І. ТЕОРІЯ ПРОЦЕСІВ ТА МАШИН

Бурдейна О. В.

Бурдейний В. М.

Вінницький національний технічний університет

Гель П. В.

Вінницький національний аграрний університет

Burdeyna O. V.

Burdeynyy V. M.

Vinnytsia National Technical University

Hel P. V.

Vinnytsia National Agrarian University

УДК 534.12+517.927.2

СПЕКТР СТРІЧКОВОГО АКУСТОПРОВОДУ З ПЕРІОДИЧНО РОЗПОДІЛЕНИМИ ДІАФРАГМАМИ. СИЛЬНИЙ ЗВ'ЯЗОК

Досліджуються структурно чутливі характеристики частотного спектру періодичного стрічкового акустопроводу, сформованого системою закріплених діафрагм. Елементарна комірка структури утворена берегами хвилеводу і діафрагмами конформно перетворюється в комірку канонічної, а саме, прямокутної геометрії. Параметри, які описують частотний спектр одержаний методами теорії збурень, обчислено для випадку сильного зв'язку, коли за рахунок зменшення вікон акустичні збудження залишаються в основному локалізованими у відповідних елементарних комірках. Аналізуються якісні зміни частотного спектру.

***Ключові слова**: акустичний хвилевід, конформне відображення, спектр частот, теорія збурень, наближення сильного зв'язку*.

Дана робота поширює на випадок так званого сильного зв'язку результати дослідження спектру акустичного хвилеводу спеціальної структури представлені авторами в [1]. Не зупиняючись на описанні моделі, застосованого методу і інших деталях, які в подробицях викладені у згаданому посиланні, конкретизуємо зміст поняття сильного зв'язку у контексті досліджуваної системи, якою є акустопровід виготовлений у вигляді прямолінійної смуги з періодично розташованими діафрагмами, які утворені закріпленими відрізками-шпунтами. Перенесення збудження із однієї елементарної комірки в суміжну з нею і в такий спосіб вздовж хвилеводу здійснюється через вікна, утворені викинутими відрізками-шпунтами. Якщо кінцеві точки шпунтів наближаються одна до одної ширина вікна зменшується. Вібраційне збудження стає локалізованим у комірках структури, що за аналогією з деякими кристалів інтерпретується як випадок сильного зв'язку коливань із відповідною елементарною коміркою.

1. Огляд попередніх результатів. Спектр частот хвилеводу визначається власними значеннями рівняння Гельмгольца доповненого певними краєвими умовами, які у випадку, який розглядається, є умовами Діріхле. Нетривіальний рельєф граничного контуру, в силу своєї складності, унеможливлює канонічне розділення змінних чи застосування відомого адіабатичного наближення. Зважаючи на ефективність методу конформних відображень підтверджену багатьма авторами[2], нами в роботі[1] запропоновано виконати суперпозицію конформних перетворень[3]

$$z \equiv x + iy = \Delta \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - k^2)(t^2 - 1)}} \qquad (1)$$

$$\varsigma \equiv \xi + i\eta = \Lambda \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - c^2)(t^2 - d^2)}} \qquad (2)$$

завдяки чому область, яка в комплексній площині Z відповідає діафрагмованому хвилеводу відображається на прямолінійну смугу комплексної площини Ξ.

Елементарна комірка досліджуваної періодичної структури- прямокутник комплексної площини Z, вершини якого співпадають з точками: $(-A,0)$, $(-A,-A+i)$, $(A,A+i)$, $(A,0)$. Закріплені діафрагми формуються відрізками відрізками: $\left[\pm A,\pm A+ih\right]$, $\left[\pm A,\pm A+i\left(1-H\right)\right]$ так, що

ширина вікна між суміжними комірками визначається формулою $1-(h+H)$. Відповідність між точками площини Z і їх образами в площинах W і Ξ відображається нижчеподаною Таб.1

Таблиця 1

Відповідність точок при конформних відображеннях

Z	*-A*	*-A+ih*	*-A+i(1-H)*	*-A+i*	*A+i*	*A+i(1-H)*	*A+ih*	*A*
W	*-k*	*-c*	*-d*	*-1*	*1*	*d*	*c*	*k*
ς	$\varsigma(-k)$	$-R$	$-R+iQ$	$\varsigma(-1)$	$\varsigma(1)$	$R+iQ$	R	$\varsigma(k)$

Комбінація конформних перетворень (1) , (2) приводить до модифікації оператора Белтрамі-Лапласа, в зв'язку з чим рівняння Гельмгольца для зміщення $\Phi(\xi,\eta)$ в полі акустичної хвилі набуває наступного вигляду:

$$\nabla^2_{\varsigma}\Phi+\Theta(\xi,\eta)k^2\Phi=0 \qquad (3)$$

Тут $k=\omega D/v$ є нормованим на ширину акустопроводу D безрозмірним хвильовим числом, а

$$\Theta(\xi,\eta)=\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2 \qquad (4)$$

є якобіаном переходу від змінних (x,y) до змінних (ξ,η).

