





## ПРИЛОЖНАТА МАТЕМАТИКА

Ivanov Y.Y.

Vinnytsia National Technical University, Ukraine

### EXPANSION FOR THE MATHEMATICAL APPARATUS OF THE ALGEBRA LOGARITHM OF THE LIKELIHOOD FUNCTION FOR THE TURBO-CODES IN DISTRIBUTED COMPUTER SYSTEMS OF DIFFERENT FUNCTIONAL PURPOSES

**Introduction.** At the time of the latest technology the information became object of the automated processing. The data transfer process in information systems is susceptible to errors, because any error in material breach of the calculation. To combat interferences in data transfer systems at all the stages is used the error-correction coding, that provides reliability and credibility of information transmitted. The analysis of the methods allowed us to determine, that the most prominent achievement in the theory of error-correction coding in recent years is turbo-code. They are used to encode large volume information messages at the high speed with high error-correcting [1]. Turbo-codes are used in practice in the most important areas, such as space satellite communications (standards DVB-S, DVB-RCS), digital television (ViaSat, HDTV), mobile communication systems of the 3<sup>rd</sup> generation [2]. The practical widespread have decoding algorithms: SOVA (Soft-Output Viterbi Algorithm), MAP (decoding algorithm for the Maximum A posteriori Probability) and modifications to decrease the computational complexity (Log-MAP, Max-Log-MAP) [3].

A significant drawback of the turbo-codes is comparatively high decoding complexity and high delay, which sometimes make them unattractive. But for using in satellite channels this shortcoming is not essential, because the length of the communication channel introduces a significant delay. Another drawback of the turbo-codes (fig. 1) is a comparatively small code distance. This leads to the fact, that even when a large input error probability, the turbo-code performance is high, but at the low input error probability the turbo-code performance is limited [1].

An important advantage of the turbo-codes is the decoding complexity independence from the length of the information block, which reduces the decoding error probability by increasing its length [1].

Выполнение соотношения (21) означает, что при фиксированном расположении заряда над пластиной в ближней зоне при величине заряда не меньшей  $C$  гарантированно при взрыве этого заряда, получим зону разрушения пластины заданной величины, причем вид и расположение зоны разрушения определяется неравенством (19).

Вычисления проведены для различных материалов, размеров пластин, расположений заряда над пластиной в ближней зоне. В качестве примера здесь приведены результаты вычислений для пластины квадратной формы, изготовленной из серого чугуна СЧ 12-28. Расчеты выполнены для значений параметров:

$\mu = 0.25$ ,  $h = 0.1$  м,  $\mu_3 = 1.6$ ,  $\delta_* = 2.8 \times 10^7$  Па,  $z_* = 0.25$  м,  $x_* = 0$ ,  $y_* = 0$  (взрыв над центром симметрии пластины),  $K_{0*} = 1.7$ ,  $E = 1.2 \times 10^{11}$  Па,  $\rho = 7.1 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $a = 1$  м,  $b = 1$  м,  $A_0 = 400$  м/с (ВВ-тротил, плотность  $\rho_0 = 1620$  кг/м<sup>3</sup>)

