

Частина 1



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. О. Федотов, І. В. Віштак, Т. І. Молодецька

**ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА
(ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА)
САМОСТІЙНА ТА ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА СТУДЕНТІВ
Частина 1**

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2017

УДК 531.1
ББК 22.21я73
Ф 39

Рекомендовано як електронне видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № від . .2017 р.)

Рецензенти:

В. А. Матвійчук, доктор технічних наук, професор

О. В. Грушко, доктор технічних наук, професор

Л. Г. Козлов, доктор технічних наук, професор

Федотов В. О.

Ф39 Теоретична та прикладна механіка. (Технічна механіка)
Самостійна та індивідуальна робота студентів. Частина 1:
навчальний посібник / В. О. Федотов, І. В. Віштак, Т. І. Молодецька
– Вінниця: ВНТУ, 2017. – 107 с.

В навчальному посібнику наведені тестові завдання вхідного контролю з дисципліни «Вища математика», короткі теоретичні відомості та методичні вказівки до практичних занять та приклади виконання завдань: плоска система сил, побудова епюр внутрішніх зусиль в балках при плоскому згині, визначення поперечних перерізів балок при плоскому згині, кінематика точки, найпростіші рухи тіла, плоский рух тіла, динаміка точки, дослідження механічної системи з використанням метода кінетостатики. Для самостійної роботи наведені комплекти завдань до різних тем практичних занять. Кожний комплект має 30 однотипних задач.

Для студентів денної та заочної форм навчання.

УДК 531.1
ББК 22.21я73

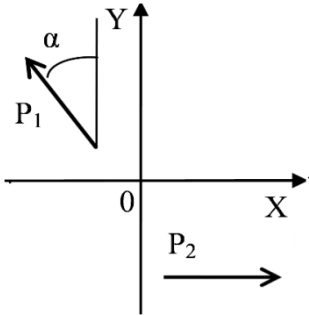
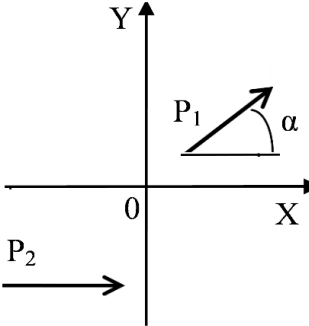
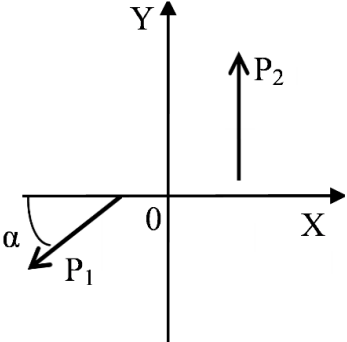
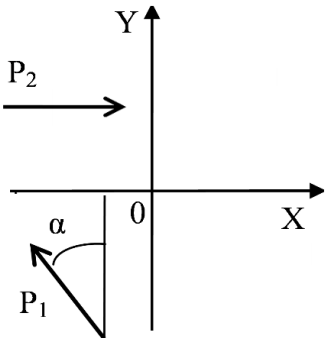
© В. Федотов, І. Віштак, Т. Молодецька, 2017

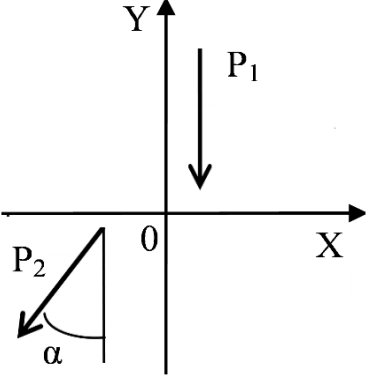
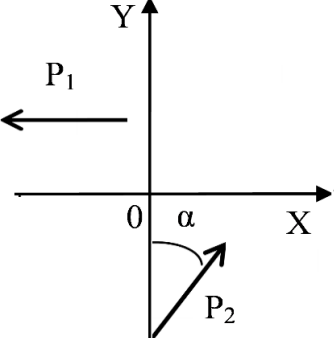
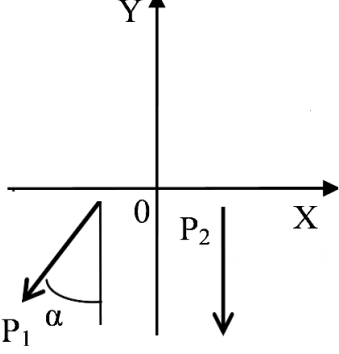
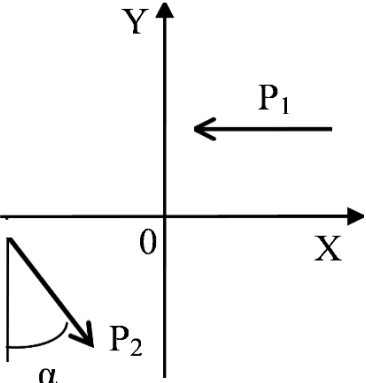
ЗМІСТ

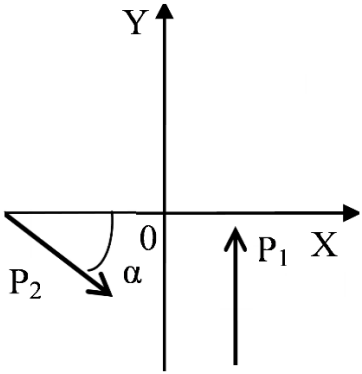
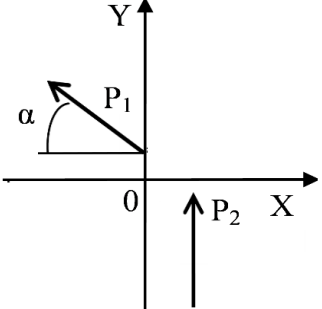
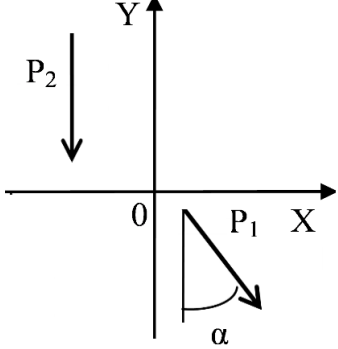
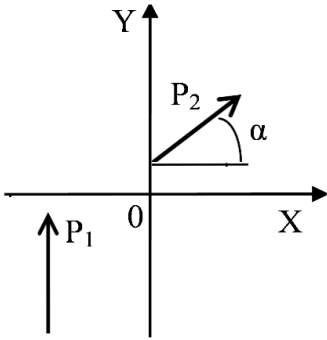
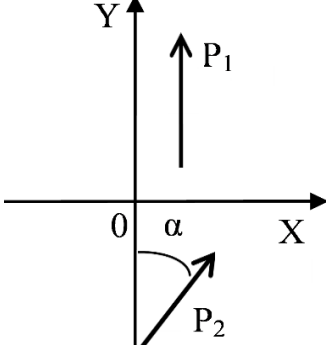
1	Вхідний контроль з дисципліни «Вища математика».....	5
2	Плоска система сил.....	12
	2.1 Теоретичні відомості і методичні вказівки.....	12
	2.2 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Плоска система сил	14
	2.3 Приклад виконання завдання	24
3	Побудова епюр внутрішніх зусиль.....	27
	3.1 Теоретичні відомості і методичні вказівки.....	27
	3.1.1 Внутрішні сили. Метод перерізів.....	27
	3.1.2 Епюри внутрішніх зусиль.....	29
	3.1.3 Диференціальні залежності між q , Q та M	30
	3.1.4 Побудова епюр Q і M для балок.....	31
	3.1.5 Приклад побудови епюр Q і M для балок	32
4	Розрахунок балок на міцність при плоскому згині.....	36
	4.1 Теоретичні відомості і методичні вказівки.....	36
	4.1.1 Геометричні характеристики плоских поперечних перерізів.....	36
	4.1.2 Розрахунок на міцність при плоскому згині.....	39
	4.2 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Розрахунок балок на міцність при плоскому згині.....	40
5	Кінематика точки.....	43
	5.1 Теоретичні відомості і методичні вказівки.....	43
	5.2 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Кінематика точки.	45
	5.3 Приклад виконання завдання	46
6	Поступальний та обертальний рухи тіл.....	51
	6.1 Теоретичні відомості і методичні вказівки.....	51
	6.1.1 Поступальний рух твердого тіла.....	51
	6.1.2 Обертальний рух твердого тіла.....	51
	6.2 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Поступальний та обертальний рухи тіла	55
	6.3 Приклад виконання завдання	63
7	Плоскопаралельний (плоский) рух тіла.....	65
	7.1 Теоретичні відомості і методичні вказівки.....	65
	7.1.1 Швидкості точок плоскої фігури.....	65
	7.1.2 Прискорення точок плоскої фігури.....	66
	7.2 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Плоский рух тіла	68
	7.3 Приклад виконання завдання	75
8	Динаміка точки.....	79
	8.1 Теоретичні відомості і методичні вказівки.....	79

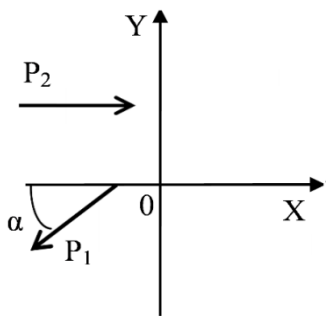
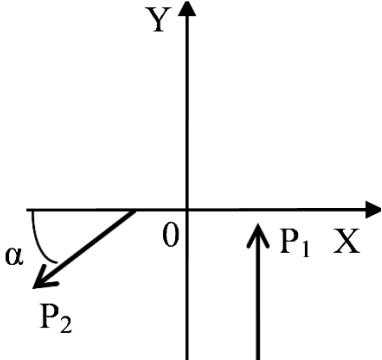
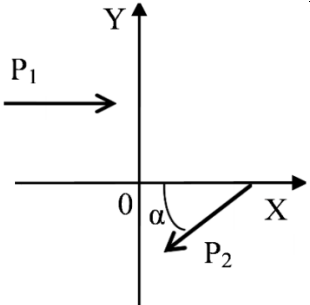
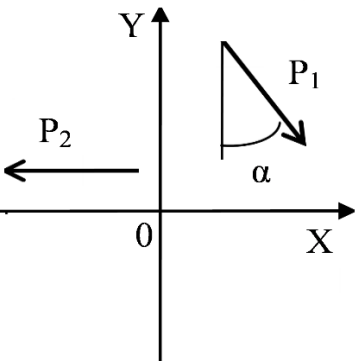
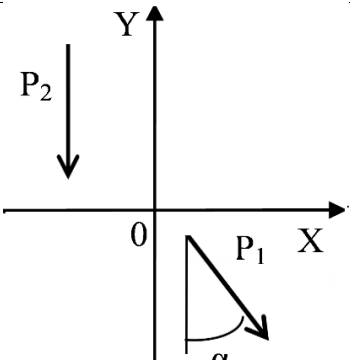
8.2	Завдання для самостійної та індивідуальної роботи.	
	Динаміка точки	81
8.3	Приклад виконання завдання	82
9	Метод кінетостатики	88
9.1	Теоретичні відомості і методичні вказівки.....	88
9.1.1	Принцип Д'Аламбера.....	88
9.1.2	Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки.....	88
9.1.3	Принцип Д'Аламбера для механічної системи.....	89
9.1.4	Головний вектор та головний момент сил інерції.....	90
9.2	Завдання для самостійної та індивідуальної роботи.	
	Принцип Д'Аламбера для механічної системи	91
9.3	Приклад виконання завдання	101
10	Список літератури.....	106

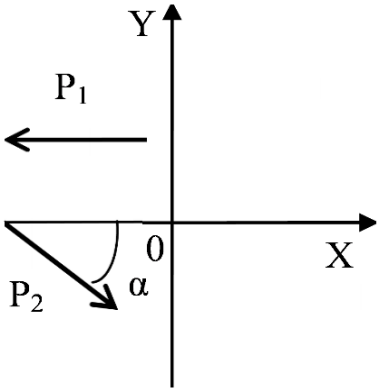
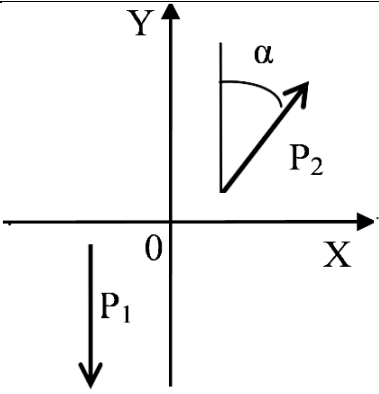
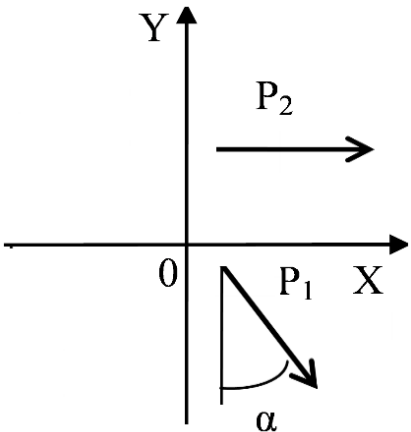
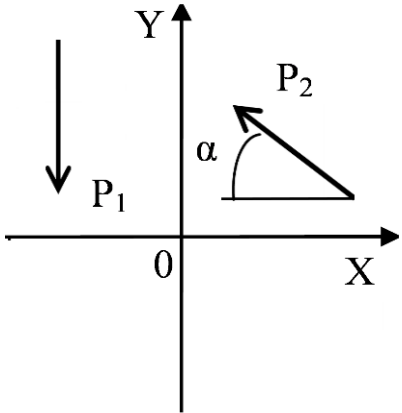
1 ВХІДНИЙ КОНТРОЛЬ З ДИСЦИПЛІНИ ”ВИЩА МАТЕМАТИКА”

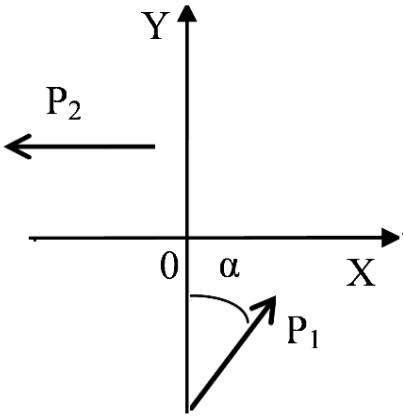
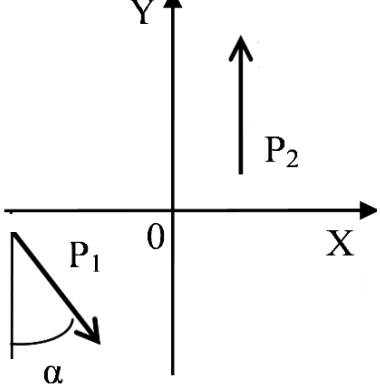
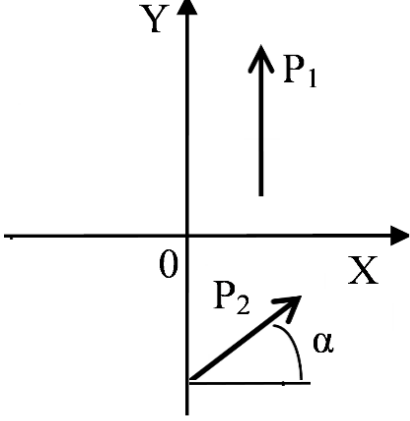
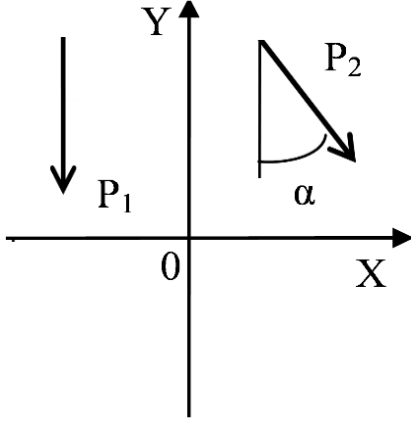
	Задача № 1 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 2$ кН, $P_2 = 3$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 2 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 8$ кН, $P_2 = 6$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 3 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 12$ кН, $P_2 = 8$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 4 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 20$ кН, $P_2 = 6$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.

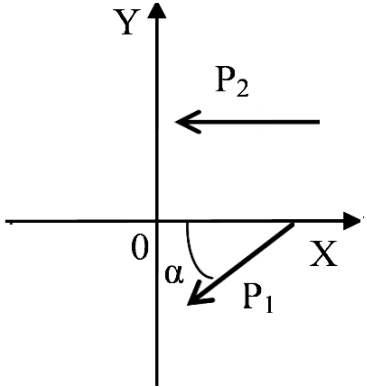
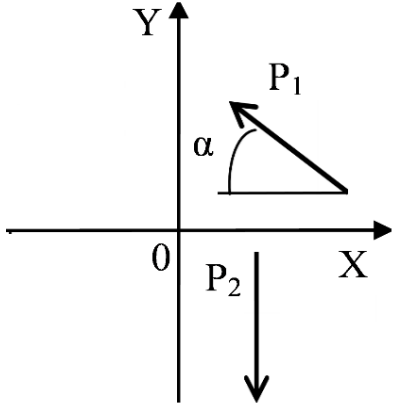
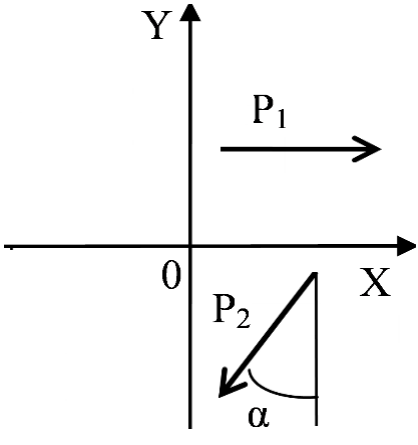
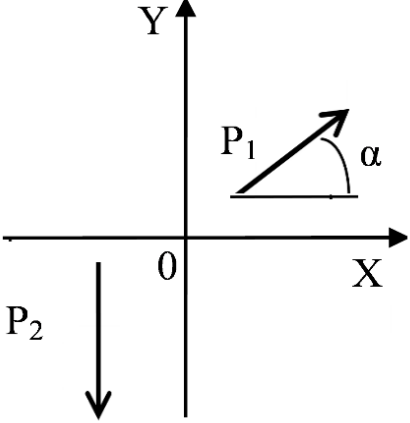
	Задача № 5 Знайти проекції векторів $\bar{P}_1$ та $\bar{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 22$ кН, $P_2 = 30$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 6 Знайти проекції векторів $\bar{P}_1$ та $\bar{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 12$ кН, $P_2 = 3$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 7 Знайти проекції векторів $\bar{P}_1$ та $\bar{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 32$ кН, $P_2 = 6$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 8 Знайти проекції векторів $\bar{P}_1$ та $\bar{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 12$ кН, $P_2 = 6$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.

	Задача № 9 Знайти проекції векторів $\bar{P}_1$ та $\bar{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 30$ кН, $P_2 = 4$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 10 Знайти проекції векторів $\bar{P}_1$ та $\bar{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 9$ кН, $P_2 = 6$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 11 Знайти проекції векторів $\bar{P}_1$ та $\bar{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 8$ кН, $P_2 = 30$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 12 Знайти проекції векторів $\bar{P}_1$ та $\bar{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 4$ кН, $P_2 = 12$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 13 Знайти проекції векторів $\bar{P}_1$ та $\bar{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 24$ кН, $P_2 = 8$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.

	Задача № 14 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 21$ кН, $P_2 = 7$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 15 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 20$ кН, $P_2 = 8$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 16 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 6$ кН, $P_2 = 11$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 17 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 2$ кН, $P_2 = 14$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 18 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 8$ кН, $P_2 = 13$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.

	Задача № 19 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 2$ кН, $P_2 = 7$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 20 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 2$ кН, $P_2 = 3$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 21 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 18$ кН, $P_2 = 9$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 22 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 12$ кН, $P_2 = 34$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.

	Задача № 23 Знайти проекції векторів $\bar{P}_1$ та $\bar{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 7$ кН, $P_2 = 8$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 24 Знайти проекції векторів $\bar{P}_1$ та $\bar{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 5$ кН, $P_2 = 14$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 25 Знайти проекції векторів $\bar{P}_1$ та $\bar{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 4$ кН, $P_2 = 30$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 26 Знайти проекції векторів $\bar{P}_1$ та $\bar{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 6$ кН, $P_2 = 30$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.

	Задача № 27 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 2$ кН, $P_2 = 14$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 28 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 10$ кН, $P_2 = 16$ кН, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 29 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 18$ кН, $P_2 = 3$ кН, кут $\alpha = 60^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.
	Задача № 30 Знайти проекції векторів $\vec{P}_1$ та $\vec{P}_2$ на координатні вісі, якщо $P_1 = 4$ кН, $P_2 = 6$ кН, кут $\alpha = 30^\circ$. Визначити також кути між векторами сил та віссю X.

2 ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ

2.1 Теоретичні відомості і методичні вказівки

У теоретичній механіці одним із основних є поняття сили. У механіці під силою розуміють міру механічної взаємодії матеріальних тіл, у результаті якої тіла, що взаємодіють, можуть надавати одне одному прискорення або деформуватися (змінювати свою форму). Із цього означення випливають два методи вимірювання сили:

1. Динамічний, в основі якого лежить вимірювання прискорення тіла в інерціальній системі відліку;
2. Статичний, побудований на вимірюванні деформації пружних тіл.

Те, що в основу механіки було покладено кількісні закони сил, дозволило І. Ньютону відкрити закони руху тіл, не вивчаючи фізичних явищ, які виникають при взаємодії тіл. Більш того, в деяких випадках можна встановити кількісний зв'язок між механічними і немеханічними формами матерії при їх взаємних перетвореннях.

Модель сили визначається трьома головними умовами: величиною, напрямом дії і точкою прикладення.

Такому означенню сили повністю відповідає поняття вектора, довжина якого у вибраному масштабі дорівнює величині (модулю) сили, прикладеної в даній точці. Вектор напрямлений в бік дії сили. Силу позначимо символом $\vec{F}$ (рис. 2.1).

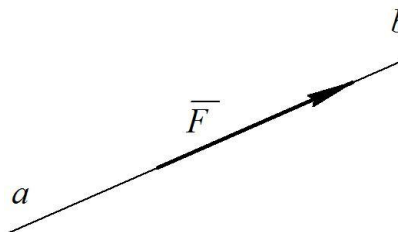


Рисунок 2.1

Пряму ab , на якій відкладено відрізок, що зображує силу, називають лінією дії сили.

Для вимірювання модуля сили її порівнюють з іншою силою, яку вважають еталоном. У системі СІ за одиницю сили (еталон) прийнято Ньютон (H). Використовуються також більші одиниці вимірювання сил: кілоньютон ($1kH = 10^3 H$);

меганьютон ($1MH = 10^6 H$).

Сила, як векторна величина, підпорядкована всім законам векторного числення: додавання; віднімання; векторного та скалярного множення.

Алгебраїчним моментом сили відносно точки називається взятий з відповідним знаком добуток плеча на модуль сили. Знак “+” береться, якщо сила намагається повернути плече проти напрямку стрілки годинника.

Таким чином, для визначення алгебраїчного моменту сили відносно точки треба виконати такі дії (рис. 2.2, а, б):

1. провести лінію дії сили;

2. з вибраної точки опустити перпендикуляр до лінії дії сили (довжина перпендикуляра h – плече сили);

3. знайти добуток плеча h на модуль сили;

4. момент сили буде додатним, якщо сила намагається повернути плече відносно вибраної точки проти напрямку стрілки годинника (рис. 2.2, а) і знак “–” – за напрямком стрілки годинника (рис. 2.2, б).

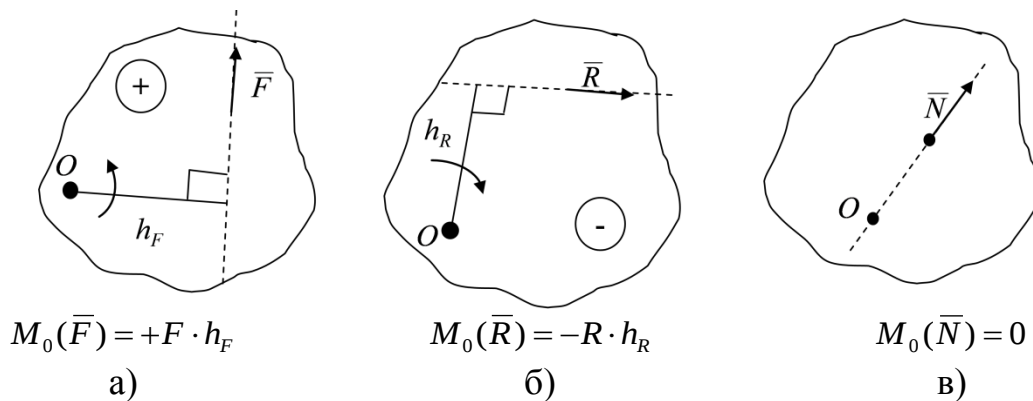


Рисунок 2.2

Окремий випадок (рис. 2.2, в): алгебраїчний момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цю точку (тут плече $h=0$).

Умови рівноваги довільної плоскої системи сил в аналітичній формі.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на дві взаємно перпендикулярні осі і алгебраїчна сума моментів відносно довільно вибраної точки дорівнювали нулю.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ix} = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \dots + \vec{F}_{nx} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{iy} = \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \dots + \vec{F}_{ny} = 0;$$

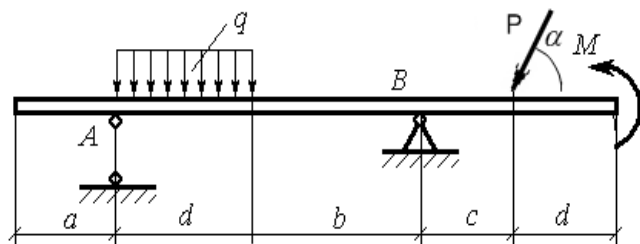
$$\sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i) = 0.$$

Питання для самоперевірки знань
та контролю засвоєння матеріалу

1. Яка величина є основним поняттям в механіці?
2. Знайти суму (різницю) двох сил.
3. Знайти векторний (скалярний) добуток двох сил.
4. Методика визначення моменту сили відносно точки.
5. Умови рівноваги плоскої довільно розташованої системи сил.

2.2 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Плоска система сил

Задача № 1

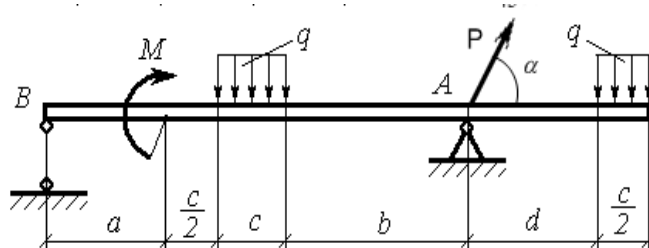


Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 10 \text{ кН}$, $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 2 \text{ кН/м}$, $a = 2 \text{ м}$, $b = 4 \text{ м}$, $c = 2 \text{ м}$, $d = 2 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$.

Задача № 2

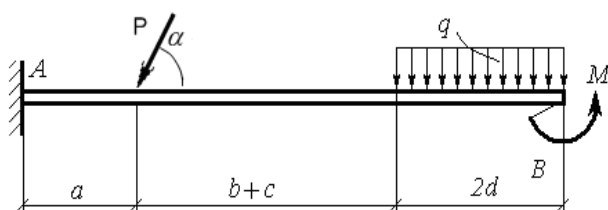


Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 12 \text{ кН}$, $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 4 \text{ кН/м}$, $a = 4 \text{ м}$, $b = 6 \text{ м}$, $c = 2 \text{ м}$, $d = 4 \text{ м}$, $\alpha = 60^\circ$.

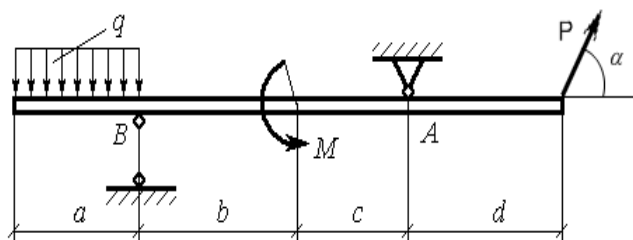
Задача № 3



Горизонтальна балка АВ жорстко защемлена в точці А, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 20 \text{ кН}$, $M = 9 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 20 \text{ кН/м}$, $a = 4 \text{ м}$, $b = 5 \text{ м}$, $c = 2 \text{ м}$, $d = 3 \text{ м}$, $\alpha = 45^\circ$.

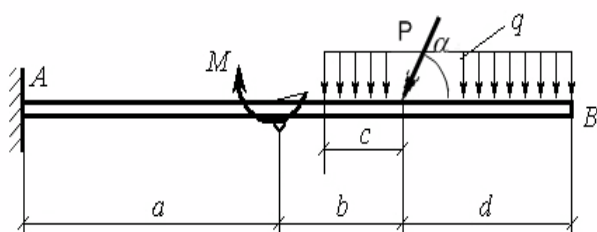


Задача № 4

Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 30$ кН, $M = 9$ кН·м, $q = 5$ кН/м, $a = 2$ м, $b = 3$ м, $c = 2$ м, $d = 5$ м, $\alpha = 30^\circ$.

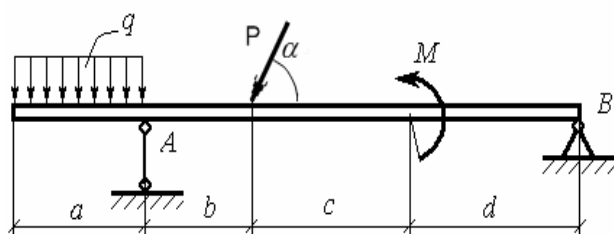


Задача № 5

Горизонтальна балка АВ жорстко защемлена в точці А, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 15$ кН, $M = 7$ кН·м, $q = 4$ кН/м, $a = 5$ м, $b = 3$ м, $c = 1$ м, $d = 4$ м, $\alpha = 60^\circ$.



