціональне число}.\end{cases}$$

Прихильники класичного напрямку вважали, що наука не повинна цікавитись об'єктами настільки далекими від реального світу. Їх думку про дослідження функцій, подібних функції $D(x)$ або функцій, які не мають похідної в жодній точці, яскраво висловив один із найвпливовіших математиків того часу Анрі Пуанкаре (1854 – 1912): "Раніше, коли створювали нову функцію, то мали на меті якесь практичне завдання. Зараз їх створюють, не маючи з них жодної користі, а лише для того, щоб виявити недоліки у дослідженнях наших батьків."

Ще різкіше висловив свою думку на цю тему керівник французької математичної школи кінця XIX ст. Шарль Ерміт (1802 – 1901), який написав своєму другу голландському математику Стільтьєсу (1856 – 1894), що він "з жахом і відразою відвертається від цієї язви, що розростається, – функції, яка не має похідних". Нову математику – математику розривних функцій – класики називали "тераталогією функцій" (наукою про потворство функцій). Однак молоді математики дедалі більше захоплювались новими областями науки, не звертаючи уваги на застереження старших. У Франції читали лекції Жуль Таннері (1848 – 1910) і Камілл Жордан (1838 – 1922), які будували курс математичного аналізу на основі точних означень, бездоганних логічних доведень. Вони переконували, що розривні функції (на зразок функції Діріхле) треба вивчати, тому що цього потребують інтереси математики. Ці ідеї переходили у переконання і спонукали до наукової роботи. В 1898 р. молодий французький вчений Рене Бар (1874 – 1932) захистив дисертацію, в якій дав класифікацію розривних функцій. В цьому ж році з'явилася книга одного з найяскравіших лідерів молодих науковців – Еміля Бореля (1871 – 1956), присвячена новій теорії функцій. Змістовні роботи на тему інтегрування розривних функцій написав Анрі Лебег (1875 – 1941), який починав у той час свою наукову діяльність.

Інтерес до розривних функцій не обмежувався Францією. Активну роль в цих дослідженнях відіграли Д. Ф. Єгоров (1869 – 1931) і М. М. Лузін (1883 – 1950). Лузін став засновником московської школи теорії функцій дійсної змінної, яку її учасники назвали "Лузітанією".

Отже, математики того часу розділилися на два табори – прихильники визначення функції, яке дав Діріхле, що не потребує обов'язкового правила на встановлення відповідності між x і y (це означення охоплює вищезгадані розривні функції) і прихильники означення функції за Лобачевським, яке потребувало такого правила із скінченної кількості слів. Представники другого табору, названі інтуїціоністами, відмовлялися від більшої частини класичного аналізу і створювали власну математику – інтуїціоністську. Представники першого табору, не бажаючи поступатися досягненнями класичного аналізу, змирилися з існуванням багатьох парадоксальних фактів, які випливали з наявності "функцій без правил" (тобто функцій, які потрапляли під означення Діріхле).

Наступний розвиток математики не пішов шляхом інтуїціоністів, в кінцевому підсумку досягнення класичного аналізу залишилися непохитними. Підсумовуючи огляд розвитку поняття функції в період XVII – XIX ст., нагадаємо означення функції, які стали класичними.

Далі викладач наводить класичні означення функції.

Функція змінної величини - це аналітичний вираз, складений з цієї величини і постійних

<u>*Йоганн Бернуллі (1718)*</u>

Функція – це крива, накреслена вільним рухом руки.

<u>*Леонард Ейлер (1748)*</u>

Коли деякі кількості залежать від інших таким чином, що при зміні останніх змінюються і перші, то перші називаються функціями останніх

<u>*Леонард Ейлер (1755)*</u>

Всяка кількість, значення якої залежить від інших кількостей, називається функцією цих останніх, незалежно від того, відомо чи ні, які операції потрібно здійснити, щоб перейти від них до першої.

<u>*С. Лакруа (1797)*</u>

Функція від х - це число, яке дається для кожного х і разом з х поступово змінюється. Значення функції може бути дано або аналітичним виразом, або умовою, яка визначає спосіб перевіряти всі числа.

<u>*М. І. Лобачевський (1834)*</u>

У є функцією від х, якщо всякому значенню х відповідає цілком визначене значення у, причому зовсім не важливо, яким саме чином встановлена вказана відповідність.

<u>*Поль Діріхле (1837)*</u>

Дослідження залежностей між змінними фізичними величинами розпочалося в XIV столітті. Серед філософів-схоластів виникла школа, представники якої стверджували, що якості можуть бути більш або менш інтенсивними. Французький вчений Оресм (1323–1382 рр.) зображав інтенсивності довжинами відрізків. Він розміщував їх перпендикулярно до деякої прямої. Кінці відрізків утворювали лінію, названу ним “лінією інтенсивностей” або “лінією верхнього краю”. В сучасному розумінні це означало графік відповідної функціональної залежності.

Сучасне означення функціональної залежності між величинами прийнято вважати таким: ***функцією*** $y = f(x)$ називається така відповідність між множинами D і E, при якій кожному значенню змінної x з множини D відповідає одне й тільки одне значення змінної y з множини E (рис. 2).

