В. А. Огороднiков, В. О. Федотов, I. Ю. Кириця

Теоретична механіка
Динаміка
Самостійна та індивідуальна робота студентів

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. А. Огороднiков, В. О. Федотов, І. Ю. Кириця

Теоретична механіка
Динаміка
Самостійна та індивідуальна робота студентів
Конспект лекцій

Вінниця
ВНТУ
2016

УДК 531.1
ББК 22.21я73
О 39

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 9 від 24.04.2014 р.)

Рецензенти:
В. А. Тітов, доктор технічних наук, професор
І. О. Сивак, доктор технічних наук, професор
В. Ф. Анісімов, доктор технічних наук, професор

Огороднiков, В. А.
О 39 Теоретична механіка. Динаміка. Самостійна та індивідуальна робота студентів : конспект лекцій / В. А. Огородніков, В. О. Федотов, І. Ю. Кириця – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 84 с.
В конспекті лекцій наведено основні теоретичні відомості з розділу теоретичної механіки – динаміка (динаміка точки, динаміка матеріальної системи, елементи аналітичної механіки). Розглянуті приклади використання теоретичного матеріалу для розв’язання задач.

Для студентів денної та заочної форм навчання.

УДК 531.1
ББК 22.21я73

ЗМІСТ

ЛЕКЦІЯ 1

Вступна

Предмет динаміки. Історичний огляд розвитку динаміки

Динамікою називається розділ механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл в залежності від діючих на них сил.

Динаміка (*dynamics*) являє собою найбільш загальний розділ механіки, який має особливе значення для розв'язання багатьох практичних задач в різних областях техніки.

Засновником динаміки є великий італійський вчений Галілей (1564 – 1642). Він вперше ввів в механіку поняття швидкості і прискорення точки, що рухається, при нерівномірному прямолінійному русі і встановив закони падіння тіл в пустоті. Галілей сформулював перший закон динаміки – закон інерції, встановив, що рух тіла, кинутого під кутом до горизонту в пустоті, відбувається по параболі.

Голландський вчений Гюйгенс (1629 – 1695) ввів поняття моменту інерції, створив теорію маятника, винайшов годинник. Узагальнивши поняття прискорення на випадок криволінійного руху точки, Гюйгенс встановив поняття відцентрової сили.

Робота, що розпочата Галілеєм зі створення динаміки, була завершена великим англійським вченим Ньютоном (1643 – 1727), який в своєму знаменитому творі «Philosophiae naturalis principia mathematica» («Математические начала натуральной философии») (1687) сформулював основні закони класичної механіки і на основі цих законів дав систематичне викладення динаміки. Ньютон відкрив закон всесвітнього тяжіння.

Особливе значення мав встановлений Ньютоном закон рівності дії і протидії, який дозволив перейти від динаміки матеріальної точки до динаміки механічної системи.

Розвиваючи ідею Декарта (1596 – 1650) про збереження кількості руху, Ньютон встановив, що зміна кількості руху механічної системи визначається лише зовнішніми силами.

Область застосування законів класичної механіки, що створена Галілеєм і Ньютоном, як показали відкриття кінця XIX і першої чверті XX ст., обмежена. Ці закони не узгоджуються з досвідом при вивчені руху тіл, швидкість яких одного порядку зі швидкістю світла. Нова релятивістська механіка (теорія відносності), що створена на початку XX ст. німецьким фізиком Альбертом Ейнштейном (1879 – 1955), докорінно змінила уявлення механіки про простір, час, масу і енергію.

Однак результати, що отримані на основі законів класичної і релятивістської механіки для тіл, швидкість яких менша швидкості світла, практично збігаються.

У світлі теорії відносності класична механіка Галілея – Ньютона набула характеру її окремого випадку і зберігає своє значення і на теперішній час, будучи науково-теоретичною базою більшості галузей техніки.

На основі законів Галілея – Ньютона в подальшому доводились теореми і встановлювались принципи механіки, які складають зміст сучасного курсу теоретичної механіки.

Теорема про зміну кінетичної енергії або, як її раніше називали, теорема живих сил була сформульована І. Бернуллі (1667 –1748) і Д. Бернуллі (1700–1782). Теорема про зміну моменту кількості руху встановлена майже одночасно Ейлером і Д. Бернуллі у 1746 році.

У 1716 році Я. Германом (1678–1733) академіком Петербурзької Академії наук, встановлено принцип механіки, що дає загальний метод, за допомогою якого рівнянням динаміки надається за формою вигляд рівнянь статики, який отримав назву петербурзького принципу (метод кінетостатики). У 1737 р. Ейлер узагальнив цей принцип і застосував його для вивчення коливань гнучких тіл. У 1743 р. Даламбер висловив принцип, що став базою побудови механіки систем, що підпорядковані в’язям. Принцип Даламбера дозволив розширити застосування принципу Германа – Ейлера на випадок складних систем, що складаються із значного числа пов’язаних між собою тіл. Лагранж (1736–1813) пов’язав принцип Германа – Ейлера – Даламбера із загальним принципом статики – принципом можливих переміщень і надав йому зручну для практичного застосування форму. Вперше принцип можливих переміщень було встановлено Стевіном (1545–1620). Галілей доповнив дослідження Стевіна міркуваннями про похилу площину і дав відоме формулювання золотого правила механіки: що виграється в силі, те втрачається в швидкості.

Над науковим доведенням принципу можливих переміщень працювали І. Бернулі, Фур’є, Пуассон, Ампер і Лагранж. Академік М. В. Остроградський узагальнив принцип можливих переміщень і застосував його до розв’язання багатьох нових задач механіки. Диференціальні рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах були отримані Лагранжем і носять його ім’я. Рівняння Лагранжа визначають рух механічної системи в найбільш загальній формі. Ці рівняння Лагранж застосував до дослідження малих коливань системи, які мають велике практичне значення.

В XIX і XX століттях велике значення для розвитку динаміки набувають роботи вчених, таких як О. Ляпунова, М. Жуковського, С. Чаплигіна, І. Мещерського, К. Ціолковського, О. Крилова та ін.

О. Ляпунов (1857–1918) – розробник сучасної теорії стійкості руху. Йому належать також дослідження стійкості форм рівноваги обертової рідини.

М. Жуковський (1847–1921) є засновником однієї з найважливіших областей механіки – аеродинаміки. Крім того, він написав велику кількість видатних робіт з гідромеханіки, гідравліки і динаміки твердого тіла. Робота М. Жуковського «О присоединенных вихрях» послужила теоретичною основою для визначення підйомної сили крила літака. М. Жуковського називають «Отцом русской авиации».

Академік С. Чаплигін (1969–1942) – учень М. Жуковського також зіграв велику роль в розвитку авіації. Він ввів узагальнені рівняння руху, в яких граничні умови накладаються не тільки на положення точок, але і на їх швидкості. Створена С. Чаплигіним теорія неусталеного руху крила літака та аеродинаміка великих швидкостей є фундаментом розрахунку літака.

І. Мещерський (1859–1935) – автор відомого збірника задач з теоретичної механіки, в роботі «Динамика точки переменной массы» (1897) відкрив нову галузь механіки – механіка тіл змінної маси, одним із розділів якої є теорія руху реактивних апаратів.

Створення основ розрахунку реактивного руху належить видатному російському вченому і винахіднику К. Ціолковському (1857–1935), який розробив конструкцію першої космічної ракети.

Праці І. Мещерського і К. Ціолковського покладені в основу теорії руху сучасних багатоступінчатих ракет, що дозволили запустити штучні супутники Землі, космічні кораблі-супутники.

Праці академіка О. Крилова (1863–1945) з теорії корабля, теорії гіроскопів, теорії коливань, рівнянь математичної фізики, зовнішньої балістики і теорії пружності значно вплинули на розвиток механіки.

Вищезгадані вчені і винахідники в області механіки, які поклали в основу своїх робіт тісний зв’язок теорії і практики, створили великий внесок в скарбницю світової науки.