Задача № 6

Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

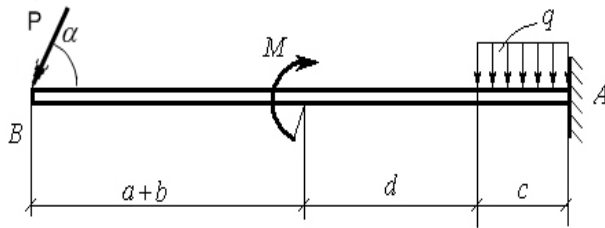
В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 5$ кН, $M = 6$ кН·м, $q = 4$ кН/м, $a = 3$ м, $b = 2$ м, $c = 4$ м, $d = 4$ м, $\alpha = 30^\circ$.

Задача № 7

Горизонтальна балка АВ жорстко защемлена в точці А, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 15$ кН, $M = 20$ кН·м, $q = 5$ кН/м, $a = 4$ м, $b = 4$ м, $c = 2$ м, $d = 3$ м, $\alpha = 60^\circ$.

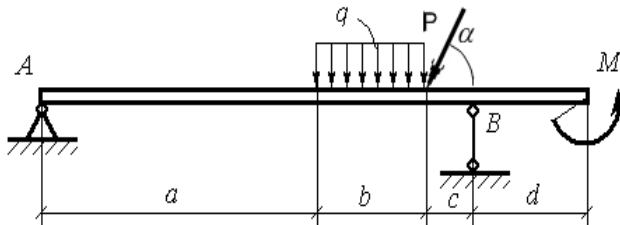


Задача № 8

Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 10$ кН, $M = 5$ кН·м, $q = 2$ кН/м, $a = 7$ м, $b = 3$ м, $c = 1$ м, $d = 3$ м, $\alpha = 45^\circ$.

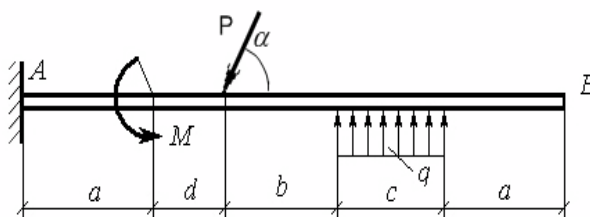


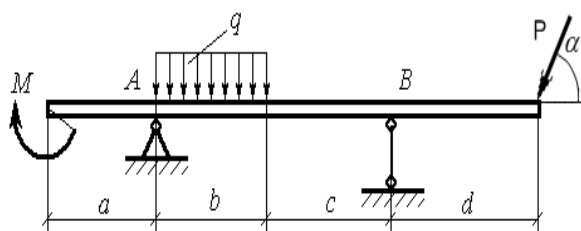
Задача № 9

Горизонтальна балка АВ жорстко защемлена в точці А, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 6$ кН, $M = 25$ кН·м, $q = 7$ кН/м, $a = 3$ м, $b = 3$ м, $c = 2$ м, $d = 1$ м, $\alpha = 30^\circ$.



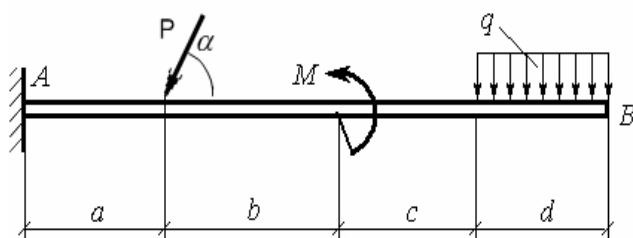


Задача № 10

Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 30$ кН, $M = 25$ кН·м, $q = 8$ кН/м, $a = 2$ м, $b = 2$ м, $c = 3$ м, $d = 3$ м, $\alpha = 45^\circ$.

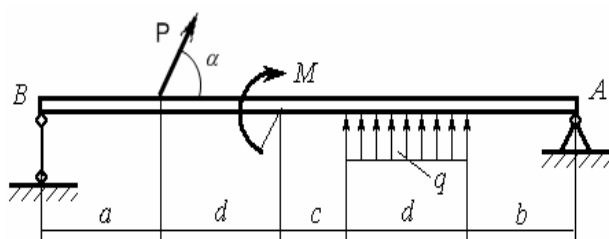


Задача № 11

Горизонтальна балка АВ жорстко защемлена в точці А, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 20$ кН, $M = 10$ кН·м, $q = 8$ кН/м, $a = 2$ м, $b = 4$ м, $c = 2$ м, $d = 3$ м, $\alpha = 60^\circ$.



Задача № 12

Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

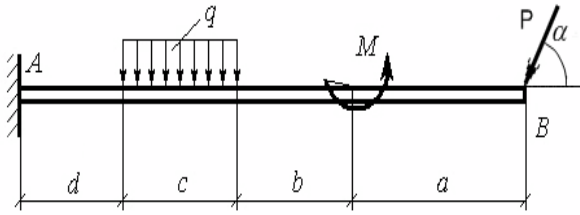
В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 5$ кН, $M = 8$ кН·м, $q = 2$ кН/м, $a = 4$ м, $b = 3$ м, $c = 2$ м, $d = 4$ м, $\alpha = 30^\circ$.

Задача № 13

Горизонтальна балка АВ жорстко защемлена в точці А, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 15$ кН, $M = 8$ кН·м, $q = 2$ кН/м, $a = 4$ м, $b = 2$ м, $c = 2$ м, $d = 2$ м, $\alpha = 60^\circ$.

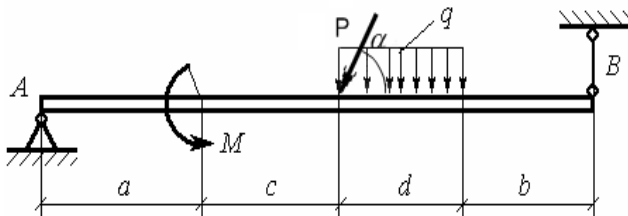


Задача № 14

Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 30$ кН, $M = 15$ кН·м, $q = 5$ кН/м, $a = 4$ м, $b = 3$ м, $c = 2$ м, $d = 3$ м, $\alpha = 45^\circ$.

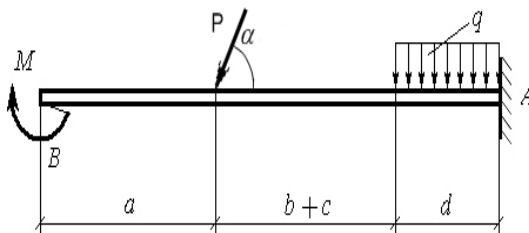


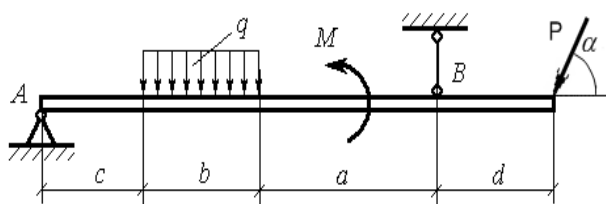
Задача № 15

Горизонтальна балка АВ жорстко защемлена в точці А, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 14$ кН, $M = 8$ кН·м, $q = 12$ кН/м, $a = 4$ м, $b = 2$ м, $c = 2$ м, $d = 3$ м, $\alpha = 60^\circ$.



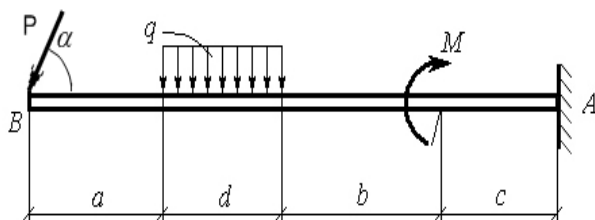


Задача № 16

Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 8$ кН, $M = 15$ кН·м, $q = 4$ кН/м, $a = 4$ м, $b = 3$ м, $c = 2$ м, $d = 2$ м, $\alpha = 45^\circ$.

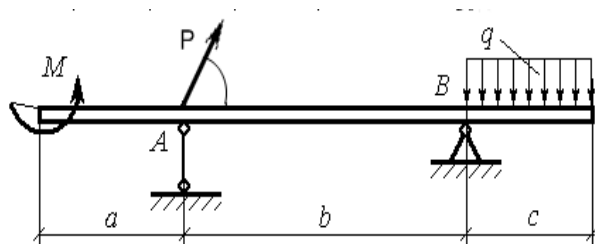


Задача № 17

Горизонтальна балка АВ жорстко защемлена в точці А, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 10$ кН, $M = 8$ кН·м, $q = 5$ кН/м, $a = 4$ м, $b = 5$ м, $c = 3$ м, $d = 3$ м, $\alpha = 30^\circ$.

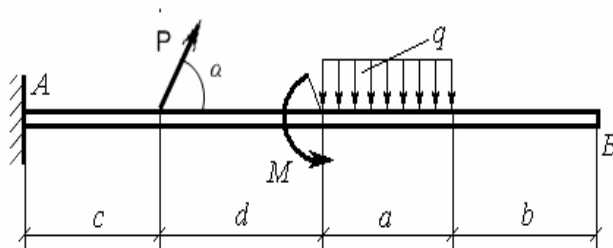


Задача № 18

Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 15$ кН, $M = 10$ кН·м, $q = 4$ кН/м, $a = 4$ м, $b = 5$ м, $c = 2$ м, $\alpha = 45^\circ$.

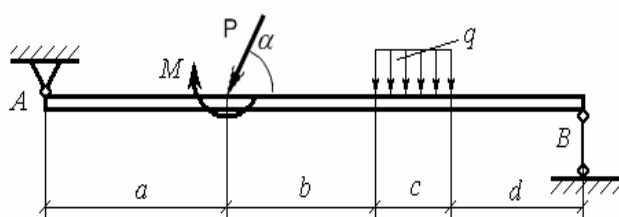


Задача № 19

Горизонтальна балка АВ жорстко защемлена в точці А, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 5$ кН, $M = 15$ кН·м, $q = 2$ кН/м, $a = 2$ м, $b = 3$ м, $c = 3$ м, $d = 3$ м, $\alpha = 30^\circ$.

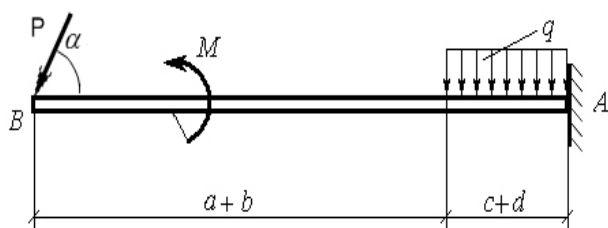


Задача № 20

Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 20$ кН, $M = 5$ кН·м, $q = 4$ кН/м, $a = 4$ м, $b = 3$ м, $c = 2$ м, $d = 3$ м, $\alpha = 60^\circ$.

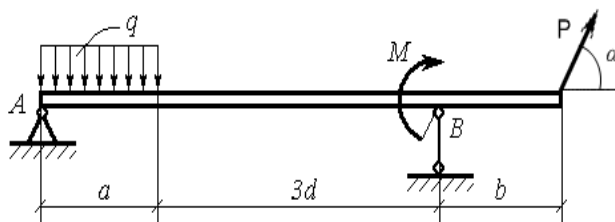


Задача № 21

Горизонтальна балка АВ жорстко защемлена в точці А, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 5$ кН, $M = 10$ кН·м, $q = 6$ кН/м, $a = 4$ м, $b = 5$ м, $c = 2$ м, $d = 3$ м, $\alpha = 30^\circ$.

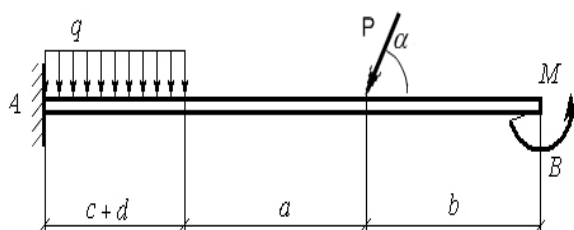


Задача № 22

Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 15$ кН, $M = 6$ кН·м, $q = 5$ кН/м, $a = 2$ м, $b = 3$ м, $d = 2$ м, $\alpha = 60^\circ$.

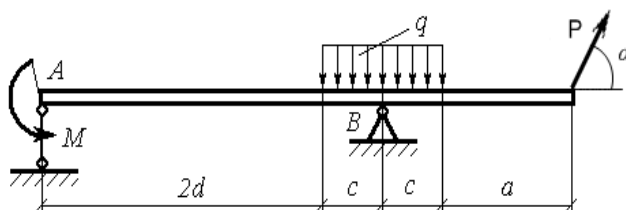


Задача № 23

Горизонтальна балка АВ жорстко защемлена в точці А, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 10$ кН, $M = 5$ кН·м, $q = 6$ кН/м, $a = 4$ м, $b = 5$ м, $c = 1$ м, $d = 1$ м, $\alpha = 45^\circ$.

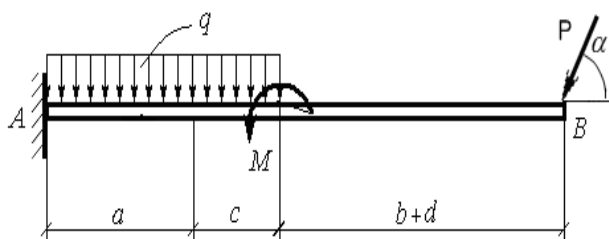


Задача № 24

Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 20$ кН, $M = 15$ кН·м, $q = 5$ кН/м, $a = 2$ м, $c = 1$ м, $d = 3$ м, $\alpha = 45^\circ$.

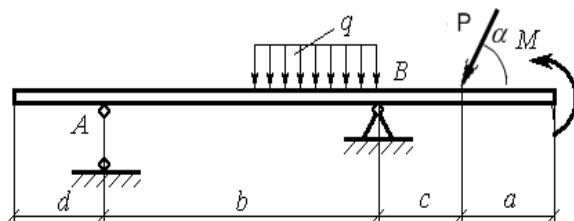


Задача № 25

Горизонтальна балка АВ жорстко защемлена в точці А, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 5$ кН, $M = 10$ кН·м, $q = 2$ кН/м, $a = 4$ м, $b = 1$ м, $c = 2$ м, $d = 3$ м, $\alpha = 30^\circ$.

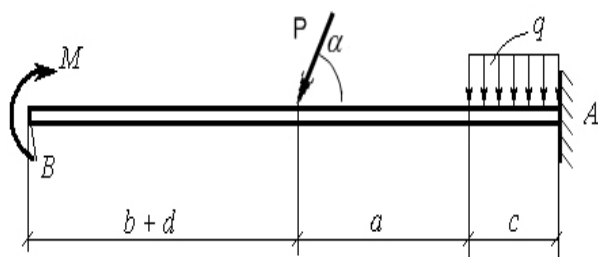


Задача № 26

Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 10$ кН, $M = 15$ кН·м, $q = 5$ кН/м, $a = 2$ м, $b = 5$ м, $c = 2$ м, $d = 2$ м, $\alpha = 60^\circ$.

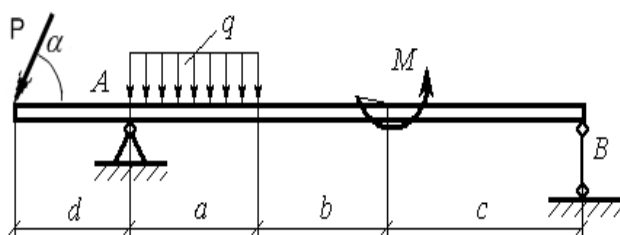


Задача № 27

Горизонтальна балка АВ жорстко защемлена в точці А, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 10$ кН, $M = 15$ кН·м, $q = 5$ кН/м, $a = 4$ м, $b = 3$ м, $c = 2$ м, $d = 3$ м, $\alpha = 30^\circ$.

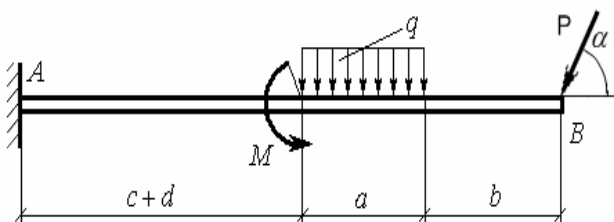


Задача № 28

Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 6$ кН, $M = 8$ кН·м, $q = 6$ кН/м, $a = 2$ м, $b = 3$ м, $c = 4$ м, $d = 2$ м, $\alpha = 60^\circ$.

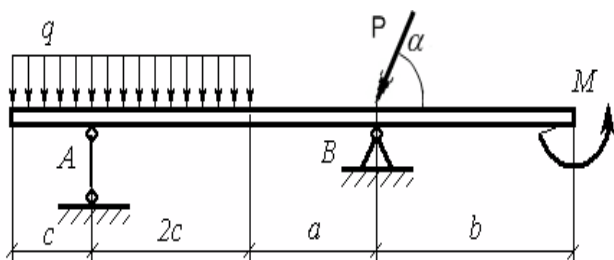


Задача № 29

Горизонтальна балка АВ жорстко защемлена в точці А, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 15$ кН, $M = 10$ кН·м, $q = 4$ кН/м, $a = 2$ м, $b = 3$ м, $c = 2$ м, $d = 3$ м, $\alpha = 45^\circ$.



Задача № 30

Горизонтальна балка закріплена на опорах А і В, навантажена силою P , моментом M і розподільним навантаженням q .

Визначити опорні реакції. Виконати перевірку.

В остаточних розрахунках прийняти значення: $P = 20$ кН, $M = 15$ кН·м, $q = 1$ кН/м, $a = 2$ м, $b = 5$ м, $c = 2$ м, $\alpha = 30^\circ$.

2.3 Приклад виконання завдання

Приклад 1: Для балки (рис.2.3) знайти опорні реакції якщо: $F = 3 \text{ кН}$, $q = 1 \text{ кН/м}$.

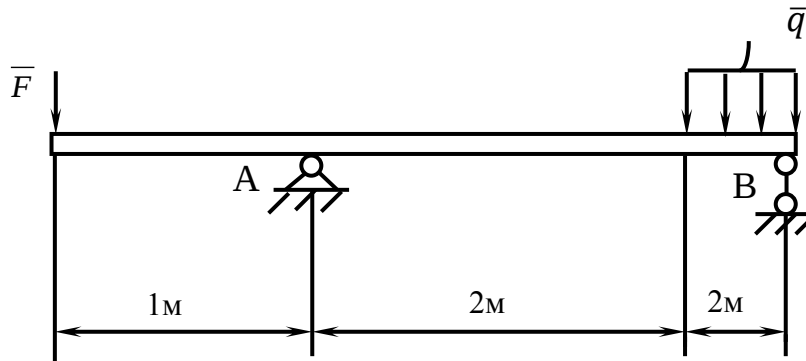


Рисунок 2.3

Розв'язання

Розглянемо балку АВ, що знаходиться у рівновазі (спокої).

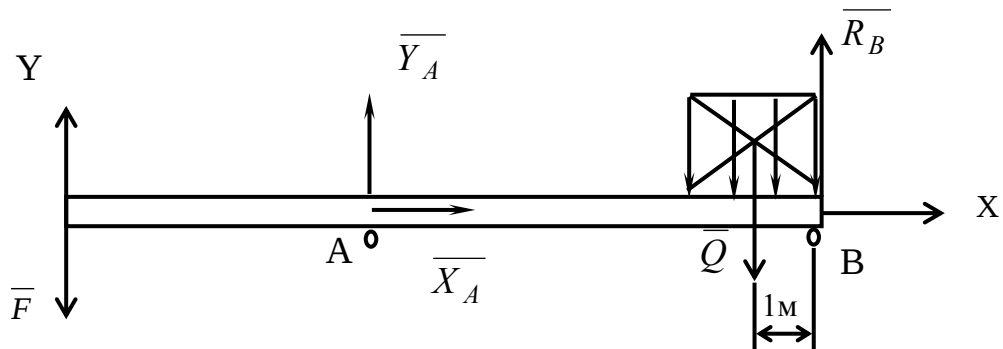


Рисунок 2.4

На балку діють активні сили: зосереджена сила $\bar{F}$ та розподілене навантаження $\bar{q}$, яке еквівалентне зосередженій силі $\bar{Q}$.

$$Q = q \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН.}$$

Дію циліндричного шарніра А та рухомого В замінюємо їх реакціями $\bar{Y}_A$, $\bar{X}_A$, $\bar{R}_B$ (рис. 2.4). Для врівноваженої системи сил $\{\bar{F}, \bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Q}, \bar{R}_B\} \infty 0$ запишемо умови рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum F_X &= 0; \quad X_A = 0, \\ \sum m_A \bar{F} &= 0; \quad F \cdot 1 - Q \cdot 3 + R_B \cdot 4 = 0, \\ \sum m_B \bar{F} &= 0; \quad F \cdot 5 - Y_A \cdot 4 + Q \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Тоді: $R_B = 0,75 \text{ кН}$, $Y_A = 4,25 \text{ кН}$, $X_A = 0$.

Достовірність отриманих результатів можна перевірити, записавши ще одне рівняння рівноваги:

$$\sum F_Y = 0; -F + Y_A - Q + R_B = 0,$$

$$-3 + 4,25 - 2 + 0,75 = 0.$$

Відповідь: $R_B = 0,75 \text{ кН}$, $Y_A = 4,25 \text{ кН}$

Приклад 2: Для консольної балки (рис. 2.5) знайти реакції жорсткого защемлення якщо $F = 2 \text{ кН}$, $M = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

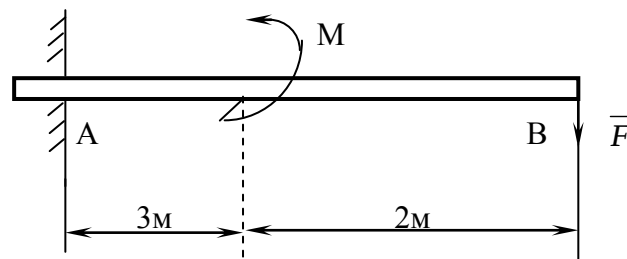


Рисунок 2.5

Розв'язання

На балку AB діють: активна сила $\bar{F}$, пара сил з моментом M ; її руху перешкоджає в'язь – жорстке защемлення в точці A . Відкидаємо в'язь в точці A , і на підставі аксіоми звільнення від в'язей, її дію замінюємо силами $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$ та моментом M_A (рис. 2.6).

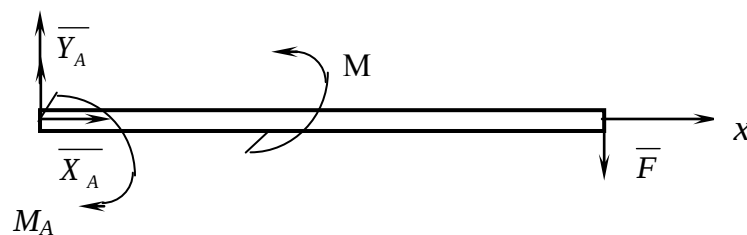


Рисунок 2.6

Запишемо умови рівноваги для врівноваженої системи сил $\{X_A, Y_A, M_A, M, \bar{F}\} \propto 0$.

$$\sum F_X = 0; X_A = 0;$$

$$\sum F_Y = 0; Y_A - F = 0;$$

$$\sum m_A \bar{F} = 0; -M_A + M - F \cdot 5 = 0.$$

Звідки знаходимо:

$$Y_A = F = 2 \text{ кН}$$

$$M_A = M - 5 \cdot F = 5 - 5 \cdot 2 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Від'ємний знак величини M_A вказує, що дійсний напрямок моменту сили в жорсткому защемленні протилежний показаному на рис.2.6.

Відповідь: $X_A=0$; $Y_A=2$ кН; $M_A=-5$ кН·м.

3 ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ

3.1 Теоретичні відомості і методичні вказівки

3.1.1 Внутрішні сили. Метод перерізів

У будь-якому тілі між його мікрочастинками завжди існують сили взаємодії, які зумовлюють існування тіла як єдиного цілого.

При дії на тіло зовнішніх сил у будь-якому його перерізі виникають додаткові, внутрішні сили взаємодії між частинками тіла (крім тих, що існували в цьому елементі, коли він був ненавантажений), які перешкоджають зміні відстаней між цими частинками та руйнуванню тіла. Ці сили часто називають внутрішніми силами пружності. Саме внутрішні сили й визначають для розрахунку на міцність та жорсткість бруса.

Для встановлення величини внутрішніх сил, що виникають у перерізі стержнів, які підлягають зовнішній силовій дії, використовується метод перерізів. Нехай є деяке пружне тіло (рис. 3.1, а), що перебуває у рівновазі під дією системи зовнішніх сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$.

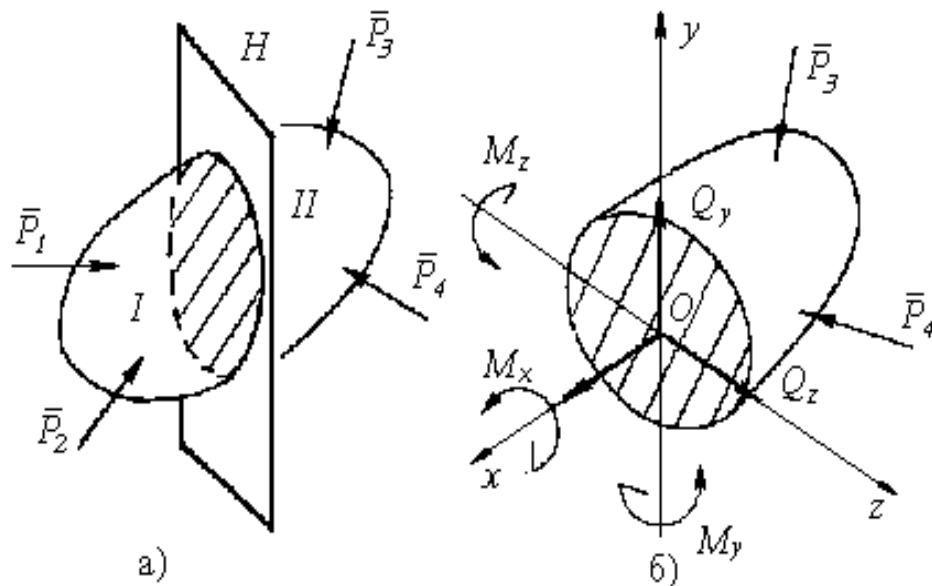


Рисунок 3.1

Розділимо це тіло деякою площиною H на дві частини I і II (рис.3.1, а). Відкинемо одну з частин, наприклад I і розглянемо умови рівноваги частини II (рис. 3.1, б), що залишилася. Щоб ця частина була в рівновазі, як і у випадку, коли вона була частиною цілого тіла, треба, щоб крім

зовнішніх сил, прикладених до неї, були збережені й раніше діючі на цю частину внутрішні сили взаємодії, що виникають між частинами I і II під впливом зовнішніх сил.

Згадані внутрішні сили, суцільно розподілені по зробленому перерізу, очевидно, можна звести до деякої системи сил, яка замінює вплив відкинутої частини тіла на ту, що залишилася.

Якби ми розглядали рівновагу частини I , відкинувши частину II , то вплив відкинутої частини, очевидно, врахували б такими самими внутрішніми силами, прикладеними до частини I у тому самому перерізі, але у зворотному до попереднього напрямку.

У найбільш загальному випадку систему внутрішніх сил можна звести до однієї сили $\vec{R}$ (головного вектора) і однієї пари сил $\vec{M}$ (головного моменту).

При визначенні внутрішніх сил в стержнях рекомендується проводити переріз перпендикулярно до осі стержня. Виберемо осі координат x, y, z з початком в центрі ваги перерізу так, щоб осі Oy і Oz лежали в його площині. Розкладемо головний вектор $\vec{R}$ на складові по осях координат: N, Q_y, Q_z , а головний момент M – на три моменти: M_x, M_y і M_z (рис. 3.1, б).

Ці шість зусиль можуть бути легко знайдені з рівнянь рівноваги (рівнянь статки), записаних для будь-якої із частин тіла

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{yi} + Q_y &= 0, & \sum_{i=1}^n m_{yi} + M_y &= 0, \\ \sum_{i=1}^n P_{zi} + Q_z &= 0, & \sum_{i=1}^n m_{zi} + M_z &= 0, \\ \sum_{i=1}^n P_{xi} + N &= 0, & \sum_{i=1}^n m_{xi} + M_x &= 0, \end{aligned}$$

де P_{yi}, P_{zi}, P_{xi} – проекції зовнішніх сил на відповідні осі; $m_{yi},$

m_{zi}, m_{xi} – моменти зовнішніх сил відносно відповідних осей.

Шість величин N, Q_y, Q_z, M_x, M_y і M_z прийнято називати внутрішніми силовими факторами або внутрішніми зусиллями. Кожна із цих сил має свою назву. Силу N , що діє вздовж осі x , називають поздовжньою або нормальною силою. Сили Q_y і Q_z називають поперечними силами (рідше – силами, що перерізують). Моменти M_y і M_z , очевидно, намагатимуться зігнути стержень у площинах xOy і xOz , тому їх називають згинальними, а момент M_x , який скручує стержень, називають крутним моментом.

Для зусиль і моментів у перерізі можна дати такі визначення:

поздовжня сила N – це сума проекцій усіх внутрішніх сил, що діють у перерізі на нормаль до перерізу (чи на вісь стержня);

поперечні сили Q_y, Q_z – це суми проекцій усіх внутрішніх сил у перерізі на головні центральні осі перерізу y і z відповідно;

крутний момент M_x (чи $M_{кр}$) – це сума моментів усіх внутрішніх сил у перерізі щодо осі стержня;

згинальні моменти M_y і M_z – це суми моментів усіх внутрішніх сил у перерізі щодо головних центральних осей перерізу y і z відповідно.

3.1.2 Епюри внутрішніх зусиль

Метод перерізів дозволяє знайти всі зусилля і моменти в будь-якому перерізі стержня при дії будь-якого навантаження.

Для того, щоб поперечна сила та згинальний момент, визначені з розгляду лівої та правої частин балки, були однакових знаків, слід дотримуватися певного правила знаків.

Поперечну силу Q в перерізі будемо вважати додатною, якщо вона намагається повернути вирізаний елемент за стрілкою годинника (рис. 3.2, а). Згинальний момент M (для горизонтальних прямолінійних ділянок) будемо вважати додатним, якщо він вигинає балку опуклістю вниз (стиснуті верхні волокна) (рис. 3.2, а). Поздовжню силу N в перерізі будемо вважати додатною, якщо її вектор направлений від перерізу (викликає деформацію розтягу). Крутний момент $M_{кр}$ вважається додатним, якщо при спостережанні з торця вздовж осі частини, що розглядається, він діє за годинниковою стрілкою (рис. 3.3).