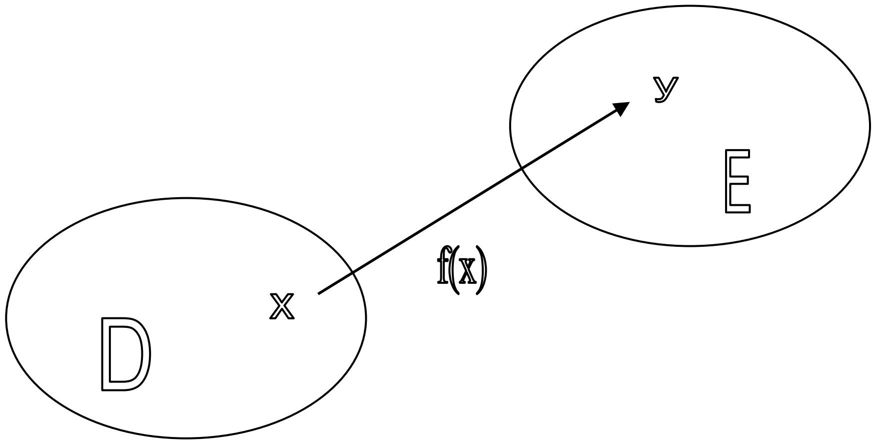


Рисунок 2

При цьому вважають, що:

x — незалежна змінна або аргумент;

y — залежна змінна або функція;

f — символ закону відповідності;

D — область визначення функції;

E — множина значень функції.

Введемо деякі поняття:

Означення. Функція $y = F(u)$, де $u = \varphi(x)$, називається складеною функцією, або суперпозицією функцій $F(u)$ та $\varphi(x)$ і позначається $y = F(\varphi(x))$.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається парною (непарною), якщо для будь-якого $x \in D$ виконується умова $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

Функція буде ні парною, ні непарною, якщо для $x \in D$, $f(-x) \neq \pm f(x)$.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається періодичною, якщо для $x \in D$ виконується умова $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$, де число T — період функції.

Приклад. $y = tgx$ — періодична функція з мінімальним періодом T

$= \pi$, (рис. 3), *y=sinx – періодична функція з періодом T =* 2π (рисунок 4).

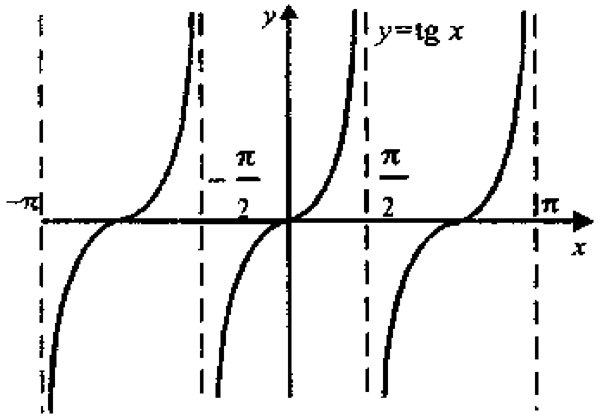


Рисунок 3

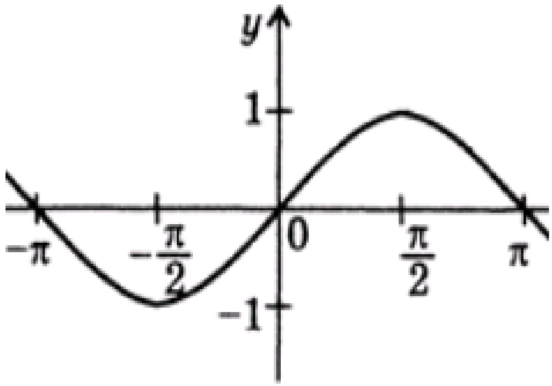


Рисунок 4

2 ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ, ОЗНАЧЕННЯ ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ ЧЕРЕЗ ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ

Розглянемо історичний розвиток деяких фундаментальних понять, що стосуються поняття функціональної залежності. До основних з них належать поняття границі, похідної та інтегралу фунції. Поняття похідної функції (диференціалу) безпосередньо пов'язане з поняттям границі і вводиться через поняття границі.

Хоча теорія границь розвинулася на ціле століття пізніше диференціального та інтегрального числення, вона стала основою для побудови всього математичного аналізу та його фундаментом.

В математиці границею послідовності називають об'єкт, до якого члени послідовності в певному розумінні наближаються або прямують із збільшенням номера. Границя — одне з основних понять математичного аналізу.

Історія теорії границь сягає своїм корінням далекого минулого. Ще грецькі натурфілософи і математики починаючи з VII ст. і аж до III ст. до н. е. підходять до ідеї нескінченності і потім до прийомів аналізу нескінченно малих, однак на той час теорія нескінченно малих не отримала належного розвитку. Інтерес до цих питань відновляється лише в епоху Відродження в кінці XVI ст.

Принципово новим кроком уперед в теорії границь було виникнення в натурфілософських школах V ст. до н. е. *ідеї нескінченності*, яка у різних формах застосовується у математиці. На межі V і IV ст. до н. е. Демокріт, виходячи з атомістичних уявлень, створює спосіб визначення об'ємів, який був першим варіантом методу неподільних – одного з вихідних пунктів числення нескінченно малих. Однак логічні труднощі, властиві поняттю нескінченності, що знайшли вираження в працях Зенона Елейского (V ст. до н. е.), привели до висновку, що результати, отримані за допомогою методу неподільних, не можна вважати строго доведеними. Стандартним прийомом вимірювання різних площ, об'ємів, що не піддаються визначенню елементарними засобами, став метод вичерпування, що полягає в наближенні шуканої величини, знизу і зверху послідовностями відомих величин. Так, площа круга апроксимувалася послідовностями вписаних і описаних правильних многокутників з необмежено зростаючим числом сторін, що необмежено зменшуються. Це дало поштовх у напрямку спроби розв'язання задач квадратури круга.

Оскільки, розвиток математики за часів схоластичного навчання призупинився, а здобутки математики були частково знищені та забуті, математикам епохи Відродження (кінець XVI ст.) потрібно було повертатися на декілька століть у минуле, щоб став можливим подальший розвиток науки.

