

ПРИСТРІЙ СИНТЕЗУ ПЕРІОДИЧНИХ СИГНАЛІВ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ В БАЗИСІ ФУНКЦІЙ ЛАГЕРРА

Вінницький національний технічний університет.

Анотація

Розроблено віртуальний пристрій, що дозволяє синтезувати періодичний сигнал довільної форми в базисі ортонормованих функцій Лагерра.

Ключові слова: поліноми Лагерра, синтез періодичних сигналів, ортонормований базис.

Abstract

The virtual device allows to synthesize an any form periodic signal in basis of Laguerre's orthonormalized functions is developed.

Keywords: Laguerre's polynoms, synthesis of periodic signals, orthonormalized basis..

Однією з форм математичного опису різноманітних радіотехнічних кіл, пристроїв та систем є спектральна. У її основі лежить представлення сигналів сукупністю коефіцієнтів розкладення їх у ряди по повній ортонормованій системі функцій (базисній системі). За умови невід'ємності координатної системи може бути використана система функцій, яка визначається на основі поліномів Лагерра – система узагальнених функцій Лагерра. Вони задані таким чином, що є інтегрованими на безлічі й ортогональними з ваговою функцією, аналогічній за структурою ваговій функції поліномів Лагерра [1].

Помітне місце, що займає система функцій Лагерра серед усього різноманіття ортогональних функцій, пояснюється тим, що функції Лагерра мають ряд переваг: по-перше це простота їх генерування (функція Лагерра за формою збігається з імпульсною характеристикою системи, що складається з послідовно з'єднаних простих електричних ланцюгів), по-друге простотою реалізації стійкого і ефективного алгоритму обчислення функцій Лагерра високого порядку який не містить проблем втрати ортогональності при чисельній реалізації ортогональних багаточленів безперервного аргументу. Актуальність використання функцій Лагерра підтверджена в роботах, присвячених розв'язку диференціальних рівнянь [2], дослідженню випадкових процесів [3].

Функції Лагерра отримують за допомогою ортогональних поліномів за формулою Родрига яка має вигляд

$$L_n(\tau) = \frac{e^\tau d^n}{n! d\tau^n} (\tau^n e^{-\tau}), \tau \geq 0. \quad 1.$$

Оскільки поліноми Лагерра утворюють систему розбіжних функцій при $\tau \rightarrow \infty$, то для розкладання сигналів використовують функції Лагерра

$$l_n(\tau) = \sqrt{p(\tau)} L_n(\tau) = e^{-\tau/2} L_n(\tau), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad 2.$$

В загальному виді функцію описують формулою

$$l_n(\tau) = \sqrt{2\alpha} \cdot e^{-\alpha\tau} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{C_n^j}{j!} (2\alpha\tau)^j. \quad 3.$$

Де, α - масштабний коефіцієнт; C_n^j - число поєднань з n по j .

Функції Лагерра утворюють повну й ортогональну систему на одnobічному інтервалі, тобто вони задовольняють співвідношенню $[0; \infty]$

$$\int_0^{\infty} l_n(\tau) l_m(\tau) d\tau = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}. \quad 4.$$

Важливим пунктом спектрального аналізу з використанням функцій Лагерра є вибір значення масштабного коефіцієнта α . Його початкове значення рекомендується вибирати так, щоб тривалості досліджуваного сигналу і функції Лагерра з номером $i \approx N/2$ були приблизно рівні [4]. В подальшому значення коефіцієнта α уточнюються.

Сигнал $x(t)$, визначений на інтервалі $(0, \infty)$, можна представити у вигляді розкладання по системі функцій Лагерра

$$x(t) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \cdot l_i(t). \quad 5.$$

Значення коефіцієнтів λ_i , $i = 0, 1, \dots$ визначається за формулою

$$\lambda_i = \int_0^{\infty} x(t) l_i(t) dt. \quad 6.$$

За визначеним алгоритмом в програмному середовищі LabVIEW компанії National Instruments відтворено віртуальний пристрій синтезу періодичних сигналів довільної форми в базисі функцій Лагерра. Зовнішній вигляд пристрою з синтезованою, для прикладу, функцією Хевісайда зображено на рис. 1.

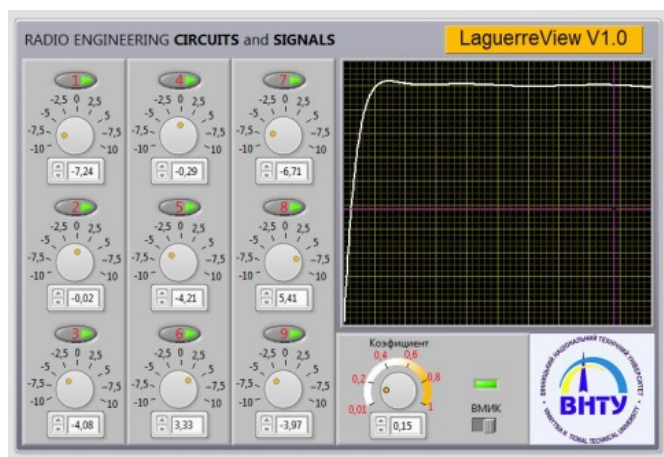


Рис. 1. Пристрій синтезу періодичних сигналів довільної форми в базисі функцій Лагерра.

Створення даного пристрою робить наочною можливість апроксимації сигналу багаточленом Фур'є по ортогональній системі функцій Лагерра, а також можливість синтезу сигналів довільної форми з дослідженням впливу числа ортогональних складових на помилку апроксимації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
2. Shen J. Stable and Efficient Spectral Methods in Unbounded Domains Using Laguerre Functions // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2000. Vol. 38. № 4. P. 1113–1133.1.
3. Grafov B.P., Grafova I.B. Theory of the wavelet analysis for electrochemical noise by use of Laguerre functions // Electrochemistry communications. 2 (2000). P. 386–389.
4. Кашеев Б.Л. Лабораторный практикум по курсу «Радиотехнические цепи и сигналы». – М.: Высшая школа, 1976. – 175 с.

Воловик Андрій Юрійович — канд. техн. наук, доцент кафедри радіотехніки, Вінницький національний технічний університет

Мозговий Володимир Сергійович — студент групи РТР-146 факультет інфокомунікацій, радіоелектроніки та наносистем, Вінницький національний технічний університет, Вінниця.

Volovyk Andrii U. — Cand. Sc. (Eng), Associate Professor of Radio engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia

Mozgovoy Volodimir S. — Department of Radio engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.