ЛЕКЦІЯ 2

Вступ до розділу динаміка. Основні поняття. Динаміка точки

2.1 Вступ до курсу

Два попередні розділи курсу механіки – статика і кінематика – по суті мало пов’язані між собою. Кожному з них відповідає своє окреме коло понять, задач і методів їх розв’язання. У статиці розглядаються задачі на рівновагу, а також задачі еквівалентних перетворень систем сил; при таких перетвореннях навіть не постає питання про те, який рух тіла викликають прикладені сили. У кінематиці вивчається рух «сам по собі» без зв’язку з тими силами, під дією яких він відбувається.

Динаміка – це основний розділ теоретичної механіки, де узагальнюються положення і висновки, отримані в статиці і кінематиці; тобто динаміка вивчає механічний рух матеріальних об’єктів, що виникає під дією сил, прикладених до цих об’єктів.

Саме у динаміці ставляться і розв’язуються дві основні задачі механіки:

- за відомим законом руху матеріального об’єкта потрібно визначити сили, які цей рух викликають (перша або пряма задача);
- за відомими силами, що діють на матеріальний об’єкт, потрібно знайти закон його руху (друга або обернена задача).

Звичайно динаміку в залежності від конкретного поняття матеріального об’єкта поділяють на три частини: динаміку матеріальної точки, динаміку системи матеріальних точок і динаміку твердого тіла.

2.2 Основні поняття та закони динаміки

В основі динаміки лежать закони І. Ньютона, викладені в «Математических началах натуральной философии». При формулюванні основних законів динаміки користуються такими поняттями, як **сила, інертність, маса, матеріальна точка**.

Сила (*force*) – це міра механічного прояву фізичного впливу на матеріальні тіла. Сила, як векторна величина, підпорядкована всім законам векторного числення.

Основні види сил: сила тяжіння ($\overline{P} = m \cdot \overline{g}$, або $m = P/g$); сила тертя ($\overline{F} = f \cdot \overline{N}$); сила пружності ($\overline{F} = c \cdot x$, де с – коефіцієнт жорсткості [$Н / м$]); сила в’язкого тертя ($\overline{R} = \mu \cdot \overline{V}$), сили аеродинамічного (гідродинамічного) опору.

Одиницею вимірювання сили є **Н** (Ньютон) – це сила, яка надає масі в 1 кілограм прискорення в $1 м/с^2$ $\left(1Н = 1\dfrac{кг \cdot м}{с^2} \right)$. Незалежним первинним поняттям в теоретичній механіці є маса. Під **масою** розуміють **інертність** тіла. З іншого боку, масу можна визначити як кількість речовин в тілі, що пропорційна його вазі («гравітаційна маса»). У теоретичній механіці приймається, що маса не змінюється за часом, її величина не залежить ні від швидкості точки, ні від її положення у просторі.

Матеріальна точка (*particle*) – це матеріальне тіло (тіло, що має масу), розмірами якого при вивченні його руху можна знехтувати.

Закони динаміки

Перший закон Ньютона (закон інерції)

Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, доки вплив з боку інших сил не виведе її з цього стану.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки)

Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює силі, що діє на цю точку. Прискорення матеріальної точки пропорційне прикладеній до неї силі і має однаковий з нею напрям:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F}.$$

Третій закон Ньютона (закон рівності дії та протидії)

Сили взаємодії двох матеріальних точок або двох тіл (дія і протидія) рівні за величиною, напрямлені в протилежні боки і мають загальну лінію дії.

Четвертий закон Ньютона (принцип суперпозиції)

Прискорення матеріальної точки, що виникає при одночасній дії декількох сил, дорівнює векторній сумі прискорень, які надають точці окремі сили.

2.3 Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки отримують шляхом проектування векторного рівняння $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$ на координатні осі :

а) в декартовій системі координат (рис. 2.1):

$$m \cdot a_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \; ; \; m \cdot a_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \; ; \; m \cdot a_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \; ,$$

або $m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$; $m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$; $m\ddot{z} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$,

де m – маса точки,

$\ddot{x} = a_x$; $\ddot{y} = a_y$; $\ddot{z} = a_z$ – проекції прискорення точки на осі,

$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}$, $\sum_{i=1}^{n} F_{iy}$, $\sum_{i=1}^{n} F_{iz}$ – алгебраїчні суми проекцій на координатні осі сил, що діють на точку.

Ці рівняння називаються динамічними рівняннями руху матеріальної точки в координатній формі.

Якщо точка рухається в площині, то її рух описується першими двома рівняннями, а якщо по прямій, то тільки одним з них (при цьому вісь слід спрямувати за рухом точки).

б) у природній системі координат в натуральній формі (дотична, нормаль і бінормаль) (рис. 2.1):

$$\frac{m \cdot dV\tau}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{i\tau} \; ;$$

$$m\frac{V^2}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} F_{in} \; ;$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} F_{iв} \; ,$$

де V_τ – проекція швидкості на дотичну τ;

ρ – радіус кривизни траєкторії в даній точці;

$\sum_{i=1}^{n} F_{i\tau}$, $\sum_{i=1}^{n} F_{in}$, $\sum_{i=1}^{n} F_{iв}$ – алгебраїчні суми проекцій всіх сил, які діють на точку, на натуральні осі τ, n, $в$.

Ці рівняння називаються динамічними рівняннями руху точки в **натуральній формі або у формі Ейлера.**

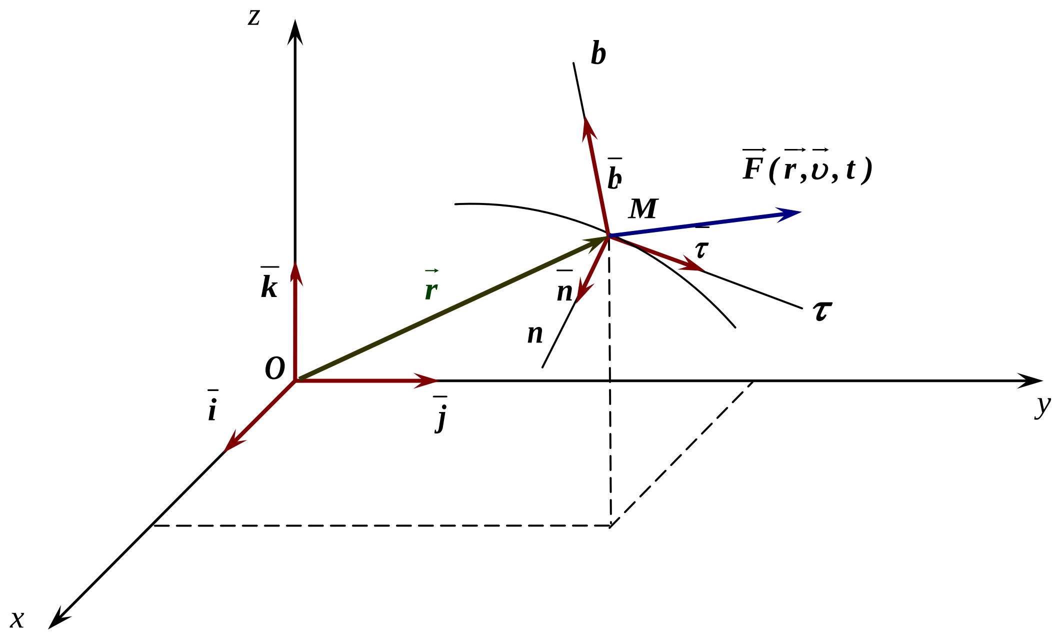


Рисунок 2.1

Ця система використовується, якщо рух точки є невільним, коли, завдяки наявності зв′язків, точка рухається по відомій траєкторії або поверхні.

Перше рівняння є диференціальним, якщо відомі проекції сил на дотичну траєкторії руху. Інші два рівняння дозволяють визначити реакції в′язів.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки дозволяють розв’язати дві основні задачі динаміки.

2.4 Дві основні задачі динаміки

Перша або **пряма** основна задача динаміки: **знаючи закон руху точки і її масу, визначити сили, що викликають цей рух**.