Поняття границі було використано ще І. Ньютоном в другій половині XVII століття і іншими математиками XVIII століття, такими як Ейлер та Лагранж, однак вони розуміли "границю" інтуїтивно. Перші строгі визначення границі послідовності дали Больцано в 1816 році та Коші в 1821 році.

Бернард Больцано — чешський теолог, філософ і математик. Висунув ідею арифметичної теорії дійсного числа і довів теорему Больцано-Вейєрштрасса. В його творах можна знайти ряд фундаментальних понять та теорем аналізу, зазвичай пов'язаних з більш пізніми дослідженнями інших математиків.

Він був непідкупним шукачем соціальної правди, вільнодумцем. За свої ідеї вчений був усунений від викладання релігійних дисциплін (вчений мав ступінь доктора філософії і працював на кафедрі історії релігійних вчень Паризького університету), не дозволялися публічні виступи (обмеження було зроблено лише для математичних дисциплін), за вченим було оголошено спостереження. Больцано залишився без засобів існування, прийняв гостинність друзів, оселившись в них дома неподалік Праги. Тут вчений заглиблюється в математичні дослідження.

В математичній літературі поширені два означення границі функції – "за Коші" і "за Гейне".

Дамо означення границі числової послідовності (*означення "за Коші")*.

Число a називається ***границею*** послідовності $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке натуральне число $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|y_n - a| < \varepsilon$.

Символічно це записують так:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a, \qquad \text{або } y_n \to a (n \to \infty).$$

Ми будемо користуватися позначенням *lim* — від латинського слова *«limes»*, що означає «границя», це позначення ввів І. Ньютон.

Механік та інженер Огюстен Луї Коші народився 21 серпня 1789р. в Парижі в сім'ї чиновника. Його батько був католиком і роялістом, свої переконання він передав сину. Спочатку освітою О. Коші займався батько, чудовий лінгвіст, згодом в 1805р. Огюстен поступив до Політехнічної школи, потім в 1807р. - до Школи міст та доріг. Політехнічна школа була організована в 1794 р. за пропозицією групи вчених та інженерів на чолі з творцем нарисної геометрії, французьким математиком і інженером Гаспар Монжа (MongeG., 10.05.1746 - 28.07.1818), у зв'язку з тим, що у Франції, яка перебувала в той час у стані війни з європейською коаліцією, були дуже потрібні інженери. Школа являла собою військовий навчальний заклад нового типу, в якому основна увага приділялася вивченню фундаментальних наук: математики, механіки, фізики та хімії. Цим предметам присвячувалися перші два роки і тільки на третьому році вивчалися спеціальні технічні дисципліни. Проте незабаром третій рік навчання був скасований, і випускники Політехнічної школи йшли до спеціальних навчальних закладів: Школи інженерів, Артилерійської школи, Гірської школи, Школу мостів і доріг. Таким чином, Політехнічна школа стала чимось на зразок загальнотехнічного факультету для технічних вищих навчальних закладів країни. О. Коші отримав відповідальне завдання побудови військового порту в Шербурзі. Саме під час роботи над завданням в 1811 р. він написав свій перший мемуар про багатогранники, в якому розв’язав деякі питання, які були не розв’язані на той час видатними математиками.

Його глибокі релігійні та політичні переконання були причиною того, що люди з протилежних партій ставилися до нього упереджено і говорили про незакінченість його робіт. Однак саме та швидкість, з якою О. Коші переходив від одного предмета до іншого дала йому можливість прокласти в науці безліч різноманітних шляхів: в геометрії він узагальнив новий спосіб дослідження поверхонь другого порядку, встановив правила застосування аналізу до розв’язання задач з геометрії. Ж. Лагранж говорив про нього своїм друзям : “Цей хлопчик як геометр замінить нас всіх”.

О. Коші в 1822 р. визначив поняття напруги і деформації, розробив теорії напружень і деформації, сформулював залежності між напруженнями і деформаціями, навів загальне рівняння руху світлового ефіру, встановив закони заломлення та відбивання, не застосовуючи сумнівні гіпотези.

У 1828 р. вивчав вигин пластин на основі рівнянь теорії пружності. О. Коші перший дав фундаментальне теоретичне обґрунтування теорії збіжності рядів, навів спосіб інтегрування рівняння з частинними похідними. Одним із його фундаментальних досягнень було обґрунтування теорії границь, Коші дав визначення неперервності функції, побудував строгу теорію збіжних рядів, ввів поняття визначеного інтегралу як границі інтегральних сум, він довів непевність такого інтегралу, дослідив невласний інтеграл. Вся система аналізу побудована на базі теорії границь. Книги Коші довгий час слугували зразком при вивченні курсу аналізу.

Дамо означення границі функції (означення “за Гейне”, тобто мовою числових послідовностей). Число b називається границею функції $y=f(x)$ в точці a, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$, що збігається до точки (числа) a, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ буде збігатися до числа b. Використовують позначення $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$. За допомогою кванторів $\exists$ та $\forall$ його можна записати так:

$$b=\lim_{x\to a} f(x) \equiv (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x)[|x-a|<\delta \to |f(x)-b|<\varepsilon].$$

Ге́нріх Еду́ард Ге́йне народився 15 березня 1821 року в Берліні, Німеччина, в сім’ї банкіра і був восьмою дитиною з дев'яти дітей. Помер — 21 жовтня 1881 року в Галлі, Німеччина. Гейне вивчав математику в Гетінгенському університеті, університеті ім. Гумбольдта в Берліні, його викладачами були Гаусс, Стерн, Діріхле. Згодом став професором математики в Бонні та в Галлі. Працюючи в Галлі, він займався переважно теорією потенціалу, теорією функцій та диференціальними рівняннями. Його іменем названа теорема Кантора — Гейне, теорема Гейне — Бореля.

Перейдемо до означення границі функції. У сучасних підручниках зустрічаються такі означення границі функції.