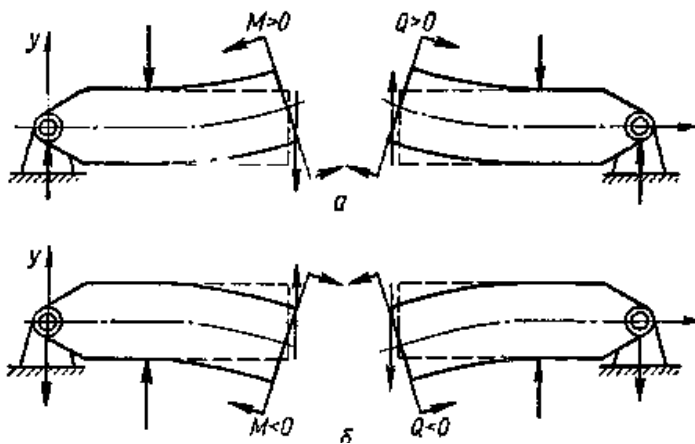


Рисунок 3.2

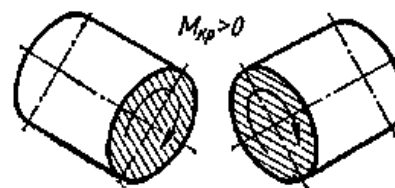


Рисунок 3.3

Зусилля і моменти в різних перерізах одного й того ж стержня різні.

Графіки (діаграми), що показують, як змінюються внутрішні зусилля при переході від перерізу до перерізу, називаються епюрами.

Відзначимо деякі правила, які застосовуються при побудові епюр:

а) вісь (базу), на якій будується епюра, завжди вибирають так, щоб вона була паралельна чи просто збігалася з віссю стержня;

б) ординати епюри відкладають від осі епюри по перпендикуляру;
 в) штрихувати епюри прийнято лініями, перпендикулярними до бази;
 г) для зусиль і моментів вибирають деякий масштаб. Ординати відкладають в масштабі. Крім того, на епюрах проставляють числа, що показують величини характерних ординат, а в полі епюри в кружках ставлять знак зусилля.

3.1.3 Диференціальні залежності між q , Q та M

Нехай на прямолінійний стержень в площині xOy діє зрівноважена система зосереджених сил P_i , моментів M_i та розподіленого навантаження q напрямком яких не збігається з віссю стержня (рис. 3.4). Тоді диференціальні залежності між інтенсивністю розподіленого навантаження q , поперечною силою Q і згинальним моментом M будуть мати вигляд (теореми Журавського)

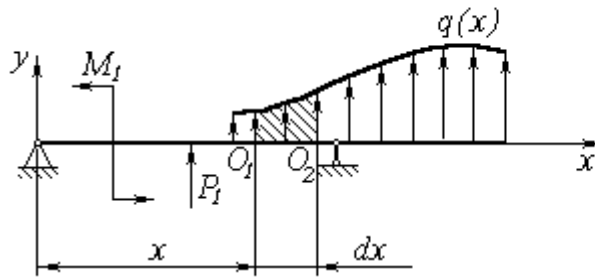


Рисунок 3.4

$$\frac{dQ_y}{dx} = q, \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y, \quad \frac{d^2 M_z}{dx^2} = q. \quad (3.1)$$

З рівнянь (3.1) випливають такі правила, що застосовують для перевірки правильності побудови епюр:

а) на тих ділянках, де немає розподіленого навантаження, епюра Q обмежена прямими, паралельними базі, а епюра M , у загальному випадку — похилими прямими;

б) на тих ділянках, де до балки прикладене рівномірно розподілене навантаження, епюра Q обмежена похилими прямими, а епюра M — квадратичними параболою. При побудові епюри M на стиснутих волокнах опуклість параболи звернена в бік, протилежний напрямку дії навантаження q ;

в) у тих перерізах, де $Q = 0$, дотична до епюри M паралельна осі епюри;

г) на ділянках, де $Q > 0$, M зростає, де $Q < 0$, M спадає.

д) у тих перерізах, де до балки прикладені зосереджені сили на епюрі Q будуть стрибки на величину та у напрямку прикладених сил, а на епюрі M будуть злами;

е) у тих перерізах, де до балки прикладені зосереджені моменти, на епюрі M будуть стрибки на величину цих моментів, на епюрі Q змін не буде.

3.1.4 Побудова епюр Q і M для балок

Побудову епюр Q та M для балок починають з визначення повної системи навантажень, в яку входять як задані сили, так і опорні реакції, тобто визначають реакції опор. Після визначення опорних реакцій та їх перевірки балку розбивають на ділянки. При цьому керуються правилом, що граничними точками ділянок є точки прикладення зосереджених сил та моментів, а також точки де змінюється інтенсивність розподіленого навантаження.

Далі, використовуючи метод перерізів, будують епюри Q та M на кожній ділянці балки, з врахуванням основних правил побудови епюр.

З практичної сторони, стосовно балок, користуються такими правилами:

а) поперечна сила Q в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на вертикальну вісь перерізу всіх сил, що діють по одну сторону від нього;

$$Q_y = \sum_{i=1}^n P_{yi} \text{ відсіч}.$$

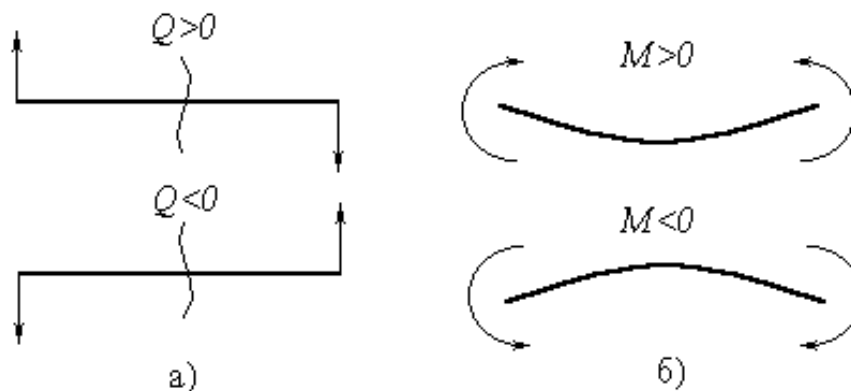


Рисунок 3.5

б) згинальний момент M в перерізі балки чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно центра ваги перерізу всіх сил, що розташовані по одну сторону від цього перерізу.

$$M_z = \sum_{i=1}^n m_{zi} \text{ відсіч}.$$

В праву частину записуються моменти зовнішніх сил з врахуванням такого правила знаків: якщо зовнішня сила (або момент чи розподілене навантаження) створює такий згинальний момент, що викликає деформації стиску в верхніх волокнах балки відносно перерізу, то він береться з додатним (“+”) знаком (рис. 3.5, б).

3.1.5 Приклад побудови епюр Q і M для балок

Побудуємо епюри поперечних сил і згинальних моментів для балки, показаної на рис. 3.6, а.

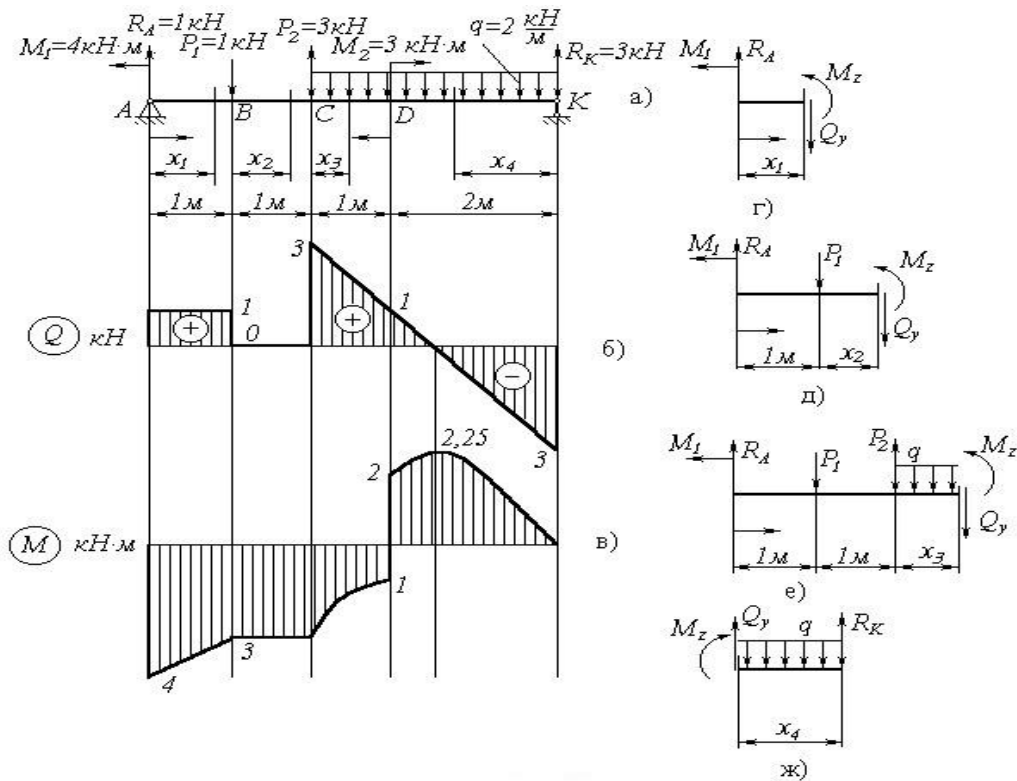


Рисунок 3.6

Розв'язання

Спочатку визначимо реакції опор R_A і R_K із рівнянь рівноваги статички (в опорі А горизонтальна складова реакції R_A дорівнює нулю, оскільки в системі відсутні сили, що проектується на вісь стержня):

$$\sum M_A = 0;$$

$$M_1 - P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 2 - q \cdot 3(2 + 3/2) - M_2 + R_K \cdot 5 = 0;$$

$$\sum M_A = 4 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 3,5 - 3 + R_K \cdot 5 = 0;$$

$$R_K = 3 \text{ кН.}$$

$$\sum M_K = 0;$$

$$M_1 - R_A \cdot 5 + P_1 \cdot 4 - P_2 \cdot 3 - q \cdot 3(3/2) - M_2 = 0;$$

$$\sum M_K = 4 - R_A \cdot 5 + 1 \cdot 4 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 3 = 0;$$

$$R_A = 1 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum Y = R_A - P_1 + P_2 - q \cdot 3 + R_K = 1 - 1 + 3 - 2 \cdot 3 + 3 = 0.$$

Отже, реакції розраховані правильно.

Розділяємо балку на чотири ділянки і складаємо рівняння поперечних сил та згинальних моментів для кожної з них.

Будуємо епюри Q_y і M_z для ділянки AB . Для цього зробимо переріз m_1-n_1 на відстані x від опори A і розглянемо рівновагу відсіченої частини (рис. 3.6, г). Згинальний момент M_z і поперечну силу Q_y в перерізі будемо зображати додатними.

Ділянка AB : $0 \leq x_1 \leq 1$ м.

$$Q_y(x_1) = R_A = 1 \text{ кН}; \quad (3.2)$$

$$M_z(x_1) = R_A x_1 - M_1 = x_1 - 4; \quad (3.3)$$

при $x_1=0$ м, $M_z(0) = -4$ кН·м,

при $x_1=1$ м, $M_z(1) = 1 - 4 = -3$ кН·м.

Як видно із рівнянь (3.2) і (3.3) поперечна сила залишається сталою на всій довжині ділянки AB , а згинальний момент змінюється за лінійним законом. Графіки цих залежностей показані на рисунках 3.6, б та 3.6, в. Додатні значення сили Q_y будемо відкладати вгору від базової прямої, а від'ємні – вниз. Епюри згинальних моментів будемо на стиснутих волокнах. Тому вгору від базової лінії будемо відкладати в масштабі додатні значення згинального моменту, а вниз – від'ємні.

Вказівка. При побудові епюр згинальних моментів на розтягнутих волокнах додатні значення згинального моменту відкладаються вниз, а вверх – від'ємні).

Будуємо епюри M_z і Q_y для ділянки BC . Для цього зробимо переріз m_2-n_2 і розглянемо рівновагу лівої відрізаної частини балки (рис. 3.6, д)

Ділянка BC : $0 \leq x_2 \leq 1$ м;

$$Q_y(x_2) = R_A - P_1 = 1 - 1 = 0 \text{ кН};$$

$$M_z(x_2) = R_A(1+x_2) - P_1 x_2 - M_1 = 1(1+x_2) - 1 \cdot x_2 - 4 = -3 \text{ кН·м.}$$

Будуємо графіки епюри Q_y і M_z на ділянці BC (рис. 3.6, б, в).

Із умов рівноваги лівої відсіченої частини балки знаходимо закони, за якими змінюються Q_y і M_z на ділянці CD .

Ділянка CD : $0 \leq x_3 \leq 1$ м.

$$Q_y(x_3) = R_A - P_1 + P_2 - q x_3 = 3 - 2 \cdot x_3;$$

$$M_z(x_3) = R_A(2 + x_3) - M_1 - P_1(1 + x_3) + P_2x_3 - \frac{qx_3^2}{2} = 1(2 + x_3) - 4 - 1(1 + x_3) + 3x_3 - 2 \cdot x_3^2/2 = -3 + 3x_3 - x_3^2;$$

при $x_3 = 0$ м, $Q_y(0) = 3$ кН; $M_z(0) = -3$ кН·м;

при $x_3 = 1$ м, $Q_y(1) = 1$ кН; $M_z(1) = -1$ кН·м.

Для побудови епюр Q_y і M_z на ділянці DK розглянемо рівновагу правої відрізаної частини балки (переріз m_3-n_3 , рисунок 3.6, е)

Ділянка DK : $0 \leq x_4 \leq 2$ м.

$$Q_y(x_4) = q \cdot x_4 - R_K = 2x_4 - 3; \quad (3.4)$$

$$M_z(x_4) = R_K x_4 - \frac{qx_4^2}{2} = 3x_4 - x_4^2; \quad (3.5)$$

при $x_4 = 0$ м, $Q_y(0) = -3$ кН; $M_z(0) = 0$ кН·м;

при $x_4 = 2$ м, $Q_y(2) = 1$ кН; $M_z(2) = 2$ кН·м.

Епюра $Q_y(x_4)$ перетинає вісь x , (рис. 3.6, б), це означає що в точці перетину момент M_z набуде екстремального значення. Знайдемо цю точку із умови

$$Q_y(x_4) = 0, \text{ або } 2x_4 - 3 = 0, \text{ звідки } x_4 = \frac{R_K}{q} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ м.}$$

Величина згинального моменту при $x_4 = 1,5$ м,

$$M_z(1,5) = 3x_4 - x_4^2 = 3 \cdot 1,5 - 1,5^2 = 2,25 \text{ кН·м.}$$

Будуємо епюри Q_y і M_z на ділянці DK (рис. 3.6, б, в).

Як видно із рисунків 3.6, б і в на ділянках, де немає розподіленого навантаження ($q=0$), поперечна сила Q_y залишається сталою, а момент M_z змінюється за лінійним законом (ділянка AB). На ділянці BC $Q_y=0$, а $M_z=\text{const}$. На ділянках CD та CK з рівномірно розподіленим навантаженням ($q=\text{const}$), епюра Q_y – лінійна (3.4), а згинальний момент M_z змінюється за законом квадратичної параболи (3.5).

Оскільки епюра M_z побудована на стиснутих волокнах, то опуклість параболи звернена в бік протилежний напрямку дії навантаження q (ділянки CD та CK).

Вказівка. При побудові епюр згинальних моментів на розтягнутих волокнах опуклість параболи звернена в бік, що збігається з напрямком дії навантаження q).

В перерізах, де прикладені зосереджені сили, на епюрі Q_y мають місце стрибки на величину цих сил в напрямку вектора сили, а на епюрі M_z – злами.

В перерізах, де прикладені тільки зосереджені моменти, на епюрі Q_y змін немає, а на епюрі M_z мають місце стрибки на величину цих моментів.

На ділянках, де $Q_y = 0$, момент M_z сталий, а в перерізах, де $Q_y = 0$, згинальний момент набуває екстремального значення.

Питання для самоперевірки знань
та контролю засвоєння матеріалу

1. Види навантажень на тіла.
2. Внутрішні та зовнішні сили.
3. Як визначаються внутрішні сили?
4. Правило знаків при визначенні внутрішніх сил.
5. Чи залежать внутрішні сили в тілах від зовнішніх?
6. Дати означення видів внутрішніх сил..
7. Методика визначення внутрішніх зусиль..

4 РОЗРАХУНОК БАЛОК НА МІЦНІСТЬ ПРИ ПЛОСКОМУ ЗГИНІ

4.1 Теоретичні відомості і методичні вказівки

4.1.1 Геометричні характеристики плоских поперечних перерізів

При деформації плоского згину балки необхідно враховувати геометричні характеристики плоских поперечних перерізів.

Добуток площі dS (рис. 4.1) на відстань її від деякої осі називається елементарним моментом площі відносно осі. Тоді, складаючи елементарні моменти по всій площі поперечного перерізу, отримаємо

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \int_S y \cdot dS \\ S_y &= \int_S x \cdot dS \end{aligned} \right|$$

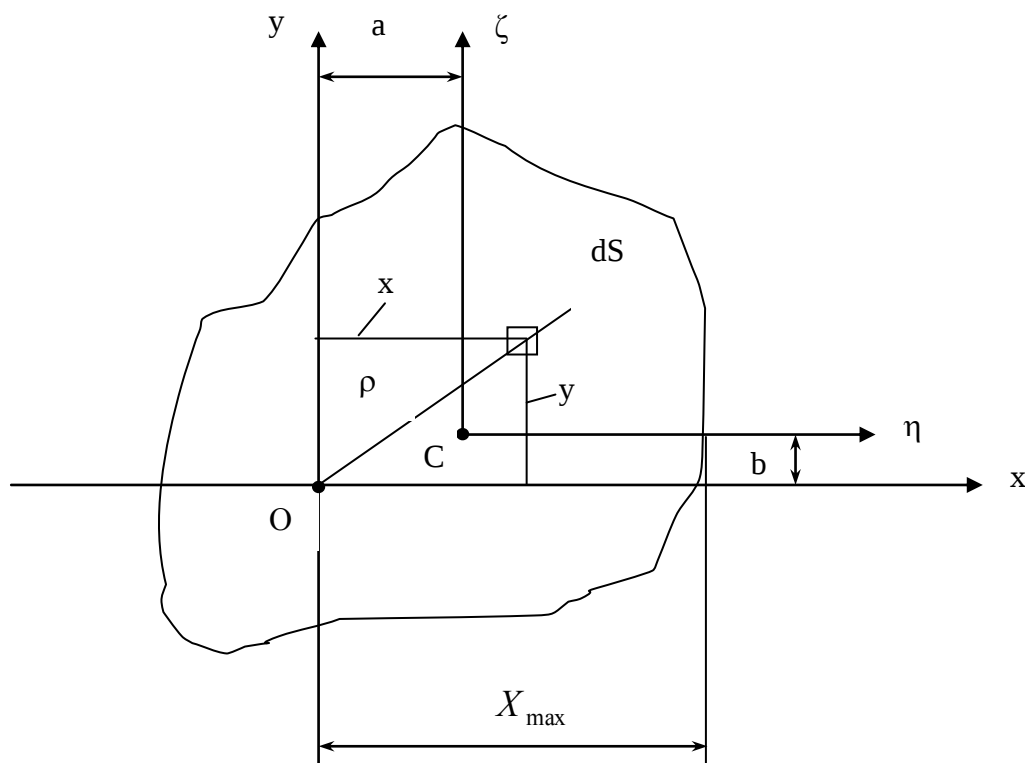


Рисунок 4.1

Статичні моменти площі S_x, S_y використовуються при визначенні центра ваги поперечного перерізу

$$Y_c = \frac{S_x}{S}, X_c = \frac{S_y}{S},$$

де S – площа поперечного перерізу.

Момент інерції поперечного перерізу відносно осей x і y знайдемо таким чином:

$$I_x = \int_S y^2 dS, I_y = \int_S x^2 dS.$$

При розрахунках на кручення використовується полярний момент інерції:

$$I_\rho = \int_S \rho^2 dS.$$

У розрахунках на міцність зустрічаються з відношенням осьових моментів інерції до відстані точок, найбільш віддалених від відповідної осі (рис. 4.1).

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, W_y = \frac{I_y}{x_{\max}},$$

де W_x, W_y – осьові моменти опору відносно осей x та y .

Момент інерції поперечного перерізу відносно осі, що не проходить через центр маси C знаходиться за формулою.

$$I_x = I_\eta + b^2 \cdot S, I_y = I_\zeta + a^2 \cdot S.$$

де I_η, I_ζ – моменти інерції поперечного перерізу тіла відносно центральних осей η і ζ (рис. 4.1).

Геометричні характеристики деяких плоских поперечних перерізів:
а) в формі прямокутника (рис.4.2);

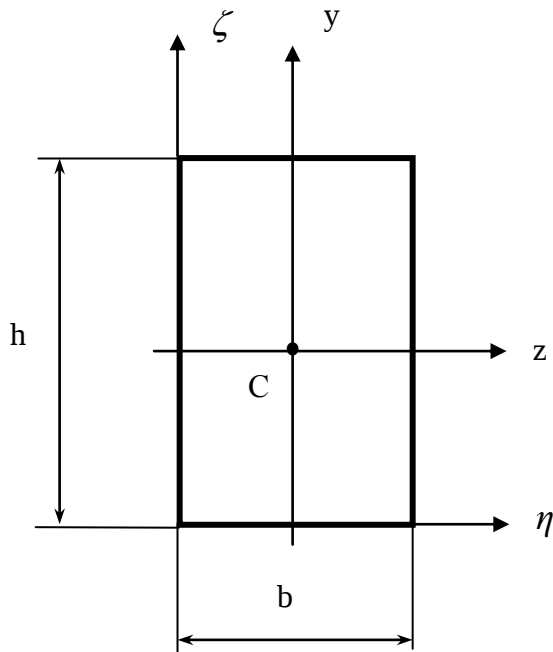


Рисунок 4.2

Моменти інерції поперечного перерізу відносно осей z , y , η та ζ

$$I_z = \frac{1}{12}bh^3 \quad I_\eta = \frac{1}{3}bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12}hb^3 \quad I_\zeta = \frac{1}{3}hb^3$$

Моменти опору поперечного перерізу відносно осей z та y

$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6}$$

б) в формі круга (рис. 4.3);

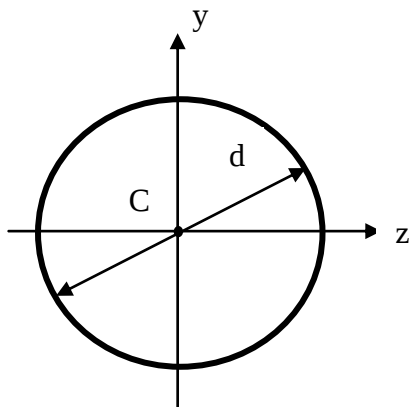


Рисунок 4.3

Моменти інерції поперечного перерізу відносно осей z і y та полярний момент інерції відносно центра мас C

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_c = \frac{\pi d^4}{32}$$

Моменти опору поперечного перерізу відносно осей z і y та центра мас C

$$W_z = W_y = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$W_c = \frac{\pi d^3}{16}$$

4.1.2 Розрахунок на міцність при плоскому згині

При плоскому згині (рис. 4.4) у стержні з'являються дотичні та нормальні напруги. Але неврахування дотичних напруг при розрахунках

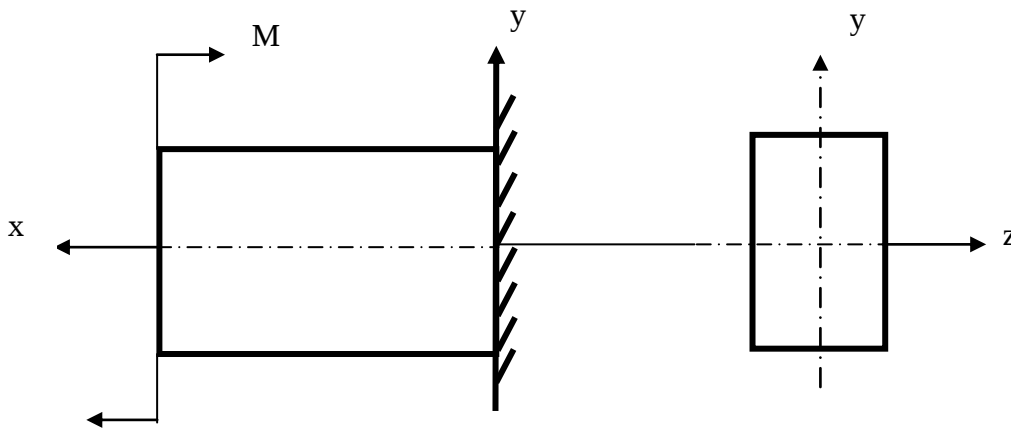


Рисунок 4.4

дає похибку біля 3%. Тому умови міцності при згині можна записати у вигляді:

$$\sigma_{xz} = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma]_{xz},$$

де $[\sigma]_{xz}$ - допустимі напруги при згині.

Питання для самоперевірки знань
та контролю засвоєння матеріалу

1. Момент інерції поперечного перерізу тіла відносно центральної осі.
2. Означення центральних осей.
3. Записати формулу для визначення моменту інерції поперечного перерізу тіла відносно осі, що паралельна центральній.
4. Моменти інерції поперечного перерізу балки у формі прямокутника та круга відносно центральних осей.
5. Моменти інерції поперечного перерізу балки у формі прямокутника та круга відносно осі, що паралельна центральній.
6. Дати означення моменту опору поперечного перерізу тіла відносно осі.
7. Момент опору поперечного перерізу балки у формі прямокутника та круга відносно центральних осей.
8. Умови міцності при плоскому згині балки.

4.2 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Розрахунок балок на міцність при плоскому згині

Приклад: Для балки (задачі 1 – 30, підрозділ 2.3) при $\alpha = 0$ побудувати епюри згинальних моментів та поперечних сил і на підставі епюри згинальних моментів M підібрати сталю балку прямокутного (рис. 4.2) поперечного профілю ($h=2b$) при $[\sigma]=160 \text{ МН/м}^2$.

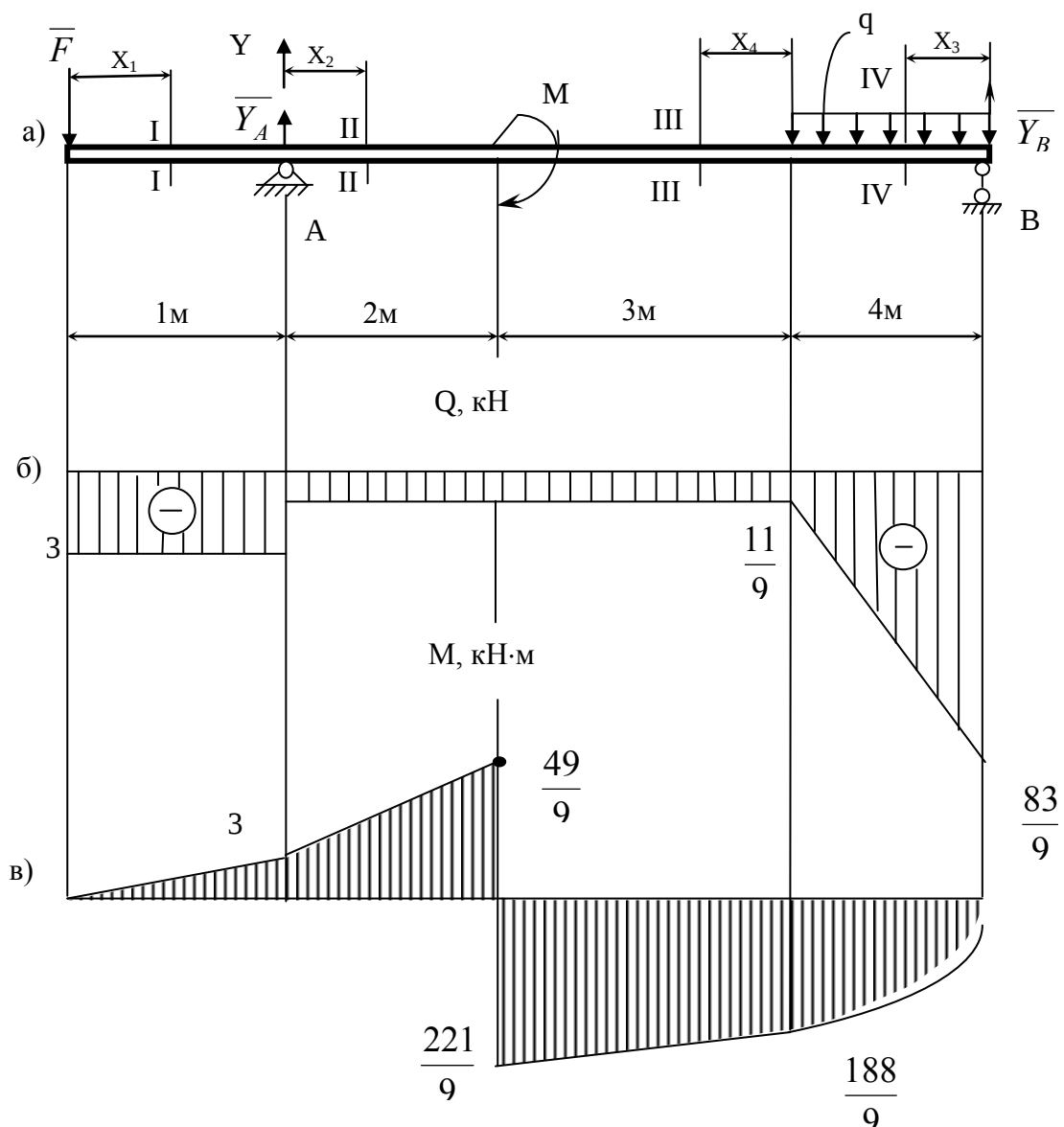


Рисунок 4.5

Розв'язання

Розглянемо просту балку на двох опорах (рис. 4.5, а): опора A – нерухомий шарнір; опора B – рухомий шарнір. Дію в'язей (шарнірів) на балку замінюємо реакціями в'язей $\bar{Y}_A, \bar{Y}_B$, які знаходимо з рівнянь рівноваги при $F=3\text{кН}$, $q=2\text{кН/м}$, $M=30\text{кН}\cdot\text{м}$

$$\sum m_A \bar{F} = 0; 1 \cdot F - M - 4 \cdot q \cdot 7 + 9 \cdot Y_B = 0; Y_B = \frac{83}{9} \kappa H,$$

$$\sum m_B \bar{F} = 0; 10 \cdot F - M - Y_A \cdot 9 + 4 \cdot q \cdot 2 = 0; Y_A = \frac{16}{9} \kappa H.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0; -F + Y_A - 4 \cdot q + Y_B = 0, \\ -3 + \frac{16}{9} - 4 \cdot 2 + \frac{83}{9} &= 0; -99 + 99 = 0. \end{aligned}$$

Балка має чотири ділянки, тому проводимо чотири довільні перерізи (рис. 4.5, а) і знаходимо поперечну силу Q_i та згинальний момент M_i у кожному перерізі.

