

**Бурдейна О. В.****Бурдейний В. М.***Вінницький
національний
технічний
університет***Гель П. В.***Вінницький
національний
аграрний
університет***Burdeyna O. V.****Burdeynyi V. M.***Vinnitsia National
Technical University***Hel P. V.***Vinnitsia National
Agrarian University***УДК 534.12+517.927.2****СПЕКТР СТРИЧКОВОГО
АКУСТОПРОВОДУ З ПЕРІОДИЧНО
РОЗПОДІЛЕНИМИ
ДІАФРАГМАМИ.
СЛАБИЙ ЗВ'ЯЗОК**

Досліджується спектр власних частот стрічкового акустопроводу з періодичною структурою, яка формується системою закріплених діафрагм. Елементарна комірка структури утворена берегами хвилеводу і діафрагмами конформно перетворюється в комірку канонічної, саме, прямокутної геометрії. Такий підхід дозволяє розділити змінні на граничному контурі, а також ввести фактор форми безпосередньо у хвильове рівняння. Основні результати, які одержані застосуванням теорії збурень в наближенні слабого зв'язку в поєднанні з властивостями рівнянь з періодичними коефіцієнтами, зводяться до дисперсії і перенормування фазової швидкості, розщепленні неперервного спектру у підзони. Ширина вікон заборонених частот подана у термінах геометричних параметрів хвилеводу.

Ключові слова: акустичний хвилевід, конформне відображення, спектр частот, теорія збурень, наближення слабого зв'язку.

Вступ. У даній роботі досліджується спектр частот стрічкового акустичного хвилеводу спеціальної форми. Акустопровід має вигляд прямолінійної смуги з періодично розташованими діафрагмами, які утворені закріпленими відрізками-шпунтами. Така геометрія цікава в першу чергу тим, що граничний контур, складений з паралельних прямолінійних берегів і викинутих відрізків, утворює ломані лінії, в яких кінцеві точки шпунтів-загострення з кутом розкриття рівним повному куту. Саме ця особливість накладає обмеження на можливість застосування класичних підходів теорії збурень адже навіть вибір основного наближення виявляється достатньо проблематичним, що само по собі стимулює необхідність розроблення і апробації нетрадиційних пертурбативних методів. Дослідження спектру описаної системи має і самостійний інтерес оскільки стрічкові акустичні хвилеводи давно стали звичними активними і пасивними елементами вібраційних сенсорів, акустичних аналізаторів і перетворювачів тощо.

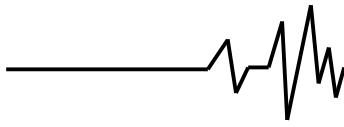
Опис методу. Як відомо [1,2] акустичний спектр хвилеводу формується власними

значеннями певної крайової задачі поставленої для рівняння Гельмгольца. Тут приймаються умови Діріхле, які відповідають хвилеводу із закріпленими берегами. Не зупиняючись на проблематиці врахування рельєфу граничного контуру, в деталях описаної у багатьох джерелах [3,4], вкажемо лише на те, що з останніх досліджень [5] випливає перспективність застосування підходу, в основі якого лежить конформне перетворення області асоційованої з хвилеводом в одну з канонічних.

Рівняння Гельмгольца містить як складовий елемент оператор Белтрамі-Лапласа. Конформне перетворення від координат (x, y) у комплексній площині W до координат (ξ, η) комплексної площини E модифікує цей оператор за співвідношенням

$$\nabla_z^2 = g^{\frac{1}{2}} \partial_i (g^{\frac{1}{2}} g_{ij}^{-1} \partial_j), \quad (1)$$

де g_{ij} – метричний тензор, а g -його детермінант. Метричний тензор має діагональну форму, що разом з умовами Коші-



Рімана [6] приводить до модифікованого хвильового рівняння

$$\nabla_{\xi}^2 \Phi + \Theta(\xi, \eta) k^2 \Phi = 0 \quad (2)$$

в якому $k = \omega D/v$ є нормованим на ширину акустопроводу D – безрозмірним хвильовим числом, Φ позначає зміщення в полі акустичної хвилі, а

$$\Theta(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \quad (3)$$

– діагональний елемент метричного тензора, який в той же час є якобіаном переходу.

Конформне відображення, спрощуючи геометрію, не тільки дозволяє розділення змінних на берегах хвилеводу, але і переносить фактор форми безпосередньо у хвильове рівняння чим уможливується застосування адекватної теорії збурень.