Зауважимо, що інтеграли Крістофеля-Шварца[4] (1) і (2) зводяться до стандартних еліптичних інтегралів у формі Лежандра, обернення яких дає еліптичні функції Якобі[5]

$$w=k\cdot sn\left(\frac{z}{\Delta},k^2\right) \qquad (5)$$

$$w=c\cdot sn\left(\frac{\varsigma d}{\Lambda},\frac{c^2}{d^2}\right) \qquad (6)$$

що дозволяє подати якобіан $\Theta(\xi,\eta)$ як явну функцію комплексної змінної ς :

$$\Theta(\xi,\eta)=\left|\frac{\Delta}{\Lambda}\right|^2\left|\sqrt{\frac{\left[c^2-c^2sn^2\left(\frac{\varsigma d}{\Lambda},\chi\right)\right]\left[d^2-c^2sn^2\left(\frac{\varsigma d}{\Lambda},\chi\right)\right]}{\left[k^2-c^2sn^2\left(\frac{\varsigma d}{\Lambda},\chi\right)\right]\left[1-c^2sn^2\left(\frac{\varsigma d}{\Lambda},\chi\right)\right]}}\right|^2 \qquad (7)$$

де $\chi=c/d$ - модуль еліптичного інтегралу (2).

2. Обчислення характеристичних параметрів. З подальших викладок стане очевидним, що частоти нормальних мод, перенормування фазових швидкостей виражаються через координати точок, які є образами вершин елементарної комірки і кінцевих точок діафрагм. В цьому сенсі згадані координати є характеристичними і вимагають свого обчислення. Прийнявши до уваги (1) і таблицю відповідності 1, для k і Δ одержуємо

$$A=\Delta\int_0^k\frac{dt}{\sqrt{\left(k^2-t^2\right)\left(1-t^2\right)}} \qquad (8)$$

$$\Delta\int_k^1\frac{dt}{\sqrt{\left(t^2-k^2\right)\left(1-t^2\right)}}=1 \qquad (9)$$

Інтегрування дає співвідношення

$$A=\Delta\cdot K\left(k\right) \quad (10)\,,\quad \Delta\cdot K\left(k'\right)=1 \qquad (11)$$

з яких випливає рівняння

$$K(k)/K(k')=A \qquad (12)$$

розв'язавши яке знаходимо параметр k - модуль повного еліптичного інтегралу першого роду [5] $K(k)$ після чого встановлення масштабного коефіцієнта Δ стає тривіальним.

Стосовно параметрів c і d то, звернувшись до співвідношення (1) і Таб.1 після стандартних обчислень, які зводяться до подачі еліптичних інтегралів у стандартній формі Лежандра, приходимо до рівнянь

$$h=\Delta\cdot F\left(arctg\frac{1}{k}\sqrt{\frac{c^2-k^2}{1-k^2}},k'\right),$$

$$H=\Delta\cdot F\left(arcSin\sqrt{\frac{1-d^2}{1-k^2}},k'\right)$$

розв'язання яких сумісно з (10), (11) виражає шукані параметри в залежності від довжини

закріплених діафрагм. Принагідно зазначимо, що для випадку слабого зв'язку відповідні розв'язки встановлені у роботі [1]. Позначимо висоту і півперіод елементарної комірки модифікованого акустопроводу як Q і R. Для цих параметрів згідно зі співвідношенням (2) знаходимо

$$R = \Lambda\int_0^c \frac{dt}{\sqrt{\left(c^2-t^2\right)\left(d^2-t^2\right)}} = \frac{\Lambda}{d}\cdot K\left(\chi\right) \quad (13)$$

$$Q = \Lambda\int_c^d \frac{dt}{\sqrt{\left(t^2-c^2\right)\left(d^2-t^2\right)}} = \frac{\Lambda}{d}\cdot K\left(\chi'\right) \quad (14)$$

де $\chi' = \sqrt{1-\left(c/d\right)^2}$ – доповнюючий модуль повного еліптичного інтегралу. Очевидно, що рівняння (13) і (14) інваріантні відносно масштабного перетворення. Для того, щоб фіксувати масштаб виберемо параметр Λ так, щоб забезпечити виконання правила Вейля, за яким в основному порядку спектральна густина частот нормальних мод має бути пропорційною площі двомірної області. З цих міркувань для Λ маємо рівняння

$$\left(\frac{\Lambda}{d}\right)^2 K\left(\chi\right)K\left(\chi'\right) = 1\cdot A$$

поєднавши яке зі співвідношеннями (13) і (14) одержуємо:

$$R = \sqrt{A}\left[K\left(\chi\right)/K\left(\chi'\right)\right]^{1/2} \quad (15)$$

$$Q = \sqrt{A}\left[K\left(\chi\right)/K\left(\chi'\right)\right]^{-1/2} \quad (16)$$