Переріз I-I: $\underline{0 \leq x_1 \leq 1\text{ м}}$

$$Q_1 = -F = -3\kappa H;$$

$$M_1 = -F \cdot x_1 = -3 \cdot x_1.$$

при $x_1 = 0; Q_1 = -3\kappa H, M_1 = 0.$

при $x_1 = 1\text{ м}; Q_1 = -3\kappa H; M_1 = -3\kappa H \cdot \text{м}.$

Переріз II-II: $\underline{0 \leq x_2 \leq 2\text{ м}}$

$$Q_2 = -F + Y_A = -3 + \frac{16}{9} = -\frac{11}{9} \kappa H,$$

$$M_2 = -F(1 + x_2) + Y_A \cdot x_2 = -3(1 + x_2) + \frac{16}{9} \cdot x_2.$$

при $x_2 = 0; Q_2 = -\frac{11}{9} \kappa H; M_2 = -3\kappa H \cdot \text{м}.$

при $x_2 = 2; Q_2 = -\frac{11}{9} \kappa H; M_2 = -\frac{49}{3} \kappa H \cdot \text{м}.$

Переріз III-III: $\underline{0 \leq x_3 \leq 4\text{ м}}$

$$Q_3 = q \cdot x_3 - Y_B = 2 \cdot x_3 - \frac{83}{9},$$

$$M_3 = Y_B \cdot x_3 - q \frac{x_3^2}{2} = \frac{83}{9} \cdot x_3 - x_3^2.$$

при $x_3 = 0; Q_3 = -\frac{83}{9} \kappa H; M_3 = 0.$

при $x_3 = 4; Q_3 = -\frac{11}{9} \kappa H; M_3 = \frac{188}{9} \kappa H.$

Переріз IV-IV: $\underline{0 \leq x_4 \leq 3\text{ м}}$

$$Q_4 = q \cdot 4 - Y_B = -\frac{11}{9} \kappa H,$$

$$M_4 = Y_B (4 + x_4) - 4 \cdot q (2 + x_4) = \frac{83}{9} (4 + x_4) - 8(2 + x_4).$$

$$\text{при } x_4 = 0; Q_4 = -\frac{11}{9} \kappa H; M_4 = \frac{188}{9} \kappa H.$$

$$\text{при } x_4 = 3; Q_4 = -\frac{11}{9} \kappa H; M_4 = \frac{221}{9} \kappa H.$$

За отриманими даними Q_i та M_i ($i=1,2,3,4$) будемо епюри Q (рис. 4.5, б) та M (рис. 4.5, в).

Ординати Q_i та M_i відкладаємо перпендикулярно до осі балки. Для поперечної сили Q_i додатні значення відкладаємо над базовою лінією (відносно балки), а епюру M_i будемо на розтягнутих волокнах.

Розміри поперечного перерізу балки будемо знаходити із умови міцності (4.12)

$$\sigma_{32} = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma]_{32},$$

де $W_z = \frac{bh^2}{6}$ – момент опору.

Так як за умовою $h=2b$, то $W_z = \frac{2}{3} b^3$.

Знайдемо мінімальне значення ширини b поперечного профілю балки:

$$\frac{3M_{\max}}{2b^3} = [\sigma]_{32},$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{3M_{\max}}{2[\sigma]_{32}}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 221 \cdot 10^3}{2 \cdot 9 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,059 \text{ м},$$

де $M_{\max} = \frac{221 \kappa H \cdot \text{м}}{9 \kappa H}$ – максимальне значення згинального моменту (рис. 4.5, в).

Відповідь: приймаємо $b=60\text{ мм}$, $h=120\text{ мм}$.

5 КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

5.1 Теоретичні відомості і методичні вказівки

При координатному способі завдання руху точки M (рис. 5.1) її положення у просторі, використовуючи декартову систему координат, Охуз задається трьома функціями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

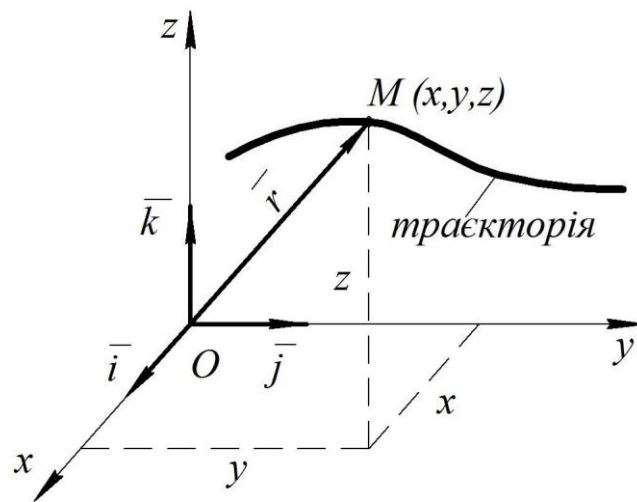


Рисунок 5.1

Проекції вектора швидкості на координатні осі знаходять за формулами

$$V_x = \dot{x}(t), \quad V_y = \dot{y}(t), \quad V_z = \dot{z}(t),$$

а вектора прискорення

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}(t), \quad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}(t), \quad a_z = \dot{V}_z = \ddot{z}(t).$$

За цими формулами можна обчислити: траєкторію руху точки, проекції швидкостей і прискорення у будь-який заданий момент часу. Величини швидкості та прискорення точки M , спрямовуючи косинуси векторів швидкості і прискорення обчислюються наступним чином:

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \cdot \vec{k},$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

$$\cos \alpha_V = \frac{V_x}{V}; \cos \beta_V = \frac{V_y}{V}; \cos \gamma_V = \frac{V_z}{V},$$

де $\alpha_V, \beta_V, \gamma_V$ - відповідні кути між вектором швидкості $\vec{V}$ і відповідною віссю.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} - \text{модуль прискорення точки,}$$

де a_x, a_y, a_z - проекції вектора прискорення на вісі x, y, z .

$$\cos \alpha_a = \frac{a_x}{a}; \cos \beta_a = \frac{a_y}{a}; \cos \gamma_a = \frac{a_z}{a},$$

де $\alpha_a, \beta_a, \gamma_a$ - відповідні кути між вектором прискорення $\vec{a}$ і відповідною віссю.

Проекції прискорення вектора прискорення точки на дотичну та нормальні осі натуральних осей координат знаходяться за формулами:

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{V} - \text{дотичне прискорення, що характеризує зміну}$$

швидкості за величиною і завжди спрямоване вздовж дотичної до траєкторії в точці;

$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$ - нормальне прискорення, яке напрямлене в бік угнутості траєкторії до центра кривизни і характеризує зміну швидкості за напрямком.

$$\text{Радіус кривизни траєкторії в даній точці: } \rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

Питання для самоперевірки знань
та контролю засвоєння матеріалу

1. Які кінематичні способи завдання руху точки?
2. Чому дорівнює проекція швидкості точки на дотичну до її траєкторії та модуль її швидкості?
3. Як визначаються проекції швидкості та прискорення точки на нерухомі вісі декартових координат?
4. В який момент часу нормальне прискорення при криволінійному русі дорівнює нулю?

5.2 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Кінематика точки

Рух точки задається рівняннями $x=f_1(t)$ та $y=f_2(t)$ (табл. 5.1). Знайти рівняння траєкторії в координатній формі $y=f(x)$, визначити при $t_2=t_1$ (табл. 5.1) швидкість V_1 , прискорення a_1 точки і радіус кривизни ρ_1 у відповідній точці траєкторії.

Таблиця 5.1

Варіант	$x = f_1(t), м$	$y = f_2(t), м$	$t_1, с$
1	$3 \sin 2\pi t$	$6 \cos \pi t$	$1/6$
2	$3 \sin (\pi^2/3)$	$2 + \cos (\pi^2/3)$	1
3	$2 - \cos t^2$	$2 \sin t^2$	$\sqrt{\pi}/2$
4	$1 + 3 \cos \pi t$	$4 - 3 \sin \pi t$	$1/3$
5	$3t$	$-3/t$	3
6	$5 \cos (\pi/2)$	$-3 \sin (\pi/2)$	$0,5$
7	$3 \cos (0,5t^2) - 1$	-3	$\sqrt{\pi} / \sqrt{2}$
8	$\sin t$	$\sin(0,5t^2) + 2$	$\pi/3$
9	$2 \sin (\pi/3)$	$1 - \cos^2 t$	1
10	$2 + \cos t^2$	$5 \cos (\pi/3) - 2$	$\sqrt{\pi} / \sqrt{3}$
		$3 \sin t^2$	
11	$3 \cos t$	$4 \sin (2t)$	$\pi/3$
12	$1 + 3 \cos 2t$	$6 \sin t$	$\pi/3$
13	$2 \cos^2 t$	$1 + \sin t$	$\pi/3$
14	$4 + 5 \cos \pi t$	$3 + 2 \sin \pi t$	$\pi/6$
15	$\cos \pi t$	$3 \sin(0,5\pi t)$	$1/3$
16	$3 \sin \pi t$	$4 \cos (2\pi t)$	$1/3$
17	$4 \cos 2t$	$2 - 5 \sin 2t$	$\pi/6$
18	$5 \sin^2 \pi t$	$4 \cos \pi t$	$1/3$
19	$2 + 3 \sin 2\pi t$	$1 - 3 \cos 2\pi t$	$1/6$
20	$\cos \pi^2$	$4 - \sin \pi^2$	$1/2$
21	$2t + 2$	$2/(1+t)$	1
22	$4 - 3 \sin \pi t$	$\cos \pi t$	$1/3$
23	$6 - 2 \sin t^2$	$3 \cos t^2 + 1$	$\sqrt{\pi} / \sqrt{3}$
24	$4 \sin (\pi/3)$	$1 + 4 \cos (\pi/3)$	1
25	$5 - 3 \cos t$	$1 + 3 \sin t$	$\pi/3$
26	$4 - 5 \cos \pi t$	$5 \sin \pi t - 1$	$1/3$
27	$4 \sin (\pi^2)$	$3 \cos (\pi^2)$	$1/2$
28	$1 - 3 \cos \pi t$	$3 \sin \pi t + 2$	$1/3$
29	$5 \sin \pi t + 1$	$5 \cos \pi t$	$1/4$
30	$3t + 1$	$3/(3t+1)$	1

5.3 Приклад виконання завдання

Приклад 1. Точка рухається в площині xOy за законом:

$$\begin{aligned}x &= 5t^2 \text{ (м)}, \\ y &= 2t \text{ (м)}.\end{aligned}$$

Знайти: $y=f(x)$, V_1 , a_1 , ρ_1 при $t_1=0,5$ с.

Розв'язання

Нехай закон руху точки описаний рівняннями:

$$\begin{aligned}x &= 5t^2 \text{ (м)}, \\ y &= 2t \text{ (м)}.\end{aligned}$$

$$\text{Тоді: } \left. \begin{aligned}V_x &= \dot{x} = 10t \\ V_y &= \dot{y} = 2\end{aligned} \right\} V = \sqrt{(10t)^2 + 2^2} = \sqrt{100t^2 + 4},$$

$$\cos \alpha_V = \frac{10t}{\sqrt{100t^2 + 4}}; \cos \beta_V = \frac{2}{\sqrt{100t^2 + 4}}.$$

Нехай $t=0,5$ с:

Нехай $t=0,5$ с:

$$\text{а) } V_x = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ м / сек}, V_y = 2 \text{ м / сек}, V = 5,39 \text{ м / сек}$$

$$\cos \alpha_V = 0,928; \alpha_V = 21,8^\circ; \cos \beta_V = 0,371; \beta_V = 68,2^\circ, \text{ (рис. 5.2, а);}$$

$$\text{б) } \left. \begin{aligned}a_x &= \dot{V}_x = 10 \\ a_y &= \dot{V}_y = 0\end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned}a &= 10 \text{ м / сек}^2 \\ \cos \alpha_a &= 1; \alpha_a = 0\end{aligned} \right| \left. \begin{aligned}\cos \beta_a &= 0 \\ \beta_a &= 90^\circ\end{aligned} \right\} \text{ а)}$$

б)

Рисунок 5.2, б),

$$\begin{aligned}a_\tau &= \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} = \frac{5 \cdot 10}{5,39} = 9,276 \text{ м / с}^2, \\ a_n &= \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{10^2 - 9,276^2} = 3,754 \text{ м / с}^2,\end{aligned}$$

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{5,39^2}{3,754} = 7,74 \text{ м}.$$

Траєкторію можна побудувати графічно по точках, змінюючи час t за якимось кроком, і обчислюючи для кожного t координати x і y точок, що належать траєкторії.

Більш зручно, виключаючи параметр t , отримати рівняння траєкторії у формі: $y=f(x)$, чи $x=f(y)$. У нашому прикладі $t=y/2$, звідси $x=5\left(\frac{y}{2}\right)^2=1,25y^2$ - рівняння параболи (рис. 5.2).

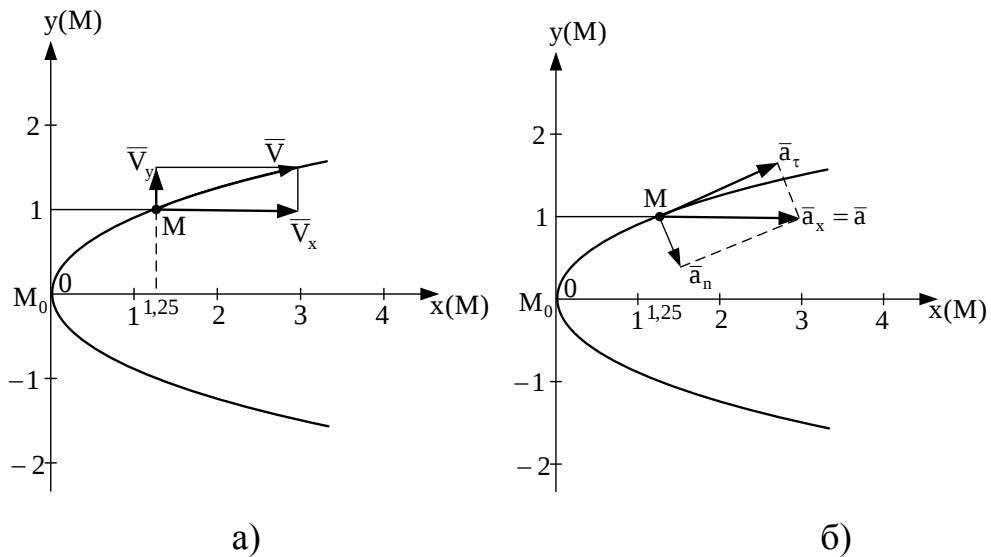


Рисунок 5.2

Розмітка траєкторії полягає у встановленні початку відліку. Масштаб і додатній напрямок можуть обиратися довільно. Звичайно рух точки починається у деякий заданий момент часу t_0 (частіш за все відсутність будь-яких додаткових міркувань покладає $t_0=0$).

Можливі й відмінні від нуля значення t_0 . Тоді при t_0 визначають положення точки M_0 з координатами $x_0=x(t_0)$ і $y_0=y(t_0)$ - рух матеріальної точки тепер починається з початку відліку.

У розглянутому прикладі: $x_0=0$, $y_0=0$ (точка рухається по верхній вітці параболи).

Якщо точка рухається вздовж траєкторії в постійному напрямку, то природно цей напрямок вважати додатним. Масштаб уздовж траєкторії можна обрати таким же, що і уздовж вихідних координатних осей Ox і Oy .

Відповідь: $x=1,25t^2$, $V_1=5,39$ м/с, $a_1=10$ м/с², $\rho_1=7,74$ м.

Приклад 2. Точка рухається в площині xOy за законом:

$$x = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6} t^2\right) + 2(\text{м}),$$

$$y = 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} t^2\right) - 3(\text{м}).$$

Знайти: $y=f(x)$, V_1 , a_1 , ρ_1 при $t_1=1$ с.

Розв'язання

Параметричні рівняння руху $x = f_1(t)$ та $y = f_2(t)$ запишемо у вигляді:

$$\frac{x-2}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right),$$

$$\frac{y+3}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right).$$

Враховуючи, що $\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) = 1$, з рівнянь руху отримаємо траєкторію руху точки в координатній формі:

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1.$$

Будуємо траєкторію руху точки і знаходимо положення точки на траєкторії при $t_1 = 1\text{с}$ (рис. 5.3).

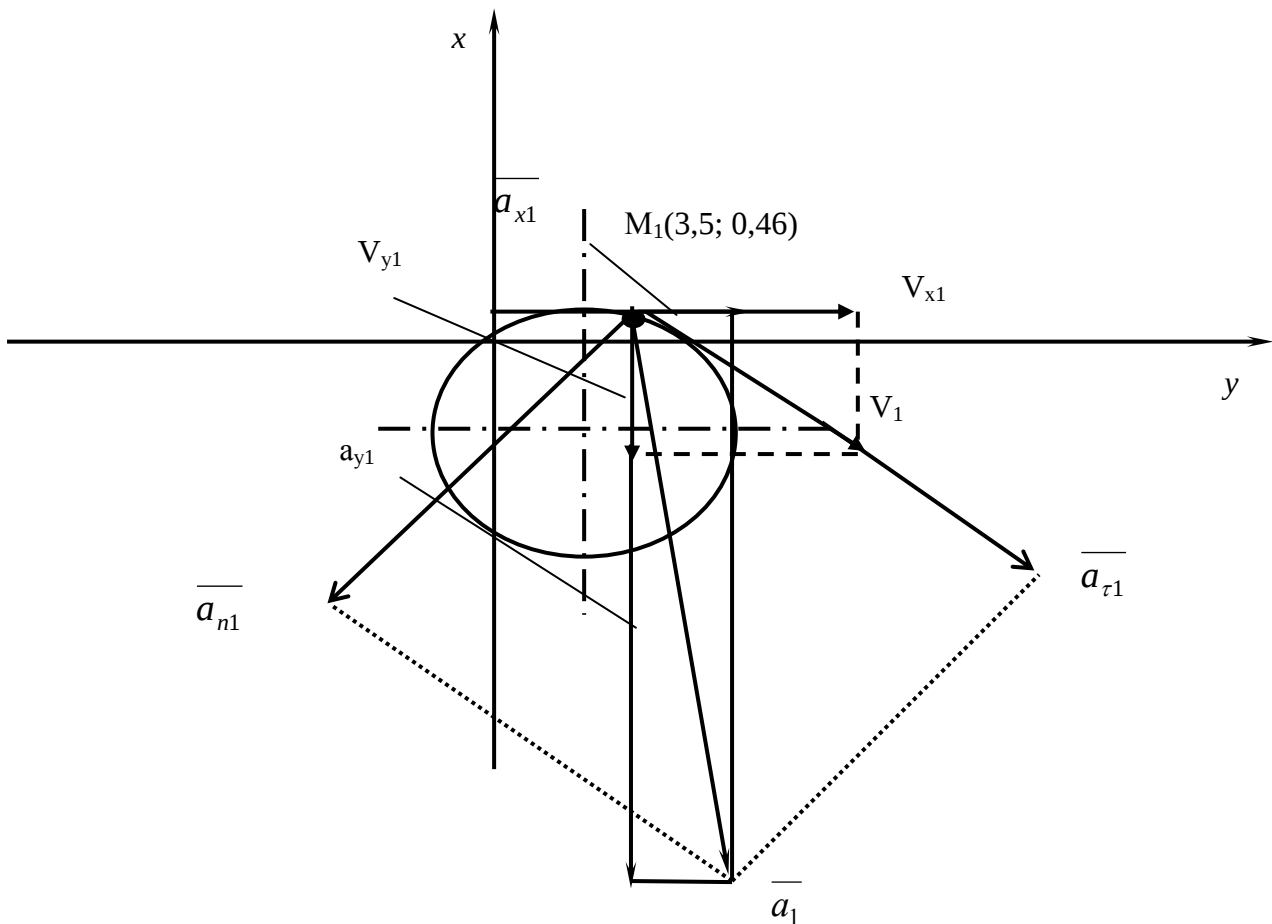


Рисунок 5.3

$$x_1 = 3 \sin \frac{\pi}{6} + 2 = 3,5,$$

$$y_2 = 4 \cos \frac{\pi}{6} - 3 = 0,46.$$

Знаходимо швидкість точки.

$$V_X = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = \pi + \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) \text{ м/с},$$

$$V_Y = \dot{y} = -\frac{4}{3}\pi t \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) \text{ м/с},$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

при $t_1=1$ $V_{x1} = \pi \cos \frac{\pi}{6} = 2,72 \text{ м/с},$

$$V_{y1} = -\frac{4}{3}\pi \sin \frac{\pi}{6} = -2,09 \text{ м/с}.$$

$$V_1 = \sqrt{2,72^2 + 2,09^2} = 3,43 \text{ м/с}.$$

Показуємо V_{x1} , V_{y2} , V_1 (рис. 5.3) у вибраному масштабі швидкостей $\mu_v=1 \text{ см} : 1 \text{ м/с}$.

Визначаємо прискорення точки

$$a_X = \frac{dV_X}{dt} = \ddot{x} = \pi \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) - \frac{\pi^2 t^2}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right),$$

$$a_Y = \ddot{y} = -\frac{4}{3}\pi \sin\left(\frac{\pi}{6}t^2\right) - \frac{4}{9}\pi^2 t^2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t^2\right),$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2},$$

$$a_{x1} = \pi \cos \frac{\pi}{6} - \frac{\pi^2}{3} \sin \frac{\pi}{6} = 1,08 \text{ м/с}^2.$$

при $t_1=1 \text{ с}$ $a_{y1} = -\frac{4}{3}\pi \sin \frac{\pi}{6} - \frac{4}{9}\pi^2 \cos \frac{\pi}{6} = -5,88 \text{ м/с}^2,$

$$a_1 = \sqrt{1,08^2 + 5,88^2} = 5,98 \text{ м/с}^2.$$

У масштабі прискорень $\mu_a=1 \text{ см} : 1 \text{ м/с}^2$ показуємо a_{x1} , a_{y2} , a_1 (рис. 5.3).

Радіус кривизни траєкторії точки при $t_1=1 \text{ с}$

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}},$$

де a_{n1} - проекція прискорення точки на нормальну вісь

$$a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2},$$

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y}}{V}.$$

при $t_1=1c$

$$\rho_1 = \frac{v_1^2}{a_{n1}},$$
$$a_{n1} = \sqrt{5,98^2 - 4,44^2} = 4,0 \text{ м} / \text{с}^2,$$
$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}} = \frac{3,43^2}{4} = 2,94 \text{ м}.$$

Відповідь: $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$, $V_1=3,43 \text{ м/с}$, $a_1=5,98 \text{ м/с}^2$, $\rho_1=2,94 \text{ м}$.

6 ПОСТУПАЛЬНИЙ ТА ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХИ ТІЛА

6.1 Теоретичні відомості і методичні вказівки

6.1.1 Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називають такий рух твердого тіла (рис. 6.1), при якому будь-яка пряма AB , що проведена в тілі, залишається під час руху паралельною до свого первісного положення.

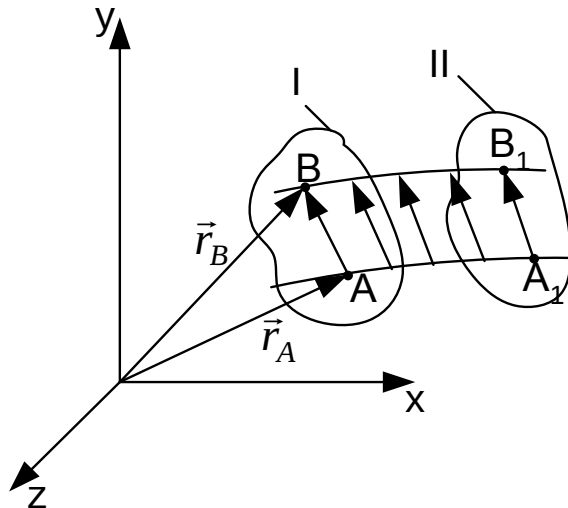


Рисунок 6.1.

При поступальному русі тіла з положення I в положення II $AB=A_1B_1=const$ (тверде тіло) (рис. 6.1):

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B; \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B.$$

Швидкості та прискорення всіх точок тіла при поступальному русі є однаковими. Траєкторії також однакові, але паралельно зміщені. Закон руху задається законом руху будь-якої точки. Швидкість $\vec{V}$ і прискорення $\vec{a}$ визначаються так само, як і для ізольованої точки. Таким чином, вивчення поступального руху твердого тіла зводиться до визначення руху будь-якої його точки, тобто до задачі кінематики точки.

6.1.2 Обертальний рух твердого тіла

Обертальним рухом твердого тіла називають такий рух тіла (Рисунок 6.2), при якому є пряма, жорстко зв'язана з тілом (її називають віссю обертання), що залишається весь час нерухомою.

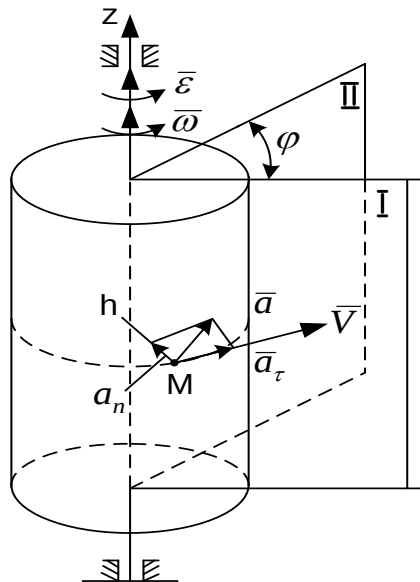


Рисунок 6.2.

При обертанні твердого тіла навколо осі z його положення визначається кутом повороту φ . Кут φ вважається додатним, якщо перехід від площини I , нерухомо фіксованої у просторі, до площини II , незмінно зв'язаної з тілом, відбувається проти напрямку руху годинникової стрілки, а якщо за напрямком годинникової стрілки – від'ємним.

Закон руху тіла $\varphi = \varphi(t)$ називається кінематичним рівнянням обертального руху тіла навколо нерухомої осі.

Головні кінематичні характеристики обертального руху твердого тіла: кут повороту φ , кутова швидкість

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad [\text{сек}^{-1}],$$

кутове прискорення у даний момент часу

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \quad [\text{сек}^{-2}].$$

Отже, кутова швидкість дорівнює першій похідній за часом від кута повороту φ . У техніці кутову швидкість часто задають числом n обертів за хвилину. Зв'язок між ω і n визначається формулою

$$\omega = \frac{2 \times \pi \times n}{60} = \frac{\pi \times n}{30}.$$

Якщо при обертанні тіла кутова швидкість є сталою ($\omega = \text{const}$), то обертання тіла називається рівномірним. При цьому кут повороту змінюється пропорційно часу:

$$\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0,$$

де φ_0 - початковий кут повороту.

Це рівняння називається рівнянням рівномірного обертання тіла навколо нерухомої осі.

Кутове прискорення тіла ε характеризує швидкість зміни кутової швидкості ω за часом.

Кутове прискорення ε в даний момент часу дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній за часом від кута повороту.

Кутову швидкість і кутове прискорення можна зобразити у вигляді векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ (Рисунок 6.2).

Вектором $\vec{\omega}$ називають вектор, який чисельно дорівнює абсолютному значенню похідній кута повороту за часом: $(|\omega| = \frac{d\varphi}{dt})$ і спрямований уздовж осі обертання у той бік, звідки обертання тіла видно таким, що відбувається проти годинникової стрілки.

Вектор кутового прискорення тіла знаходиться з рівняння

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Якщо напрямок вектора $\vec{\varepsilon}$ співпадає з напрямком вектора $\vec{\omega}$, то обертання прискорене і протилежне $\vec{\omega}$ при сповільненому русі.

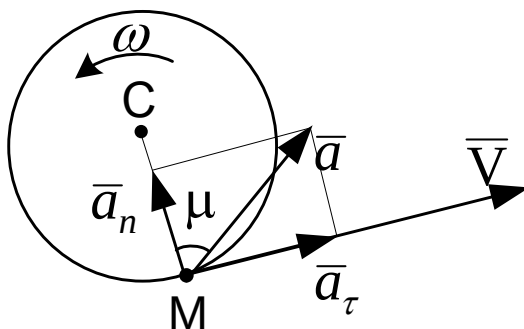


Рисунок 6.3.

Траєкторією будь-якої точки M тіла, яке обертається, є коло з центром C на осі обертання (Рисунок 6.3). Швидкість $\vec{V}$ будь-якої точки M тіла, яке обертається, спрямована перпендикулярно до прямої, яка з'єднує її з віссю обертання, у бік обертання тіла і за модулем дорівнює

$$v = \omega \cdot h,$$

де h – відстань від точки M до осі обертання, або радіус MC кола, яке описує точка M .