Подальше дослідження виконується за такою схемою: вибирається підходяща система власних мод, які крім того, що утворюють повний ортонормований простір, задовольняють вимогам симетрії і вказаним раніше краєвим умовам, Після цього зміщення Φ розкладається у ряд по модах нульового наближення. Підстановка згаданого ряду у рівняння (2) приводить до рівняння відносно коефіцієнтів розкладу, яке розв'язується ітеративним методом.

Приведення хвилеводу до канонічної форми. Елементарна комірка досліджуваної періодичної структури – прямокутник комплексної площини Z , вершини якого співпадають з точками: $(-A, 0)$, $(-A, -A + i)$, $(A, A + i)$, $(A, 0)$. Внутрішні береги шпунтів, задано відрізками: $[\pm A, \pm A + ih]$,

$[\pm A, \pm A + i(1 - H)]$, причому h – довжина нижніх, а H верхніх вилучених відрізків. Періодичний акустопровід формується шляхом трансляції елементарної комірки на $\pm 2A$, $\pm 4A$... або її послідовними обертаннями навколо вертикальних сторін базового прямокутника.

Конформне відображення елементарної комірки виконується у два етапи. На першому функцією $z(w)$, яка визначена інтегралом Крістофеля-Шварца [6,7]

$$z = \Delta \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - a^2)(t^2 - b^2)}} \quad (4)$$

верхня півплощина комплексної площини W відображається на описану вище область комплексної площини Z . Другий етап полягає у тому, що перетворенням

$$\zeta = \Lambda \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - c^2)(t^2 - d^2)}} \quad (5)$$

верхня півплощина W відображається на прямокутник площини ζ з вершинами, які є образами точок $\pm ci$ і $\pm di$. Таким чином, суперпозиція перетворень (4) і (5), тобто функція $z = z[w(\zeta)]$, відображає канонічну

область, а саме прямокутник площини Ξ , на елементарну комірку хвилеводу. Обертання цього прямокутника навколо його вертикальних сторін на основі відомої теореми [6] є прообразом досліджуваного періодичного хвилеводу. Стосовно відповідності характерних точок, то вона відображається таблицею 1.

Таблиця 1

Відповідність точок при конформних відображеннях

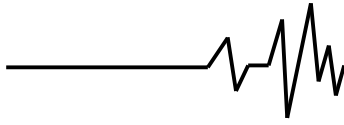
Z	-A	-A+ih	-A+i(1-H)	-A+i	A+i	A+i(1-H)	A+ih	A
W	-a	-c	-d	-b(-1)	b(1)	d	c	a
ζ		-R	-R+iQ			R+iQ	R	

Шляхом відомих замін змінних співвідношення (4) і (5) приводяться до стандартної форми Лежандра, що дозволяє подати їх у термінах еліптичних функцій Якобі[8], а саме:

$$w = a \cdot sn \left(\frac{zb}{\Delta}, \frac{a^2}{b^2} \right), \quad (6)$$

$$w = c \cdot sn \left(\frac{\zeta d}{\Lambda}, \frac{c^2}{d^2} \right) \quad (7)$$

Формули (6) і (7) встановлюють у параметричному вигляді шукане перетворення $z = z[w(\zeta)]$ адже виключенням проміжної



змінної w можна знайти z в залежності від ζ чи навпаки.

Для того, щоб вищенаведені формули набули конкретного змісту, необхідно знайти координати образів вершин елементарної комірки слід, тобто виразити параметри a і b через ширину D довжину $2A$ комірки. Зауважимо, що переходом до безрозмірного хвильового числа, ми маємо відносний період структури $2A$ як єдиний характерний лінійний розмір. Звідси випливає можливість надати певного фіксованого значення одному із шуканих параметрів. Ми покладемо надалі для b значення рівне одиниці. Тоді, прийнявши до уваги таблицю відповідності точок, приходимо до співвідношень:

$$A = \Delta \int_0^k \frac{dt}{\sqrt{(k^2 - t^2)(1 - t^2)}}, \quad (8)$$

$$\Delta \int_k^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - k^2)(1 - t^2)}} = 1 \quad (9)$$

де введено стандартне позначення для модуля k еліптичного інтегралу, причому з врахуванням вибору $b = 1$ легко перевірити, що $k = a/b = a$.