Добре відомо, що для аналізу розв'язків хвильового рівняння суттєвою є наявність особливих точок, які у нашому випадку пов'язані з якобіаном переходу $\Theta(\xi,\eta)$. Згідно із формулою (7) $\Theta(\xi,\eta)$ має сингулярності у точках $\varsigma(\pm k)$ і $\varsigma(\pm 1)$, які є образами вершин елементаної комірки заданої у площині Z. Зауважимо, що внаслідок симетрії елементарної комірки хвилеводу мають місце наступні співвідношення $\varsigma(-k) = -\varsigma(k)$ і $\varsigma(-1) = -\varsigma^*(1) = -\xi(1) + iQ$. Тому досить встановити координати двох сингулярних точок, а саме $\varsigma(k)$ і $\varsigma(1)$. Звернувшись до умов відповідності точок у комплексних площинах Ξ і W, запишемо

$$\varsigma(k) = \Lambda\int_0^k \frac{dt}{\sqrt{(c^2-t^2)(d^2-t^2)}} \quad (17)$$

$$\varsigma(1) = R + iQ - \Lambda\int_d^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2-c^2)(t^2-d^2)}} \quad (18)$$

Замінами $t = c\cdot x$ і $t = d/x$ приходимо до еліптичних інтегралів у формі Лежандра, тобто

$$\varsigma(k) = \frac{\Lambda}{d}\int_0^{k/c} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2/d^2)}} \quad (19)$$

$$\varsigma(1) = R + iQ - \frac{\Lambda}{d}\int_d^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2/d^2)}} \quad (20)$$

Інтегрування приводить співвідношення (19), (20) до наступної форми:

$$\varsigma(k) = \frac{\Lambda}{d}F\left(arcSin\frac{k}{c},\chi\right) \quad (21)$$

$$\varsigma(1) = R + iQ - \frac{\Lambda}{d}\left[K(\chi) - F\left(arcSind,\chi\right)\right]$$

Прийнявши до уваги (13), приведемо останній результат до компактнішого вигляду

$$\varsigma(1) = \frac{\Lambda}{d}F\left(arcSind,\chi\right) + iQ \quad (22)$$

Згідно із раніше встановленим співвідношенням відношення параметрів Λ/d виражається в термінах геометричних розмірів не модифікованої структури, а саме $\Lambda/d = \sqrt{1\cdot A}\left[K\left(\chi\right)K\left(\chi'\right)\right]^{-1/2}$. Це дозволяє остаточно записати:

$$\varsigma(k) = \sqrt{1\cdot A}F\left(arcSin\frac{k}{c},\chi\right)\Big/\sqrt{K(\chi)K(\chi')}$$

$$\varsigma(1) = \sqrt{1\cdot A}F\left(arcSind,\chi\right)\Big/\sqrt{K(\chi)K(\chi')} + iQ \quad (23)$$

Оскільки тут досліджується наближення сильного зв'язку, коли $\chi \equiv c/d \to 1$, то для неповних еліптичних інтегралів має місце асимптотика[5] $F\left(\varphi,\chi\right)\Big|_{\chi\to 1} \approx \ln\left(\frac{1+Sin\varphi}{Cos\varphi}\right)$. Отже, у наближенні, актуальному для нашого дослідження, координати особливих точок матимемо наступні співвідношення:

$$\varsigma(k) = \sqrt{\frac{A}{2\pi K(\chi)}}\ln\frac{c+k}{c-k} \quad (24)$$

$$\varsigma(1) = \sqrt{\frac{A}{2\pi K(\chi)}}\ln\frac{1+d}{1-d} + iQ \quad (25)$$

з яких видно, що при $\chi \to 1$ сингулярні точки у комплексній площин Ξ наближаються до уявної осі $\xi = 0$.

3. Спектр нормальних мод. Спектр вібраційних мод хвилеводу складають власні значення проблеми Діріхле, поставленої для рівняння Гельмгольца, модифікованого конформним перетворенням до вигляду поданого співвідношенням (3). Повторивши викладки раніше згаданої роботи авторів [1], представимо шукане зміщення $\Phi(\xi,\eta)$ рядом

$$\mathbf{\Phi}(\xi,\eta)=\sum_{l=1}^{\infty}F_l(\xi)\phi_l(\eta)\,, \qquad (26)$$

в якому функції

$$\phi_l(\eta)=\sqrt{2/Q}Sin\left(\pi l\eta/Q\right) \qquad (27)$$

визначають залежність зміщення від поперечної координати і забезпечують виконання умов Діріхле на закріпленій частині граничного контуру.