Число A називається границею функції $y=f(x)$ при $x\to a$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що при $0<|x-a|<\delta(\varepsilon)$ виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$. В цьому випадку записують

$$\lim_{x\to a} f(x)=A.$$

Аналогічно, число A називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M(\varepsilon) > 0$ таке, що при $|x| > M(\varepsilon)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. В цьому випадку записують

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Слід зазначити, що вчені XVII ст. мали вже досить ясні уявлення про поняття границі послідовності і збіжності ряду, вважали потрібним доводити збіжність уживаних ними рядів. Самим уразливим пунктом теорії границь другої половини XVIII ст. було відмовлення від вживання алгоритму нескінченно малих Лейбніца.

Одним із основних джерел аналізу нескінченно малих є розвинутий І. Кеплером (1615) і Б. Кавальєрі (1635) метод неподільних, застосований ними до визначення об'ємів тіл обертання та ряду інших задач. У цьому методі принципова новизна основних понять аналізу нескінченно малих подається у містичній формі протиріччя (між об'ємом тіла і сукупністю, що не мають об'єму плоских перерізів, за допомогою яких цей об'єм повинен бути визначений). В зв'язку з цим протиріччям прийоми І. Кеплера і Б. Кавальєрі зазнавали критики з боку П. Гульдена (1635-1641). Однак вільне вживання "нескінченно малих" здобуває остаточну перемогу в роботах із визначення площ ("квадратур") П. Ферма, Б. Паскаля і Дж. Валліса. Так, у геометричній формі були створені початки диференціального і інтегрального числення.

Розглянемо нескінченно великі і нескінченно малі функції. Функція $f(x)$ називається нескінченно малою при *x*, що прямує до α, якщо виконується рівність:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = 0.$$

Іншими словами, функція $f(x)$ *називається нескінченно* малою при *x*, що прямує до α, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ виконується нерівність: $|f(x)| < \varepsilon$.

Функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно великою* при x, що прямує до α, якщо для будь-якого N >0 існує число δ(N) таке, що при $|x-a|$< δ(N) виконується нерівність $|\alpha(x)|$ > N, це можна записати так: $\lim\limits_{x\to\alpha}\alpha(x)=\infty$.

Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються нескінченно малими одного порядку малості, якщо границя їх відношення $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$.

Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають еквівалентними, якщо $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Їх позначають так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Наведемо основні *еквівалентності* функцій.

1. $sina(x)\sim a(x)$;
2. $tga(x)\sim a(x)$;
3. $1-cosa(x)\sim cos\dfrac{a^2(x)}{2}$;
4. $arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
5. $arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;
6. $e^{\alpha(x)}\sim\alpha(x)$;
7. $ln[1+\alpha(x)]\sim\alpha(x)$;
8. $log_a[1+a(x)]\sim\alpha(x)log_a e$;
9. $\sqrt[k]{1+\alpha(x)}-1\sim\dfrac{\alpha(x)}{k}$;
10 . $\sqrt[k]{a^k+\alpha(x)}-a\sim\dfrac{\alpha(x)}{k\cdot a^{k-1}}$;
11. $a^{\alpha(x)}-a^{\beta(x)}\sim(\alpha(x)-\beta(x))\ln a$;
12. $\underset{\alpha\to 0,\ m,k=const}{(1+\alpha(x))^m-1\sim\alpha(x)\cdot m}$;
13. $a^{\alpha}-1\sim\alpha(x)\ln a$;
14. $\underset{\alpha,\beta\to 0}{e^{\alpha(x)}-e^{\beta(x)}}\sim\alpha(x)-\beta(x)$;
15. $a^{\alpha(x)}-b^{\beta(x)}\sim\alpha(x)\ln a-\beta(x)\ln b$;
16. $\ln U(x)\sim U(x)-1$.

3 ДЕЯКІ ПРИКЛАДИ ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ

З метою розв’язання деяких нижче наведених прикладів подамо властивості границь функцій.

Границі функцій мають такі *властивості*:

1. $\lim\limits_{x\to a}C=C$, де C – константа,

2. $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C\lim\limits_{x\to a} f(x)$, де С – константа.

3. Якщо існують границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

4. Якщо існують границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, то

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x);$$

5. Якщо існують границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, причому $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

6. Якщо існують границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$, то

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = [\lim_{x\to a} f(x)]^{\lim\limits_{x\to a}(\varphi)}.$$

Приклад 1.

$\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 + x - 4)$.

Розв'язання

Використаємо властивості границь функцій (1), (2), (3), отримаємо

$\lim\limits_{x\to 2} 5x^3 = 5\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 5\cdot 2^3 = 5\cdot 8 = 40$;

$\lim\limits_{x\to 2} x = 2$; $\lim\limits_{x\to 2} 4 = 4$; $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3 + x - 4)$= 40 + 2 – 4= 38.

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3\cos x - 2)}{2^{arctg^2\frac{x}{3}} - 1}$.

Розв'язання

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3\cos x - 2)}{2^{arctg^2\frac{x}{3}} - 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x - 2 - 1}{arctg^2\dfrac{x}{3}\cdot\ln 2} = = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3\cdot\dfrac{x^2}{2}}{\dfrac{x^2}{9}\cdot\ln 2} = -\dfrac{27}{2}\ln 2$. Тут при $x\to 0$ $3\cos x - 2 \to 1$ і тому застосовуючи еквівалентність (16) $\ln U(x) \sim U(x) - 1$, а також враховуючи, що $arctg\dfrac{x}{3}\to 0$, застосуємо формули $2^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln 2$ та $arctg^2\alpha(x) \sim \alpha^2(x)$.

Для обчислення границь часто використовують так звані першу та другу чудові границі:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Розглянемо декілька прикладів застосування цих правил.