Інтегрування [9] в (8) і (9) приводить до повних еліптичних інтегралів першого роду $K(t)$, що дозволяє переписати ці умови узгодження так

$$A = \Delta \cdot K(k), \quad (10)$$

$$\Delta \cdot K(k') = 1 \quad (11)$$

Зауважимо, що тут $k' = \sqrt{1 - k^2}$ є доповнючим модулем еліптичного інтегралу. Таким чином з рівняння

$$K(k)/K(k') = A \quad (12)$$

знаходимо модуль k після чого з рівняння (11) одержуємо значення масштабного параметра Δ :

$$\Delta^{-1} = K(k') \quad (13)$$

Явні залежності k і Δ від A можна отримати в асимптотичних випадках $A \gg 1$, $A \ll 1$, а також для елементарної комірки близької до квадрата. Відповідні результати за браком місця відкладемо до іншої нагоди.

Точки $\pm c$ і $\pm d$ дійсної осі комплексної площини W відображаються у кінцеві точки шпунтів. Приймавши до уваги (4), після

обчислення інтегралів, які зводяться до табличних неповних еліптичних інтегралів першого роду $F(\varphi, k)$ [9], приходимо до наступних рівнянь

$$h = \Delta \cdot F\left(\arctg \frac{1}{k} \sqrt{\frac{c^2 - k^2}{1 - k^2}}, k'\right) \quad (14)$$

$$H = \Delta \cdot F\left(\arcsin \sqrt{\frac{1 - d^2}{1 - k^2}}, k'\right) \quad (15)$$

відносно параметрів c і d як невідомих. Зокрема, у випадку малої довжини шпунтів, тобто при $h, H \ll 1$, звернувшись до відповідних асимптоти еліптичних інтегралів, можна отримати:

$$c = \sqrt{k^2 + \frac{kk'}{\Delta} h} \approx k + \frac{k'}{2\Delta} h, \quad (16)$$

$$d = \sqrt{1 - \frac{k'}{\Delta} H} \approx 1 - \frac{k'}{2\Delta} H$$

Перейдемо до перетворення (5). Оскільки значення c і d як прообразів вершин прямокутної елементарної комірки вже встановлені, то її висоту Q і півширину R можна виразити на основі умов відповідності точок приведених у таблиці 1, що після очевидних перетворень дає

$$R = \Lambda \int_0^c \frac{dt}{\sqrt{(c^2 - t^2)(d^2 - t^2)}} = \frac{\Lambda}{d} \cdot K(\chi), \quad (17)$$

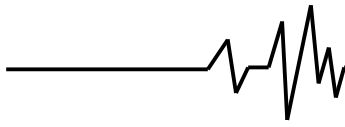
$$Q = \Lambda \int_c^d \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - c^2)(d^2 - t^2)}} = \frac{\Lambda}{d} \cdot K(\chi') \quad (18)$$

де основний і доповнючий модулі повних еліптичних інтегралів зв'язані з c і d наступними співвідношеннями: $\chi = c/d$ і

$$\chi' = \sqrt{1 - (c/d)^2}.$$

Очевидно, що і висота, і ширина прямокутника-образу елементарної комірки допускають перетворення масштабу. Виберемо параметр Λ так, щоб площа образу була б рівною площі оригіналу. Це забезпечує виконання формули Вейля, за якою в основному наближенні спектральна густина частот нормальних мод пропорційна площі двовірної області. З цих міркувань для Λ маємо рівняння

$$\left(\frac{\Lambda}{d}\right)^2 K(\chi)K(\chi') = 1 \cdot A$$



поєднавши яке зі співвідношеннями (17) і (18) одержуємо:

$$R = \sqrt{A} [K(\chi)/K(\chi')]^{1/2}, \quad (19)$$

$$Q = \sqrt{A} [K(\chi)/K(\chi')]^{-1/2} \quad (20)$$

Нарешті, тут має зміст подати необхідні для подальших викладок значення параметрів Якобі, один з яких, а саме p відповідає

еліптичному синусу з модулем $m = \chi^2$, а

p_1 стосується еліптичної функції з доповнючим модулем $m' = (\chi')^2$.