Прискорення точки M розкладається на тангенціальну (обертальну) $\overline{a_\tau}$ і нормальну (доцентрову) $\overline{a_n}$ складові, які за модулем дорівнюють

$$a_\tau = \varepsilon \cdot h; a_n = \omega^2 \cdot h; a = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot h.$$

Відхилення вектора повного прискорення $\overline{a}$ від радіуса, описуваного точкою кола, визначається кутом μ :

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_\tau}{a_n} = \varepsilon / \omega^2.$$

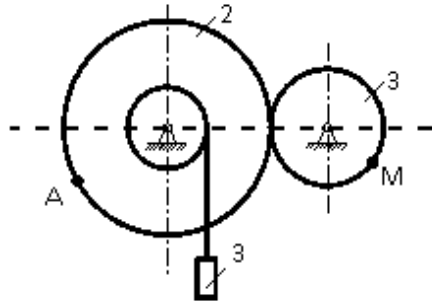
Вектор $\overline{a_\tau}$ спрямований за дотичною до траєкторії у бік (обертання) руху при прискореному обертанні тіла і в протилежний – при сповільненому. Проекція прискорення точки на нормальну вісь $\overline{a_n}$ спрямована за радіусом MC до осі обертання, тобто у бік угнутості траєкторії точки M .

Питання для самоперевірки знань
та контролю засвоєння матеріалу

1. Який рух твердого тіла називається поступальним.
2. Чи можна звести кінематику поступального руху до кінематики точки?
3. Який рух твердого тіла називається обертальним?
4. Як визначити кутову швидкість та кутове прискорення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
5. Який вигляд мають траєкторії точок твердого тіла, що обертається відносно нерухомої осі?
6. Як визначити швидкість та прискорення точок твердого тіла, яке обертається відносно нерухомої осі?

6.2 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи.
Поступальний та обертальний рухи тіла

Задача № 1

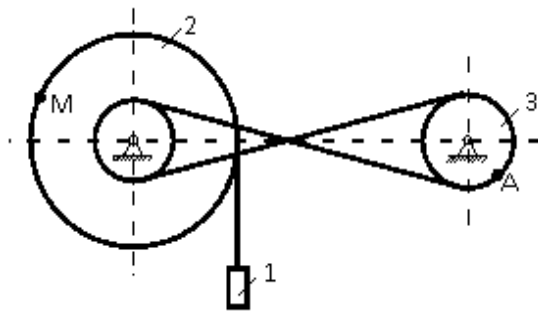


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,2 \cdot t^3 + 0,3 \text{ (м)}.$$

Визначити при $t_1 = 1$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,2$ м.

Задача № 2

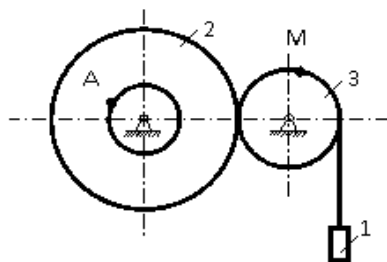


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,5 \sin\left(\frac{\pi}{3} t^2\right) \text{ (м)}.$$

Визначити при $t_1 = 1$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,3$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,2$ м.

Задача № 3

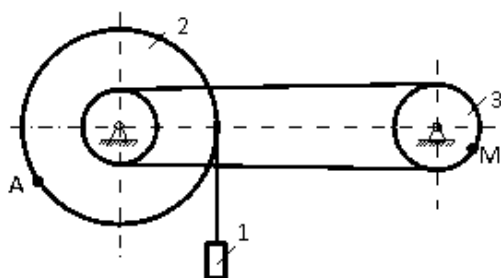


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,1 \cdot t^6 + 0,2 \text{ (м)}.$$

Визначити при $t_1 = 1$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,2$ м.

Задача № 4

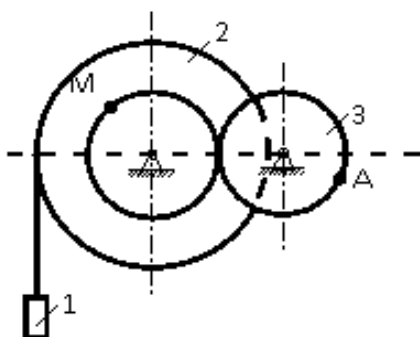


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} t \right) \text{ (м).}$$

Визначити при $t_1 = 4/3$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,2$ м.

Задача № 5

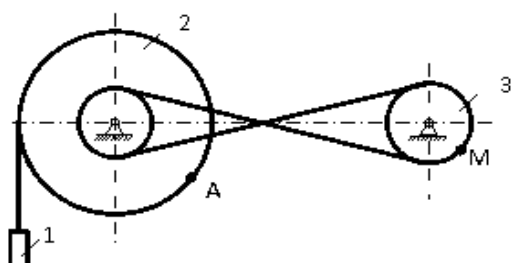


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,6 \cos \left(\frac{\pi}{3} t \right) \text{ (м).}$$

Визначити при $t_1 = 1$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $R_3 = 0,3$ м.

Задача № 6

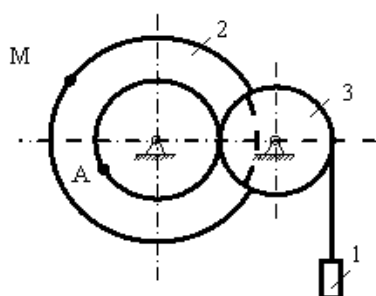


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,4 \cdot t^3 + 0,2 \text{ (м).}$$

Визначити при $t_1 = 2$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,2$ м.

Задача № 7

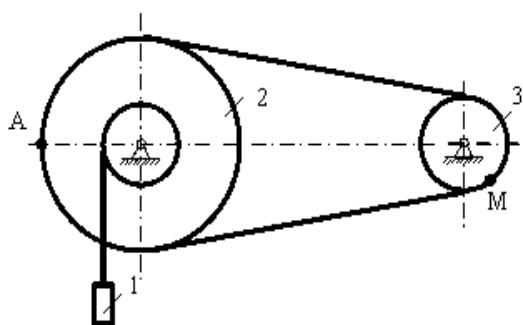


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,6 \cos \left(\frac{\pi}{3} t \right) \text{ (м).}$$

Визначити при $t_1 = 1$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,3$ м; $R_3 = 0,2$ м.

Задача № 8

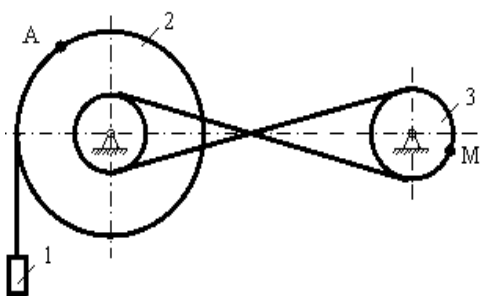


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,5 \cdot t^4 + 0,1 \text{ (м)}.$$

Визначити при $t_1 = 1$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,2$ м.

Задача № 9

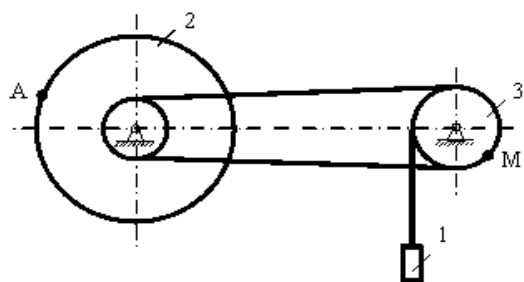


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} t \right) \text{ (м)}.$$

Визначити при $t_1 = 0,5$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,2$ м.

Задача № 10

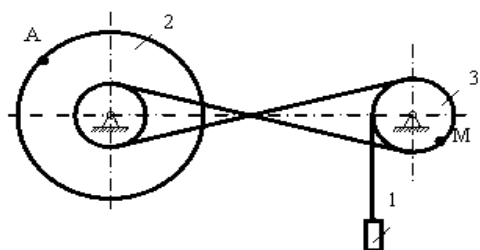


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,5 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} t^2 \right) \text{ (м)}.$$

Визначити при $t_1 = 1$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,2$ м.

Задача № 11

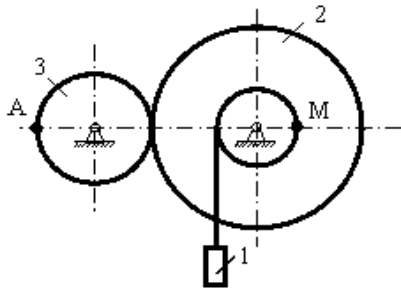


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,6 \cdot t^4 + 0,3 \text{ (м)}.$$

Визначити при $t_1 = 2$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,2$ м.

Задача № 12

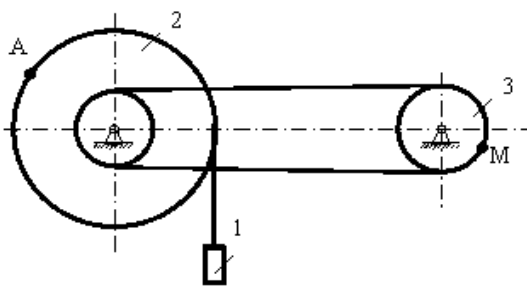


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} t \right) \text{ (м).}$$

Визначити при $t_1 = 1$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,2$ м.

Задача № 13

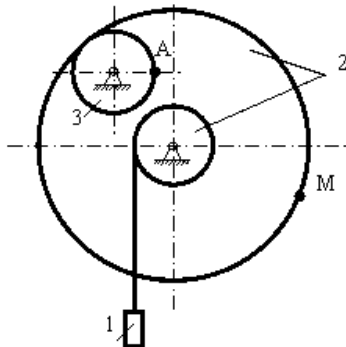


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 4 \cos \frac{\pi}{3} t^2 \text{ (м).}$$

Визначити при $t_1 = 2$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,2$ м.

Задача № 14

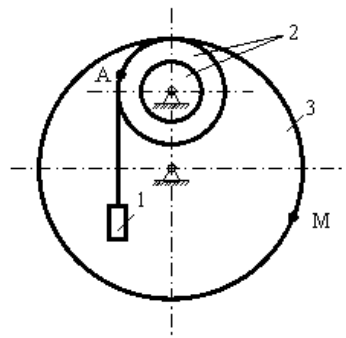


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 5 \sin \pi t^2 \text{ (м).}$$

Визначити при $t_1 = 1/(6^{0,5})$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,15$ м; $R_3 = 0,1$ м.

Задача № 15



Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,3 \cdot t^2 + 0,1 \text{ (м).}$$

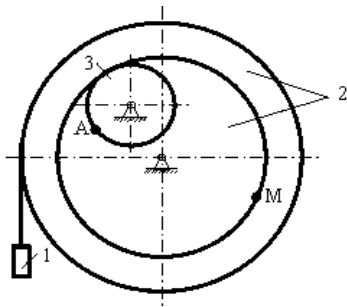
Визначити при $t_1 = 2$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,2$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,5$ м.

Задача № 16

Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} t \right) \text{ (м).}$$

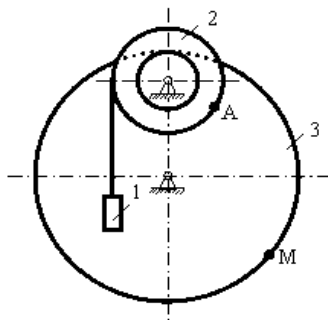
Визначити при $t_1 = 1$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,5$ м; $r_2 = 0,4$ м; $R_3 = 0,1$ м.

**Задача № 17**

Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = t^3 + 0,1 \text{ (м).}$$

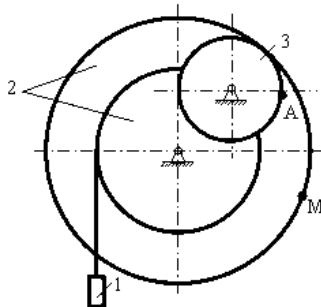
Визначити при $t_1 = 2$ с швидкість і прискорення точок М та А якщо: $R_2 = 0,2$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,4$ м.

**Задача № 18**

Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,6 \cos \left(\frac{\pi}{3} t \right) \text{ (м).}$$

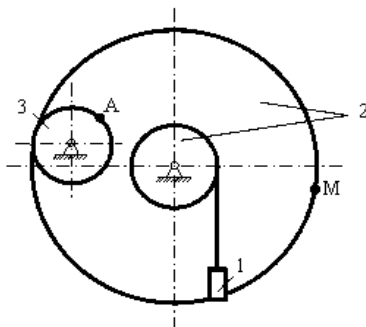
Визначити при $t_1 = 1$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,3$ м; $r_2 = 0,2$ м; $R_3 = 0,1$ м.

**Задача № 19**

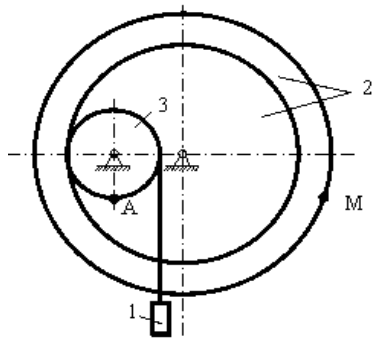
Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,3 \cdot t^2 + 0,1 \text{ (м).}$$

Визначити при $t_1 = 1$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,5$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,15$ м.



Задача № 20

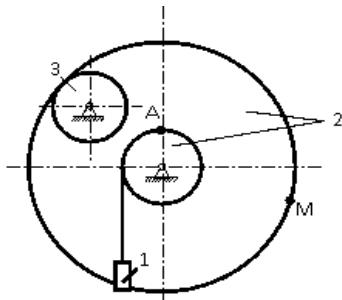


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 5 \sin \pi^2 t^2 \text{ (м).}$$

Визначити при $t_1 = 0,5$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,6$ м; $r_2 = 0,5$ м; $R_3 = 0,2$ м.

Задача № 21

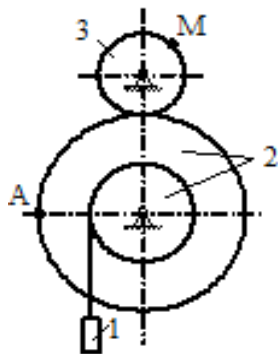


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,1 \cdot t^4 + 0,5 \text{ (м).}$$

Визначити при $t_1 = 1$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,5$ м; $r_2 = 0,1$ м; $R_3 = 0,15$ м.

Задача № 22

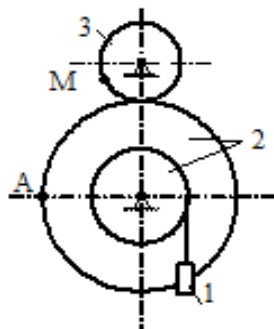


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,6 \cos \left(\frac{\pi}{3} t \right) \text{ (м).}$$

Визначити при $t_1 = 4$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,3$ м; $R_3 = 0,2$ м.

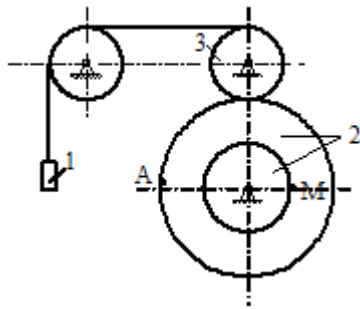
Задача № 23



Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} t \right) \text{ (м).}$$

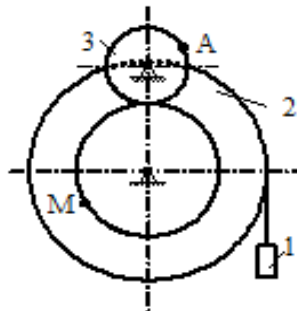
Визначити при $t_1 = 0,5$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,3$ м; $r_2 = 0,15$ м; $R_3 = 0,1$ м.

Задача № 24

Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 4 \cos \frac{\pi}{3} t^2 \text{ (м).}$$

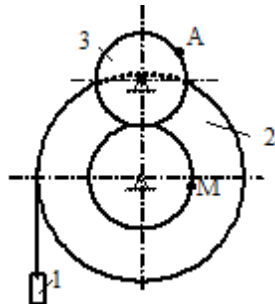
Визначити при $t_1 = 2$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $R_3 = 0,1$ м.

Задача № 25

Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 5 \sin \pi t^2 \text{ (м).}$$

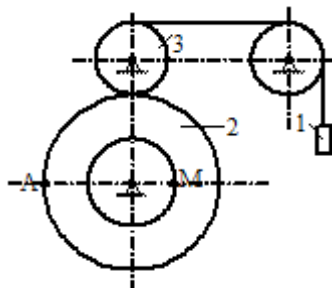
Визначити при $t_1 = 1/(3^{0,5})$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,3$ м; $R_3 = 0,2$ м.

Задача № 26

Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} t \right) \text{ (м).}$$

Визначити при $t_1 = 1$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $R_3 = 0,3$ м.

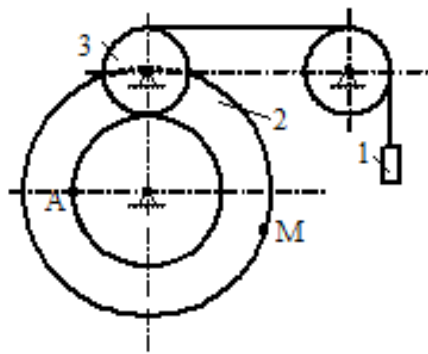
Задача № 27

Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,6 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} t \right) \text{ (м).}$$

Визначити при $t_1 = 4$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $R_3 = 0,1$ м.

Задача № 28

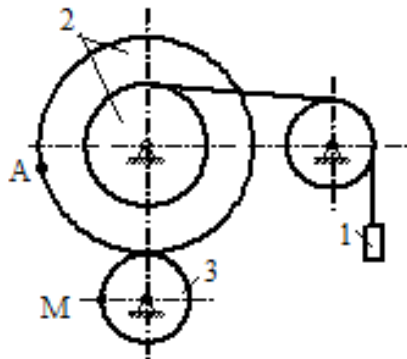


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 5 \sin \pi^2 \text{ (м)}.$$

Визначити при $t_1 = 0,5$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,3$ м; $R_3 = 0,2$ м.

Задача № 29

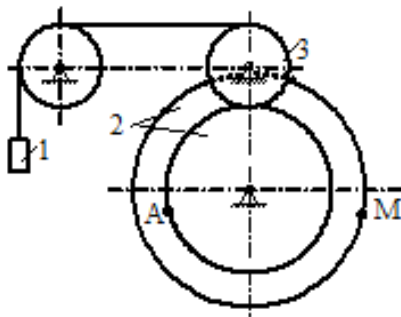


Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,3 \cdot t^4 + 0,7 \text{ (м)}.$$

Визначити при $t_1 = 2$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,2$ м; $R_3 = 0,1$ м.

Задача № 30



Тіло 1 рухається вниз за законом

$$x = 0,5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} t^2\right) \text{ (м)}.$$

Визначити при $t_1 = 1$ с швидкість і прискорення точок М та А, якщо: $R_2 = 0,4$ м; $r_2 = 0,3$ м; $R_3 = 0,2$ м.

6.3 Приклад виконання завдання

Для механізму (рис. 6.4) знайти швидкість і прискорення точок A і M при $t_1=1\text{с}$ якщо тіло 2 рухається за законом $\varphi_2=8t^3-3t^2$ ($R_2=0,1\text{м}$; $R_1=0,4\text{м}$; $r_1=0,15\text{м}$).

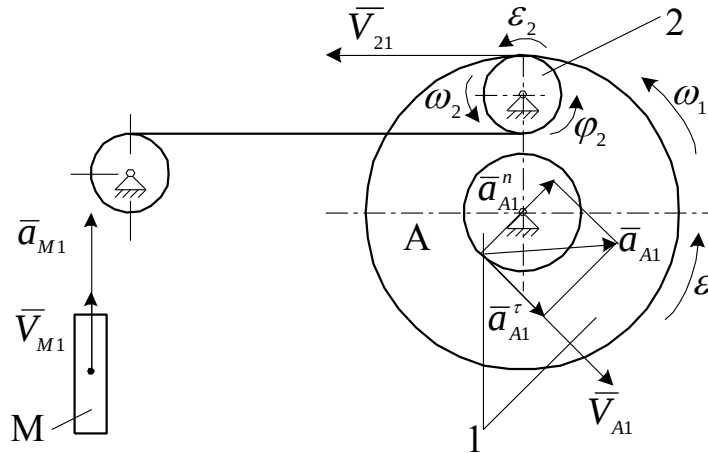


Рисунок 6.4

Розв'язання

Знайдемо кутову швидкість та кутове прискорення тіла 2

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = (24t^2 - 6t) \frac{1}{\text{с}};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = (48t - 6) \frac{1}{\text{с}^2}.$$

при $t_1=1\text{с}$

$$\omega_{21} = 24 - 6 = 18 \frac{1}{\text{с}},$$

$$\varepsilon_{21} = 48 - 6 = 42 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Знайдемо швидкість V_{21} точок контакту тіл 2 та 1

$$V_{21} = \omega_2 \cdot R_2 = \omega_1 \cdot R_1,$$

$$\omega_1 = \omega_2 \frac{R_2}{R_1} = 0,25\omega_2.$$

Визначимо швидкість точки A

$$V_A = \omega_1 \cdot r_1 = 0,25 \cdot 0,15 \cdot \omega_2 = 0,0375 \cdot \omega_2.$$

Прискорення точки A

$$\overline{a_A} = \overline{a_A^n} + \overline{a_A^\tau},$$

$$a_A^n = \frac{V_A^2}{r_1} = \omega_1^2 r_1 = 9,375 \cdot \omega_2^2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$a_A^\tau = \frac{dV_A}{dt} = \varepsilon_1 \cdot r_1 = 0,0375 \cdot \varepsilon_2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

де

$$\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0,25 \cdot \varepsilon_2.$$

Величина прискорення точки A

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^n\right)^2 + \left(a_A^\tau\right)^2}.$$

при $t_1 = 1 \text{ с}$; $V_{A1} = 0,0375 \cdot \omega_{21} = 0,0375 \cdot 18 = 0,675 \frac{\text{м}}{\text{с}},$

$$a_{A1}^n = 9,375 \cdot \omega_{21}^2 \cdot 10^{-3} = 9,375 \cdot 18^2 \cdot 10^{-3} = 3,038 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$a_{A1}^\tau = 0,0375 \cdot \varepsilon_{21} = 0,0375 \cdot 42 = 1,575 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$a_{A1} = \sqrt{3,038^2 + 1,575^2} = 3,42 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Визначимо швидкість та прискорення тіла M , що переміщується поступально

$$V_M = V_{21} = \omega_2 \cdot R_2 = 0,1 \cdot \omega_2,$$

$$a_M = \frac{dV_M}{dt} = 0,1 \cdot \varepsilon_2.$$

при $t_1 = 1 \text{ с}$ $V_{M1} = 0,1 \cdot \omega_{21} = 1,8 \frac{\text{м}}{\text{с}},$

$$a_{M1} = 0,1 \cdot \varepsilon_{21} = 4,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Показуємо на (Рисунок 6.4) вектори $\overline{V_{A1}}, \overline{a_{A1}^n}, \overline{a_{A1}^\tau}, \overline{a_{A1}}, \overline{V_{M1}}, \overline{a_{M1}}.$

Відповідь: $V_A = 0,675 \text{ м/с}$, $a_A = 3,42 \text{ м/с}^2$, $V_M = 1,8 \text{ м/с}$, $a_M = 4,2 \text{ м/с}^2$.

7 ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ (ПЛОСКИЙ) РУХ ТІЛА

7.1 Теоретичні відомості і методичні вказівки

Рух твердого тіла у просторі називають плоскопаралельним (плоским), якщо всі точки тіла рухаються у площинах, паралельних деякій нерухомій площині (площина ковзання).

7.1.1 Швидкості точок плоскої фігури

Швидкість будь-якої точки B плоскої фігури складається зі швидкості полюса A і швидкості точки B при обертанні плоскої фігури навколо полюса A , яка перпендикулярна до AB .

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}; \quad \vec{V}_{BA} \perp BA.$$

Швидкість $\vec{V}_{BA}$ за величиною дорівнює

$$V_{BA} = |\omega| \cdot BA = \omega_{BA} \cdot h = \omega_{BA} \cdot l_{AB},$$

де ω - алгебраїчна кутова швидкість плоскої фігури, що не залежить від вибору полюса.

Вектор $\vec{V}_{BA}$ спрямований перпендикулярно до AB проти напрямку годинникової стрілки навколо полюса A , якщо $\omega > 0$, і навпаки, якщо $\omega < 0$.

Теорема про проекції швидкостей двох точок тіла на вісь, що проходить через ці точки.

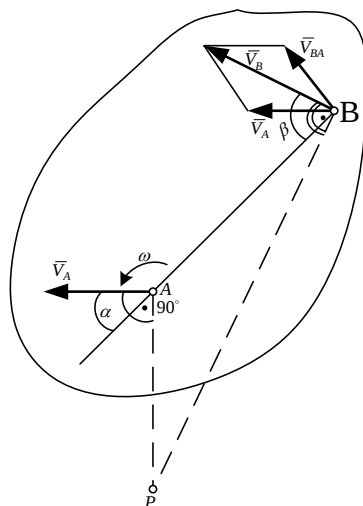


Рисунок 7.1

Проекції швидкостей двох точок фігури на вісь, що проходить через ці точки, дорівнюють одна одній (рис. 7.1).

Проекція $\overline{V}_A$ на вісь AB дорівнює проекції $\overline{V}_B$ на вісь AB , тобто

$$V_A \cdot \cos \alpha = V_B \cdot \cos \beta,$$

де α і β - кути між $\overline{V}_A$ і $\overline{V}_B$ і напрямком осі AB відповідно.

За теоремою Ейлера-Шаля плоский рух вважається як обертальний навколо миттєвого центра обертань, або центра швидкостей.

Полюсом є миттєвий центр швидкостей (МЦШ), тобто така точка P рухомої площини, жорстко скріпленої з фігурою, швидкість якої в певний момент часу дорівнює нулю $\overline{V}_P = 0$.

Тоді $V_B = V_{BP} = |\omega| \cdot BP$, тобто швидкість будь-якої точки фігури дорівнює за величиною добутку модуля кутової швидкості фігури на відстань від цієї точки до МЦШ та спрямована перпендикулярно до цього відрізка ($\overline{V}_B \perp BP$) проти напрямку годинникової стрілки, якщо $\omega > 0$ і навпаки.

7.1.2 Прискорення точок плоскої фігури

Прискорення будь-якої точки плоскої фігури геометрично складається з прискорення полюса і прискорення точки в обертальному русі тіла навколо полюса, що складається з доцентрового (нормального) і обертального (тангенціального) прискорень (Рисунок 7.2).

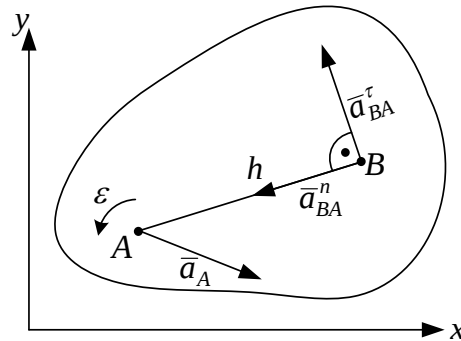


Рисунок 7.2

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}, \quad \bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau,$$

де $a_{BA}^n = \omega^2 BA$ - спрямовано уздовж AB від точки B до точки A ;
 $a_{BA}^\tau = |\epsilon| \cdot h = \epsilon \cdot l_{BA}$ - завжди спрямоване перпендикулярно до AB , що з'єднує точку B з полюсом A (рис. 7.3), у бік кутового прискорення ϵ .

$$a_{BA} = BA \cdot \sqrt{\omega^4 + \epsilon^2}.$$

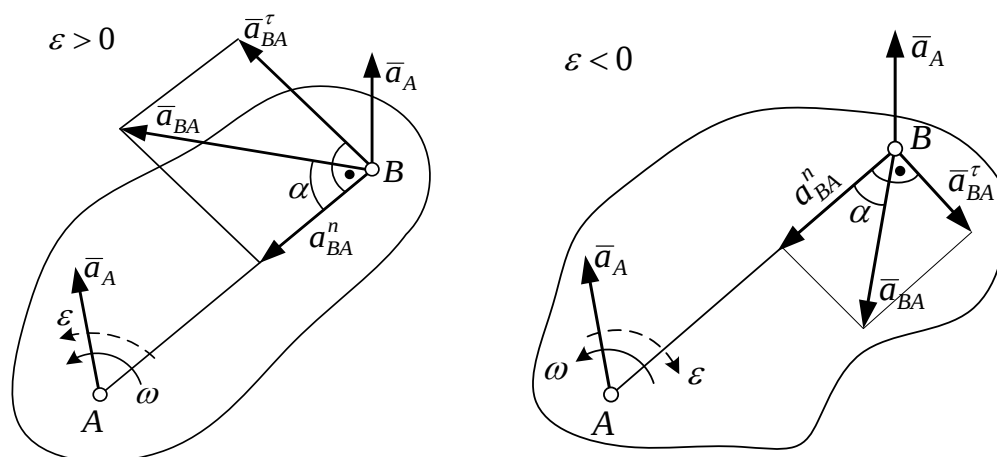


Рисунок 7.3

Таким чином, прискорення $\bar{a}_B$ будь-якої точки B плоскої фігури може бути знайдено як геометрична сума трьох прискорень: прискорення полюса $\bar{a}_A$, доцентрового прискорення $\bar{a}_{BA}^n$ і обертового прискорення $\bar{a}_{BA}^\tau$ точки B навколо полюса A . Вектор $\bar{a}_{BA}$ має напрямок під кутом α до прямої BA . При цьому

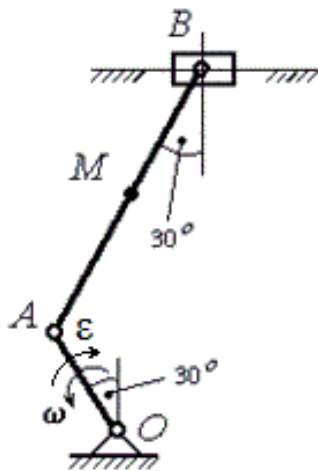
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}; \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Питання для самоперевірки знань
та контролю засвоєння матеріалу

1. Який рух твердого тіла називають плоскопаралельним або плоским?
2. Як визначається швидкість будь-якої точки плоскої фігури?
3. Яку точку плоскої фігури називають миттєвим центром швидкості?
4. Як знаходиться миттєвий центр швидкостей тіла при плоскому русі?
5. Як визначається прискорення будь-якої точки плоскої фігури?
6. Як визначається кутова швидкість ланки плоскої фігури?
7. Як визначається кутове прискорення плоскої фігури?