Підстановка (26) у (3) з врахуванням ортонормованості системи функцій (27) приводить до наступного рівняння

$$\partial_{\xi}^2F_l(\xi)-k_l^2F_l(\xi)+k^2\sum_m\mathbf{\Theta}_{lm}(\xi)F_m(\xi)=0 \qquad (28)$$

щодо коефіцієнтів $F_l(\xi)$ ряду (26). У рівнянні (28)

$$k_l=\pi l \qquad (29)$$

є безрозмірною поперечною компонентою хвильового вектора, а матриця $\Theta_{lm}(\xi)$ визначена так:

$$\mathbf{\Theta}_{lm}(\xi)=\frac{2}{Q}\int_0^Q Sin\left(\pi l\eta/Q\right)\mathbf{\Theta}(\xi,\eta)Sin\left(\pi m\eta/Q\right)d\eta \qquad (30)$$

В основі подальших викладок лежить застосування теореми Блоха для рівнянь з періодичними коефіцієнтами і методологія теорії збурень в тому числі і тієї версії, яка враховує виродження при виконанні умов Вульфа-Брега. Поклавши,

$$F_{lq}(\xi)=u_{lq}(\xi)\exp(iq\xi) \qquad (31)$$

де q - неперервна поздовжня компонента безрозмірного хвильового вектора, а $u_{lq}(\xi)$ - модулюючий множник, який повинен бути періодичним з періодом $2R$, тобто

$$u_{lq}(\xi)=u_{lq}(\xi\pm 2sR)\,,\quad s\in\mathbb{N} \qquad (32)$$

для компонент Фур'є $u_{lq}(g_n)$ евольвент функцій Блоха (31) одержується система рівнянь

$$-\left[\left(q+g_n\right)^2+k_l^2-k^2\Theta_{ll}(0)\right]u_{lq}(g_n)+ +k^2\sum_{m,g_s\neq 0}\Theta_{lm}(-g_s)u_{mq}(g_n+g_s)=0 \qquad (33)$$

яка записана в адіабатичному наближення стосовно поперечної координати, тобто з матриці (30) виділено лише діагональні матричні елементи, причому величини

$$g_n=\pi n/R\,,\qquad n\in\mathbb{Z} \qquad (34)$$

позначають вектори оберненої решітки.

Як показано в [1] у першому порядку теорії збурень має місце перенормування фазової швидкості згідно із співвідношенням:

$$\tilde{v}_l=v\Big/\sqrt{\Theta_{ll}(0)} \qquad (35)$$

Суттєвішою є зміна закону дисперсії нормальних мод у другому порядку теорії збурень для $u_{lq}(g_n)$, використання якого дає:

$$\omega_l(q)=\frac{\tilde{v}_l}{D}k_l(q)\left[1+\frac{k_l^2(q)}{\Theta_{ll}(0)}\sum_{g_n\neq 0}\frac{\left|\Theta_{ll}(g_n)\right|^2}{g_n^2+2qg_n}\right]^{-1/2} \qquad (36)$$

де $k_l(q)=\left(k_l^2+q^2\right)^{1/2}$.

При брегівському відбиванні, тобто коли $g_n^2+2qg_n=0$ результат (36) втрачає зміст і стає необхідним використання теорії збурень для вироджених станів. Не записуючи одержаних раніше [1] результатів у силу їх громіздкості, відзначимо лише, що спектр має зонний характер причому розщеплення зон виражається співвідношенням

$$\Delta\omega_l(g_n)=\frac{\tilde{v}_lk_l(g_n)}{D}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\left|\Theta_{ll}(g_n)/\Theta_{ll}(0)\right|}}-\frac{1}{\sqrt{1+\left|\Theta_{ll}(g_n)/\Theta_{ll}(0)\right|}}\right\} \qquad (37)$$

4. Параметри спектру при сильному зв'язку. Структурно чутливими факторами, які визначають параметри частотного спектру є Фур'є компоненти якобіану $\Theta(\xi,\eta)$ подані співвідношенням:

$$\Theta_{lm}(g_n)=\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R}\Theta_{lm}(\xi)e^{-ig_n\xi}d\xi \qquad (38)$$

Зауважимо, що ширина вікна між двома суміжними комірками хвилеводу, яка визначається відстанню між кінцевими точками шпунтів, дорівнює $1-H-h$. Якщо сумарна довжина шпунтів $H+h$ прямує до одиниці, то ширина вікна прямує до нуля.Оскільки кінцеві точки діафрагм мають своїми образами у площині Ξ точки c і d, то зменшення до нуля

ширина вікна означає, що $c \to d$. Отже, у першому наближенні можемо покласти $c \approx d$, що для модуля еліптичних функцій Якобі дає значення $m \approx 1$. Як відомо[5] еліптичні функції Якобі при таких значеннях модуля зводяться до елементарних, тобто:

$$sn(u,m)\big|_{m=1} = thu\,,\ cn(u,m)\big|_{m=1} = \left[ch(u)\right]^{-1} \quad (39)$$

Підстановка (39) у (7) дозволяє виразити якобіан переходу, який відповідає наближенню сильного зв'язку, у термінах гіперболічних функцій і після пониження степенів цих функцій одержати наступний результат

$$\Theta(\xi,\eta) = 4\left|\frac{\Delta}{\Lambda}\right|^2 \left| \left\{ \frac{1}{\left[\left(k/c\right)^2 + 1 - \left(1-k^2/c^2\right) ch\left(\frac{2K(\chi)\varsigma}{R}\right)\right]\left[c^{-2} + 1 + \left(c^{-2}-1\right) ch\left(\frac{2K(\chi)\varsigma}{R}\right)\right]} \right\}^{1/2} \right|^2 \quad (40)$$