Звернувшись до означень, поданих в багатьох джерелах, наприклад в [8], можна показати, що мають місце співвідношення:

$$p = \exp \left[-\frac{\pi K(\chi')}{K(\chi)} \right] = \exp \left(-\frac{\pi Q}{R} \right), \quad (21)$$

$$p_1 = \exp \left[-\frac{\pi K(\chi)}{K(\chi')} \right] = \exp \left(-\frac{\pi R}{Q} \right) \quad (22)$$

Якобiан переходу. Очевидно, що якобiан переходу до координат (ξ, η) в силу співвідношення (3) стає визначальним фактором у запропонованому тут підході. Для його обчислення слід прийняти до уваги інтеграли Крістофеля-Шварца (4), (5), що дає

$$\Theta(\xi, \eta) = \left| \frac{\Delta}{\Lambda} \right|^2 \left| \sqrt{\frac{(c^2 - w^2)(d^2 - w^2)}{(k^2 - w^2)(1 - w^2)}} \right|^2 \quad (23)$$

Хвильове рівняння виражене у системі координат (ξ, η) . Тому є необхідність подати у тих же змінних якобiан переходу. Виключивши з (23) проміжну комплексну змінну w згідно з формулою (7) одержуємо:

$$\Theta(\xi, \eta) = \left| \frac{\Delta}{\Lambda m} \right|^2 \left| \frac{\left[1 - sn^2 \left(\frac{K(\chi)\zeta}{R}, m \right) \right] \left[1 - m \cdot sn^2 \left(\frac{K(\chi)\zeta}{R}, m \right) \right]}{\left[(k/c)^2 - sn^2 \left(\frac{K(\chi)\zeta}{R}, m \right) \right] \left[c^{-2} - sn^2 \left(\frac{K(\chi)\zeta}{R}, m \right) \right]} \right|^{1/2} \quad (24)$$

З формули (24) випливає, що якобiан переходу має особливими точкам ті, які відповідають кінцям шпунтів і в яких якобiан перетворюється в нуль, а також, крім згаданих, ті точки, які є образами вершин істинної комірки, де функція $\Theta(\xi, \eta)$ стає розбіжною.

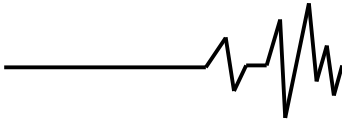
Застосуємо до (24) операцію зсуву $\zeta \rightarrow \zeta + 2nR$, де $n = \pm 1, \pm 2, \dots$. Після вказаної трансляції аргумент кожної з еліптичних функцій набуває приросту $2nK(\chi)$. Приймавши до уваги формули зведення[8], можемо переконалися. $\Theta(\zeta) = \Theta(\zeta \pm 2nR)$. Таким чином, хвильове рівняння (8), як і слід було сподіватися, відтворює трансляційну інваріантність акустопроводу.

В силу труднощів технічного характеру точне співвідношення (24) може виявитися малопродуктивним щодо одержання конкретних результатів. А тому вважаємо за необхідне обґрунтувати тут застосовувані у подальшому апроксимації. Звернемось до параметрів Якобі, конкретизованих формулами (21), (22). Очевидно, що кожен із них менший від одиниці, Більше того, при «розумних»

співвідношеннях між лінійними розмірами елементарної комірки ця малість має експоненційний характер. Ця обставина дозволяє покласти в основу алгоритму одержання контрольованих наближень відомі[8] розклади еліптичних функцій по степенях параметрів Якобі. Зокрема, в основних порядках за степенями p мають місце апроксимації:

$$\begin{aligned} sn(x, m) &\sim \sqrt{p} + o(p^{3/2}), \\ cn(x, m) &\sim \sqrt{p} + o(p^{3/2}), \\ dn(x, m) &\sim p^0 + o(p) \end{aligned} \quad (25)$$

Тепер в еліптичному синусі Якобі комплексного аргументу необхідно виділити дійсну і уявну частини, звернувшись для цього до теореми додавання[8]. Аналіз одержаного у такий спосіб раціонального виразу показує, що дійсна частина його чисельника за порядком величини пропорційна \sqrt{p} , в той час як уявна частина має порядок $p_1 \sqrt{p}$. Таким чином основний вклад у розклад по степенях



параметру Якобі дає лише дійсна частина чисельника. Знаменник складається з двох доданків. Перший з них за порядком пропорційний p_1 , а другий $\sim pp_1$. Отже,

основним є вклад першого доданку. Утримуючи вказані головні терми, та конкретизувавши коефіцієнти розкладів (25), запишемо:

$$\Theta = \left| \frac{\Delta}{\Lambda} \right|^2 \left| \frac{m_1^2 Q^2 p \sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2R}\right) - (1+m)16\pi^2 R^2 p_1^2 \cos^4\left(\frac{\pi\eta}{2Q}\right)}{m_1^2 Q^2 p \sin^2\left(\frac{\pi\xi}{2R}\right) - \left(\frac{1+k^2}{c^2}\right)16\pi^2 R^2 m p_1^2 \cos^4\left(\frac{\pi\eta}{2Q}\right)} \right| \quad (26)$$

В такий спосіб можна отримати вищі наближення, які міститимуть вищі степені параметрів Якобі і тригонометричних функцій.