Якщо рух матеріальної точки масою ***m*** задано координатним способом $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, то

1. Диференціюючи двічі ці співвідношення за часом, одержимо проекції прискорень на координатні осі:

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}; \qquad a_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}; \qquad a_z = \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

2. Використовуючи динамічні рівняння руху матеріальної точки в координатній формі, визначимо проекції сили:

$$F_x = m\frac{d^2x}{at^2}; \qquad F_y = m\frac{d^2y}{at^2}; \qquad F_z = m\frac{d^2z}{at^2}.$$

3. Знаходимо модуль рівнодійної сили $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

4. Напрям рівнодійної сили визначимо за направленими косинусами

$$cos(\overline{F}, OX) = \frac{F_X}{F}, \qquad cos(\overline{F}, O\overline{Y}) = \frac{F_y}{F}, \qquad cos(\overline{F}, O\overline{Z}) = \frac{F_Z}{F}.$$

Приклад 1. Кузов трамвайного вагона разом з вантажем *P₁=100 кН* здійснює при русі на ресорах вертикальні коливання за законом $x_1 = 0{,}02\sin 10t\,м$ на візку з колесами (рис. 2.2). Визначити найбільший і найменший тиск вагона на рейки *3* горизонтального прямолінійного відрізку шляху, якщо візок з колесами важить $P_2 = 10$ *кН*.

Розв'язання

Розглянемо рух кузова. Рух цей прямолінійний і проходить уздовж осі x. Тому з трьох рівнянь руху використаємо одне, що в даному випадку приймає вигляд

$$m_1\ddot{x}_1 = \sum_{i=1}^{n} F_{iX} = P_1 + P_2 - N_3,$$

де P_1 і P_2 – відомі з умов прикладу ваги кузова і візка з колесами;

N_3 – реактивна сила з боку в'язів, рейки.

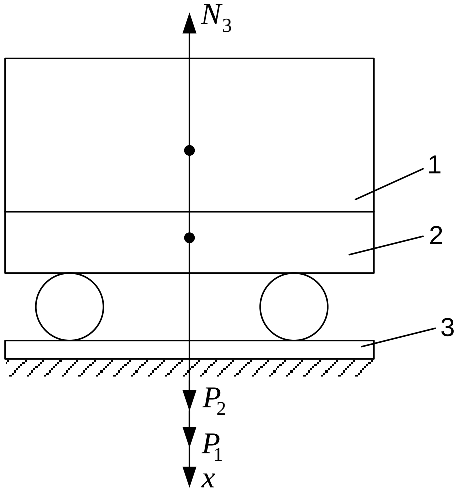


Рисунок 2.2

Звідси $N_3 = P_1 + P_2 - m_1\ddot{x}_1$.

З умови прикладу маємо :

$x_1 = 0{,}02\sin 10\,t\,м$ – закон руху кузова на ресорах.

Тоді $\dot{x}_1 = 0{,}2cos10t$,

$\ddot{x}_1 = -2\sin 10t$ – проекція прискорення кузова в напрямку осі x

$$(\ddot{X}_1)_{\max} = 2\,{}^{м}\!/_{с^2};$$

$$(\ddot{X}_1)_{\min} = -2\,{}^{м}\!/_{с^2}.$$

Звідси $(N_3)_{\max} = 100 + 10 + m_i(\ddot{X}_1)_{\min} = 100 + 10 + \frac{100}{10}\cdot 2 = 130 \quad kH$;

$$(N_3)_{\min} = 100 + 10 - m_i(\ddot{X}_1)_{\max} = 100 + 10 - \frac{100}{10}\cdot 2 = 90 \quad kH.$$

Відповідь: $(N_3)_{\max} = 130 \quad kH$,

$(N_3)_{\min} = 90 \quad kH$.

Друга або обернена задача динаміки: **визначити кінематичні рівняння руху точки, якщо відомі її маса *m*, прикладені до неї сили $\overline{F}$ і початкові умови руху.**

Розв'язання другої задачі динаміки зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки.

1. Складання динамічних рівнянь руху матеріальної точки згідно з умовами задачі (спочатку знаходять проекції сил F на осі координат (F_x, F_y, F_z)).

2. Інтегрування одержаної системи диференціальних рівнянь.

3. Визначення значень сталих інтегрування. Сталі інтегрування визначають з початкових умов. **Початкові умови** – це величини, що визначають положення точки і проекції вектора швидкості в початковий момент часу $(t = t_0)$

4. Знаходження закону руху : $x = x(t); \ y = y(t); \ z = z(t)$.

Приклад 2. Маємо рух матеріальної точки, кинутої під кутом до обрію.

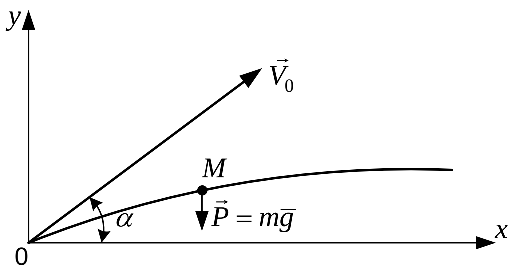


Рисунок 2.3

Визначити рух точки M масою m, яку кинуто з початковою швидкістю V_0 під кутом α до обрію. Опором повітря знехтувати (рис. 2.3). Визначити траєкторію руху точки.

Розв'язання. Початок координат показуємо в початковому положенні точки. Зобразимо рухому матеріальну точку M в довільній точці траєкторії і покажемо діючу на неї силу тяжіння $\bar{P} = m \cdot \bar{g}$.

У початковий момент часу $(t = 0)$ точка була на початку координат, тому при $t = 0, \ x_0 = 0; \ y_0 = 0.$

Проекції початкової швидкості на осі координат:

при $t = 0, \ \dot{x}_0 = V_0 \cdot \cos\alpha, \ \dot{y}_0 = V_0 \cdot \sin\alpha$.

Щоб визначити залежність координат x, y точки від часу, скористаємося диференціальними рівняннями руху точки:

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} Fix = 0,$$

$$m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} Fiy = -mg$$, або після скорочення на m

$\ddot{x} = 0,$

$\ddot{y} = -g.$

Інтегруючи ці рівняння, одержимо

$$\dot{x} = C_1,$$

$$\dot{y} = -gt + C_2 .$$

Сталі інтегрування знайдемо з початкових умов:

при $t=0$,

$$\dot{x} = V_0 \cos\alpha = C_1,$$

$$\dot{y} = V_0 \sin\alpha = C_2 .$$

Отже

$$\dot{x} = V_0 \cos\alpha,$$

$$\dot{y} = -gt + V_0 \sin\alpha .$$

Звідси після інтегрування одержимо

$$x = V_0 \cos\alpha \cdot t + C_3,$$

$$y = V_0 \sin\alpha \cdot t + C_4 - \frac{gt^2}{2}.$$

Сталі інтегрування C_3 і C_4 знаходимо з початкових умов руху. При $t = 0$, $x_0 = 0$; $y_0 = 0$, тому $C_3 = C_4 = 0$.

Тоді закон руху точки *M* матиме вигляд

$$x = V_0 \cdot t \cdot \cos\alpha,$$

$$y = V_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Ці вирази є рівняннями траєкторії в параметричному вигляді. Вилучивши час з цих рівнянь, знайдемо траєкторію руху точки *M*:

$$y = x \cdot tg\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Отримана траєкторія – парабола, яка належить площині *XOY*.

Методику розв’язання другої основної задачі динаміки застосовують при розв’язанні задач про прямолінійні коливання матеріальної точки.

Аксіома про звільнення від в’язів дає змогу задачу про рух невільної матеріальної точки вважати рухом вільної матеріальної точки, якщо дію в’язів замінити відповідними силами – реакціями в’язів.

Запитання для самоконтролю

1. Що вивчає розділ теоретичної механіки – динаміка?
2. Які закони лежать в основі динаміки?
3. Що називають матеріальною точкою?
4. Що таке сила?
5. Як отримують диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки?
6. У чому суть першої та другої задач динаміки?

ЛЕКЦІЯ 3

Прямолінійний рух матеріальної точки

В лекції розглядається прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить від: часу, положення точки, швидкості точки; а також наводяться особливості інтегрування диференціальних рівнянь.