Приклад 3

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x.$$

Розв'язання

Границя основи дорівнює 1, границя показника дорівнює ∞. Тому отримаємо невизначеність типу 1^∞. Для того, щоб розкрити цю невизначеність застосуємо правило другої чудової границі:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}} = e^2.$$

4 ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛУ В ІСТОРИЧНОМУ КОНТЕКСТІ

Похідна функції як і поняття диференціалу – одне із ключових понять математичного аналізу. З допомогою операції диференціювання можна дослідити функцію на монотонність, визначають екстремуми функції. Не заглиблюючись у процес дослідження функцій, розглянемо історичний розвиток поняття похідної та диференціалу.

Вченими різного часу було застосовано різні позначення похідної:

$\frac{dy}{dx}$ або $\frac{df(x_0)}{dx}$ (Г. Лейбніц)

$\dot{y}$ (похідна часу) (І. Ньютон)

y' або $f'(x_0)$ (Ж. Лагранж)

Dy або $Df(x_0)$ (О. Коші).

О. Коші вперше визначив похідну через границю. *Похідною функції в точці* x_0 називається границя відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

4.1 Геометричний зміст похідної

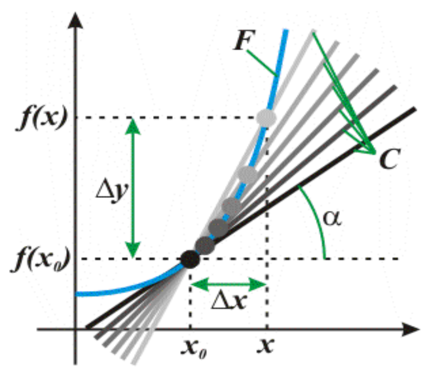


Рисунок 5

На графіку функції вибирається абсциса x та обчислюється відповідна ордината *f(*x_0*)*. В околі точки вибирається довільна точка *x*. Через відповідні точки на графіку функції *F* проводиться січна (перша світло-сіра лінія С).

Відстань $\Delta x = x - x_0$ прямує до нуля, в результаті січна переходить у дотичну (лінії, що поступово темніють С). Тангенс кута α нахилу цієї дотичної - це і є похідна у точці x_0.

Значення похідної *f'(*x_0*)* функції f у точці x_0 дорівнює значенню кутового коефіцієнта дотичної до кривої *y = f(x)* у точці з абсцисою x_0.

Рівняння дотичної до кривої *y = f(x)* у точці М(x_0, y_0) має вигляд:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Поняття диференціалу і термін диференціалу належить Г. Лейбніцу. Диференціал від латинського слова “*differetia*” – різниця. Проте, Лейбніц точного означення цього поняття не дав. Г. Лейбніц також досліджував відношення двох диференціалів: $\frac{dy}{dx}$, яке зараз ми вживаємо для визначення похідної.

До останньої третини XVII ст. відноситься відкриття диференціального і інтегрального числення у повному змісті слова. У відношенні публікації пріоритет цього відкриття належить Г. Лейбніцу, що дав розгорнутий виклад основних ідей нового числення в статтях, опублікованих у 1682-86 рр. У відношенні ж часу фактичного одержання основних результатів є всі підстави вважати, що пріоритет належить І. Ньютону, який до основних ідей диференціального та інтегрального числення прийшов протягом 1665-66 рр.

Г. Лейбніц підходив до поняття похідної з геометричної точки зору: він розглядав її як поле напрямків дотичної до певної кривої (див. геометричний зміст похідної). І. Ньютон виходив з фізичних міркувань і розглядав похідну як швидкість зміни функції в цій точці.

Поняття диференціала тісно пов'язане з поняттям похідної, і є одним з найважливіших в математиці. Диференціал наближено дорівнює приросту функції і пропорційний приросту аргументу. Внаслідок цього диференціал широко застосовується при дослідженні різноманітних процесів і явищ. Будь-який процес протягом достатньо малого проміжку часу змінюється майже рівномірно, тому дійсний приріст величини, що характеризує процес, можна замінити диференціалом цієї величини на даному проміжку часу. Таку заміну називають лінеаризацією процесу.

Практичне значення похідної полягає у визначенні екстремумів функції. Довгий час (до другої половини XVII ст.) не існувало ніяких загальних прийомів розв'язування задач на екстремум. Прагнення їх знайти значною мірою стимулювало створення математичного аналізу. Перший загальний метод дослідження задач на екстремум відкрив П. Ферма (близько 1630 р.). Сучасною мовою його можна сформулювати так: у *точці екстремуму деякої функції однієї змінної* *похідна дорівнює нулю, тому екстремуми слід шукати серед коренів похідної.* Цей результат включено зараз до шкільного курсу математики під назвою *“теорема Ферма”*. Фактично Ферма описав цей прийом лише для алгебраїчних многочленів. У загальному вигляді його вперше отримав видатний англійський фізик, механік, астроном і математик Ісаак Ньютон (60-ті роки XVII ст.). Потім його перевідкрив відомий німецький математик, фізик і філософ Готфрід Вільгельм Лейбніц і вперше опублікував у відомій статті, з якої починається історія математичного аналізу. Примітним є початок назви статті Лейбніца: *«Новий метод знаходження найбільших і найменших величин...»*.

Поняття похідної зустрічається і у фізиці. З курсу фізики відомо, що електричний струм – це впорядкований рух електричних зарядів. Його значення вимірюється в амперах [A] і визначається виразом: $i = \frac{dq}{dt}$, де q – величина скалярна.

Індуктивність L можна обчислити за формулою $L = \frac{di}{dt}$ (“похідна струму за часом”).

5 ПОНЯТТЯ ІНТЕГРАЛА В ЙОГО ІСТОРИЧНОМУ РОЗВИТКУ

Інтегральне числення – розділ математики, у якому вивчаються поняття інтеграла, його властивості та методи обчислень.