Спектр нормальних мод. Конформне відображення, спрощуючи рельєф границь хвилеводу і модифікуючи оператор Белтрамі-Лапласа, в той же час суттєво ускладнює явний вигляд хвильового рівняння за рахунок появи у його складі фактора форми вираженого Якобіаном переходу. З наявних літературних джерел, які безпосередньо стосуються застосовуваного тут підходу, впливає, що точні розв'язки відповідної спектральної задачі поки що невідомі. Тому природною є необхідність застосування наближених методів, зокрема тих чи інших версій теорії збурень. Маючи на увазі використання класичної теорії Релея-Шредінгера [10], перш за все доцільно розділити швидкі і повільні змінні. Оскільки поперечний розмір хвилеводу є найменшим характерним лінійним параметром, то саме відповідна координата η відіграє роль швидкої змінної. Відділити її можна, вибравши як функції нульового наближення стоячі хвилі задані рівнянням:

$$\phi_l(\eta) = \sqrt{2/Q} \sin(\pi l \eta / Q) \quad (27)$$

Розклад шуканих нормальних мод в ряд Фур'є по системі функцій (27) має наступний вигляд:

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^{\infty} F_l(\xi) \phi_l(\eta) \quad (28)$$

Після підстановки розкладу (28) у рівняння (2) і стандартної процедури проектування для функцій $F_l(\xi)$, які описують поширення хвиль вздовж осі акустопроводу, впливають рівняння:

$$\partial_{\xi}^2 F_l(\xi) - k_l^2 F_l(\xi) + k^2 \sum_m \Theta_{lm}(\xi) F_m(\xi) = 0 \quad (29)$$

де

$$k_l = \pi l \quad (30)$$

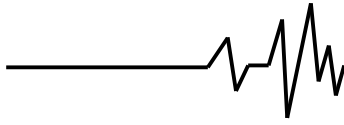
є безрозмірною поперечною компонентою хвильового вектора, а матриця $\Theta_{lm}(\xi)$ визначена так:

$$\Theta_{lm}(\xi) = \frac{2}{Q} \int_0^Q \sin(\pi l \eta / Q) \Theta(\xi, \eta) \sin(\pi m \eta / Q) d\eta \quad (31)$$

Діагональні елементи матриці (31) утворюють так званий адиабатичний потенціал, тоді як недіагональні елементи складають оператор неадиабатичності, який несе відповідальність за переходами між модами з різними значеннями хвильового вектора (30). За числовими оцінками виконаними в іншому контексті авторами роботи [5], діагональні матричні елементи зі зростанням l демонструють тенденцію. Що стосується недіагональних матричних елементів, то вони, за оцінками авторів вище згаданої роботи [5], дуже швидко, а саме експоненційно, згасають із зростанням різниці $|l - m|$. Це дозволяє знехтувати оператором неадиабатичності і залишити у рівнянні (29) лише діагональні елементи, якими репрезентується ефективний потенціал. Саме цей адиабатичний потенціал є визначальним для хвиль біжучих вздовж осі системи. Отже, в адиабатичному наближенні для функцій $F_l(\xi)$ приходимо до наступного рівняння:

$$\partial_{\xi}^2 F_l(\xi) - k_l^2 F_l(\xi) + k^2 \Theta_{ll}(\xi) F_l(\xi) = 0 \quad (32)$$