Результаты расчетов представлены на рис. 2

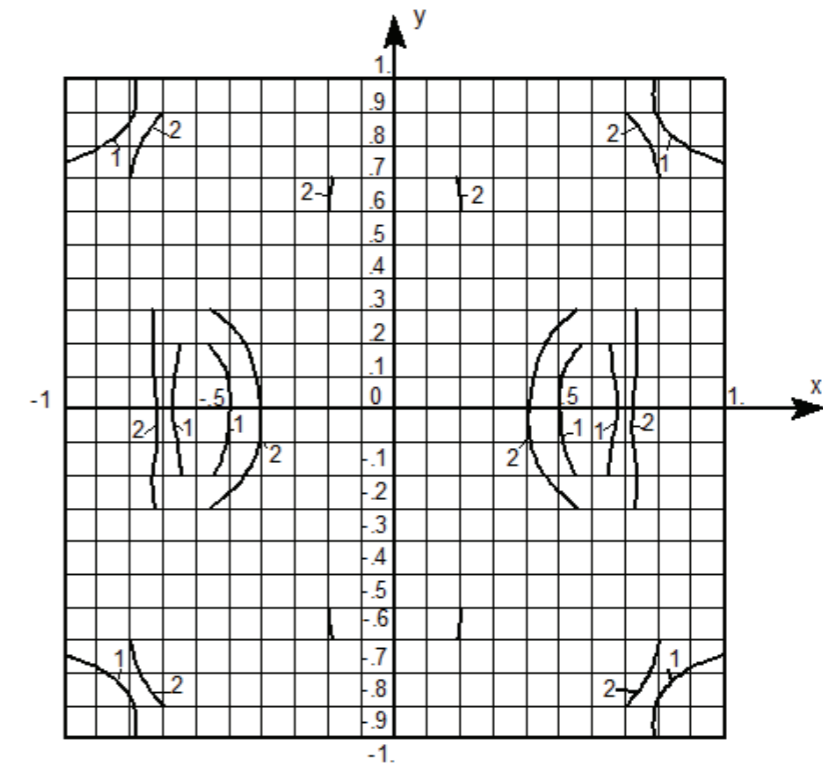


Рис. 2. Область разрушений. Чугун СЧ 12-28,

$$w_0 = 0.005 (1), \quad h = 0.05 \text{ м}, \quad w_0 = 0.003 (2)$$

$$1) z_* = 0.25 \text{ м}, \quad C = 1.749 \text{ кг}, \quad r_0 = 0.0686 \text{ м}$$

$$2) z_* = 0.25 \text{ м}, \quad C = 1.0495 \text{ кг}, \quad r_0 = 0.0537 \text{ м}$$

Кривые с указателем 1, соответствуют значению  $w_0 = 0.005$ , а с указателем 2 значению –  $w_0 = 0.003$ . При этом кривым 1 соответствует масса заряда  $C = 1.749$  кг, а кривым 2 – масса  $C = 1.0495$  кг.

$$w_2(x, y) = w_0 \left[ \begin{aligned} & c_{11} \left( 1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left( 1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) + c_{12} \left( 1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \\ & + c_{21} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) + c_{22} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \end{aligned} \right] \quad (16)$$

Чтобы найти зону разрушения пластины, а затем и массу заряда ВВ, необходимую для этих целей, воспользуемся критерием разрушения, предложенным П.П. Баландиным [2].

Учитывая при этом динамичность рассматриваемого процесса, а также вероятность возможных отклонений прочностных характеристик материала пластины от нормативных, указанный критерий запишем в виде:

$$K_B : \left. (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2) \right|_{z=\pm \frac{h}{2}} \geq \sigma_*^2 \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \sigma_* = \delta_* \mu_3 K_{0*} K_f \end{aligned} \right\} \quad \text{где} \quad (18)$$

$\delta_*$ -предел прочности материала пластины при изгибе в статических испытаниях,  $\mu_3$ -коэффициент динамичности,  $K_{0*}$ -коэффициент однородности на гарантированное разрушение,  $K_f$ -коэффициент формы[3].

Подставив соотношения (18) и соответствующие им производные в критерий разрушения (17), получим:

$$f(x, y) \geq 0, \quad (19)$$

$$\text{где } f(x, y) = \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2) \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}}}{\sigma_*^2} - 1 \quad (20)$$

Неравенство (19) определяет зону разрушения, размеры которой задает параметр  $w_0$ .

Если задать размеры зоны разрушения, вводя значение параметра  $w_0$ , то используя соотношения (2)-(4),(6), можно определить минимальную величину (массу)  $C$  заряда ВВ, необходимую для гарантированного разрушения пластины с наперед заданной величиной зоны разрушения:

$$C = \frac{\sqrt{2\rho h \Pi / I}}{A_0 z_*^2} \quad (21)$$

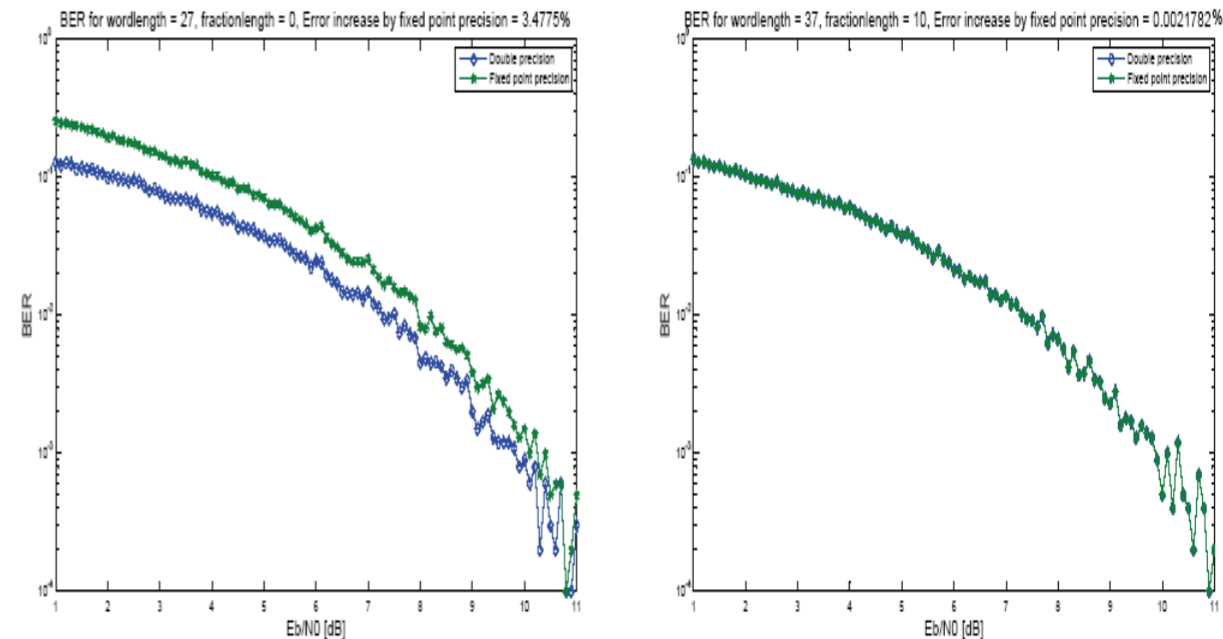


Figure 1 – BER – Bit Error Rate (word length 27 bits and 37 bits)

The main problems are the lack of freeware distribution and complexity of the decoding algorithms.

The work purpose is to improve computing efficiency of the turbo-code decoding procedure through improvement of the mathematical algorithms of their work.

Main Part. To achieve the purpose should be to build a model of error-correction turbo-decoder, that uses the new mathematical principles of the algebra logarithm of the likelihood function [4] for  $N$  statistically independent information bits with the transition to trigonometric and hyperbolic functions without using complex numbers.

$$S = \sum_{i=1}^N LLR(x_i) = LLR \left( \sum_{i=1}^N x_i \right) = \ln \left( \frac{p \left( \sum_{i=1}^N x_i = +1 \right)}{p \left( \sum_{i=1}^N x_i = -1 \right)} \right) = 2 \cdot \text{arth} \left( \prod_{i=1}^N \text{th} \left( \frac{LLR(x_i)}{2} \right) \right), \quad (1)$$

where  $x_i$  – statistically independent information bit,  $i = \overline{1, N}$ .

Equation (1) can be used to simplify calculations, when solving complex problems, when given a lot of statistically independent information bits. For the given formula is possible to perform a connection between trigonometric (L. Euler, F. Viète, N. Copernicus, Arabic mathematics) and hyperbolic (A. de Moivre, V. Riccati,

J.H. Lambert) functions without using complex numbers (C. Gudermann function) [5, 6] to simplify the calculation.

Therefore, it is necessary to find Gudermannian [5] from some argument  $\varphi$ .

$$gd(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{ch t} = 2 \cdot arctg\left(th \frac{\varphi}{2}\right) = 2 \cdot arctg \exp(\varphi) - \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Now we use the transformation

$$gd(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{ch t} = 2 \cdot arctg\left(tg \frac{gd(\varphi)}{2}\right). \quad (3)$$