Для того, щоб матеріальна точка рухалась по прямій лінії необхідно і достатньо, щоб діюча на неї сила була весь час паралельна початковій швидкості точки. Якщо ж початкова швидкість дорівнює нулю, то рух буде відбуватись по прямій, паралельній напрямку сили. Якщо діюча на матеріальну точку сила не дорівнює початковій швидкості точки, то рух відбувається в полі сил тяжіння.

Нехай матеріальна точка рухається по прямій лінії (напр. OX), тоді

$$y = z = 0,\ \dot{z} = \ddot{z} = \dot{y} = \ddot{y} = 0.$$

Відповідно будуть виконуватись рівності

$$F_y = 0,\ F_z = 0 \tag{3.1}$$

або

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{y} = F_y = 0 \\ m\ddot{z} = F_z = 0 \end{aligned}\right\} \text{– необхідні умови.}$$

Отже, єдине рівняння: $m\ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x})$ (3.2)

Розглянемо особливості інтегрування рівняння (3.2) якщо діють на матеріальну точку окремо сили $F_x(t)$, $F_x(x)$, $F_x(\dot{x})$.

3.1 Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить тільки від часу. Особливості інтегрування диференціальних рівнянь

Диференціальне рівняння руху в цьому випадку матиме вигляд:

$$m\ddot{x} = F_x(t),$$

звідки

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{1}{m}F_x(t).$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\int F_x(t)dt + C_1\ ,$$

де під $\int F_x(t)dt$ розуміється первісна функція.

Інтегруючи далі, отримаємо

$$x = \frac{1}{m}\int\left[\int F_x(t)dt\right]dt + C_1 t + C_2\ .$$

Приклад. Матеріальна точка масою m = 3кг рухається прямолінійно під дією сили, яка збігається з напрямком руху, вимірюється ньютонами і задається аналітично залежністю

$$F = -15e^{-3t}.$$

Знайти кінематичні рівняння руху точки, якщо в початковий момент руху координата і швидкість відповідно рівні:

$$S_0 = 3\ \ ;\ \ V_0 = 6.$$

Відстані дані в метрах, час в секундах.

Розв’язання:

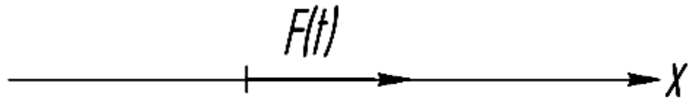


Рисунок 3.1

$$m\ddot{x} = F_x(t). \tag{3.3}$$

$$F = -15e^{-3t}. \tag{3.4}$$

$$m\ddot{x} = -15e^{-3t}. \tag{3.5}$$

$$\ddot{x} = \frac{-15}{m}e^{-3t}. \tag{3.6}$$

$$\ddot{x} = -5e^{-3t}. \tag{3.7}$$

Інтегруємо диференціальне рівняння (3.7) двічі:

$$\dot{x} = \frac{5}{3}e^{-3t} + C_1, \tag{3.8}$$

$$x = -\frac{5}{9}e^{-3t} + C_1 t + C_2. \tag{3.9}$$

Початкові умови:

При t = 0; x = S_0 = 3; $\dot{x} = \upsilon_0 = 6$.

Тоді $6 = \frac{5}{3} + C_1$; $C_1 = \frac{13}{3}$; $3 = -\frac{5}{9} + C_2$; $C_2 = \frac{32}{9}$.

Отже, $\dot{x} = \frac{5}{3}e^{-3t} + \frac{13}{3}$; $x = -\frac{5}{9}e^{-3t} + \frac{13}{3}t + \frac{32}{9}$.

3.2 Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить тільки від положення точки. Особливості інтегрування диференціальних рівнянь

В цьому випадку диференціальне рівняння руху буде:

$$m\ddot{x} = F_x(x)\ .$$

Введемо $\upsilon = \dot{x}$, отримаємо

$$\ddot{x} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\,\frac{dx}{dt} = \upsilon\ \frac{d\upsilon}{dx}\ ,$$

відповідно, диференціальне рівняння матиме вигляд

$$\upsilon d\upsilon = \frac{1}{m} F_x(x)dx$$

Після інтегрування знайдемо:

$$\frac{\upsilon^2}{2} = \frac{1}{m}\int F_x(x)dx + C_1.$$

Звідки

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1}\ ,$$

або, переходячи до проекції швидкості

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1}\ ,$$

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1}}\ .$$

Інтегруючи це рівняння, матимемо

$$t = \pm\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1}} + C_2.$$

Примітка. Знак перед коренем вибирається в залежності від напрямку руху точки в проміжку часу, що розглядається. Якщо $X_0 > 0$, то береться знак «+» в протилежному випадку – « – ». Знак може змінюватись на протилежний в момент, коли $\dot{x} = 0$.

Введемо позначення

$$\Phi(\mathrm{x}, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) = \pm\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\int F_x(x)dx + C_1}} + C_2.$$

Звідки $t = \Phi(\mathrm{x}, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$.

Розв'язуючи це рівняння відносно x, знайдемо залежність x від часу і постійних інтегрування: $\mathrm{x} = \varphi(t, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$.

3.3 Прямолінійний рух матеріальної точки під дією сили, що залежить тільки від швидкості точки. Особливості інтегрування диференціальних рівнянь

Диференціальне рівняння руху:

$$m\ddot{x} = F_x(\dot{x}) .$$

Введемо заміну $\upsilon = \dot{x}$, тоді

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F_x(\upsilon) .$$

Перетворимо до вигляду

$$\frac{d\upsilon}{F_x(\upsilon)} = \frac{1}{m}dt .$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо:

$$\int \frac{d\upsilon}{F_x(\upsilon)} + C_1 = \frac{1}{m}t .$$

Нехай $\Phi(\upsilon, C_1) = m\left[\int \frac{d\upsilon}{F_x(\upsilon)} + C_1\right]$.

Тоді $t = \Phi(\upsilon, C_1)$ або $t = \Phi(\dot{x}, C_1)$.

Розв'язуючи це рівняння відносно $\dot{x}$, будемо мати

$$\frac{dx}{dt} = f(t, C_1),$$

звідки $x = \int f(t, C_1)dt + C_2$.

Якщо рівняння $t = \Phi(\dot{x}, C_1)$ неможливо розв'язати відносно $\dot{x}$, то ввівши перетворення $\ddot{x} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\upsilon$, перепишемо диф. рівняння $m\ddot{x} = F_x(\dot{x})$ у вигляді

$m\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon = F_x(\upsilon)$ або $m\frac{m\upsilon d\upsilon}{F_x(\upsilon)} = dx$, звідки $x = m\int \frac{\upsilon d\upsilon}{F_x(\upsilon)} + C_1$.

З цього рівняння знаходимо $\upsilon = \dot{x}$:

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, C_1') .$$

Інтегруючи вдруге

$$t = \int \frac{dx}{\varphi(x, C_1')} + C_2' .$$

Звідки визначається *x* як функція часу *t*.

Приклад. Куля, що пробила дошку товщиною h, змінює свою швидкість від υ_0 до υ_1. Сила опору пропорційна швидкості ($R = k\dot{x}$).

Визначити: 1) масу кулі?

2) час руху кулі в дошці?

Розв'язання:

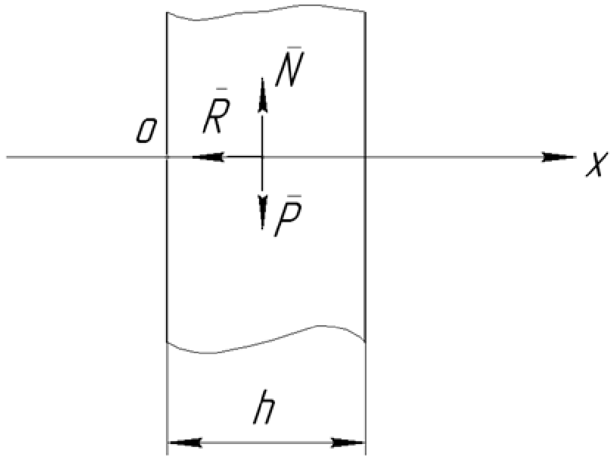


Рисунок 3.2

$$m\ddot{x} = \Sigma F_x(\dot{x}). \tag{3.10}$$

$$m\ddot{x} = -R. \tag{3.11}$$

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}. \tag{3.12}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\dot{x} \tag{3.13}$$

оскільки $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, тоді

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{k}{m}\dot{x}. \tag{3.14}$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\frac{k}{m}\ dt. \tag{3.15}$$

Інтегруємо р-ня (3.15):

$$\ln\dot{x} = -\frac{k}{m}t + C_{1.} \tag{3.16}$$

Початкові умови:

При t = 0; $\dot{x} = \nu_0$.