Нарешті, підстановка $\varsigma = \xi + i\eta$ дозволяє виразити $\Theta(\xi,\eta)$ як явну функцію відповідних координат.

$$\Theta(\xi,\eta) = \frac{8c^4}{\left(c^2-k^2\right)\left(1-c^2\right)}\left|\frac{\Delta}{\Lambda}\right|^2 \left\{ ch\frac{4K(\chi)}{R}\xi + Cos\frac{4K(\chi)}{R}\eta - 4p\left[ch\frac{2K(\chi)}{R}\xi + Cos\frac{2K(\chi)}{R}\eta \right] + 2p^2 \right\}^{-1/2} \times$$

$$\times \left\{ ch\frac{4K(\chi)}{R}\xi + Cos\frac{4K(\chi)}{R}\eta + 4s\left[ch\frac{2K(\chi)}{R}\xi + Cos\frac{2K(\chi)}{R}\eta \right] + 2s^2 \right\}^{-1/2} \quad (41)$$

де введено позначення: $p = (c^2+k^2)/(c^2-k^2)$ і $s = (1+c^2)/(1-c^2)$.

Як свідчать співвідношення (36), (37) власні частоти так само як перенормування фазової швидкості і зонні щілини у прийнятому адіабатичному наближенні залежать лише від діагональних матричних елементів якобіану $\Theta(\xi,\eta)$. Зокрема, для $\Theta_{ll}(0)$ з врахуванням (30) та означення (38) після очевидних спрощень одержуємо

$$\Theta_{ll}(0) = \frac{1}{2RQ}\int_{-R}^{R} d\xi \int_0^Q \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi l}{Q}\eta\right)\right]\Theta(\xi,\eta)\,d\eta \quad (42)$$

Перший доданок формули (42) після повернення до координат, заданих у комплексній площині Z дає не що інше, як площу елементарної комірки акустопроводу, яка дорівнює $2A$. За вибраним калібруванням (15), (16) елементарної комірки в площині Ξ ця площа дорівнює $2RQ$. Таким чином перший доданок співвідношення (42) рівний одиниці. А тому (42) перепишемо так:

$$\Theta_{ll}(0) = 1 - \frac{1}{2RQ}\int_{-R}^{R} d\xi \int_0^Q \Theta(\xi,\eta)\cos\left(\frac{2\pi l}{Q}\eta\right)d\eta \quad (43)$$

Для наступних обчислень важливо прийняти до уваги, що якобіан переходу має сингулярності у певних точках елементарної комірки, заданої у комплексній площині Ξ. З формули (7) і Таб.1 випливає, що такими є образи вершин елементарної комірки хвилеводу, а саме точки $\varsigma(-k)$, $\varsigma(-1)$, $\varsigma(1)$, $\varsigma(k)$. В зв'язку з цим для обчислення матричного елементу (42) і його аналогу, який відповідає вектору оберненої решітки $g_n \neq 0$,звернемося до стандартного підходу, описаного в багатьох джерелах, наприклад в книзі[6]. Суть методу полягає в тому, що виділяються околи особливих точок і у кожному з них якобіан переходу апроксимується своєю найбільш сингулярною частиною. Що ж до тієї частини комірки, з якої видалені особливі точки, то у ній $\Theta(\xi,\eta)$ може бути подано у вигляді ряду по малому параметру, в якості якого ми вибираємо функцію $Ch^{-1}\left(\frac{4K(\chi)}{R}\xi\right)$ меншу від одиниці для всіх ξ, що, як показують розрахунки, по суті є розкладом по степенях $K^{-1}(\chi) \ll 1$. Після таких перетворень інтегрування для кожного із описаних вкладів поширюється на повну елементарну комірку.

Застосуванням описаного підходу розділяється вклад особливих точок і регулярної частини якобіану. Перший з них запишемо у вигляді $\delta\Theta^{irr}(g_n) = \delta\Theta^{irr}_{ll}(g_n) + \delta\Theta^{irr}_0(g_n)$, де доданки визначені співвідношеннями

$$\delta\Theta_{ll}^{irr}(g_n)=-\frac{c}{4QK(\chi)}\left(\frac{\Delta}{\Lambda}\right)^2\left\{\frac{1}{k}\int_{-R}^{R}e^{-ig_n\xi}d\xi\int_0^Q\left(\frac{1}{\left\{\left[\xi-\varsigma(k)\right]^2+\eta^2\right\}^{1/2}}+\frac{1}{\left\{\left[\xi+\varsigma(k)\right]^2+\eta^2\right\}^{1/2}}\right)Cos\left(2\pi\eta l/Q\right)d\eta+\right.$$
$$\left.+\int_{-R}^{R}e^{-ig_n\xi}d\xi\int_0^Q\left(\frac{1}{\left\{\left[\xi-\varsigma(1)\right]^2+\eta^2\right\}^{1/2}}+\frac{1}{\left\{\left[\xi+\varsigma(1)\right]^2+\eta^2\right\}^{1/2}}\right)Cos\left(2\pi\eta l/Q\right)d\eta\right\} \quad (44)$$

і $\delta\Theta_0^{irr}(g_n)=-\delta\Theta_{ll}^{irr}(g_n)\big|_{l=0}$.