яке внаслідок раніше доведеною періодичністю належить до рівнянь Хілла [8]. Відомо, що розв'язки рівнянь з такою структурою задовольняють теоремі Блоха[11], а тому функцію $F_l(\xi)$ можна записати у такій мультиплікативній формі



$$F_{lq}(\xi) = u_{lq}(\xi) \exp(iq\xi) \quad (33)$$

де q – неперервна поздовжня компонента безрозмірного хвильового вектора, а $u_{lq}(\xi)$ – модулюючий множник, який повинен бути періодичним з періодом $2R$, тобто

$$u_{lq}(\xi) = u_{lq}(\xi \pm 2sR), \quad s \in \mathbb{N} \quad (34)$$

Періодичність системи відносно координати ξ забезпечує можливість переходу до продуктивного у таких випадках оберненого простору, у якому введемо цілі однокомпонентні вектори оберненої ґратки g_n , визначивши їх за відомими [11] співвідношеннями

$$g_n = \pi n / R, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (35)$$

Подальший розгляд стандартний і в деталях описаний у багатьох джерелах, присвячених періодичним структурам, наприклад хвильоводам [12], чи кристалам [11], і полягає у розкладі як ефективного потенціалу $\Theta_{ll}(\xi)$ так і модулюючих множників Блоха $u_{lq}(\xi)$ в ряд Фур'є по векторах оберненої ґратки за співвідношенням:

$$A(\xi) = \sum_n A(g_n) e^{ig_n \xi}$$

де під $A(\xi)$ розуміється будь яка функція, яка задовольняє умові періодичності (34).

Після цього підстановкою відповідних рядів у (32) приходимо до системи рівнянь

$$\begin{aligned} -\left[(q + g_n)^2 + k_l^2 - k^2 \Theta_{ll}(0) \right] u_{lq}(g_n) + \\ + k^2 \sum_{g_s \neq 0} \Theta_{ll}(-g_s) u_{lq}(g_n + g_s) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

щодо коефіцієнтів розкладу $u_{lq}(g_n)$ модулюючих факторів функції Блоха.

Точні розв'язки системи (36) у загальному невідомі. Їх можна встановити лише у окремих випадках, наприклад коли факторизується ядро. Проте, наша проблема не підпадає під цей випадок, а тому розглянемо важливе для

практики наближення слабого зв'язку, яке можна прийняти, якщо довжина шпунтів набагато менша, ніж інші лінійні параметри, такі як період ґратки і ширина акустопроводу. У першому порядку теорії збурень покладемо рівними нулю всі амплітуди $u_{lq}(g_n)$ за виключенням амплітуди $u_{lq}(0)$, яку за рахунок нормування можна взяти рівною одиниці. Тоді з (36) для частоти нормальних мод одразу випливає

$$\omega_l(q) = \frac{v}{D \sqrt{\Theta_{ll}(0)}} \left[q^2 + k_l^2 \right]^{1/2} = \frac{v}{D} k_l(q) \quad (37)$$

Таким чином, крім природної дискретизації спектру внаслідок обмеженості поперечних розмірів системи, у першому наближенні структурованість хвильоводу проявляється лише у перенормуванні фазової швидкості фактором $\sqrt{\Theta_{ll}^{-1}(0)}$. У другому порядку теорії збурень для амплітуд $u_{lq}(g_n)$ одержуємо:

$$u_{lq}(g_n) = \frac{k_l^2(q) \Theta_{ll}(g_n)}{g_n^2 + 2qg_n} u_{lq}(0) \quad (38)$$

Розглядаючи повторно рівняння (36) для амплітуди $u_{lq}(0)$ і враховуючи (38) знаходимо частоти нормальних мод у вищому наближенні

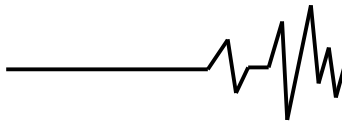
$$\omega_l(q) = \frac{v}{D} k_l(q) \left[1 + \frac{k_l^2(q)}{\Theta_{ll}(0)} \sum_{g_n \neq 0} \frac{|\Theta_{ll}(g_n)|^2}{g_n^2 + 2qg_n} \right]^{-1/2} \quad (39)$$

Очевидно, що співвідношення (38) втрачає зміст при умові берегівського відбивання хвиль від шпунтів, тобто, коли $g_n^2 + 2qg_n = 0$. Як відомо [11], при таких значеннях хвильового вектора має місце виродження нормальних мод, що вимагає застосування відповідної форми теорії збурень [10]. Виділивши в (36) саме вироджені моди для відповідних амплітуд можна записати систему рівнянь.

$$k_l^2(q + g_n) u_{lq}(g_n) - k^2 \left[u_{lq}(g_n) + u_{lq}(0) \Theta_{ll}(-g_n) / \Theta_{ll}(0) \right] = 0 \quad (40)$$

$$k_l^2(q) u_{lq}(0) - k^2 \left[u_{lq}(0) + u_{lq}(g_n) \Theta_{ll}(g_n) / \Theta_{ll}(0) \right] = 0 \quad (41)$$