$\ln\nu_0 = \mathrm{C}_1$, тоді ,

$$\ln\dot{x} = -\frac{k}{m}t + \ln\nu_{0.} \tag{3.17}$$

$$\ln \dot{x} - \ln v_0 = -\frac{k}{m} t. \qquad (3.18)$$

$$\ln \frac{\dot{x}}{v_0} = -\frac{k}{m} t. \qquad (3.19)$$

$$\dot{x} = v_0 e^{-\frac{k}{m} t}. \qquad (3.20)$$

Інтегруємо р-ня (3.20):

$$x = -\frac{m}{k} v_0 e^{-\frac{k}{m} t} + C_2. \qquad (3.21)$$

Початкові умови:

При $t = 0$; $x = 0$.

$0 = -\frac{m}{k} v_0 + C_2$; $\quad C_2 = \frac{m}{k} v_0$, тоді

$$x = -\frac{m}{k} v_0 e^{-\frac{k}{m} t} + \frac{m}{k} v_0 = \frac{m}{k} v_0 \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t}\right). \qquad (3.22)$$

Початкові умови:

При $t = \tau$; $\dot{x}_\tau = \upsilon_1$; $x_\tau = h$.

$$v_1 = v_0 e^{-\frac{k}{m} \tau}. \qquad (3.23)$$

$$h = \frac{m}{k} v_0 \left(1 - e^{-\frac{k}{m} \tau}\right). \qquad (3.24)$$

З р-ня (3.23):

$$e^{-\frac{k}{m} \tau} = \frac{v_1}{v_0}. \qquad (3.25)$$

(3.25) → (3.24)

$$h = \frac{m}{k} v_0 \left(1 - \frac{v_1}{v_0}\right) = \frac{m}{k} (v_0 - v_1). \qquad (3.26)$$

$$m = \frac{h \cdot k}{(v_0 - v_1)}. \qquad (3.27)$$

З р-ня (3.23):

$$\ln \frac{v_1}{v_0} = -\frac{k}{m} \tau. \qquad (3.28)$$

$$\ln \frac{v_0}{v_1} = \frac{k}{m} \tau. \qquad (3.29)$$

З р-ня (3.29):

$$\tau = \frac{m}{k} \ln \frac{v_0}{v_1}. \qquad (3.30)$$

(3.27) → (3.30)

$$\tau = \frac{h \cdot k}{(v_0 - v_1) \cdot k} \ln \frac{v_0}{v_1} = \frac{h}{(v_0 - v_1)} \ln \frac{v_0}{v_1}. \qquad (3.31)$$

Отже, маса кулі визначається за формулою $m = \frac{h \cdot k}{(v_0 - v_1)}$, а час руху кулі в дошці – $\tau = \frac{h}{(v_0 - v_1)} \ln \frac{v_0}{v_1}$.

Запитання для самоконтролю

1. Які умови повинні виконуватись для того, щоб матеріальна точка рухалась по прямій лінії?
2. Що називають матеріальною точкою?
3. Що таке сила?
4. В чому полягають особливості інтегрування диференціальних рівнянь при прямолінійному русі матеріальної точки під дією сили, що залежить: *а)* від часу; *б)* від положення точки; *в)* від швидкості?

ЛЕКЦІЯ 4

Прямолінійні коливання матеріальної точки

Механічні рухи, які періодично повторюються, називаються **механічними коливаннями** (*mechanical vibrations*). На матеріальну точку можуть діяти: **відновлювальна сила** (*recuperative force*), яка намагається повернути точку в положення рівноваги; **сила опору руху** (*force resistance*), яка залежить від швидкості точки; **збурювальна сила** (*revolting force*), задана функцією часу.

Залежно від комбінації цих сил розглянемо три види коливального руху матеріальної точки: **вільні коливання** (*free vibrations*) під дією тільки лінійної відновлювальної сили, **згасаючі коливання** (*going out vibrations*) під дією відновлювальної сили й сили опору, що залежить від швидкості, й **вимушені коливання** (*force vibrations*) під дією відновлювальної сили і збурювальної сили, яка змінюється за гармонічним законом.

4.1 Вільні (власні) коливання матеріальної точки

Вільними (власними) коливаннями матеріальної точки називають її коливання під дією сил, зумовлених початковими умовами: відхилення точки від положення рівноваги або надання їй початкових швидкостей.

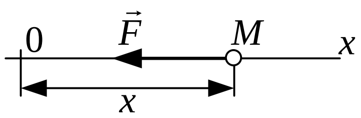


Рисунок 4.1

Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки M масою m під дією тільки сили $\vec{F}$, спрямованої до нерухомого центра O і пропорційної відстані точки M від центра O: $F = -cx$ (лінійна залежність) (рис. 4.1).

Сила $\vec{F}$ намагається повернути точку *M* у положення рівноваги *O*, тому сила $\overline{\mathrm{F}}$ називається відновлювальною силою. Прикладом такої сили є сила пружності пружини.

Визначити закон руху точки *M,* тобто закон зміни координати *x* за часом.

Запишемо диференціальне рівняння руху точки за часом у проекції на вісь x:
$$m\ddot{x} = F_x,\ m\ddot{x} = -cx \quad \text{або} \quad \ddot{x} = -\frac{c}{m}x,$$
$$\ddot{x} + \frac{c}{m} = 0, \qquad \ddot{x} + k^2x = 0,$$
де $k^2 = \dfrac{c}{m},\ k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – **колова (власна) частота** коливань матеріальної точки масою *m,* вимірюється в рад/с;

c – коефіцієнт жорсткості (пружності) пружини, що чисельно дорівнює силі, яку необхідно прикласти до пружини, щоб змінити її довжину на одиницю (вимірюється в *Н/м*).

Закон коливань точки *M* має вигляд (розв’язання диференціального рівняння коливань):
$$x = A\cos kt + B\sin kt\ ,$$
$$\dot{x} = -A\cdot k\sin kt + B\cdot k\cdot\cos kt,$$
де A і B – постійні інтегрування, що визначаються з початкових умов.

Початкові умови: при $t = 0;\ x = x_0;\ \dot{X} = V_0$.

Враховуючи початкові умови, маємо: $x_0 = A;\ \dfrac{\dot{x}_0}{k} = B$.

Остаточно закон коливань точки *M* має вигляд
$$x = x_0\cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt.$$

Якщо замість постійних інтегрування *A* і *B*, ввести постійні a і α, отримаємо закон коливань у вигляді $x = a\sin(kt+\alpha)$,

де a і α також визначаються з початкових умов.

$a = \sqrt{x^2{}_0 + \dfrac{\dot{x}_0^2}{k^2}}$ – амплітуда коливань, що дорівнює найбільшому відхиленню точки *M* від центра *O* і залежить від початкових умов,
$$tg\alpha = \frac{x_0\cdot k}{\dot{x}_0},$$
де $\alpha = arctg\dfrac{x_0\cdot k}{\dot{x}_0}$ – початкова фаза коливань, яка також залежить від початкових умов.

Розглянутий прямолінійний рух матеріальної точки *M* масою *m* під дією сили $\overline{F}$, величина якої пропорційна відхиленню точки від положення статичної рівноваги, є **гармонічним коливальним рухом з власною коловою частотою** $K = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ **та періодом** $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{C}}$.

Період коливань *T* – проміжок часу між двома послідовними проходженнями точки через положення статичної рівноваги в певному фіксованому напрямку.