Інтегруючи по ξ,тут і надалі, слід врахувати, що $R\simeq\sqrt{2AK(\chi)/\pi}$ у наближенні сильного зв'язку набагато перевищує одиницю. В силу цього інтегрування по ξ можна поширити на всю числову вісь і в такий спосіб після відповідних інтегрувань для $\delta\Theta_{ll}^{irr}(g_n)$ одержати

$$\delta\Theta_{ll}^{irr}(g_n)=-\frac{c}{QK(\chi)}\left(\frac{\Delta}{\Lambda}\right)^2\left\{\left(\frac{1}{k}Cos\left[g_n\varsigma(k)\right]+Cos\left[g_n\xi(1)\right]\right)\int_0^Q Cos\left(2\pi\eta l/Q\right)K_0(g_n\eta)d\eta\right\} \quad (45)$$

де $K_0(x)$ - функція Макдональда[5].

Прийнявши до уваги (45) і означення, яке стосується $\delta\Theta_0^{irr}(g_n)$, після інтегрування функції Макдональда[7] знаходимо:

$$\delta\Theta_0^{irr}(g_n)=\frac{c}{K(\chi)}\left(\frac{\Delta}{\Lambda}\right)^2\left\{\frac{1}{k}Cos\left[g_n\varsigma(k)\right]+Cos\left[g_n\varsigma(1)\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{K_o(g_nQ)+\frac{\pi}{2}\left[K_o(g_nQ)\mathrm{L}_1(g_nQ)-K_1(g_nQ)\mathrm{L}_o(g_nQ)\right]\right\} \quad (46)$$

причому тут $\mathrm{L}_n(x)$ є модифікованою функцією Струве з добре відомою асимптотикою[5] застосування якої дає

$$\delta\Theta_0^{irr}(g_n)=\frac{c}{K(\chi)}\left(\frac{\Delta}{\Lambda}\right)^2\left\{\frac{1}{k}Cos\left[g_n\varsigma(k)\right]+Cos\left[g_n\varsigma(1)\right]\right\}\times\begin{cases}-\gamma+\ln\dfrac{g_nQ}{2}\ ;\ g_nQ\ll1\\ \dfrac{\pi}{32(g_nQ)^3}\ ;\quad g_nQ\gg1\end{cases} \quad (47)$$

де γ - стала Ейлера.

Стосовно $\delta\Theta_{ll}^{irr}(g_n)$, то також необхідно розрізняти два випадки, а саме $g_nQ\ll1$ і $g_nQ\gg1$. У першому випадку актуальними будуть зони з $n\le R/\pi Q$, тоді як у другому зонний індекс $n\ge R/\pi Q$. Розглядаючи перший випадок, можна використати поведінку функцій Макдональда при малих значеннях аргументу і прийти до інтегрування елементарних функцій, яке приводить до інтегрального синусу, який у цьому випадку зводиться до константи рівної $\pi/2$. Стосовно великих значень зонних індексів, то інтегрування по η можна поширити до безмежності після чого дістати табличні інтеграли. Виконавши описані процедури, знаходимо

$$\delta\Theta_{ll}^{irr}(g_n)=-\frac{c}{QK(\chi)}\left(\frac{\Delta}{\Lambda}\right)^2\left(\frac{1}{k}Cos\left[g_n\varsigma(k)\right]+Cos\left[g_n\varsigma(1)\right]\right)\times\begin{cases}\dfrac{Q}{l};&g_nQ\ll1\\ \dfrac{1}{\sqrt{g_n^2+4\pi^2l^2/Q^2}};&g_nQ\gg1\end{cases} \quad (48)$$

Регулярна частина $\Theta(\xi,\eta)$ з точністю до $Ch^{-2}\left[4K(\chi)\xi/R\right]$ подається співвідношенням

$$\Theta(\xi,\eta)=\frac{8c^4}{\left(c^2-k^2\right)\left(1-c^2\right)ch\dfrac{4K(\chi)}{R}\xi}\left|\frac{\Delta}{\Lambda}\right|^2\left\{1-\frac{p^2+s^2-2(p-s)ch\dfrac{2K(\chi)}{R}\xi}{ch\dfrac{4K(\chi)}{R}\xi}+\frac{2(p-s)Cos\dfrac{2K(\chi)}{R}\eta-Cos\dfrac{4K(\chi)}{R}\eta}{ch\dfrac{4K(\chi)}{R}\xi}\right\}$$