7.2 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Плоский рух тіла

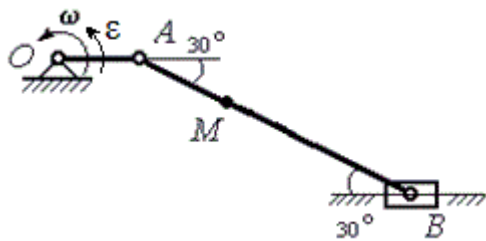
Задача № 1



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 10$ см, $\epsilon = 10$ с⁻², $AM = MB = 20$ см, $\omega = 5$ с⁻¹.

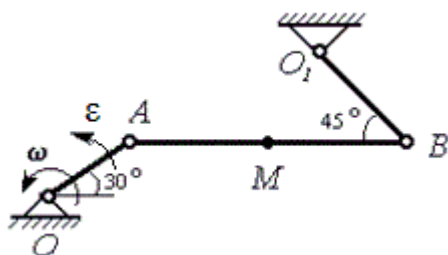
Задача № 2



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 10$ см, $AB = 45$ см, $AM = 15$ см, $\omega = 5$ с⁻¹, $\epsilon = 20$ с⁻².

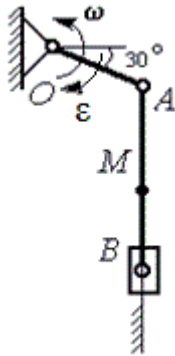
Задача № 3



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 5$ см, $O_1B = 15$ см, $AM = MB = 20$ см, $\omega = 2$ с⁻¹, $\epsilon = 6$ с⁻².

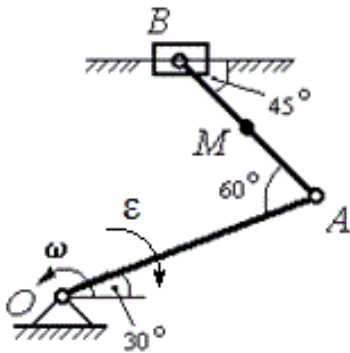
Задача № 4



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ε .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 15$ см, $AM = 20$ см, $MB = 25$ см, $\omega = 2$ с⁻¹, $\varepsilon = 5$ с⁻².

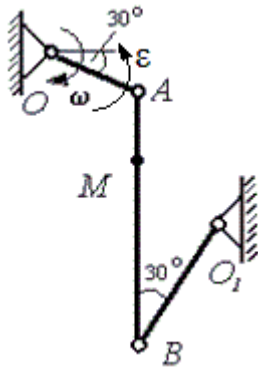
Задача № 5



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ε .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 50$ см, $\varepsilon = 20$ с⁻², $AM = MB = 20$ см, $\omega = 3$ с⁻¹.

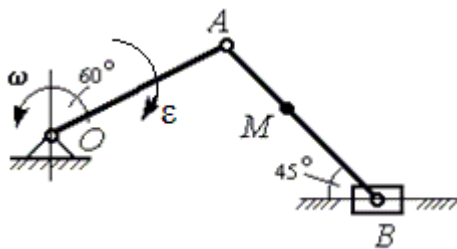
Задача № 6



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ε .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 15$ см, $O_1B = 20$ см, $AM = 10$ см, $MB = 30$ см, $\omega = 6$ с⁻¹, $\varepsilon = 5$ с⁻².

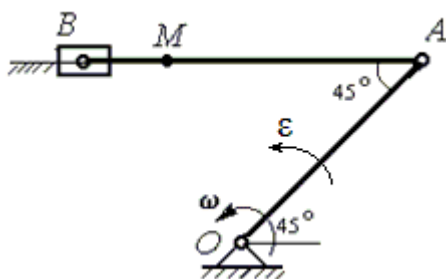
Задача № 7



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ε .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 40$ см, $AM = 15$ см, $MB = 25$ см, $\omega = 4$ с⁻¹, $\varepsilon = 10$ с⁻².

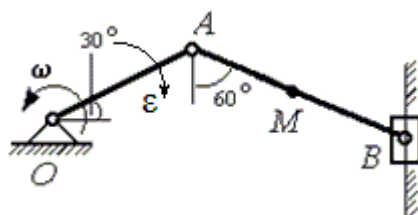
Задача № 8



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 80$ см, $AM = 100$ см, $MB = 25$ см, $\omega = 2$ с⁻¹, $\epsilon = 5$ с⁻².

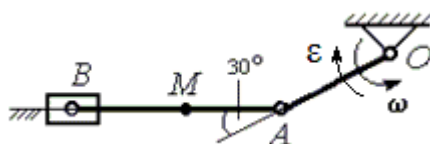
Задача № 9



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 20$ см, $AB = 60$ см, $AM = 15$ см, $\omega = 4$ с⁻¹, $\epsilon = 15$ с⁻².

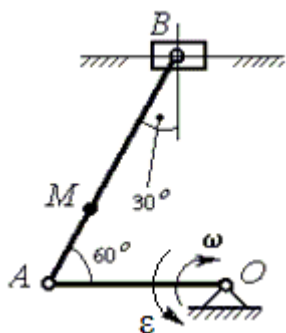
Задача № 10



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 30$ см, $AB = 40$ см, $AM = 20$ см, $\omega = 10$ с⁻¹, $\epsilon = 10$ с⁻².

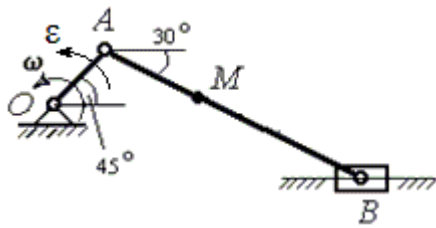
Задача № 11



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 60$ см, $AB = 100$ см, $AM = 20$ см, $\omega = 5$ с⁻¹, $\epsilon = 10$ с⁻².

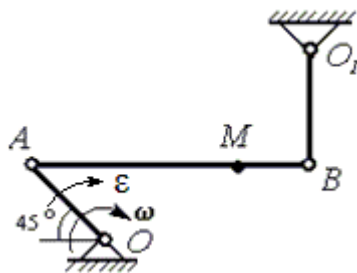
Задача № 12



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ε .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 10$ см, $AM = AB/3$, $AB = 60$ см, $\omega = 5$ с⁻¹, $\varepsilon = 5$ с⁻².

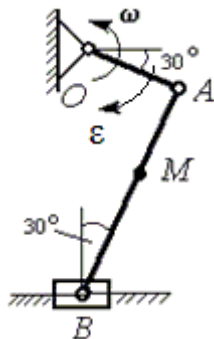
Задача № 13



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ε .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 20$ см, $AB = 60$ см, $O_1B = 30$ см, $AM = 40$ см, $\omega = 4$ с⁻¹, $\varepsilon = 10$ с⁻².

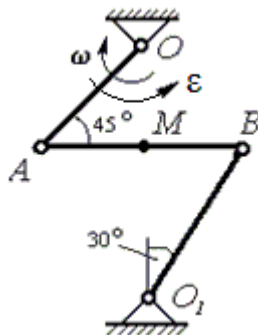
Задача № 14



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ε .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 10$ см, $AB = 80$ см, $AM = 30$ см, $\omega = 5$ с⁻¹, $\varepsilon = 5$ с⁻².

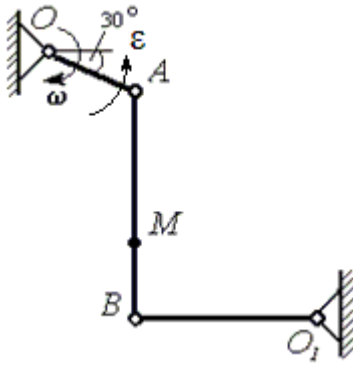
Задача № 15



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ε .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $\varepsilon = 5$ с⁻², $OA = 20$ см, $AB = 15$ см, $O_1B = 30$ см, $MB = 15$ см, $\omega = 10$ с⁻¹.

Задача № 16

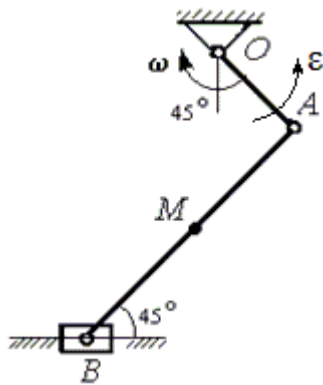


Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ε .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо:

$OA = 15$ см, $O_1B = 30$ см, $AM = 20$ см, $AB = 40$ см, $\omega = 3$ с⁻¹, $\varepsilon = 10$ с⁻².

Задача № 17

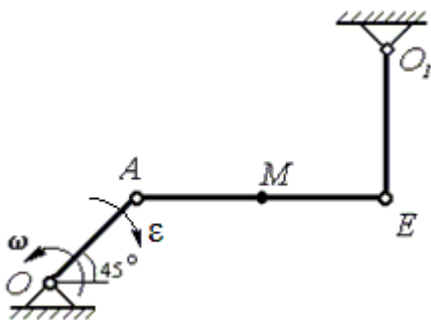


Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ε .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо:

$OA = 20$ см, $AM = MB = 30$ см, $\omega = 8$ с⁻¹, $\varepsilon = 10$ с⁻².

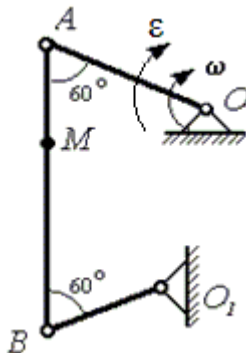
Задача № 18



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ε .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 20$ см, $O_1B = 25$ см, $AM = MB = 15$ см, $\omega = 4$ с⁻¹, $\varepsilon = 8$ с⁻².

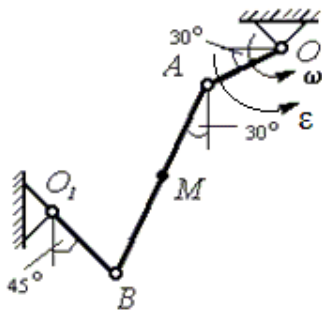
Задача № 19



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ε .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 40$ см, $O_1B = 15$ см, $AM = AB/3 = 10$ см, $\omega = 5$ с⁻¹, $\varepsilon = 6$ с⁻².

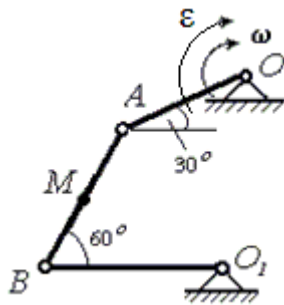
Задача № 20



Ведуча ланка OA плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок B і M для заданого положення механізму, якщо: $OA = 15$ см, $O_1B = 20$ см, $AM = MB = 25$ см, $\omega = 5$ с⁻¹, $\epsilon = 8$ с⁻².

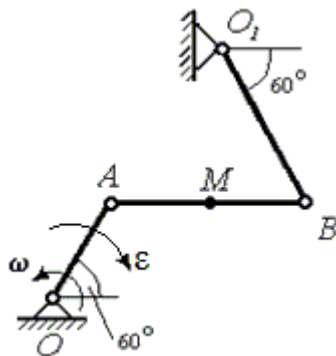
Задача № 21



Ведуча ланка OA плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок B і M для заданого положення механізму, якщо: $OA = 25$ см, $O_1B = 40$ см, $AM = MB = 10$ см, $\omega = 2$ с⁻¹, $\epsilon = 3$ с⁻².

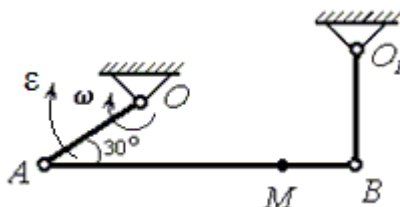
Задача № 22



Ведуча ланка OA плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок B і M для заданого положення механізму, якщо: $OA = 25$ см, $O_1B = 40$ см, $AM = MB = 10$ см, $\omega = 8$ с⁻¹, $\epsilon = 6$ с⁻².

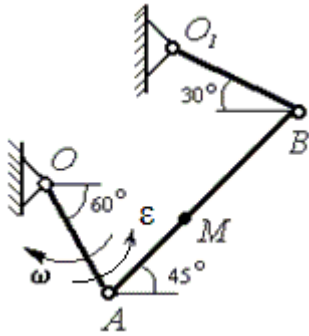
Задача № 23



Ведуча ланка OA плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок B і M для заданого положення механізму, якщо: $OA = 15$ см, $O_1B = 25$ см, $AM = 50$ см, $MB = 10$ см, $\omega = 4$ с⁻¹, $\epsilon = 5$ с⁻².

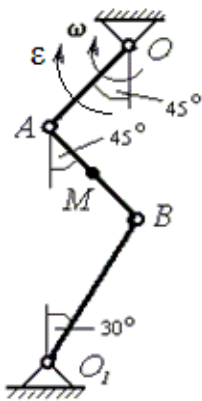
Задача № 24



Ведуча ланка OA плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок B і M для заданого положення механізму, якщо: $OA = 15$ см, $AM = 50$ см, $MB = 10$ см, $\omega = 5$ с⁻¹, $\epsilon = 10$ с⁻².

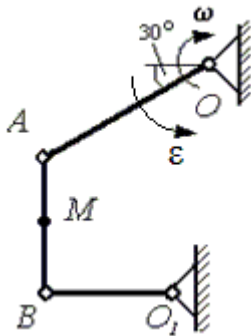
Задача № 25



Ведуча ланка OA плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок B і M для заданого положення механізму, якщо: $OA = 15$ см, $O_1B = 40$ см, $AM = MB = 10$ см, $\omega = 5$ с⁻¹, $\epsilon = 2$ с⁻².

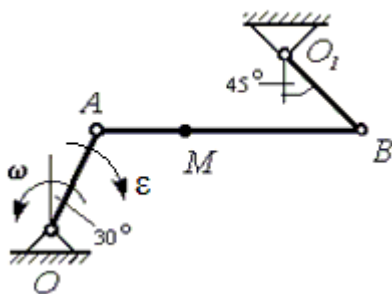
Задача № 26



Ведуча ланка OA плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок B і M для заданого положення механізму, якщо: $OA = 60$ см, $O_1B = 40$ см, $AM = MB = 10$ см, $\omega = 3$ с⁻¹, $\epsilon = 15$ с⁻².

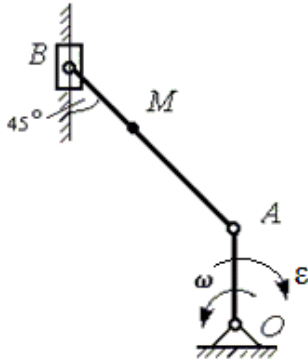
Задача № 27



Ведуча ланка OA плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок B і M для заданого положення механізму, якщо: $OA = 20$ см, $O_1B = 20$ см, $AM = 10$ см, $MB = 30$ см, $\omega = 6$ с⁻¹, $\epsilon = 4$ с⁻².

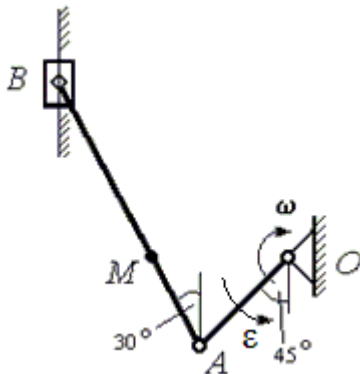
Задача № 28



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 15$ см, $AB = 60$ см, $BM = 20$ см, $\omega = 10$ с⁻¹, $\epsilon = 5$ с⁻².

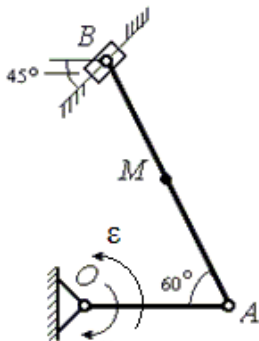
Задача № 29



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 15$ см, $AB = 80$ см, $AM = 20$ см, $\omega = 6$ с⁻¹, $\epsilon = 20$ с⁻².

Задача № 30



Ведуча ланка ОА плоского механізму в даний момент часу має кутову швидкість ω і кутове прискорення ϵ .

Визначити швидкості та прискорення точок В і М для заданого положення механізму, якщо: $OA = 45$ см, $AM = 30$ см, $BM = 30$ см, $\omega = 8$ с⁻¹, $\epsilon = 5$ с⁻².

7.3 Приклад виконання завдання

Кривошипно-шатунний механізм (рис. 7.4) складається з кривошипа $OA=40$ см, шатуна AB і повзуна B . Точка C належить ланці AB і $AC=20$ см.

У даний момент часу, в даному положенні механізму кутова швидкість кривошипа $\omega_{OA}=5$ рад/с, кутове прискорення $\epsilon_{OA}=10$ рад/с².

Визначити для заданого положення механізму швидкості й прискорення точок A , B , C ланки AB , а також її кутову швидкість ω_{AB} і кутове прискорення ϵ_{AB} .

Розв'язання

1. Ланка OA виконує обертальний рух навколо нерухомої точки O . Тоді

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 5 \cdot 40 = 200 \text{ см / с}.$$

Вектор $\vec{v}_A \perp OA$ і спрямований у бік обертання OA , у бік обертання ω .

Повзун B виконує поступальний рух, тому напрямок швидкості точки B , яка також належить ланці AB , відомий і спрямований уздовж траєкторії руху точки B .

Шатун AB рухається плоскопаралельно з миттєвим центром швидкості в точці P . Точка P є точкою перетину перпендикулярів до напрямку швидкостей у точках A і B .

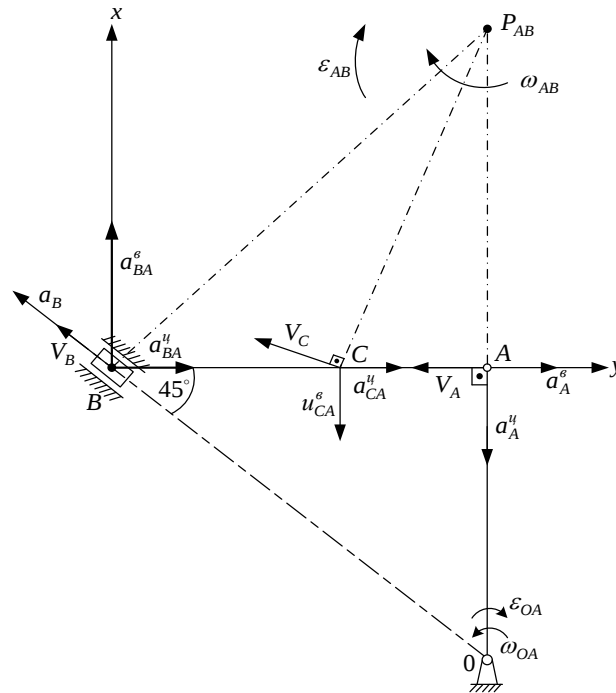


Рисунок 7.4

Кутова швидкість ланки AB

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{200}{40} = 5 \text{ рад / с},$$

де $AP=AB=OA$, тому що $\angle BOA = \angle OBA = \angle APB = \angle 45^\circ$

Кутова швидкість ланки AB спрямована відповідно до того, як вектор $\vec{v}_A$ обертається навколо МЦШ.

Швидкості точок B і C ланки AB :

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB} = 5 \cdot \sqrt{AB^2 + AP^2} = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot AB = 282,8 \text{ см / с},$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB} = 5 \cdot \sqrt{AP^2 + AC^2} = 5 \cdot \sqrt{40^2 + 20^2} = 223,6 \text{ см / с}.$$

Відповідно $\vec{v}_B \perp BP_{AB}$, $V_C \perp CP_{AB}$ і спрямовані у бік обертання ω_{AB} .

2. Визнаємо прискорення точок A , B , C ланки AB .

Прискорення точки A по належності її ланці OA , що виконує обертальний рух навколо нерухомої осі, складається з геометричної суми обертального і доцентрового прискорень:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{ob} + \bar{a}_A^{\partial\omega},$$

де $a_A^{\partial\omega} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 5^2 \cdot 40 = 1000 \text{ см/сек}^2$ - доцентрове прискорення точки A , спрямоване уздовж AO від A до O ,

$a_A^{\ddot{\alpha}} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 10 \cdot 40 = 400 \text{ м/сек}^2$ - обертальне прискорення точки A , спрямоване відповідно до напрямку кутового прискорення ε_{OA} і вектор $\bar{a}_A^{ob} \perp \bar{a}_A^{\partial\omega}$.

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\ddot{\alpha}} + \bar{a}_A^{ob}; a_A = \sqrt{1000^2 + 400^2} = 1077 \text{ см/сек}^2.$$

Припустимо, що повзун B рухається прискорено. Тоді напрямок прискорення $\bar{a}_B$ співпадає з напрямком швидкості $\bar{v}_B$. Визначаємо полюсом точку A .

Прискорення точки B визначається за формулою

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} = \bar{a}_A^{\partial\omega} + \bar{a}_A^{ob} + \bar{a}_{BA}^{\partial\omega} + \bar{a}_{BA}^{ob},$$

де $a_{BA}^{\partial\omega} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 5^2 \cdot 40 = 1000 \text{ см/сек}^2$ - доцентрове прискорення точки B відносно точки A , спрямоване від точки B до точки A , уздовж AB

$a_{BA}^{ob} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ - обертальне прискорення точки B відносно точки A , спрямоване перпендикулярно до AB і $\bar{a}_{BA}^{ob} \perp \bar{a}_{BA}^{\partial\omega}$, відоме за напрямком. При цьому припускаємо, що кутове прискорення ланки AB ε_{AB} співпадає за напрямком обертання з кутовою швидкістю ω_{AB} .

Обираємо систему координат xBy (рис. 7.4) і проектуємо геометричне рівняння прискорення точки B , $\bar{a}_B$ на осі координат:

$$Y: -a_B \cdot \cos 45^\circ = a_A^{ob} + a_{BA}^{\partial\omega},$$

$$X: a_B \cdot \cos 45^\circ = -a_A^{\partial\omega} + a_{BA}^{ob}.$$

У цій системі двох алгебраїчних рівнянь є два невідомі прискорення a_B точки B і прискорення a_{BA}^{ob} .

Обчислюємо їх:

$$a_B = -\frac{a_A^{ob} + a_{BA}^{\partial\omega}}{\cos 45^\circ} = -\frac{400 + 1000}{0,707} = -1980 \text{ см/сек}^2,$$

$$a_{BA}^{ob} = a_B \cdot \cos 45^\circ + a_A^{\partial\omega} = -1980 \cdot 0,707 + 1000 = -400 \text{ см/сек}^2.$$

Знак мінус у знайдених відповідях означає, що насправді вектори прискорень $\bar{a}_B$ і $\bar{a}_{BA}^{об}$ спрямовані у бік, протилежний зазначеному на рисунку, тобто прискорення точки B протилежне напрямку швидкості $\bar{v}_B$.

Кутове прискорення ланки AB :

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{об}}{AB} = -\frac{400}{40} = -10 \text{ рад} / \text{с}^2.$$

Знак мінус означає, що кутове прискорення ланки AB протилежне кутовій швидкості ω_{AB} за напрямком обертання.

Прискорення точки C ланки AB визначаємо за цією ж методикою:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^{\partial\omega\omega} + \bar{a}_A^{об} + \bar{a}_{CA}^{\partial\omega\omega} + \bar{a}_{CA}^{об}.$$

$$a_{CA}^{\partial\omega\omega} = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 5^2 \cdot 20 = 500 \text{ см} / \text{с}^2 \text{ і напрямлено вздовж } AC \text{ від } C \text{ до } A.$$

$$a_{CA}^{об} = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 10 \cdot 20 = 200 \text{ см} / \text{с}^2 \text{ і спрямоване у бік дійсного спрямування } \varepsilon_{AB} \text{ таким чином, щоб } \bar{a}_{CA}^{об} \perp AC.$$

Геометричне рівняння з визначення $\bar{a}_C$ проектуємо на осі y і x :

$$Y: a_{Cy} = a_A^{об} + a_{BA}^{\partial\omega\omega} = 400 + 500 = 900 \text{ см} / \text{с}^2,$$

$$X: a_{Cx} = a_A^{\partial\omega\omega} + a_{CA}^{об} = 1000 + 200 = 1200 \text{ см} / \text{с}^2,$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{Cy} + \bar{a}_{Cx} - \text{діагональ прямокутника, побудованого на складових } \bar{a}_{Cx} \text{ і } \bar{a}_{By}.$$

$$a_C = \sqrt{a_{Cy}^2 + a_{Cx}^2} = \sqrt{900^2 + 1200^2} = 1500 \text{ см} / \text{с}^2.$$

$$\text{Відповідь: } V_A = 200 \text{ см/с}, a_A = 1077 \text{ см/с}^2, \omega_{AB} = 5 \text{ рад/с}, V_B = 282,8 \text{ см/с}, a_B = 1980 \text{ см/с}^2, V_C = 223,6 \text{ см/с}, a_C = 1500 \text{ см/с}^2, \varepsilon_{AB} = 10 \text{ рад/с}^2.$$

8 ДИНАМІКА ТОЧКИ

8.1 Теоретичні відомості і методичні вказівки

Сила – це міра механічного прояву фізичного впливу на матеріальні тіла. Сила, як векторна величина, підпорядкована всім законам векторного числення.

Основні види сил: сила тяжіння ($\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, або $m = P/g$); сила тертя ($\vec{F} = f \cdot \vec{N}$); сила пружності ($\vec{F} = c \cdot x$, де c - коефіцієнт жорсткості $[H/M]$); сила в'язкого тертя ($\vec{R} = \mu \cdot \vec{V}$), сили аеродинамічного (гідродинамічного) опору.

Одиницею виміру сили є H (Ньютон) – це сила, яка надає масі в 1 кілограм прискорення в $1m/c^2$. $\left(1H = 1 \frac{kg \cdot m}{c^2}\right)$.

Незалежним первинним поняттям в теоретичній механіці є маса. Під масою розуміють інертність тіла. З іншого боку, масу можна визначити як кількість речовин в тілі, що пропорційна його вазі (“гравітаційна маса”). У теоретичній механіці приймається, що маса не змінюється за часом, її величина не залежить ні від швидкості точки, ні від її положення у просторі.

Матеріальна точка – це матеріальне тіло (тіло, що має масу), розмірами якого при вивченні його руху можна знехтувати.

Закони динаміки.

Перший закон Ньютона (закон інерції).

Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, доки вплив з боку інших сил не виведе її з цього стану.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки).

Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює силі, що діє на цю точку. Прискорення матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і має однаковий з нею напрям:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

Третій закон Ньютона (закон рівності дії та протидії)

Сили взаємодії двох матеріальних точок або двох тіл (дія і протидія) рівні за величиною, напрямлені в протилежні боки і мають загальну лінію дії.

Четвертий закон Ньютона (принцип суперпозиції)

Прискорення матеріальної точки, що виникає при одночасній дії декількох сил, дорівнює векторній сумі прискорень, які надають точці окремі сили.

Дві основні задачі динаміки:

Перша або пряма основна задача динаміки: знаючи закон руху точки і її масу, визначити сили, що викликають цей рух.

Якщо рух матеріальної точки масою m задано координатним способом $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$, то:

1. Диференціюючи двічі ці співвідношення за часом, одержимо проекції прискорень на координатні осі:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2};$$

2. Використовуючи динамічні рівняння руху матеріальної точки в координатній формі, визначимо проекції сили:

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2}; \quad F_y = m \frac{d^2y}{dt^2}; \quad F_z = m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

3. Знаходимо модуль рівнодійної сили $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

4. Напрямок рівнодійної сили визначимо за направленими косинусами

$$\cos(\bar{F}, OX) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\bar{F}, OY) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\bar{F}, OZ) = \frac{F_z}{F},$$

Друга або обернена задача динаміки: визначити кінематичні рівняння руху точки, якщо відомі її маса m , прикладені до неї сили $\bar{F}$ і початкові умови руху.

Розв'язання другої задачі динаміки зводиться до інтегрування диференційних рівнянь руху матеріальної точки.

1. Складання динамічних рівнянь руху матеріальної точки згідно з умовами задачі (спочатку знаходять проекції сил F на осі координат (F_x, F_y, F_z)).

2. Інтегрування одержаної системи диференційних рівнянь.

3. Визначення значень сталих інтегрування. Сталі інтегрування визначають з початкових умов. Початкові умови – це величини, що визначають положення точки і проекції вектора швидкості в початковий момент часу ($t=t_0$)

4. Знаходження закону руху: $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$.

Питання для самоперевірки знань
та контролю засвоєння матеріалу

1. Які закони лежать в основі динаміки?

2. Що називають матеріальною точкою?
3. Що таке сила?
4. Основні види сил.
5. Дати означення маси, що прийнята в механіці.
6. Як отримують диференціальні рівняння руху вільної та невільної матеріальної точки?
7. У чому суть першої та другої задач динаміки?

8.2 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Динаміка точки

Точка масою m (рис. 8.1) рухається від точки A до точки B (парні варіанти) або на ділянці BC (непарні варіанти).

На початку руху (точки A – парні варіанти; точки B – непарні варіанти;) матеріальна точка має швидкість V_0 . Під час руху, на ділянці AB на точку діє постійна сила P та вага точки, а на ділянці BC точка рухається під дією ваги точки. Дані для розрахунку та величини, що потрібно знайти наведені в таблиці 8.1.