Колова частота власних коливань *К* і їх період Т не залежать від початкових умов і амплітуди коливань а. Коли одночасно початкові умови дорівнюють нулю $(x_0 = 0, \dot{x} = 0)$, то $x = 0$, тобто вільні (власні) коливання не виникають.

Вплив сталої сили на вільні коливання

Розглянемо на прикладі коливання вантажу масою *m*, підвішеного за допомогою пружини жорсткості *C* до нерухомої площини, вздовж осі *OX* (рис. 3.2).

На точку *M* (вантаж вагою $P = mg$) діє сила пружності пружини $\overline{F}$ і сила ваги $\overline{P} = m\overline{g}$ (стала сила).

Точка *O* – це початок осі *OX*, спрямованої в бік дії сили $\overline{P}$, l_0 – довжина пружини в недеформованому стані, x – поточна координата вантажу при русі, $f_{ст}$ – статична деформація пружини під дією вантажу.

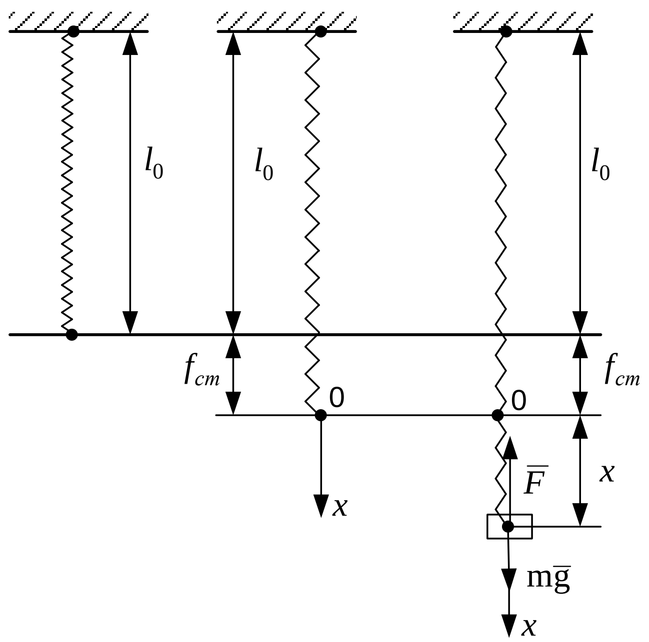


Рисунок 4. 2

Точка *O* – це точка статичної рівноваги, де сила P врівноважена силою пружності пружини $\overline{P} = \overline{F}$

$$mg = c \cdot f_{cm}; \;\; f_{cm} = \frac{mg}{c} = \frac{P}{c}.$$

При русі сила пружності пружини в проекції на вісь *OX*

$$F_x = -c(x + f_{cm}), \;\; P_x = P = mg = cf_{cm}.$$

Диференціальне рівняння руху точки М в проекції на вісь ОХ має вигляд

$$m\ddot{x} = P_x - F_x = cf_{cm} - c(x = f_{cm}) = -cx$$

$$\text{або} \quad \ddot{x} + k^2 x = 0,$$

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{g}{f_{cm}}.$$

Закон коливання вантажу (розв’язання диференціального рівняння руху) під дією сталою сили та лінійної відновлювальної сили в цьому випадку має вигляд $x = \alpha \sin(kt + \alpha)$, як і у випадку дії тільки відновлювальної сили (рис. 4.3).

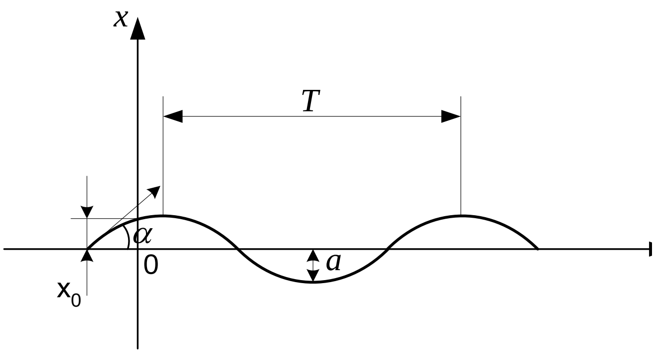


Рисунок 4.3

Стала сила не змінює характеру коливань (за законом синуса або косинуса), зміщуючи центр коливань у бік дії сталої сили вздовж осі *OX* на величину статичної деформації f_{cm}.

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{m \cdot f_{cm} / p}, \;\; P = mg, \;\; T = 2\pi\sqrt{f_{cm} / g}.$$

4.2 Вільні коливання матеріальної точки при наявності лінійно-в’язкого опору (тертя)

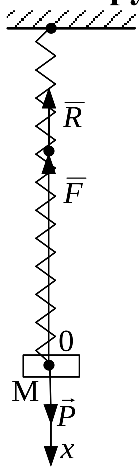


Рисунок 4.4

Матеріальна точка *M* (вантаж масою *m*) рухається під дією сили тяжіння у в’язкому середовищі (рідина або газ), при русі в якому виникає сила опору, пропорційна першому степені швидкості. Таку силу опору називають силою в’язкого тертя: $\vec{R} = -\mu\vec{V}$ (знак «–» показує, що сила $\vec{R}$ спрямована протилежно $\vec{V}$). Таким чином, на точку *M* при русі діють відновлювальна сила $\overline{F}$ і сила опору $\overline{R}$ (рис 4.4).

Диференціальне рівняння руху точки (вантажу) має вигляд:

$$m\ddot{x} = P - F - R$$

або $m\ddot{x} = mg - c(f_{ст} + x) - \mu\dot{x}$

або $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0$

або $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0$,

де $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – частота власних коливань (колова);

$n = \dfrac{\mu}{2m}$ – відносний коефіцієнт демпфірування, що має розмірність колової частоти k коливань *([n] = рад/с)*.

Закон коливання вантажу (розв'язання диференціального рівняння) залежить від співвідношення параметрів k і n.

1. Закон коливання вантажу у випадку малого опору $n < k$ має вигляд

$$x = e^{-nt}(A\cos k_1 t + B\sin k_1 t)$$

або

$$x = ae^{-nt} \cdot \sin(k_1 t + \alpha),$$

де постійні інтегрування визначаються, як і раніше, з початкових умов;

$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$ – частота згасаючих коливань;

$a = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{(x_0 \cdot n + V_0)^2}{k_1^2}}$ – максимальне відхилення точки від положення рівноваги, $\alpha = arctg\dfrac{x_0 \cdot k_1}{x_0 \cdot n + V_0}$ – початкова фаза.

Коливання, які відбуваються за цим законом, називаються згасаючими, тому що величина x за перебігом часу, завдяки множнику e^{-nt} зменшується, прямуючи до нуля (рис. 4.5).

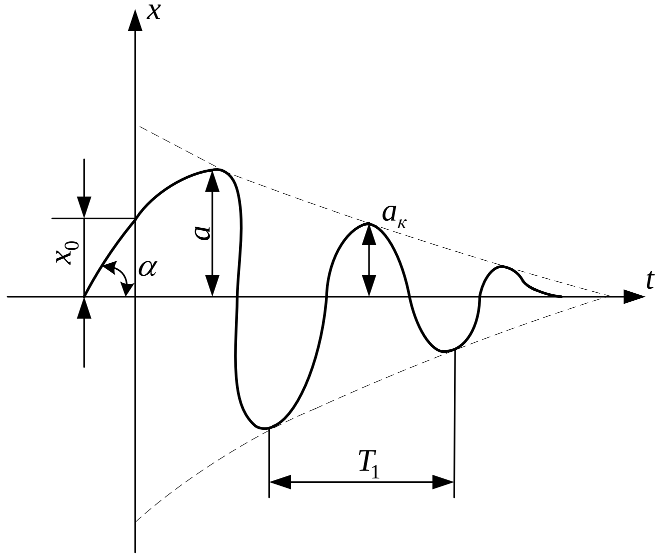


Рисунок 4.5

Періодом згасаючих коливань T_1 називають проміжок часу між двома послідовними проходженнями точки через положення статичної рівноваги в певному фіксованому напрямку:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\kappa_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa^2 - n^2}}.$$

Звідси видно, що період згасаючих коливань більший за період власних коливань $T_1 > T$. Опір середовища, що пропорційний швидкості в першому степені, збільшує період коливань.