вклад від якого після інтегрувань по η подамо у вигляді суми $\delta\Theta^{reg}(g_n)=\delta\Theta_{ll}^{reg}(g_n)+\delta\Theta_0^{reg}(g_n)$ з доданками:

$$\delta\Theta_{ll}^{reg}(g_n)=\frac{4c^4l^3I_2}{\left(c^2-k^2\right)\left(1-c^2\right)}\left|\frac{\Delta}{\Lambda}\right|^2\left\{\frac{2(p-s)Sin\left[2K(\chi')\right]}{l^4-K^4(\chi')/\pi^4}-\frac{Sin\left[4K(\chi')\right]}{l^4-16K^4(\chi')/\pi^4}\right\} \tag{49}$$

$$\delta\Theta_{00}^{reg}(g_n)=\frac{4c^4}{\left(c^2-k^2\right)\left(1-c^2\right)}\left(\frac{\Delta}{\Lambda}\right)^2\frac{1}{R}\left[I_1-(p^2+s^2)I_2+2(p-s)I_3\right] \tag{50}$$

де з метою компактизації введено позначення:

$$I_1=\int_{-R}^{R}\frac{e^{-ig_n\xi}}{Ch\left[4K(\chi)\xi/R\right]}d\xi\ ,\ I_2=\int_{-R}^{R}\frac{e^{-ig_n\xi}}{Ch^2\left[4K(\chi)\xi/R\right]}d\xi\ ,\ I_3=\int_{-R}^{R}\frac{e^{-ig_n\xi}Ch\left[2K(\chi)\xi/R\right]}{Ch^2\left[4K(\chi)\xi/R\right]}d\xi$$

Виконавши у цих виразах очевидну заміну змінних, приведемо верхню межу інтегрування до $4K(\chi)$. При розгляді слабого зв'язку інтегрування поширюється до нескінченності, що приводить до результатів:

$$I_1=\frac{R}{2K(\chi)Ch\left[\pi g_nR/4K(\chi)\right]},\ \ I_2=\frac{\pi g_nR}{16K^2(\chi)Sh\left[\pi g_nR/8K(\chi)\right]}$$

$$I_3=\frac{\pi\sqrt{2}\left\{Ch\left[\pi g_nR/8K(\chi)\right]+\left[g_nR/4K(\chi)\right]Sh\left[\pi g_nR/8K(\chi)\right]\right\}}{16K(\chi)Ch\left[\pi g_nR/4K(\chi)\right]} \tag{51}$$

аналіз яких для випадків $g_nQ\ll1$ і $g_nQ\gg1$ є очевидним.

Аналіз результатів і висновки. Співвідношеннями (46)-(51) встановлено параметри, які визначають частотний спектр досліджуваної структури у випадку сильного зв'язку. Аналізуючи одержане, в першу чергу має зміст дослідити значимість вкладів до цих параметрів сингулярної і регулярної частин якобіану $\Theta(\xi,\eta)$. Звернувшись до формули (49), і прийнявши до уваги асимптотику еліптичного інтегралу $K(\chi')$ можна переконатися, що вклад $\delta\Theta_{ll}^{reg}(g_n)$ у випадку сильного зв'язку пропорційний малому порядку $(\chi')^2$, в той час як решта із задіяних величин мають малість визначену фактором $K^{-1}(\chi)$. Стосовно $\delta\Theta_0^{reg}(g_n)$, то при $g_nQ\ll1$ кожен з інтегралів I_α не залежить від векторів оберненої решітки, а у випадку $g_nQ\gg1$ їх поведінка змінюється на експоненційне згасання зі зростанням g_nQ. Порівнявши ці результати з асимптотиками, які випливають зі співвідношень (47) , (48), за якими сингулярна частина дає вклад або логарифмічного порядку, перша з формул (47), або степеневого характеру, формули (48), приходимо до висновку, за яким у випадку сильного зв'язку домінуючим є вклад сингулярних точок елементарної решітки. Тому доцільно записати остаточні результати, а саме

$$\Theta_{ll}(g_n)\simeq\frac{c}{K(\chi)}\left(\frac{\Delta}{\Lambda}\right)^2\begin{cases}\dfrac{1+k}{k}\left(-\gamma+\ln\dfrac{g_nQ}{2}-\dfrac{1}{l}\right)\ ; & g_nQ\ll1\\ \left(\dfrac{1}{k}Cos\left[g_n\varsigma(k)\right]+Cos\left[g_n\varsigma(1)\right]\right)\dfrac{1}{\sqrt{g_n^2+4\pi^2l^2/Q^2}}\ ;\ g_nQ\gg1\end{cases} \tag{52}$$

В співвідношенні (43) основним є перший доданок. Поправка до нього, як вище зазначено, визначається інтегруванням по околах особливих точок. Поклавши у (44) $g_n=0$ і виконавши обчислення зі збереженням основних вкладів, для $\Theta_{ll}(0)$ одержуємо

$$\Theta_{ll}(0)=1-\frac{c(1+k)}{kK(\chi)l}\left(\frac{\Delta}{\Lambda}\right)^2 \tag{53}$$

Формули (52) , (53) разом з (36) . (37), описуючи кількісні закономірності частотного спектру, разом з тим дозволяють зробити висновки якісного характеру. Зокрема з врахуванням того, $\Theta_{ll}(g_n)\ll\Theta_{ll}(0)$ вікна у частотному спектрі визначаються фактором $K^{-1}(\chi)$ в той час, як їх залежність від зонного індексу n встановлюється множником $k_l^2(g_n)$.