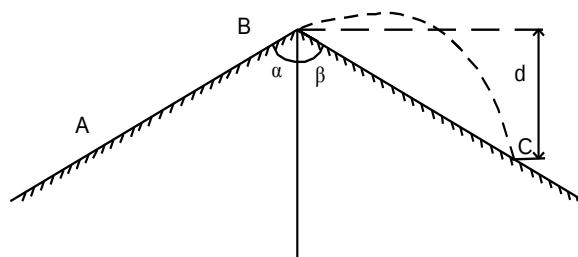


Рисунок 8.1

Таблиця 8.1

Варіант	m , кг	V_0 , м/с	α , град	β , град	d , м	AB , м	P_x , Н	Знайти
1	4	2	30	30	-	-	-	V_c
2	3	0.5	105	-	-	4	15	V_B
3	2	4	60	-	4	-	-	β
4	1	13	70	-	-	5	10	V_B
5	1	2	105	60	-	-	-	V_C
6	2	3	120	-	-	6	15	V_B
7	3	10	60	-	5	-	-	V_C
8	4	19	75	-	-	7	20	V_B
9	5	8	105	30	-	-	-	d
10	1	7	75	-	-	8	15	V_B
11	2	6	60	-	6	-	-	V_C
12	3	5	150	-	-	9	25	V_B

Продовження таблиці 8.1

13	4	4	30	90	-	-	-	V_C
14	5	3	120	-	-	10	15	V_B
15	1	10	30	-	7	-	-	β
16	2	6	105	-	-	11	10	V_B
17	3	7	60	30	-	-	-	V_C
18	4	8	150	-	-	12	25	V_B
19	5	9	30	-	8	-	-	β
20	1	10	75	-	-	13	15	V_B
21	2	2	60	45	-	-	-	V_C
22	3	3	105	-	-	14	10	V_B
23	4	5	30	-	9	-	-	β
24	5	6	120	-	-	15	25	V_B
25	1	7	60	45	-	-	-	V_C
26	2	8	150	-	-	16	20	V_B
27	3	9	30	-	10	-	-	β
28	4	10	135	-	-	17	25	V_B
29	5	11	60	45	-	-	-	V_C
30	6	12	105	-	-	18	15	V_B

8.3 Приклад виконання завдання

Приклад 1. Вантаж масою m підіймається по шорсткій похилій площині (рис. 8.2), що складає кут $\alpha=30^\circ$ з горизонтом. В початковий момент швидкість вантажу дорівнювала $v_0=15$ м/с. Коефіцієнт тертя $f=0,1$. Який шлях пройде вантаж до зупинки? За який час вантаж пройде цей шлях?

Розв'язання

Для дослідження руху вантажу запишемо диференціальне рівняння невірного вантажу в проекціях на вісь x .

$$m\ddot{x} = \Sigma F_x \quad (8.1)$$

Вантаж переміщується під дією ваги P , нормальної складової N та сили тертя $F_{тр}$ шорсткої поверхні.

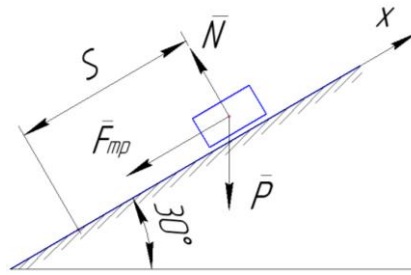


Рисунок 8.2

Враховуючи сили, що прикладені до вантажу (рис. 8.2), рівняння (8.1) запишеться в вигляді:

$$m\ddot{x} = -P \sin 30^0 - F_{\text{тр}} \quad (8.2)$$

Вага вантажу біля поверхні Землі.

$$P = mg \quad (8.3)$$

На підставі закону Амонтона-Кулона при критичній рівновазі вантажу отримаємо:

$$F_{\text{тр}} = f N \quad (8.4)$$

Так як вантаж рухається вздовж осі x , тоді:

$$N = P \cos 30^0 \quad (8.5)$$

Підставимо формули (8.3), (8.4) та (8.5) в диференціальне рівняння (8.2)

$$m\ddot{x} = -mg \sin 30^0 - fmg \cos 30^0; m \neq 0 \quad (8.6)$$

$$\ddot{x} = -g(\sin 30^0 + f \cos 30^0) \quad (8.7)$$

$$\ddot{x} = -9,8 \left(\frac{1}{2} + 0,1 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -5,75 \quad (8.8)$$

$$\ddot{x} = -5,75 \quad (8.9)$$

2) Інтегруємо диференційне рівняння (8.9) двічі:

$$\dot{x} = -5,75t + C_1 \quad (8.10)$$

$$x = -5,75 \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \quad (8.11)$$

3) Для визначення постійних інтегрування в рівняннях (8.10) та (8.11) скористаємось початковими умовами: при $t=0$; $\dot{x}_0=15\text{м/с}$; $x_0=0$.

Отже $C_1=\dot{x}_0$; $C_2=x_0$; $C_1=15$; $C_2=0$, тоді

$$\dot{x} = -5,75t + 15. \quad (8.12)$$

$$x = -5,75 \frac{t^2}{2} + 15t + 0. \quad (8.13)$$

4) Для моменту τ , коли вантаж зупиниться, $\dot{x}=0$ $x=S$, тоді

$$0 = -5,75\tau + 15. \quad (8.14)$$

$$S = -5,75 \frac{\tau^2}{2} + 15\tau. \quad (8.15)$$

З формули (8.14) знаходимо τ :

$$\tau = 15 / 5,75 = 2,61\text{с}. \quad (8.16)$$

Підставимо значення τ (8.16) в рівняння (8.15) і отримаємо шлях, який пройде вантаж до зупинки

$$S = -5,75 \frac{2,61^2}{2} + 15 \cdot 2,61 = 19,57\text{м}.$$

Відповідь: $\tau = 2,61\text{с}$; $S = 19,57\text{м}$.

Приклад 2. Матеріальна точка m рухається під дією сили $\vec{F}$ на ділянці AB (рис. 8.3). Знайти час τ руху точки та відстань DC , якщо: $m=5$ кг, $V_A=3$ м/с, $F=30\text{Н}$, $d=4$ м, $AB=11\text{м}$.

Розв'язання

Точка на ділянці AB рухається під дією сили ваги P , постійної сили F реакції N гладенької поверхні. Запишемо диференціальне рівняння руху точки в проекціях на вісь η .

$$\begin{aligned} m\ddot{\eta} &= F + P\sin 15^\circ, \\ \ddot{\eta} &= \frac{F}{m} + g\sin 15^\circ. \end{aligned}$$

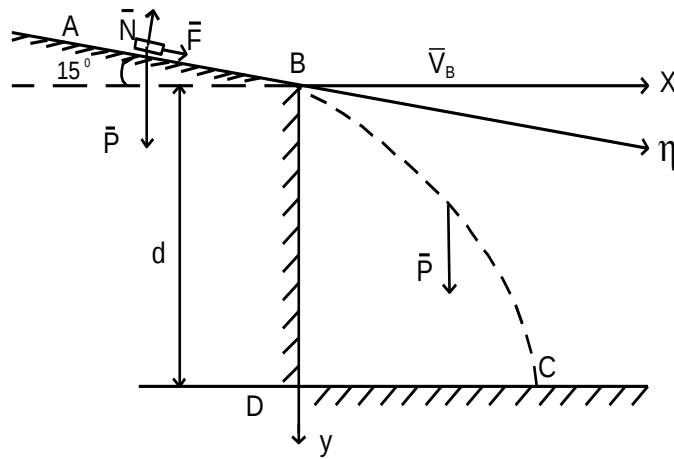


Рисунок 8.3

Початкові умови руху точки: при $t=0$; $\eta=V_A$; $\dot{\eta}=0$.

Граничні умови: при $t=\tau$ с; $\eta=V_B$; $\dot{\eta}=AB$.

Інтегруємо диференціальне рівняння руху точки, враховуючі початкові та граничні умови руху точки.

$$\frac{d\dot{\eta}}{dt} = \frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ,$$

$$\dot{\eta} d\eta = \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ \right) \int_0^t dt,$$

$$\int_{V_0}^{\dot{\eta}} \dot{\eta} - V_0 = \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ \right) t,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = V_A + \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ \right) t,$$

$$\int_0^{AB} d\eta = \int_0^\tau V_A + \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ \right) t \cdot dt,$$

$$AB = V_A \cdot \tau + \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ \right) \frac{\tau^2}{2},$$

або

$$4,27 \cdot \tau^2 + 3\tau - 11 = 0,$$

Звідки:

$$\tau_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 11 \cdot 4,27}}{2 \cdot 4,27} = \frac{-3 \pm 14}{8,57}.$$

Так як $\tau \geq 0$, то час руху точки на ділянці AB: $\tau = 1,28$ с.

Визначимо швидкість точки в пункті B .

$$V_B = V_A + \left(\frac{F}{m} + g \cdot \sin 15^\circ\right) \cdot \tau = 3 + \left(\frac{30}{6} + 9.81 \cdot 0.2588\right) \cdot 1.28,$$

$$V_B = 19.93 \text{ м/с}.$$

Розглянемо рух точки на ділянці BC (рис. 8.3).

Запишемо диференціальні рівняння руху точки в проекціях на осі x та y

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = P.$$

Так як точка має масу, то:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = g. \quad (8.17)$$

Початкові умови руху точки: при $t=0$;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_B \cdot \cos 15^\circ; \\ \dot{y} &= V_B \cdot \sin 15^\circ; \\ x &= 0, y = 0. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Граничні умови: при $t = t_1$; $y = d$; $x = DC$.

Інтегруємо друге диференціальне рівняння системи (8.17).

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{y}}{dt} &= g; \quad \int_{V_B \cdot \sin 15^\circ}^{\dot{y}} d\dot{y} = g \int_0^t dt; \\ y &= V_B \cdot \sin 15^\circ + gt; \\ \frac{dy}{dt} &= V_B \cdot \sin 15^\circ + g; \\ \int_0^d dy &= \int_0^{t_1} V_B \cdot \sin 15^\circ \cdot dt + \int_0^{t_1} g \cdot dt; \\ d &= V_B \cdot \sin 15^\circ \cdot t_1 + g \frac{t_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Підставляючи дані, отримаємо:

$$4.95 t_1^2 + 5.158 t_1 - 4 = 0.$$

$$\text{Тоді } t_{12} = \frac{-5.18 \pm \sqrt{5.18^2 + 4 \cdot 4.95}}{2 \cdot 4.905}; \text{ Звідки } t_1 = 0.52 \text{ с}.$$

З першого диференціального рівняння системи (8.17) $\ddot{x} = 0$, та початкових умов маємо: $\dot{x} = V_B \cdot \cos 15^\circ = 19.25 \text{ м/с}.$

Другий раз інтегруємо рівняння $\ddot{x} = 0$, враховуючи початкові (8.18) та граничні умови руху точки на ділянці BC (рис. 8.3).

$$\frac{dx}{dt} = 19.25,$$

$$\int_0^{BC} dx = 19.25 \int_0^{t_1} dt,$$

$$BC = 19.25 \cdot 0.52 = 10 \text{ м}.$$

Відповідь: $\tau = 0,52 \text{ с.}$, $BC = 10 \text{ м.}$

9 МЕТОД КІНЕТОСТАТИКИ

9.1 Теоретичні відомості і методичні вказівки

9.1.1 Принцип Д'Аламбера

Розглянуті вище рівняння руху матеріальних об'єктів (матеріальних точок) виходять безпосередньо з законів Галілея-Ньютона.

Але є багато таких інженерних задач динаміки, розв'язання яких методами ньютонівської механіки потребує дуже великих зусиль, а інколи і взагалі неможливе. В таких випадках користуються методами іншої, так званої аналітичної механіки, в основу яких покладено принципи, відмінні від ньютонівських. Засновником цієї ланки механіки був Лейбниц.

Для спрощення, щоб не виходити за межі ньютонівської механіки, будемо розглядати ці принципи як такі, що є наслідками законів класичної механіки з додаванням до них аксіоми про звільнення від в'язей. В той же час потрібно розуміти, що це не теореми, які доводяться за допомогою законів Галілея-Ньютона, а саме принципи. Якщо взяти їх за основу, можна отримати і закони Ньютона, і всю ньютонівську механіку.

Розробниками основних принципів аналітичної механіки були французькі вчені Д'Аламбер (1717-1783) і Лагранж (1736-1813).

Принцип Д'Аламбера дозволяє приводити всі задачі, які відносяться до руху тіл, до більш простої задачі про рівновагу.

Сучасне трактування принципу Д'Аламбера з використанням поняття сили інерції, яке було введено в механіку на початку XIX століття, є фундаментом важливого метода технічної механіки – метода кінетостатики.

9.1.2 Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки

Принцип Д'Аламбера дає можливість врівноважити систему сил: для невіЛЬНОї матеріальної точки в кожний момент часу сума активних сил, що прикладені до точки, реакції в'язів і сил інерції дорівнює нулю:

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{F}^{\text{ін}} = 0,$$

де $\bar{F}$, $\bar{F}^{\text{ін}}$ – рівнодійні активних сил і сил інерції, прикладених до точки;
 $\bar{R}$ – реакція в'язей.

Тобто рівняння руху записується у вигляді умови рівноваги статки.

Силою інерції $\bar{F}^{\text{ін}}$ матеріальної точки називається вектор, який дорівнює за модулем добутку маси точки на її прискорення і спрямований у

бік, протилежний прискоренню точки: $\overline{F^{in}} = -m \cdot \overline{a}$. Її називають даламберовою силою інерції.

При координатному способі задання руху в системі відліку $Oxyz$ векторне рівняння переходить в систему скалярних рівнянь:

$$F_x + R_x + F_x^{in} = 0;$$

$$F_y + R_y + F_y^{in} = 0;$$

$$F_z + R_z + F_z^{in} = 0.$$

Якщо ж рух точки задано натуральним способом, то будемо мати систему таких рівнянь:

$$F_\tau + R_\tau + F_\tau^{in} = 0;$$

$$F_n + R_n + F_n^{in} = 0;$$

$$F_b + R_b + F_b^{in} = 0.$$

9.1.3 Принцип Д'Аламбера для механічної системи

В кожний момент часу векторні суми головних векторів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції і головних моментів цих же сил відносно обраного центра дорівнюють нулю.

За принципом Д'Аламбера:

$$\sum_{i=1}^n \overline{F_i^A} + \sum_{i=1}^n \overline{R_i} + \sum_{i=1}^n \overline{F_i^{in}} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_0(\overline{F_i^A}) + \sum_{i=1}^n M_0(\overline{R_i}) + \sum_{i=1}^n M_0(\overline{F_i^{in}}) = 0.$$

Принцип Д'Аламбера дає єдиний метод складання диференціальних рівнянь руху невільних систем. Застосування цього принципу для розв'язання задач динаміки методами рівноваги сил статички називається методом кінетостатички. Векторним рівнянням відповідають шість алгебраїчних рівнянь в координатній формі:

$$\sum_1^n (\overline{F_{kx}} + \overline{R_{kx}} + \overline{F_{kx}^{3q}}) = 0; \quad \sum_1^n (M_x(\overline{F_k}) + M_x(\overline{R_k}) + M_x(\overline{F_k^{3q}})) = 0;$$

$$\sum_1^n (\overline{F_{ky}} + \overline{R_{ky}} + \overline{F_{ky}^{3q}}) = 0; \quad \sum_1^n (M_y(\overline{F_k}) + M_y(\overline{R_k}) + M_y(\overline{F_k^{3q}})) = 0;$$

$$\sum_1^n (\overline{F_{kz}} + \overline{R_{kz}} + \overline{F_{kz}^{3q}}) = 0; \quad \sum_1^n (M_z(\overline{F_k}) + M_z(\overline{R_k}) + M_z(\overline{F_k^{3q}})) = 0.$$

9.1.4 Головний вектор та головний момент сил інерції

Сили інерції для кожного тіла системи приводяться окремо. Головний вектор сил інерції $\overline{F^{in}}$ твердого тіла дорівнює добутку маси тіла M на прискорення його центра мас $\overline{a_c}$ і спрямований у бік, протилежний цьому прискоренню $\overline{F^{in}} = -m \cdot \overline{a_c}$.

а) Поступальний рух – сили інерції приводяться до головного вектора сил інерції $\overline{F^{in}_c}$, який прикладений у центрі мас тіла.

б) Плоский рух твердого тіла (тіло має площину матеріальної симетрії, яка співпадає з площиною руху) – сили інерції приводяться до головного вектора $\overline{F^{in}} = -m \cdot \overline{a_c}$ і головного моменту: $M_c^{in} = -I_{zc} \cdot \overline{\epsilon}$, тут: знак “ - ” означає, що момент пари сил інерції спрямований у бік, протилежний кутовому прискоренню тіла ϵ , $\overline{a_c}$ – прискорення центра мас.

в) Обертальний рух твердого тіла:

- при приведенні до центра мас системи – $\overline{F^{in}_c}$ і $\overline{M^{in}_c}$.

- при приведенні осі обертання сила $\overline{F^{in}}$ буде прикладена до осі обертання z і головний момент $\overline{M^{in}} = -I_z \cdot \epsilon$, де I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання.

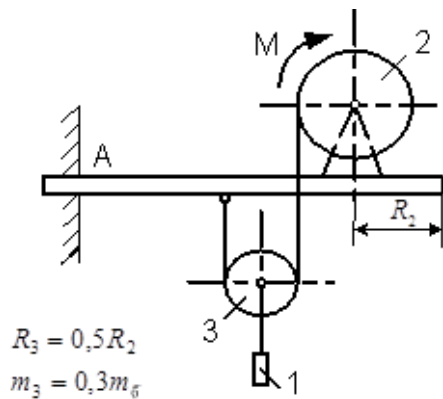
Якщо центр маси системи лежить на осі обертання, то сили інерції приводяться тільки до пари $\overline{M^{in}}$.

Питання для самоперевірки знань
та контролю засвоєння матеріалу

1. Дати означення принципу Д'Аламбера для матеріальної точки.
2. Записати метод кінетостатики для матеріальної системи.
3. Як знайти головний вектор сил інерції при поступальному, обертальному та плоскому рухах тіла?
4. Як знайти головний момент сил інерції при поступальному русі тіла?
5. Як знайти головний момент сил інерції при обертальному русі тіла?
6. Як знайти головний момент сил інерції при плоскому русі тіла?

9.2 Завдання для самостійної та індивідуальної роботи. Принцип Д'Аламбера для механічної системи

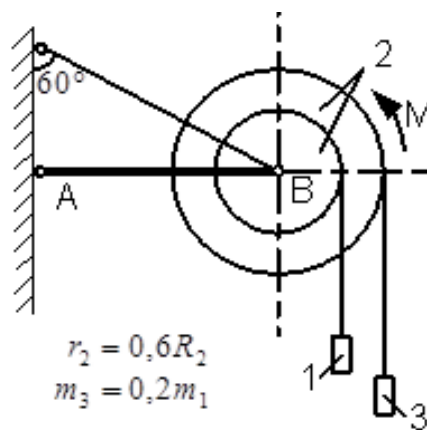
Задача № 1



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 150 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,2 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 100 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

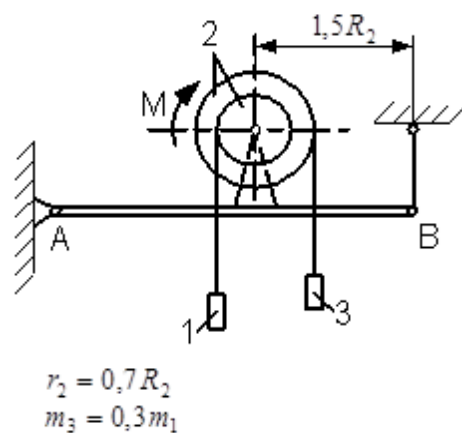
Задача № 2



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 50 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 100 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

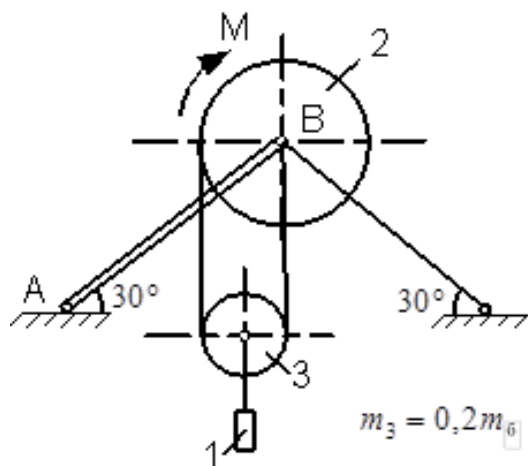
Задача № 3



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 250 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,2 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

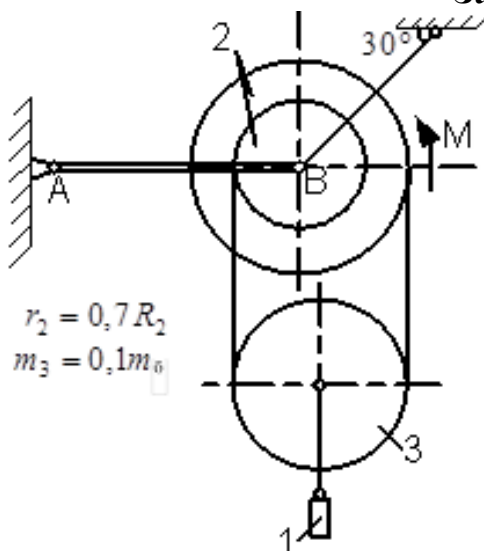
Задача № 4



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 50 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

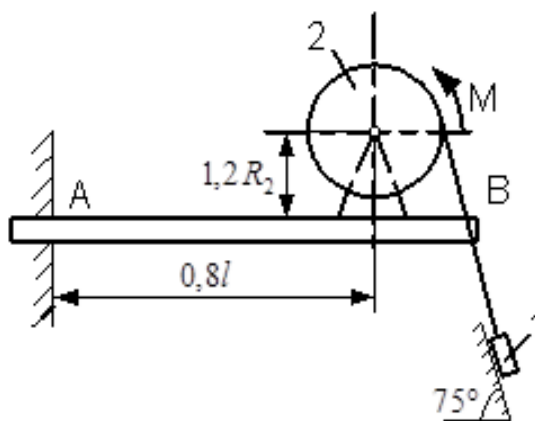
Задача № 5



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,3 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 250 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,0 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 100 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

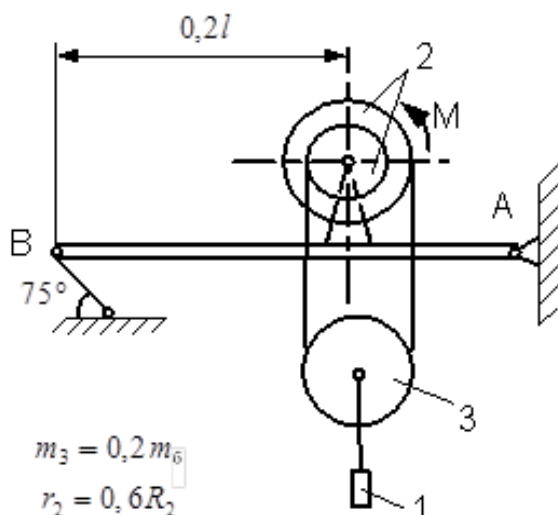
Задача № 6



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 800 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 300 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,2 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 300 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

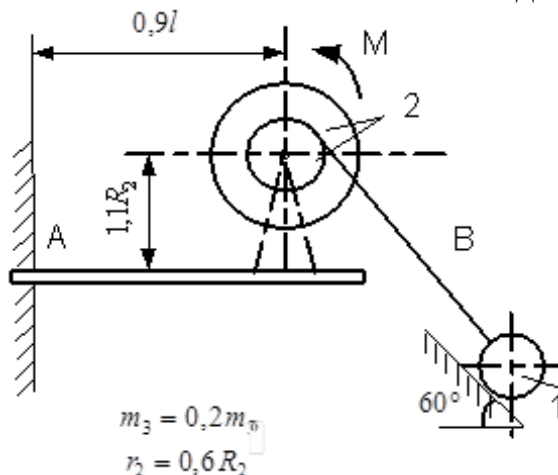
Задача № 7



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,3 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 250 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,0 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

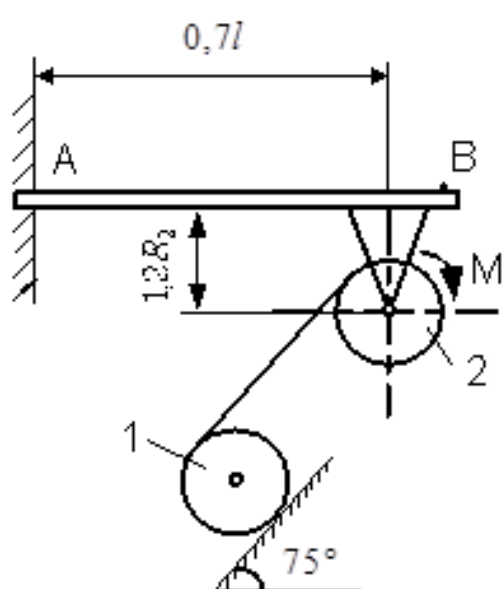
Задача № 8



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,4 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 150 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,0 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

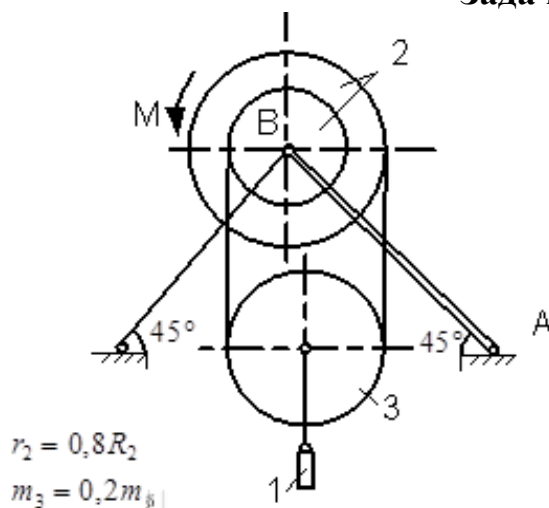
Задача № 9



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 250 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,5 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

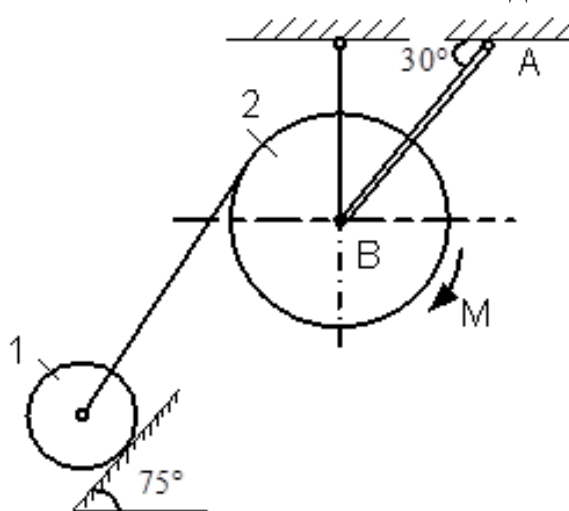
Задача № 10



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 150 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,5 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 100 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

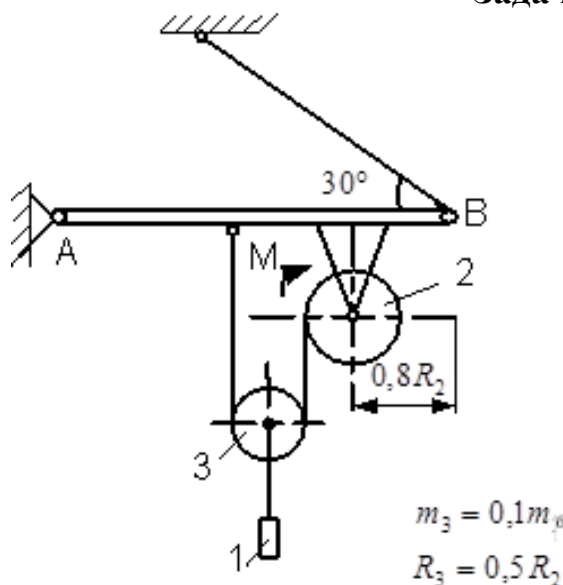
Задача № 11



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,3 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 150 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,8 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 20 \text{ кг}$.