Інтегральне числення із диференціальним численням складають основу математичного аналізу. Поняття диференціалу та інтегралу взаємозалежні, однак їх розвиток проходив не одночасно. Витоки інтегрального числення відносяться до античного періоду розвитку і пов’язані з методом, який розроблений математиками Давньої Греції.

Цей метод виник:

1) при розв’язуванні задач на обчислення площ плоских фігур і поверхонь, об’ємів тіл, деяких задач статики і гідродинаміки. Він оснований на апроксимації розглядуваних об’єктів ступінчатими фігурами чи тілами, які складаються з простіших фігур чи просторових тіл (прямокутників, паралелепіпедів, циліндрів і т. п.). В цьому розумінні метод вичерпування можна розуміти як античний інтегральний метод.

Найбільшого розвитку цей метод отримав у роботах Евдокса (IV ст. до н. е.) і особливо Архімеда (III ст. до н. е.). Подальше його застосування і вдосконалення пов’язано з іменами багатьох вчених.

2) у зв’язку з потребою знаходити функції за їх похідними. Наприклад, знайти функцію, яка буде виражати шлях, що пройдений рухомою точкою за швидкістю цієї точки; вимірювати площі, об’єми довжини дуг, роботу сили за певний проміжок часу. Але Архімед не створив загальних прийомів інтегрування і загальних понять про інтеграл, тим більше не створив загального алгоритму інтегрального числення. Вчені Середнього і Ближнього сходу в IX - XV ст. вивчали і перекладали праці Архімеда на загальнодоступну в їх оточенні арабську мову. Праці Архімеда, вперше видані в 1544 році (латинською та грецькою мовами), почали привертати увагу, і їх вивчення стало одним з найважливіших відправних пунктів розвитку інтегрального числення. Математики XVII століття отримали багато нових результатів, вчилися на працях Архімеда. Активно застосовувався також і інший метод — метод неподільних, який також зародився в Давній Греції (а його назву придумав Я. Бернуллі).

Інтеграл (від. лат. *integer* — цілий). Символ $\int$ введено Лейбніцем (1675 р.). цей знак походить від латинської букви S (summa). Слово “інтеграл” вперше ввів Я. Бернуллі. Можливо воно походить від — *integro* — приводити в попередній стан, “відтворювати”. Тобто, операція інтегрування “відтворює” функцію, диференціюванням якої отримана попередня підінтегральна функція. В час зародження поняття інтеграла між Й. Бернуллі (братом Я. Бернуллі) та Лейбніцем була переписка. (Всю важливу математичну інформацію передавали на той час у листах). Обидва вчених погодилися із запропонованою назвою. В 1696 році з’явилася назва нового розділу математики — інтегральне числення. Цю назву ввів Й. Бернуллі. Первісна на той час називалася “примітивною функцією”, таку назву ввів Лагранж. Примітивна (лат. premitivus — початковий) — початкова первісна для функції $f(x)$, яка отримується з $F(x)$ диференціюванням. Діяльність європейських вчених в цей час була іще скромнішою. Лише в XVI і XVII століттях розвиток природничих наук поставив перед математиками Європи ряд нових задач, зокрема задачі на знаходження квадратур (задачі на обчислення площ фігур) та кубатур — об’ємів тіл, знаходження центрів ваги.

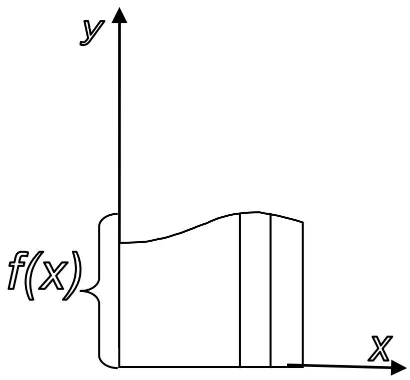


Рисунок 6

Опишемо коротко суть методу. Криволінійну трапецію подавали складеною з вертикальних прямокутників, довжиною *f(x)*, яким приписували площу, рівну нескінченно малій величині *f(x)dx*. Відповідно до такого розуміння шукана площа вважалася рівною сумі нескінченно великої кількості нескінченно малих площ $\sum f(x)dx$.

Отже, площа обчислювалася як сума нескінченно великої кількості нескінченно малих площ. Іноді навіть говорили, що окремі доданки цієї суми — нулі особливого роду, які при додаванні дають цілком конкретну суму. На такій здавалося сумнівній основі І. Кеплер (1571 – 1630 рр.) в своїх творах “Нова астрономія” (1609 р.) і “Стереометрія винних бочок” (1615 р.) правильно обчислив ряд площ (наприклад, площу фігури, що обмежена еліпсом) і об’ємів тіл (тіло різалось на нескінченно тонкі пластинки). Ці дослідження були продовжені італійськими математиками Б. Кавальєрі (1598 – 1647 рр.) і Е. Торрічеллі (1608 – 1647 рр.). В XVII столітті було зроблено багато нових відкриттів, що стосуються інтегрального числення. Так, у 1629 році П'єр Ферма розв'язав задачу знаходження будь-якої квадратури $y = x^n$, тобто $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$. І на цій основі розв'язав багато задач на знаходження центрів ваги. І. Кеплер при виведенні своїх законів фактично опирався на ідею наближеного інтегрування. І. Барроу (1603-1677 рр), вчитель І. Ньютона, близько підійшов до розуміння зв'язку інтегрування і диференціювання. Основні поняття і теорія інтегрального та диференціального числень, зв'язок операцій диференціювання та інтегрування, а також їх застосування до розв'язання прикладних задач було розролблено у роботах І. Ньютона і Г. Лейбніца в кінці XVII століття. Їх дослідження стали базою для інтенсивного розвитку математичного аналізу. В XIX столітті з появою поняття *границі* інтегральне числення набуло логічно довершеної форми у роботах О. Коші, Б. Рімана. Розробка теорії і методів інтегрального числення відбулося у кінці XIX століття і на початку XX століття, одночасно з дослідженням теорії міри, яка у свою чергу відіграла величезну роль в інтегральному численні. З появою інтегрального числення стало можливим розв'язувати єдиним способом багато теоретичних та прикладних задач, як тих, що потребували спеціальних прийомів.