Має зміст підкреслити, що у випадку, який розглядається, виконується нерівність $Q \ll R$. В зв'язку з цим спектр, як випливає з (36), слабо залежить від неперервного хвильового числа q і в основному наближенні по структурних факторах, як і слід сподіватися на основі фізичних міркувань, відповідає системі стоячих хвиль, які збуджуються у прямокутній мембрані із закріпленими краями[8].

Список використаних джерел

1. Бурдейна О.В., Бурдейний В.М., Гель П.В., Спектр стрічкового акустопроводу з періодично розподіленими діафрагмами. Слабий зв'язок, Вібрації в техніці і технологіях, 2014, №1(73), – С. 13–20.
2. Bittner S., Dietz B., Miski-Oglu M., Richter A., Ripp C., Sadutni E., Schleich W.P., Bound states in Sharply Bent Waveguides:Analitical and Experimental Approach, arXiv:13032956v1[cond-mat.mes-hall], 12 Mar 2013.
3. Коппенфельс В., Штальман Ф., Практика конформних от ображений, «Мир», 1963, – 407 с.
4. 4.Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексной переменной, «Наука», 1987. – 688 с.
5. Абрамовиц М., Стиган И., Справочник по специальным функциям, «Наука», 1979, – С. 832.
6. Риекстыньш Э.Я., Асимптотические разложения интегралов, т1, «Зинатне», 1974, – С. 394.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И., Интегралы и ряды. Специальные функции «Наука»,1983. – 752 с.
8. Нефедов Е.И., Сивов А.Н., Электродинамика периодических структур, М., «Наука», 1977, – С. 209.

Список джерел в транслітерації

1. Burdeyna O.V., Burdeynyy V.M., Hel P.V., Spektr strichkovoho akustoprovodu z periodichno rozpodilenimi diafrahmami. Slabki zvyazok, Vibratsiyi v tekhnitsi y tekhnolohiyakh, 2014, №1 (73), – C. 13–20.
2. Bittner S., Dietz B., Miski-Oglu M., Richter A., Ripp C., Sadutni E., Schleich WP, Bound states in Sharply Bent Waveguides: Analitical and Experimental Approach, arXiv: 13032956v1 [cond-mat .mes-hall], 12 Mar 2013.
3. Koppenfels V., Shtal'man F., Praktika konformnykh ot obizhen, «Mir», 1963, – 407 s.
4. Lavrentyev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funktsii kompleksnoy peremennoy, «Nauka», 1987. – 688 s.
5. Abramovits M., Stigan I., Spravochnik po spetsial'nymi funktsiyam, «Nauka», 1979, – C. 832.
6. Riyekstynsh E.YA., Asimptoticheskiye razlozheniya integralov, T1, «Zinatne», 1974, – C. 394.
7. Prudnikov A.P., Brychkov YU.A., Marichev O.I., Integraly i ryady. Spetsial'nyye funktsii «Nauka», 1983. – 752 s.
8. Nefedov Ye.I., Sivova A.N., Elektrodinamika periodicheskikh struktur, M., «Nauka», 1977, – C. 209.

СПЕКТР ПОЛОСКОВОГО АКУСТОПРОВОДА С ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДИАФРАГМАМИ. СИЛЬНАЯ СВЯЗЬ.

Аннотация. *Исследуются структурно чувствительные характеристики частотного спектра периодического полоскового акустопровода, сформированного системой закрепленных диафрагм. Элементарная ячейка структуры, образованная берегами волновода и диафрагмами конформно отображается в ячейку с канонической, а именно, прямоугольной, геометрией. Параметры, описывающие частотный спектр и вычисленные методами теории возмущений, установлены для случая сильной связи, когда вследствие уменьшения ширины окна акустические возбуждения остаются локализованными внутри соответствующих ячеек. Анализируются качественные изменения частотного спектра.*

Ключевые слова: *акустический волновод, конформное отображение, спектр частот, теория возмущений, приближение сильной связи.*

SPECTRUM OF ACOUSTIC WAVE GUIDES WITH PERIODIC DISTRIBUTED DIAPHRAGMS. TIGHT BINDING CASE

Annotation. *The structure sensitive properties of frequency spectrum of stripe acoustic waveguide have been investigated in the work. The waveguide is formed by periodic translations of identical diaphragms along the structure axis. By applying conform mapping approach elementary cell of the such periodic waveguide was transformed into the canonical one with simple rectangular geometry. The parameters related to the frequency spectrum in the tight binding apptoximation were determined in terms of perturbation theory and expressed by geometric factores. The qualitative features of the spectrum have been considered too.*

Key words: *acoustic wave guide, conform mapping, frequency spectrum, theory of perturbation, tight binding approximation.*