Спектр випливає з рівності нулю детермінанта системи рівнянь (40)-(41). В такий спосіб одержуємо:



$$\omega_{1,2}(q) = \frac{v \left\{ \left[k_l^2(q) + k_l^2(q + g_n) \right] \pm \sqrt{\left[k_l^2(q) - k_l^2(q + g_n) \right]^2 + 4k_l^2(q)k_l^2(q + g_n) \left| \Theta_{ll}(g_n) \right|^2 / \Theta_{ll}^2(0)} \right\}^{1/2}}{D \sqrt{2 \left[1 - \left| \Theta_{ll}(g_n) \right|^2 / \Theta_{ll}^2(0) \right]}} \quad (42)$$

У точці виродження, а саме, при $q = -g_n/2$, має місце розщеплення зон. Відстань між зонами, як це випливає із співвідношень (42), виражається формулою

$$\Delta \omega_l(g_n) = \frac{vk_l(g_n)}{D} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left| \Theta_{ll}(g_n) / \Theta_{ll}(0) \right|}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left| \Theta_{ll}(g_n) / \Theta_{ll}(0) \right|}} \right\} \quad (43)$$

Результат (43) суттєво спрощується при виконанні умови $\left| \Theta_{ll}(g_n) / \Theta_{ll}(0) \right| \ll 1$, за якої з (43) легко одержати

$$\Delta \omega_l(g_n) = \frac{vk_l(g_n)}{D} \left| \frac{\Theta_{ll}(g_n)}{\Theta_{ll}(0)} \right| \quad (44)$$

Висновки. Проведені тут дослідження повністю узгоджуються з відомими [12] результатами, які є властивими для поширення хвиль в просторово обмежених періодичних структурах. В першу чергу це стосується дисперсії фазової швидкості як прояву скінченних розмірів у напрямі перпендикулярному до осі акустопроводу. Що ж до періодичної модуляції профілю, яка обумовлена системою діафрагм, то вона викликає дискретизацію спектру нормальних мод в такий спосіб, що кожна із зон розщеплюється у підзони розділені щілинами. У вібраційному спектрі з'являються вікна, яким відповідають заборонені частоти.

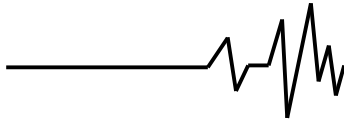
Підтверджуючи результати, які вже давно стали класичними, у даній роботі співвідношенням (39) встановлено не тільки характер дисперсії нормальних мод, але також показано як перенормується фазова швидкість в залежності від факторів форми та апертури діафрагм. Ця залежність виражена в термінах матричних елементів якобіану переходу, обчислених на власних функціях затравочних мод.

Одержані тут співвідношення (43), (44) стосуються ширини спектральних вікон у функції вищезгаданих матричних елементів. Обчислення Фур'є компоненти (31), яка відповідає цілому вектору оберненої ґратки, що в поєднанні з (43)-(44) дозволяє прогнозувати розташування вікон в шкалі частот, ширину спектральних вікон чим забезпечити одну з

можливостей розробки акустопроводів з необхідними спектральними властивостями.

Список використаних джерел

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Механика сплошных сред. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 754 с.
2. Левин Л., Теория волноводов, Москва, «Радио и связь», 1981. – 312 с.
3. Paolo Amore, Spectroscopy of drums and quantum billiards: perturbative and non-perturbative results, arXiv:09,0910.4798v1, 2009.
4. Бурдейна О.В., Гель П.В., Бурдейний В.М. Модифікація вібраційного спектру мембрани з нерегулярним хаотичним контуром // Вібрації в техніці і технологіях. – 2011. – №1 (61). – С. 9–14.
5. Bittner S., Dietz B., Miski-Oglu M., Richter A., Ripp C., Sadutni E., Schleich W.P., Bound states in Sharply Bent Waveguides: Analytical and Experimental Approach, arXiv:13032956v1 [cond-mat. mes-hall], 12 Mar 2013.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексной переменной, «Наука», 1987. – 688 с.
7. Коппенфельс В., Штальман Ф., Практика конформных отображений, «Мир», 1963. – 407 с.
8. Абрамовиц М., Стиган И., Справочник по специальным функциям, «Наука», 1979. – 832 с.
9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И., Интегралы и ряды. Специальные функции «Наука», 1983 – 752 с.
10. Давидов А.С., Квантовая механика, М.: ГИФМЛ, 1963. – 748 с.
11. Займан Дж., Принципы теории твердого тела, М.: «Мир», 1974. – 472 с.
12. Нефедов Е.И., Сивов А.Н., Электродинамика периодических структур, М.: «Наука», 1977. – 209 с.