Співвідношення $\frac{a_K}{a} = e^{-n \cdot T_1}$ називають **декрементом загасання** або фактором загасання.

Амплітуда згасаючих коливань спадає за геометричною прогресією.

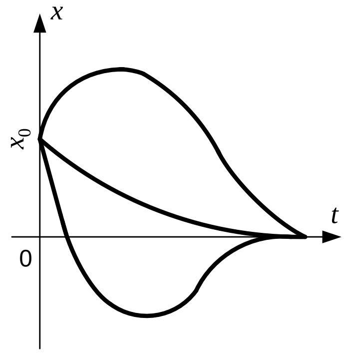


Рисунок 4.6

2. При *n* = *k* (граничний випадок) розв'язання диференціального рівняння руху: $x = e^{-nt}(A \cdot t + B)$.

Рух точки буде аперіодичним згасаючим, не буде коливальним і за перебігом часу буде прямувати до нуля ($x \to 0$ при $t \to \infty$). Рух точки залежить від початкових умов (рис. 4.6).

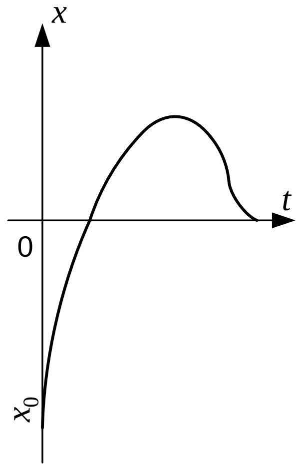


Рисунок 4.7

3. При *n* > *k*, коли опір великий порівняно з відновлювальною силою, розв'язання диференціального рівняння руху має вигляд:

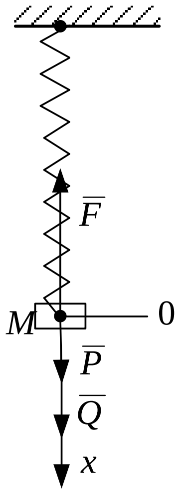
$$x = A \cdot e^{-(n-k_2)\cdot t} + B \cdot e^{-(n+k_2)\cdot t},$$

де $k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}$.

Рух точки в цьому випадку також не є коливальним і вона під дією відновлювальної сили поступово (асимптотично) буде спрямовуватися до стану рівноваги $x = 0$. Рух точки також залежить від початкових умов і є аперіодичним (рис. 4.7).

4.3 Вимушені коливання матеріальної точки

Вимушені коливання відбуваються за умови, що на матеріальну точку, крім відновлювальної сили $\bar{F}$, діє збурювальна сила $\bar{Q}$, яка змінюється за гармонічним законом, тобто $Q = H \cdot \sin pt$, де H – максимальне значення збурювальної сили, p – колова частота збурювальної сили (рис. 4.8).



Диференціальне рівняння руху матеріальної точки M (вантажу) має вигляд $m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F} + \bar{Q}$

або в проекції на вісь x:

$$m\ddot{x} = mg - c\left(f_{ст} + x\right) + H\sin\, pt,$$

або після ділення на m:

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin\, pt,$$

де $k^2 = \dfrac{c}{m}$; $h = \dfrac{H}{m}$.

Рисунок 4.8

Загальний розв′язок неоднорідного диференціального рівняння складається з двох розв′язків (рис. 4.8): $x = x_1 + x_2$

де $x_1 = A \cdot \cos kt + B\sin\, kt$ – загальний розв′язок однорідного рівняння;

x_2 – частинний розв′язок неоднорідного рівняння.

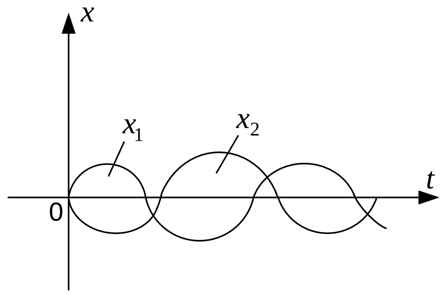


Рисунок 4.9

При визначенні частинного розв′язку розглянемо 3 випадки ($k \neq p$, $k \approx p$, $k = p$).

1. Частота вільних коливань не дорівнює частоті збурювальної сили ($k \neq p$).

У цьому випадку $x_2 = \dfrac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin\, pt$.

Тоді закон коливання вантажу

$$x = x_1 + x_2 = A\cos kt + B\sin\, kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin\, pt$$

або $$x = a \cdot \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin\, pt,$$

де A, B, a, α – постійні інтегрування, що визначаються з початкових умов.

Закон коливання свідчить, що коливання складаються в цьому випадку з коливання з амплітудою a (залежною від початкових умов) і власною частотою *k,* і коливання з амплітудою $\frac{h}{k^2 - p^2}$ (не залежною від початкових умов) і частотою *p,* які називаються **вимушеними коливаннями**.

При цьому на відміну від вільних коливань, що описуються однорідними диференціальними рівняннями, вимушені коливання за наявності збурювальної періодичної сили збуджуються також за нульових початкових умов $(x_0 = 0; \dot{x}_0 = 0)$

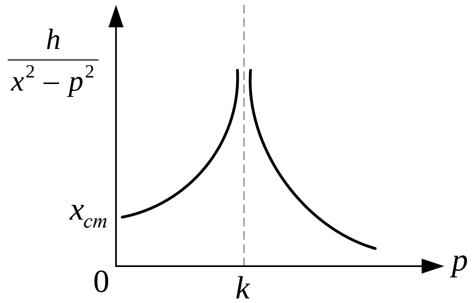


Рисунок 4.10

При $p \to k$ амплітуда змушених коливань $\frac{h}{k^2 - p^2}$ необмежено зростає.

При $p \approx 0$ (або $p << k$) амплітуда дорівнює статичному відхиленню точки під дією сили Н (максимальне значення збурювальної сили) (рис. 4.10).

При $p >> k$ амплітуда $\frac{h}{k^2 - p^2} \to 0$.

Вимушені коливання, частота яких p менша частоти *k* вільних коливань, називаються вимушеними коливаннями малої частоти ($p < k$) і $x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin\, pt$.

Фаза коливань *pt* збігається з фазою збурювальної сили $\bar{Q}$.

Вимушені коливання, частота яких p більша частоти *k* вільних коливань, називаються вимушеними коливаннями великої частоти $p > k$ і

$$x_2 = \frac{h}{p^2 - k^2} \cdot sin \cdot (pt - \pi).$$

У цьому випадку амплітуда вимушених коливань дорівнює $\frac{h}{p^2 - k^2}$, а фаза $(pt - \pi)$ відрізняється від фази збурювальної сили *pt* на π, тобто фази вимушених коливань і збурювальної сили протилежні.

2. Частота вільних коливань приблизно дорівнює частоті збурювальної сили $(k \approx p)$**,** якщо при $t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, тобто початкові умови нульові (рис. 4.11).

У цьому випадку $x_2 = \frac{2h}{k^2 - p^2}\sin\left(\frac{p-k}{2}\right)t \cdot \cos pt$.

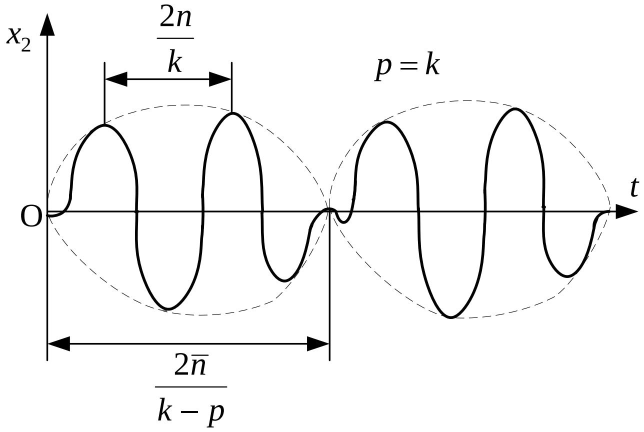


Рисунок 4.11

Коливальний рух відбувається з частотою збурювальної сили, амплітуда якої повільно змінюється з частотою, що відповідає половині різниці частот p і k. Такий рух називається **биттям**.