Comparing formulas (2) and (3), we can obtain such Gudermannian property

$$th \frac{\varphi}{2} = tg \frac{gd(\varphi)}{2}. \quad (4)$$

Applying this property to the expression (1), and using the Gudermannian form (2), it is possible to obtain

$$S = \sum_{i=1}^N LLR(x_i) = 2 \cdot arth\left(\prod_{i=1}^N tg \frac{gd(LLR(x_i))}{2}\right) = 2 \cdot arth\left(\prod_{i=1}^N tg\left(arctg \exp(LLR(x_i)) - \frac{\pi}{4}\right)\right). \quad (5)$$

Now it is necessary to perform numeric calculations in the environment of the mathematical modeling MathCad (fig. 2) to calculate the values sum of the logarithm of the likelihood function for example in the case of 2 and 6 statistically independent information bits.

$$\text{где } \alpha_1 = \frac{3b}{a^3} + \frac{3a}{b^3} + \frac{2}{ab}, \alpha_2 = \frac{3b}{a^3} + \frac{48a}{b^3} + \frac{8}{ab}, \\ \alpha_3 = \frac{3a}{b^3} + \frac{48b}{a^3} + \frac{8}{ab}, \alpha_4 = \frac{48b}{a^3} + \frac{48a}{b^3} + \frac{32}{ab}, \\ \alpha_5 = \frac{4b}{a^3}, \alpha_6 = \frac{64b}{a^3}, \alpha_7 = \frac{4a}{b^3}, \alpha_8 = \frac{64a}{b^3},$$

Согласно принципу Остроградского-Гамильтона, наиболее близкой к действительной будет та форма упругой поверхности, для которой упругая энергия деформирования имеет минимальное значение, что приводит к системе уравнений:

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial c_{ij}} = 0, \quad i, j = \overline{1, 2} \quad (13)$$

Система уравнений (13) может быть преобразована к эквивалентной ей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (2\alpha_2 - \alpha_5)c_{12} - \alpha_7c_{21} + \alpha_8c_{22} &= (2\alpha_1 - \alpha_5)c_{11} \\ \alpha_5c_{12} + (\alpha_7 - 2\alpha_3)c_{21} - \alpha_6c_{22} &= (\alpha_7 - 2\alpha_1)c_{11} \\ (\alpha_8 - \alpha_5)c_{12} + (\alpha_6 - 2\alpha_7)c_{21} + 2\alpha_4c_{22} &= 2\alpha_1c_{11} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Вводя обозначения

$$\overline{c_{11}} = \frac{c_{11}}{S}, \overline{c_{12}} = \frac{c_{12}}{S}, \overline{c_{21}} = \frac{c_{21}}{S}, \overline{c_{22}} = \frac{c_{22}}{S} \quad (15)$$

получим решение системы (14) в виде:

$$\overline{c_{11}} = \frac{\Delta}{\Delta_S}, \overline{c_{12}} = \frac{\Delta_1}{\Delta_S}, \overline{c_{21}} = \frac{\Delta_2}{\Delta_S}, \overline{c_{22}} = \frac{\Delta_3}{\Delta_S},$$

где  $\Delta_S = \Delta + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\alpha_2 - \alpha_5 & -\alpha_7 & \alpha_8 \\ \alpha_5 & \alpha_7 - 2\alpha_3 & -\alpha_6 \\ \alpha_8 - \alpha_5 & \alpha_6 - 2\alpha_7 & 2\alpha_4 \end{vmatrix}; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2\alpha_1 - \alpha_5 & -\alpha_7 & \alpha_8 \\ \alpha_7 - 2\alpha_1 & \alpha_7 - 2\alpha_3 & -\alpha_6 \\ 2\alpha_1 & \alpha_6 - 2\alpha_7 & 2\alpha_4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2\alpha_2 - \alpha_5 & 2\alpha_1 - \alpha_5 & \alpha_8 \\ \alpha_5 & \alpha_7 - 2\alpha_1 & -\alpha_6 \\ \alpha_8 - \alpha_5 & 2\alpha_1 & 2\alpha_4 \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2\alpha_2 - \alpha_5 & -\alpha_7 & 2\alpha_1 - \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_7 - 2\alpha_3 & \alpha_7 - 2\alpha_1 \\ \alpha_8 - \alpha_5 & \alpha_6 - 2\alpha_7 & 2\alpha_1 \end{vmatrix}$$

Таким образом, получена форма упругой поверхности, наиболее близкая к действительной в виде:

$$\frac{A_0^2 C^2 z_*^4}{2\rho h} I = \Pi \quad (6)$$

Из соотношений (4), (6) видно, что масса заряда фиксированного ВВ, необходимая для гарантированного разрушения пластины, определяется формой её упругой поверхности  $w = w(x, y)$ , полученной при действии на нее взрывной нагрузки, а также расположением заряда относительно пластины, физическими и геометрическими характеристиками пластины.