Отже, узагальнюючи вищенаведене, зазначимо, що поняття "інтеграл" (лат. integer – цілий) виникло у зв'язку з потребою:

а) знаходити функції за їх похідним (наприклад, знайти функцію, що буде виражати шлях, пройдений рухомою точкою, за швидкістю цієї точки);

б) вимірювати площі, об'єми, довжини дуг, роботу сили за певний проміжок часу.

Велике значення мали роботи з подання функцій у вигляді рядів. Проте при всій значущості результатів, отриманих математиками XVII століття, числення ще не було. Необхідно було виділити загальні ідеї, що знаходилися в основі багатьох завдань, а також встановити зв'язок операцій диференціювання і інтегрування. Це зробили Ньютон і Лейбніц, які відкрили незалежно один від одного факт, відомий нам під назвою формули Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Геометрична інтерпретація цієї формули показана на рисунку 7.

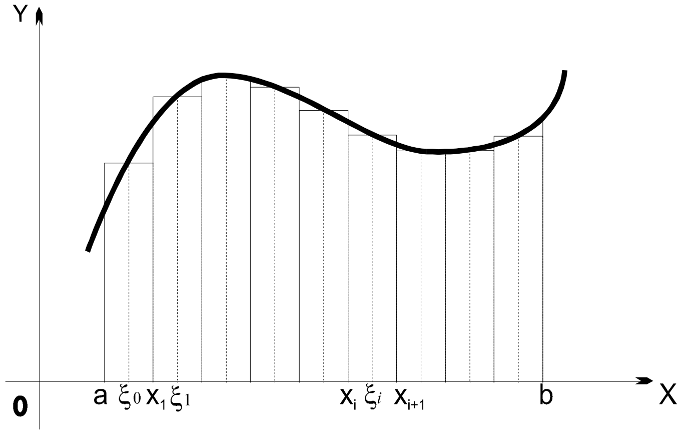


Рисунок 7

Звичайно, вченим ще потрібно було навчитися знаходити первісні багатьох функцій, дати логічне обґрунтування нового числення і т. п. Але головне вже було зроблено – диференціальне та інтегральне числення було створено. Подальший розвиток математичного аналізу продовжувався і в наступному XVIII столітті. Серед науковців цього періоду слід відзначити в першу чергу імена Л. Ейлера, який завершив систематичне дослідження інтегрування елементарних функцій, а також Й. Бернуллі. В розвитку інтегрального числення прийняли участь і радянські вчені, такі, як М. В. Остроградський (1801 — 1862 рр.), В. Я. Буняковський (1804 – 1889 рр.), П. Л. Чебишев (1182 – 1894 рр.).

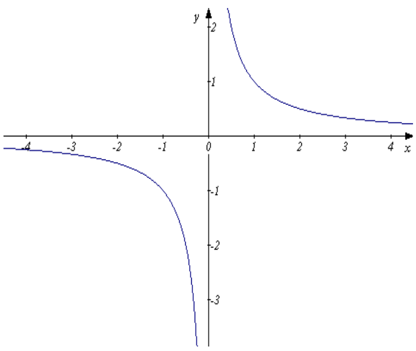
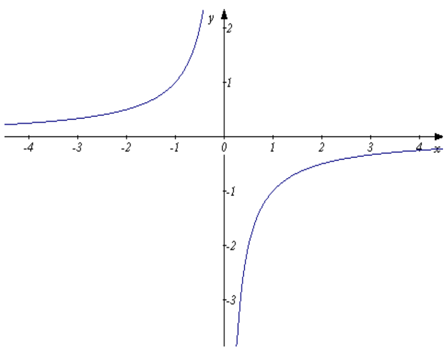
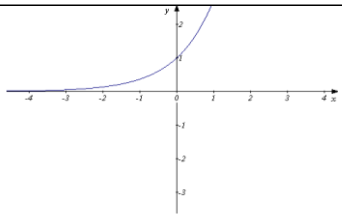
Принципове значення мали результати П. Л. Чебишева. Він у своїх роботах довів, що існують інтеграли, які не можна виразити через елементарні функції.

Розвиток інтегрального числення був завершений лише в минулому столітті. Цей перід пов'язаний з іменами видатних математиків О. Коші, Б. Рімана, К. Жордана. Роботи К. Жордана мають особливе значення, оскільки вчений у своїх працях вводить поняття теорії міри (1826 — 1922 рр.), що дало можливість знайти відповідь на багато питань, пов'язаних з існуванням площ і об'ємів фігур.