**Список джерел в транслітерації**

1. Landau L.D., Lyfshyts E.M., Mekhanyka sploshnykh sred. – M. : HYTTL, 1954. – 754 s.
2. Levyn L., Teoryya volnovodov, Moskva, «Radyo y svyaz», 1981. – 312 s.
3. Paolo Amore, Spectroscopy of drums and quantum billiards: perturbative and non-perturbative results, arXiv 09,0910.4798 V1, 2009.
4. Burdeyna O.V., Hel P.V., Burdeynyy V.M., Modyfikatsiya vibratsiynoho spektru membrany z neregulyarnym khaotychnym konturom, Vibratsiyi v tekhnitsi i tekhnolohiyakh. – 2011. – №1(61). – S. 9–14.
5. Bittner S., Dietz B., Miski-Oglu M., Richter A., Ripp C., Sadutni E., Schleich W.P., Bound states in Sharply Bent Waveguides: Analytical and Experimental Approach, arXiv:13032956v1 [cond-mat. mes-hall], 12 Mar 2013.
6. Lavrentev M.A., Shabat B.V. Metodu teoryi funktsiyi kompleksnoy peremennoy, «Nauka», 1987. – 688 s.
7. Koppenfels V., Shtalman F., Praktyka konformnykh ot obrazheniy, «Myr», 1963. – 407 s.
8. Abramovyts M., Styhan Y., Spravochnyk po spetsyalnum funktsiyam, «Nauka», 1979. – 832 s.
9. Prudnykov A.P., Bruchkov Yu.A., Marychev O.Y., Yntehralu y ryadu. Spetsyalnye funktsyy «Nauka», 1983. – 752 s.
10. Davydov A.S., Kvantovaya mekhanyka, M., HYFML, 1963. – 748 s.
11. Zayman Dzh., Pryntsypu teoryi tverdoho tela, M. : «Myr», 1974. – 472 s.
12. Nefedov E.Y., Syvov A.N., Elektrodynamyka peryodycheskykh struktur, M. : «Nauka», 1977. – 209 s.

**СПЕКТР ПОЛОСКОВОГО АКУСТОПРОВОДА
С ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ
ДИАФРАГМАМИ. СЛАБАЯ СВЯЗЬ**

Аннотация. Представлены исследования частотного спектра полоскового акустопровода с периодической структурой, которая формируется системой

диафрагм. Элементарная ячейка структуры конформно отображается в ячейку канонической, а именно, прямоугольной формы. Такой подход позволяет внести геометрический фактор непосредственно в волновое уравнение. Основные результаты получены применением теории возмущений в сочетании с известными свойствами уравнений с периодическими коэффициентами. В приближении слабой связи установлены особенности дисперсии и перенормировка фазовой скорости. Исследовано расщепление непрерывного спектра на подзоны и ширины окон запрещенных частот выражены в терминах геометрических параметров акустопровода.

Ключевые слова: акустический волновод, конформное отображение, спектр частот, теория возмущений, приближение слабой связи.

**SPECTRUM OF ACOUSTIC WAVE GUIDES
WITH PERIODIC DISTRIBUTED DIAPHRAGMS.
WEAK BINDING CASE**

Annotation. The frequency's spectrum of stripe acoustic waveguides with special structure has been investigated in the work. The waveguide is formed by translations of identical diaphragms along the structure axis. By applying conform mapping approach elementary cell of the such periodic waveguide was transformed into the canonical one with simple rectangular geometry. This method allows us to introduce correspondent periodic form-factor into wave equation directly. The main results have been obtained by using perturbative theory in the form adapted to the wave equations with periodic coefficients. They can be summed as phase velocity renormalization and splitting frequency spectrum into subbands separated by the forbidden windows. Renormalization factors and frequency's gaps have been expressed over geometric parameters of waveguide.

Key words: acoustic wave guide, conform mapping, frequency spectrum, theory of perturbation, weak binding approximation.