### 3. Решение задачи. Вариационный метод

Используем прямой вариационный метод Ритца. Согласно методу аппроксимации Бубнова-Галеркина, систему координатных функций выберем так, чтобы выполнялись граничные условия закрепления пластины. В рассматриваемом случае жесткой заделки пластины по всему контуру можно предложить систему координатных функций вида:

$$w_{ij}(x, y) = \left[ 1 + (-1)^{i+1} \cos \frac{i\pi x}{a} \right] \left[ 1 + (-1)^{j+1} \cos \frac{j\pi y}{b} \right] \quad (7)$$

Форму упругой поверхности аппроксимируем функцией

$$w_n(x, y) = \frac{w_0}{\sum_{i,j=1}^n c_{ij}} \cdot \sum_{i,j=1}^n c_{ij} w_{ij} \quad (8)$$

Возьмем  $n = 2$  и обозначим:

$$w_2(x, y) = \frac{w_0}{S} \left[ \begin{aligned} &c_{11} \left( 1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left( 1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) + c_{12} \left( 1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \\ &+ c_{21} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) + c_{22} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \end{aligned} \right] \quad (9)$$

где  $S = c_{11} + c_{12} + c_{21} + c_{22}$ ;  $c_{ij}$  - неизвестные вариационные коэффициенты,

$w_0$  - параметр, определяющий зону разрушения пластины.

Система (7) координатных функций удовлетворяет граничным условиям жесткой заделки пластины по всему контуру опирания:

$$w_{ij}|_{x=\pm a} = w_{ij}|_{y=\pm b} = \frac{\partial w_{ij}}{\partial x} \Big|_{x=\pm a} = \frac{\partial w_{ij}}{\partial y} \Big|_{y=\pm b} = 0 \quad (10)$$

Подставив выражение (9) для предполагаемой функции прогибов в функционал (4), получим функцию  $\Pi_2(c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22})$  в виде:

$$\Pi_2 = \frac{Dw_0^2 \pi^4}{2S^2} \left[ \alpha_1 c_{11}^2 + \alpha_2 c_{12}^2 + \alpha_3 c_{21}^2 + \alpha_4 c_{22}^2 + \alpha_5 c_{11} c_{12} + \alpha_6 c_{21} c_{22} + \alpha_7 c_{11} c_{21} + \alpha_8 c_{12} c_{22} \right] \quad (11)$$

Figure 2 – Calculations ( $N_1 = 2, N_2 = 6$  bits)

**Conclusion.** So, has been derived a new formula for calculating the *LLR* sum *S* for many bits. It can be used in computing devices, for optimizing the approximation in distributed computer systems of different functional purposes.

Literature:

1. Кулик А.Я. Декодирования та реалізація алгоритму BCJR для турбо-коду стандартизованого в DVB-RCS / А.Я. Кулик, Д.С. Кривогубченко, Ю.Ю. Иванов // Вісник Сумського державного університету. Серія: Технічні науки. – Суми: СУМДУ, 2012. – Т. 4. – № 1. – С. 84-93.
2. Sripimanwat K. Turbo-Code Applications: A Journey from a Paper to Realization / K. Sripimanwat. – New-York: Springer, 2005. – 386 p.
3. Morelos-Zaragoza R. The Art of Error-Correcting Coding, 2<sup>nd</sup> Edition / R. Morelos-Zaragoza. – Chippenham: John Wiley & Sons, Ltd, 2006. – 278 p.
4. Moon T.K. Error-Correction Coding: Mathematical Methods and Algorithms / T.K. Moon. – John Wiley & Sons, Ltd, 2005. – 750 p.
5. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (4-е изд.) / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1963. – 1100 с.
6. Корн Г.А. Справочник по математике для научных работников и инженеров (4-е изд.) / Г.А. Корн, Т.М. Корн. – М.: Наука, 1978. – 832 с.