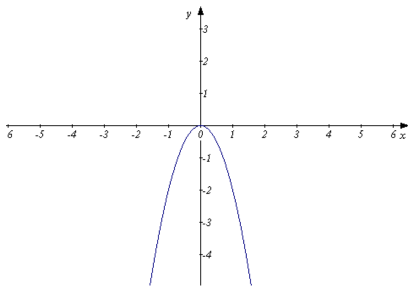
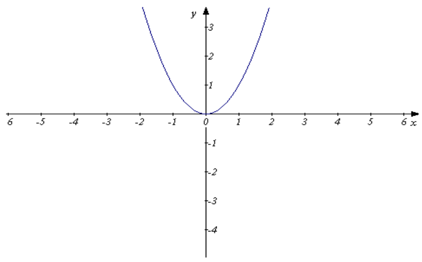
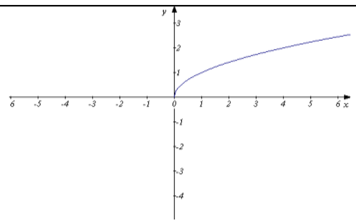
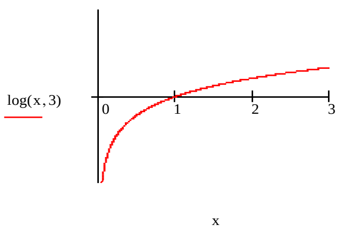
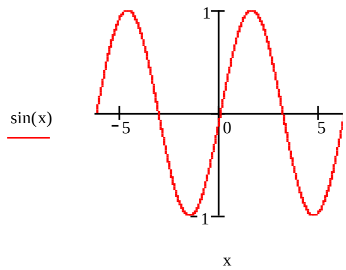
Різні узагальнення понять інтеграла вже на початку XX ст. були запропоновані французькими математиками А. Лебегом (1875 – 1941 рр.) і А. Данжуа (1884 – 1974 рр.), радянськими математиками А. Я. Хичиним (1894 — 1959 рр.)

ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Основні елементарні функції та їх графіки

Назва функції	**Аналітичний запис**	**Графічне зображення**	**Область визначення**	**Область значень**
Обернена пропорційність	$y=\dfrac{k}{x}$,	При k > 0, матимемо  При $к$ < 0, отримаємо 	$x \in$ $(-\infty;0) \cup$ $\cup (0;+\infty)$	$y \in$ $(-\infty;0) \cup$ $\cup (0;+\infty)$
Показникова функція (експонента)	$ó=å^{õ}$		$x \in$ $(-\infty;+\infty)$	$y \in$ $(0;+\infty)$

Продовження таблиці А. 1

Квадратична функція	$y = ax^2$	при a > 0  при a>0 	$D(x)$: $x \in (-\infty;+\infty)$	$y \in (-\infty;0)$ $y \in (0;+\infty)$
	$y = \sqrt{x}$		$D(x)$: $x \in (0;+\infty)$	$y \in (0;+\infty)$
Логарифмічна функція	$y = \log_a x$		$x \in (0;+\infty)$	$y \in (-\infty;0) \cup \cup (0;+\infty)$
Синусоїда	$y = sinx$		$x \in (-\infty;+\infty)$	$y \in (-\infty;0) \cup \cup (0;+\infty)$

Література

1. Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія / Бевз В. Г. – К. : НПУ імені Драгоманова, 2005. – 360 с.

2. Бурбаки И. Очерки по истории математики / Бурбаки И. – М. : Изд-во ин. лит.-ры, 1963. – 292 с.

3. Виленкин Н. Я. Функции в природе и технике / Виленкин Н. Я. – М. : Просвещение, 1978. – 192 с.

4. Дорофеев Г. В. Поняття функции в математике и в школе. // Математика в школе / Г. В. Дорофеев – 1978.– № 2. – С. 10-26.

5. Колосов О. О. Книга для позакласного читання з математики / Колосов О. О. – К. : Рад. школа, 1962. – 223 с.

6. Математический энциклопедический словарь. – М., Сов. энциклопедия, 1988.

7. Шилов Г. Е. Что такое функция? // Математика в школе / Г. Е. Шилов – 2003. – № 1. – С. 4-10.

8. Энциклопедический словарь юного математика. – М. : Педагогика, 1989.

9. Леонард Эйлер : [пер. с нем. Тиле Р.] / Леонард Эйлер – Киев : Выща школа. Гл.из.-во, 1983. – 192 с.

10. Математическая энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова, 1977. – режим доступу : http://biblioteka.cc/engine/%5Cindex.php?newsid=50111

11. Белозеров С. Е. Основные этапы развития общей теории аналитических функций / Белозеров С. Е. – Ростов-на-Дону : Изд-во Рост. ун-та, 1962.

12. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Вилейтнер Г. – М. : Физматгиз, 1966.

13. История математики от древнейших времен до начала XIX века: В 3 т. / Под общ. ред. А. П. Юшкевича. – М. : Наука, 1970-1973. Лопиталь де Г. Анализ бесконечно малых. – М.-Л. : ГТТИ, 1935.

14. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1 / Клейн Ф. – М.-Л. : ОНТИ, 1937.
15. Коши О. Л. Дифференциальное и интегральное исчисление / Коши О. – СПб., – 1831.
9. Лопиталь де Г. Анализ бесконечно малих / Лопиталь де Г. – М.-Л. : ГТТИ, 1935.
16. Медведев Ф. А. Очерки истории теории функций действительного переменного / Медведев Ф. А. – М. : Наука, 1975. Переиздана – М. : КомКнига, 2006.
17. Медведев Ф. А. Развитие понятия интеграла / Медведев Ф. А. – М. : Наука. 1974.
18. Песин И. Н. Развитие понятия интеграла / Песин И. Н. – М. : Наука, 1966.
19. Стройк Д. Краткий очерк истории математики / Стройк Д. – М. : Наука, 1964.
20. Юшкевич А. П. История математики в России / Юшкевич А. П. – М. : Наука, 1960.

Інструктивно-методичне видання

Методичні вказівки до вивчення поняття функціональної залежності в його історичному розвитку

Редактор В. Дружиніна
Коректор З. Поліщук

Укладачі: Віталій Іванович Клочко
Альона Анатоліївна Коломієць

Оригінал-макет підготовлено А. Коломієць

Підписано до друку
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman
Друк різографічний. Ум. друк. арк.
Наклад прим. Зам. №

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ. к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп’ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.