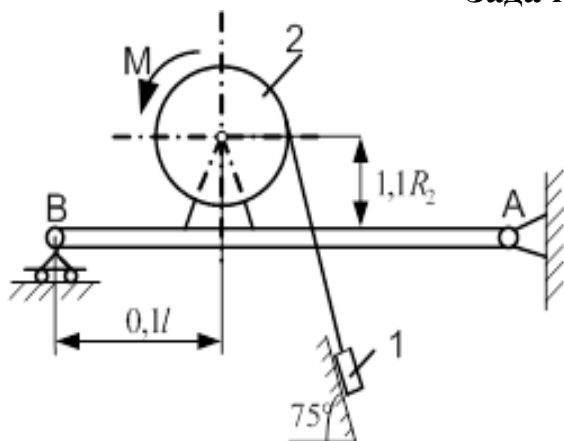
Задача № 12



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 150 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,0 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 100 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

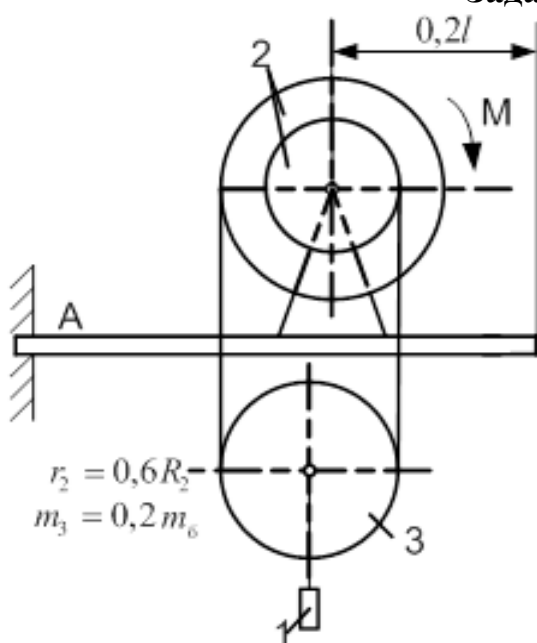
Задача № 13



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 250 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,0 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $m_d = 30 \text{ кг}$;
 $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

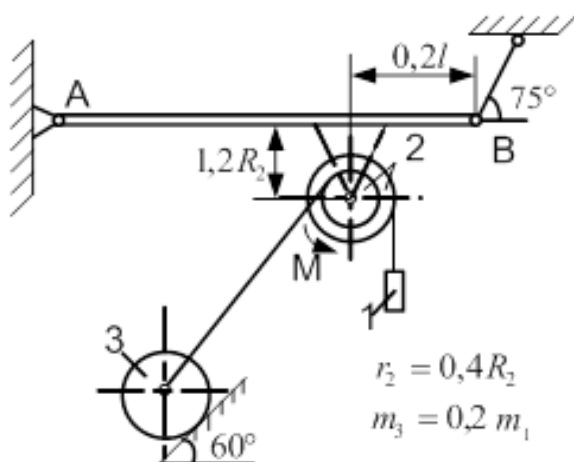
Задача № 14



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 350 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,0 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 400 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

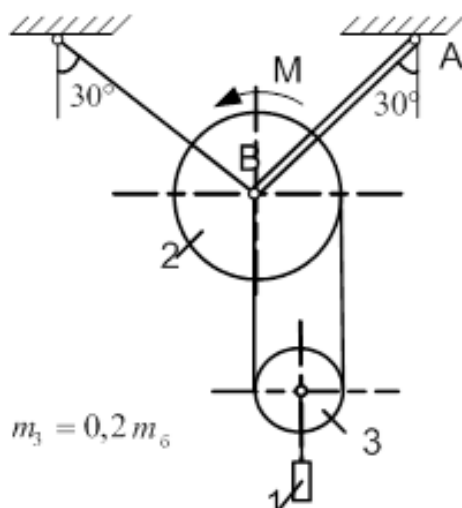
Задача № 15



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 250 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

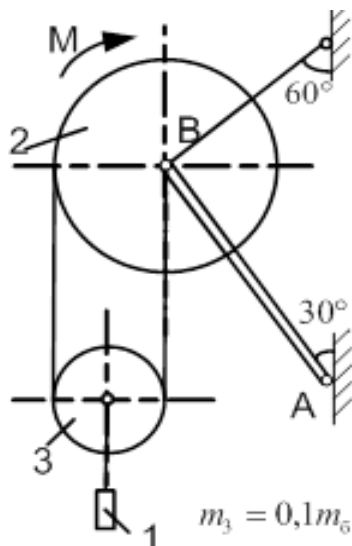
Задача № 16



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 250 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,4 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

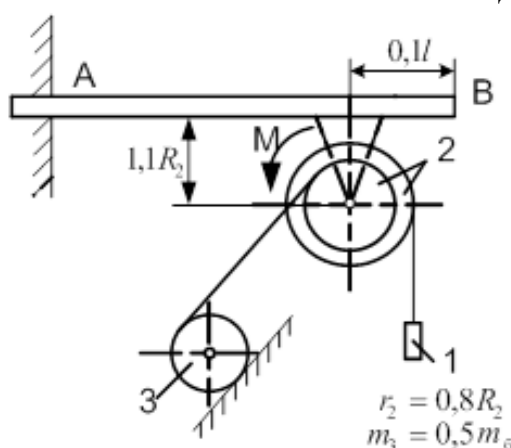
Задача № 17



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,3 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 200 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 300 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

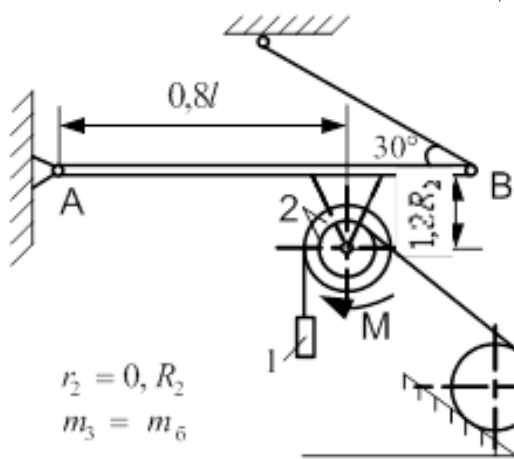
Задача № 18



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 150 \text{ Н}$ та довжиною $l = 1,0 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 100 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

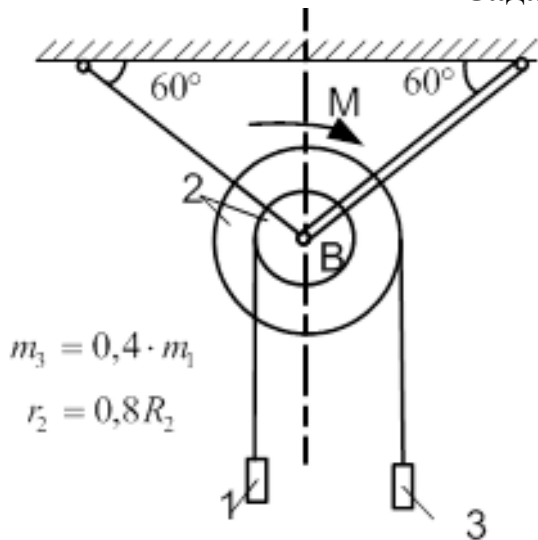
Задача № 19



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,3 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 200 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 1,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

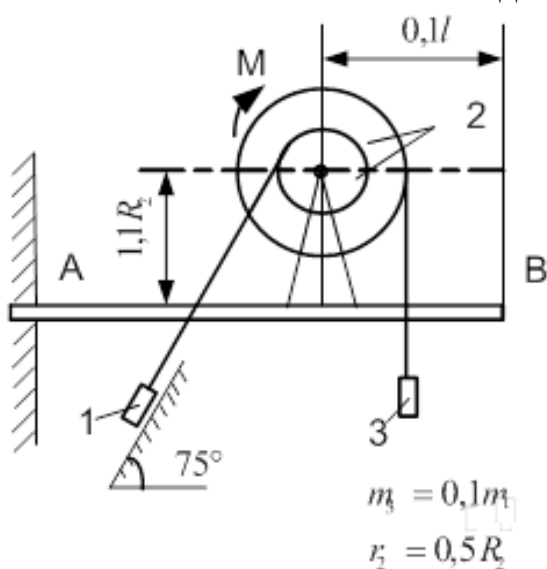
Задача № 20



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 300 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 300 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

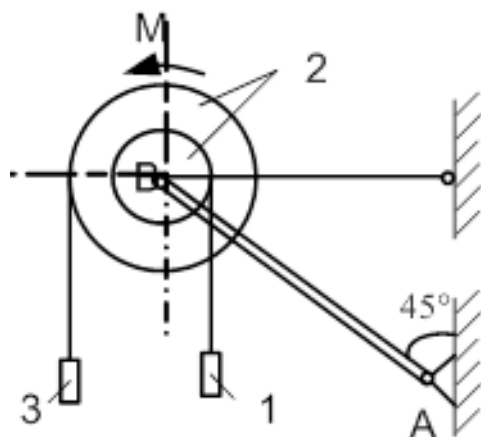
Задача № 21



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 800 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 500 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 600 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

Задача № 22



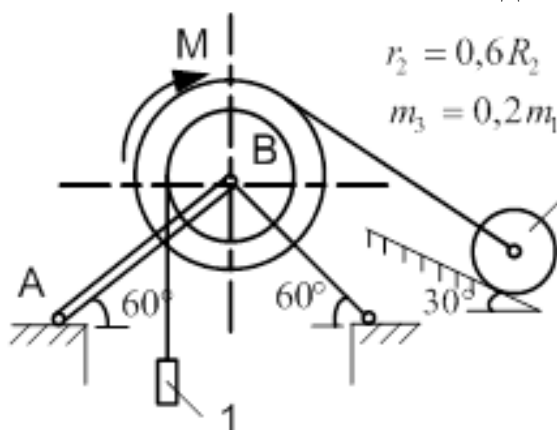
$$r_2 = 0,8R_2$$

$$m_3 = 0,2m_1$$

Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 300 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 300 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

Задача № 23



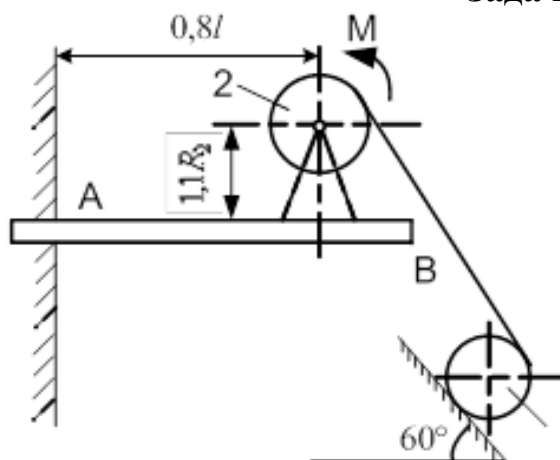
$$r_2 = 0,6R_2$$

$$m_3 = 0,2m_1$$

Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 600 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 200 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,4 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 400 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

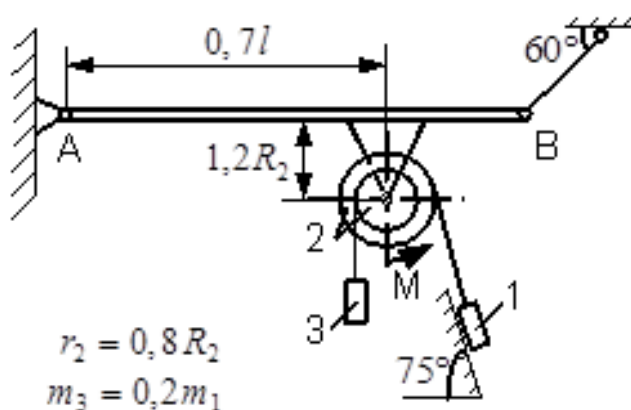
Задача № 24



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 200 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,5 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

Задача № 25

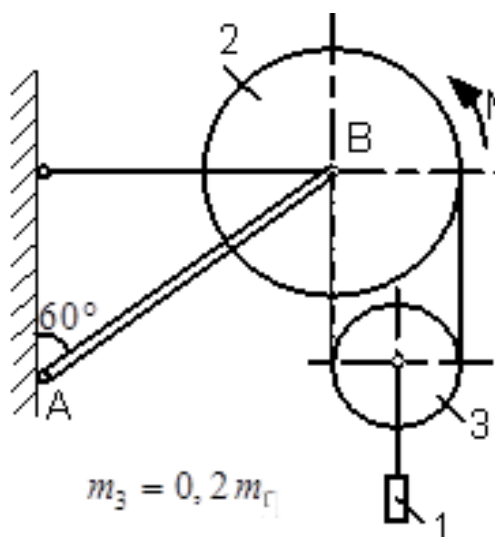


Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 200 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,5 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції

ротора електродвигуна; $m_д = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 200 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

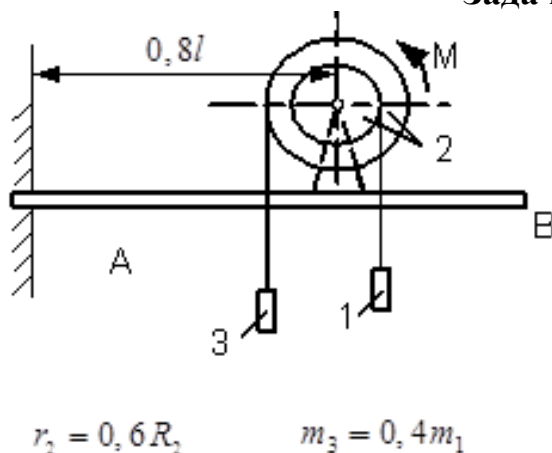
Задача № 26



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 400 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,5 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_д = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 400 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

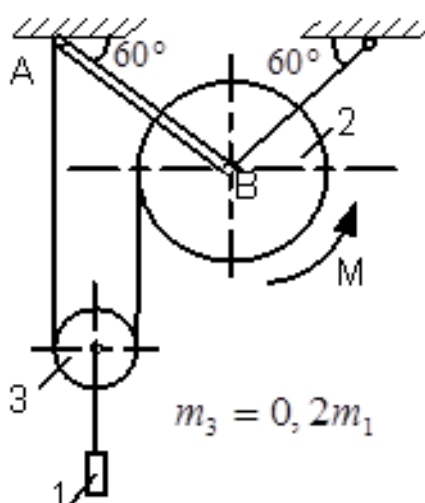
Задача № 27



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун з моментом $M = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 400 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку:
 $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_д = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 300 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

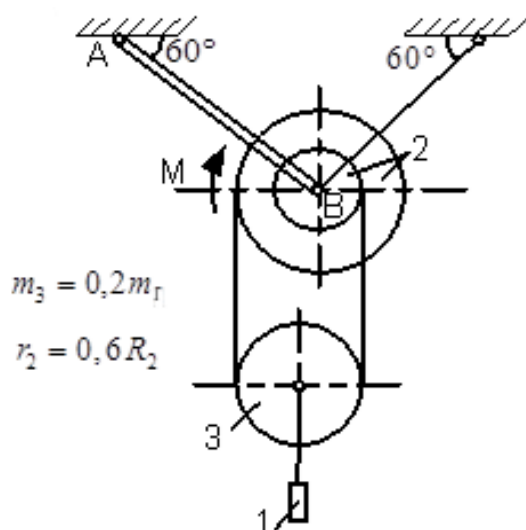
Задача № 28



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,1 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 400 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 400 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

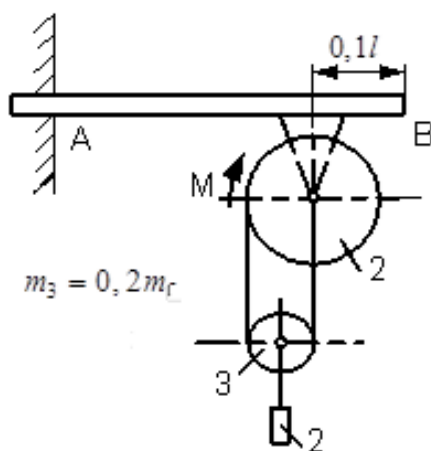
Задача № 29



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 400 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 400 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,4 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 300 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

Задача № 30



Для підйому вантажу 1 використовується електродвигун 3 моментом $M = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, що приводить до руху барабан 2, маса якого m_6 розподілена по ободу радіусом $R_2 = 0,2 \text{ м}$. Знайти реакції в'язей балки АВ вагою $P = 400 \text{ Н}$ та довжиною $l = 0,6 \text{ м}$.

Дані для розрахунку: $I_p = 0,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції ротора електродвигуна; $m_d = 30 \text{ кг}$ – маса електродвигуна; $m_1 = 400 \text{ кг}$; $m_6 = 10 \text{ кг}$.

9.3 Приклад виконання завдання

Вантаж 1 (рис. 9.1) тросом з'єднаний з центром мас рухомого блока 3, який приводиться до руху пасом, один кінець якого закріплений в точці C , а другий перекинутий через нерухомий блок 4 і зафіксований на барабані 2 масою m_2 , що приводиться до руху електродвигуном з моментом M . Знайти реакції жорсткого защемлення A однорідної балки AB довжиною l і вагою P . Маса електродвигуна m_d , момент інерції ротора – I_p . Тіло 3 – однорідний диск, а маса барабана 2 розподілена по ободу радіуса R_2 . Масою блока 4, троса та паса знехтувати.

Дані для розрахунку: $m_1 = 300$ кг; $I_p = 0,25$ кг·м²; $m_3 = 10$ кг; $m_2 = 15$ кг; $m_d = 35$ кг; $P = 250$ Н; $l = 1,0$ м; $R_2 = 0,2$ м; $M = 320$ Н·м; $\alpha = 30^\circ$.

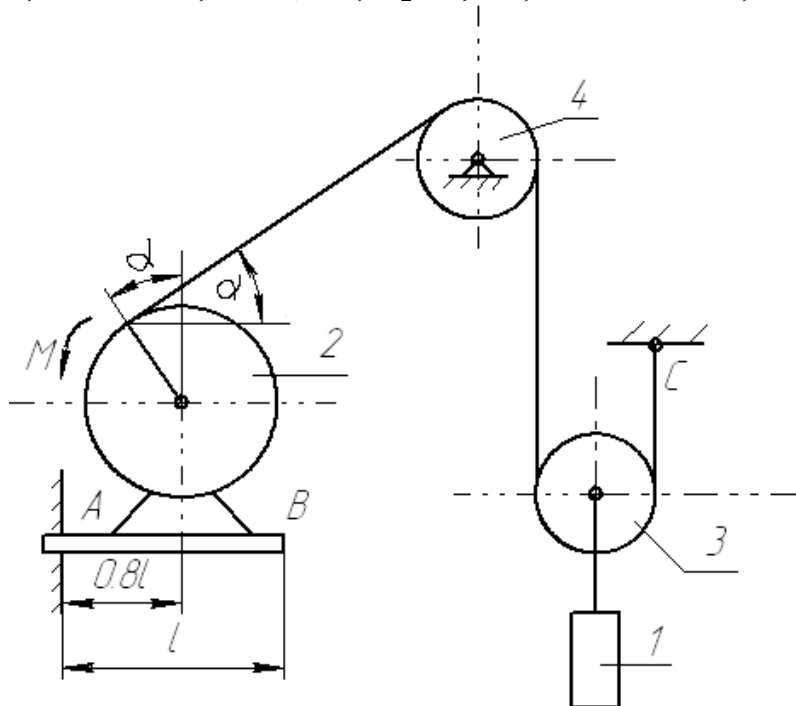


Рисунок 9.1

Розв'язання

Розглянемо матеріальну систему, що складається з балки AB , електродвигуна і барабана 2 (рис. 9.2).

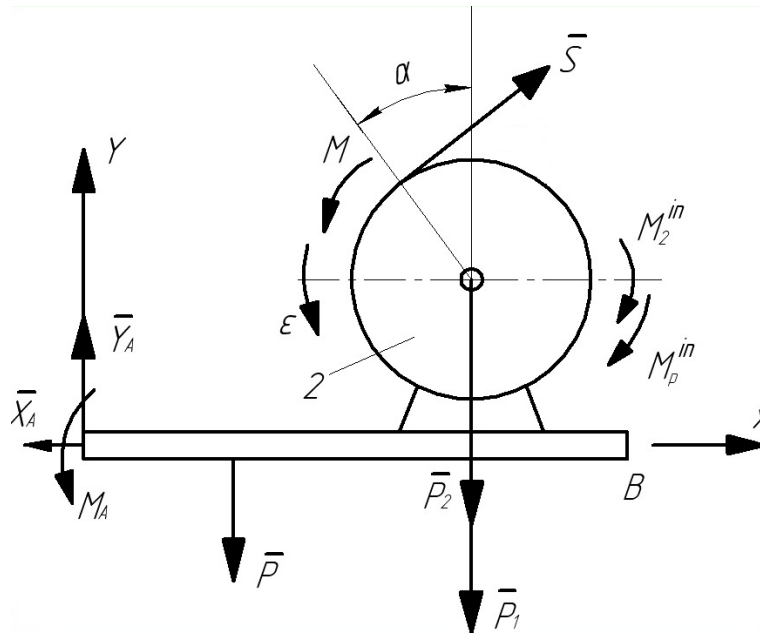


Рисунок 9.2

Запишемо принцип Д'Аламбера для плоскої довільної системи сил в проекціях на осі x та y .

$$F_x + R_x + F_x^{in} = 0,$$

$$F_y + R_y + F_y^{in} = 0, \quad (9.1)$$

$$M_A^F + M_A^R + M_A^{in} = 0.$$

Рівняння рівноваги (9.1) для механічної системи (рис. 9.2) записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} -X_A + S \cos \alpha &= 0, \\ Y_A - P - P_D - P_2 + S \sin \alpha &= 0, \\ M_A - 0,5P - 0,8(P_1 + P_D) + M - M_2^{in} - M_P^{in} - (1,2 + \cos \alpha)R_2 S \cos \alpha + \\ + (0,8l - R_2 \sin \alpha)S \sin \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (9.2)$$

де S – реакція паса, $M_2^{in} = I_2 \varepsilon$ – головний момент сил інерції барабана (момент інерції барабана I_2 та інших тіл матеріальної системи знаходяться з табл. 9.1); ε – кутове прискорення ротора електродвигуна та барабана; $M_P^{in} = I_P \varepsilon$ – головний момент сил інерції ротора електродвигуна; X_A , Y_A , M_A – реакції жорсткого зацмлення; $P_D = m_D g$; $P_2 = m_2 g$.

В трьох рівняннях (9.2) п'ять невідомих: X_A , Y_A , M_A , ε , S . Додаткові рівняння отримаємо, якщо використаємо принцип Д'Аламбера для визначення моментів сил відносно точки D (рис. 9.3) та точки K (рис. 9.4).

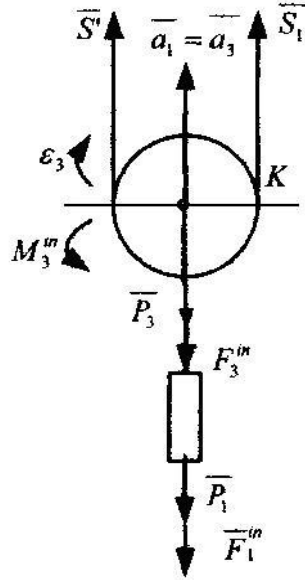


Рисунок 9.3

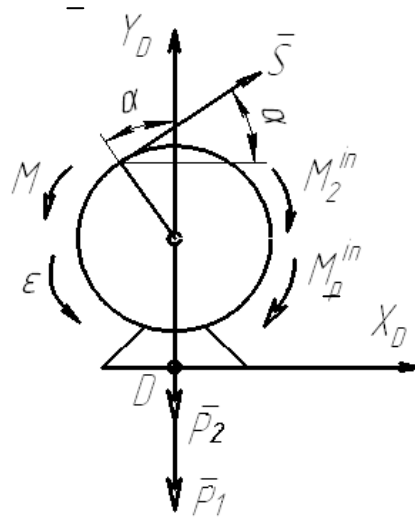


Рисунок 9.4

Рівняння рівноваги блока 3:

$$\begin{aligned} M_K^F + M_K^R + M_K^{in} &= 0 \text{ (рис. 9.3),} \\ -2S'R_3 + M_3^{in} + R_3(P_1 + P_3 + F_1^{in} + F_3^{in}) &= 0, \end{aligned} \quad (9.3)$$

де $S' = S$, R_3 - радіус шківа 3, $P_3 = m_3g$, $P_1 = m_1g$, $F_1^{in} = m_1a_1$, $F_3^{in} = m_3a_3$, $M_3^{in} = I_3\varepsilon_3$, $I_3 = \frac{m_3}{2}R_3^2$, $\varepsilon_3 = \varepsilon \frac{R_2}{2R_3}$, $a_3 = a_1 = \frac{1}{2}\varepsilon R_2$.

З врахуванням значень складових формули (9.3), маємо:

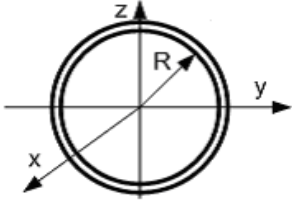
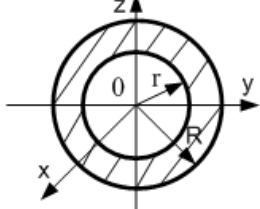
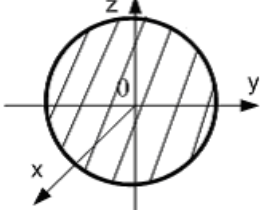
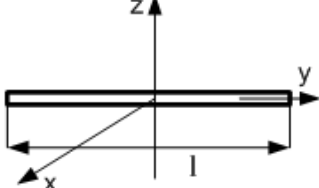
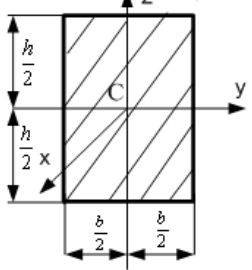
$$-8S + \varepsilon R_2(3m_3 + 2m_1) + 4g(m_1 + m_3) = 0. \quad (9.4)$$

Рівняння рівноваги електромотора (рис. 9.4):

$$\begin{aligned} M_D^F + M_D^R + M_D^{in} &= 0, \\ M - M_2^{\varepsilon} - M_P^{\varepsilon} - (1,2 + \cos \alpha)R_2S \cos \alpha + (0,8l - R_2 \sin \alpha)S \sin \alpha &= 0, \end{aligned} \quad (9.5)$$

де X_D , Y_D - реакції в'язі балки AB в точці D, $M_2^{in} = m_2R_2^2$, $M_P^{in} = I_P\varepsilon$.

Таблиця 9.1 – Осьові моменти інерції однорідних тіл

Форми тіла	I_x	I_y	I_z
Кільце 	mR^2	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{2}$
	$\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$	$\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$	$\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$
Кругла пластина 	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$
Стержень 	$\frac{1}{12}ml^2$	0	$\frac{1}{12}ml^2$
Прямокутна пластина 	$\frac{1}{12}m(h^2 + b^2)$	$\frac{1}{12}mh^2$	$\frac{1}{12}mb^2$

Після елементарних перетворень рівняння (9.5) має вигляд:

$$M - m_2 R_2^2 \varepsilon - I_p \varepsilon - (1,2 + \cos \alpha) S R_2 \cos \alpha - S R_2 \sin^2 \alpha = 0. \quad (9.6)$$

Із рівнянь (9.4) і (9.6) визначаємо натяг S паса:

$$S = \frac{MR_2(3m_3 + 2m_1) + 4(m_1 + m_3)(m_2R_2^2 + I_p)g}{8(m_2R_2^2 + I_p) + R_2^2(1 + 1,2\cos\alpha)(3m_3 + 2m_1)}. \quad (9.7)$$

Або, підставляючи дані умови задачі, отримаємо:

$$S = \frac{320 \cdot 0,2 \cdot 630 + 4 \cdot 310 \cdot (15 \cdot 0,04 + 0,25) \cdot 9,81}{8 \cdot (15 \cdot 0,04 + 0,25) + 0,04(1 + 1,2 \cdot 0,8660) \cdot 630} = 870,6 \text{ (H)}.$$

Враховуючи значення S , з рівняння (9.6) знаходимо кутове прискорення ротора електродвигуна та барабана:

$$\varepsilon = \frac{M - SR_2(1,2\cos\alpha + 1)}{m_2R_2^2 + I_p} = \frac{320 - 870,6 \cdot 0,2 \cdot (1 + 1,2 \cdot 0,866)}{15 \cdot 0,04 + 0,25} = -41,25 \text{ (с}^{-2}\text{)}.$$

Величину сил X_A , Y_A , і реактивний момент M_A визначаємо з рівнянь рівноваги (9.2):

$$X_A = 870,6 \cdot 0,866 = 753,94 \text{ (H)};$$

$$Y_A = P + P_{\bar{A}} + P_2 - S \cdot \sin\alpha = 250 + (35 + 15) \cdot 9,81 - 870,6 \cdot 0,5 = 305,2 \text{ (H)};$$

$$\begin{aligned} M_A &= 0,5 \cdot P + (m_2 + m_{\bar{A}}) \cdot g \cdot 0,8 - M + m_2 \cdot R_2^2 \cdot \varepsilon + S \cdot R_2 + S \cdot (1,2 \cdot R_2 \cdot \cos\alpha - 0,8 \cdot \sin\beta) = \\ &= 197,4 + 0,85 \cdot \varepsilon + S \cdot (0,408 - 0,4) = 169,16 \text{ (H)}. \end{aligned}$$

Відповідь: $X_A=753,94 \text{ H}$, $Y_A=305,2 \text{ H}$, $M_A=169,16 \text{ Нм}$

10 СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: [підручник] / М. А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с. – ISBN 966-575-184-0.
2. Чернілевський Д. В. Технічна механіка. Кн.І. Теоретична механіка: [підруч. для студен. технол. спец. вузів] / Д. В. Чернілевський, Я. Т. Кіницький, В. М. Колосов та ін.; за ред. Д. В. Чернілевського. – К.: НМК ВО, 1992. – 384 с.
3. Федотов В. О. Збірник завдань для самостійної роботи з технічної механіки: збірник завдань / В. О. Федотов, О. В. Грушко. – Вінниця: ВДТУ, 2002. – 111 с.
4. Приятельчук В. О. Теоретична механіка. Статика. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : [навч. пос.] / В. О. Приятельчук, В. І. Риндюк, В. О. Федотов – Вінниця: ВНТУ, 2005. – 108 с.
5. Видмиш А. А. Збірник завдань для самостійної роботи з теоретичної механіки. Статика. Кінематика: збірник завдань / А. А. Видмиш, В. О. Приятельчук, В. О. Федотов – Вінниця: ВНТУ, 2008. – 128 с.
6. Нахайчук В. Г. Технічна механіка. Кн.2. Опір матеріалів: [підруч. для студен. технол. спец. вузів] / В. Г. Нахайчук, В. А. Матвійчук, Д. В. Чернілевський ; за ред. Д. В. Чернілевського. – К.: НМК ВО, 1992. – 272 с.
7. Огородніков В. А. Опір матеріалів. Розрахунково-графічні завдання з прикладами розрахунків. Частина 1: навчальний посібник / В. А. Огородніков, О. В. Грушко, М. І. Побережний. – Вінниця: ВНТУ, 2003. – 158 с.
8. Огородніков В. А. Опір матеріалів з елементами теорії пластичності: навчальний посібник / В. А. Огородніков, І. О. Сивак, М. В. Бабак; за загальною редакцією В. А. Огороднікова. – Вінниця: ВДТУ, 2001. – 100 с.
9. Огородніков В. А. Теорія споруд. Модуль 2. Елементи опору матеріалів: навчальний посібник / В. А. Огородніков, В. І. Степанчук, В. О. Федотов. – Вінниця: ВДТУ. 1997 – 92 с.
10. Писаренко Г. С. Опір матеріалів: підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський – К.: Вища школа. 2004. – 655 с.
11. Видмиш А. А. Теоретичної механіки. Динаміка. Розрахунково-графічні та контрольні завдання: [навч. пос.] / А. А. Видмиш, В. О. Приятельчук, В. О. Федотов – Вінниця: ВНТУ, 2008. – 143 с.
12. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Динамика / М. И. Бать, Г. И. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – [7-е изд. перер.] – М.: Наука, 1985. – 560с.

Навчальне видання

**Федотов Валерій Олександрович
Віштак Інна Вікторівна
Молодецька Тетяна Ігорівна**

**ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА
(ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА)
САМОСТІЙНА ТА ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА СТУДЕНТІВ
Частина 1
Навчальний посібник**

Редактор В.О. Дружиніна

Оригінал-макет підготовлений В. О. Федотовим

Підписано до друку
Формат 29,7×42¹/₄. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк.
Наклад пр. Зам. №

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38,
publish.vntu.edu.ua; e-mail: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.