3. Частота вільних коливань дорівнює частоті збурювальної сили ($p = k$ **)**, характер коливань якісно змінюється і виникає резонанс.

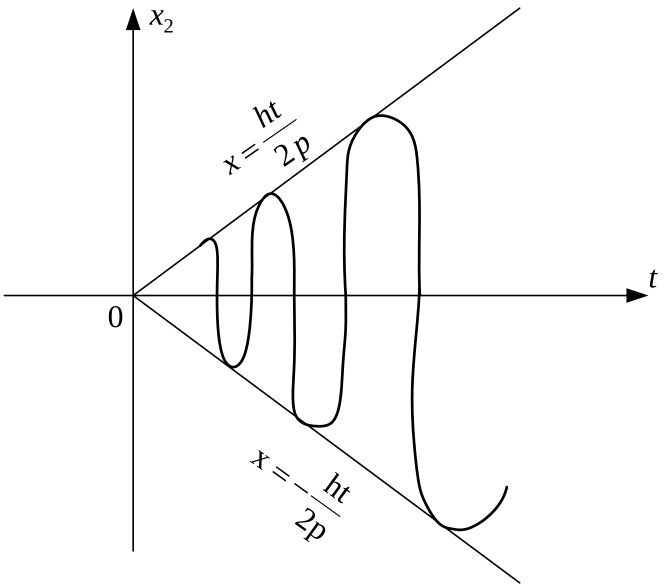


Рисунок 4.12

Частинний розв′язок неоднорідного диференціювання має вигляд

$$x_2 = -\frac{h \cdot t}{2 \cdot p} \cdot \cos pt.$$

Амплітуда вимушених коливань x_2, що визначається як $-\frac{h \cdot t}{2p}$, збільшується прямо пропорційно часу і при $t \to \infty$ необмежено зростає (рис. 4.12).

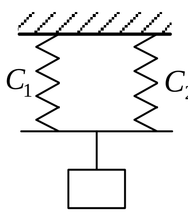
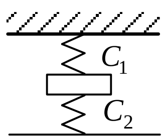
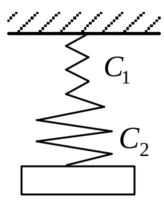
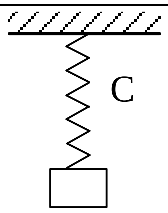
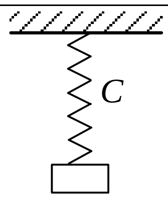
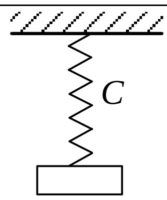
У разі ненульових початкових умов загальний розв′язок неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$x = x_1 + x_2 = A \cdot coskt + B\sin kt - \frac{h \cdot t}{2p}\cos pt\,.$$

4.4 Методика розв′язання задач із дослідження коливального руху матеріальної точки

1. У наведених схемах (Таблиця 4.1), пружини, які з′єднують вантаж з основою, можуть бути з′єднані паралельно, змішано й послідовно. Тому ці схеми необхідно звести до розрахункової схеми з однією пружиною, яка має еквівалентну жорсткість *C*.
2. Вибрати систему відліку, за початок координат, узявши точку статичної рівноваги вантажу $(c \cdot f_{cm} = m \cdot g)$.
3. Вісь *x* спрямувати за напрямком руху вантажу.
4. Зобразити вантаж у проміжному положенні і діючі на нього сили.
5. Визначити початкові умови руху вантажу.
6. Записати диференціальне рівняння руху вантажу в проекції на вісь.
7. Записати розв′язок диференціального рівняння руху вантажу.
8. Використавши початкові умови, визначити постійні інтегрування закону руху вантажу.
9. Визначити параметри коливання.

Таблиця 4.1

	а)	б)	в)
Задані схеми			
Еквівалентні схеми	 $C = C_1 + C_2$	 $C = C_1 + C_2$	 $C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$

Таблиця 4.2 – Прямолінійні гармонічні коливання матеріальної точки

<table>
<tr><td>Вид коливання</td><td>Вільні</td><td colspan="3">Згасаючі</td></tr>
<tr><td>Діючі сили</td><td>$F=-cx$</td><td colspan="3">$F=-cx; R=-\text{м}\dot{x}$</td></tr>
<tr><td>Диференціальне рівняння руху</td><td>$m\ddot{x}=-cx$
$m\ddot{x}+cx=0$
$\ddot{x}+k^2x=0$
$k^2=\frac{c}{m}$</td><td colspan="3">$m\ddot{x}=-cx-\mu\dot{x}$
$m\ddot{x}+\mu\dot{x}+cx=0$
$\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=0$
$k^2=\frac{c}{m};\quad 2n=\frac{\mu}{m}$</td></tr>
<tr><td>Розв′язок диферент-ціального рівняння, закон руху</td><td>$x=A\cos kt+$
$+B\sin kt$
$x=a\sin(kt+\alpha)$</td><td>$n<k$
$x=e^{-nt}(A\cos k_1t++B\sin k_1t)$
$x=a\cdot e^{-nt}(sin k_1t+\alpha)$</td><td>$n=k$
$x=e^{-nt}(At+B)$</td><td>$n>k$
$x=A\cdot e^{-(n-k_2)t}+$
$+B\cdot e^{-(n+k_2)\cdot t}$</td></tr>
<tr><td>Параметри руху</td><td>$\kappa=\sqrt{\frac{c}{m}}$ –
власна частота
$T=\frac{2\pi}{k}$ –
період
$a=\sqrt{A^2+B^2}=$
$\sqrt{x_0^2+\frac{V_0^2}{k^2}}$ –
амплітуда
$\alpha=arctg\frac{x_0\cdot k}{V_0}$
– початкова фаза</td><td>$k_1=\sqrt{k^2-n^2}$ –
частота згасаючих коливань
$T_1=\frac{2\cdot\pi}{k_1}$ – період
згасаючих коливань
$a=\sqrt{x_0^2+\frac{(x_0\cdot n+V_0)^2}{k_1^2}}$ –
амплітуда згасаючих коливань
$\alpha - arctg\frac{x_0\cdot k_1}{x_0\cdot n+V_0}$ –
початкова фаза</td><td>Згасаючий аперіодичний рух</td><td>$\kappa_2=\sqrt{n^2-k^2}$
Згасаючий аперіодичний рух</td></tr>
</table>

Продовження таблиці 4.2

Вид коливання	Вимушені	
Діючі сили	$F=-cx;\ Q=c\cdot в\cdot\sin\ pt$	
Диференціальне рівняння руху	$m\ddot{x}=-cx+c\cdot в\cdot\sin\cdot p\cdot t$ $m\ddot{x}+cx=c\cdot в\cdot\sin\cdot p\cdot t$ $\ddot{x}+k^2x=h\cdot\sin\cdot p\cdot t$ $k^2=\dfrac{c}{m};\quad h=\dfrac{c\cdot в}{m}$	
Розв′язок диференціального рівняння, закон руху	$k\neq p$ $x=x_1+x_2$ $x_1=A\cdot\cos\cdot k\cdot t+B\cdot\sin kt$ $p<k$ $x_2=\dfrac{h}{k^2-p_2}\cdot\sin\cdot p\cdot t$ $p>k$ $x_2=\dfrac{h}{p^2-k^2}\cdot\sin\left(pt-\pi\right)$	$p=k,$ резонанс $\mathrm{x_1=A\cdot\cos kt+B\cdot\sin kt}$ $x_2=-\dfrac{h\cdot t}{2p}\cdot\cos\cdot\ pt$
Параметри руху	$k=\sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – власна частота вимушених коливань, p – колова частота вимушених коливань, $T=\dfrac{2\pi}{к}$ – період власних коливань, $T_B=\dfrac{2\pi}{p}$ – період вимушених коливань.	

4.5 Приклад розв′язання задач із дослідження коливального руху матеріальної точки

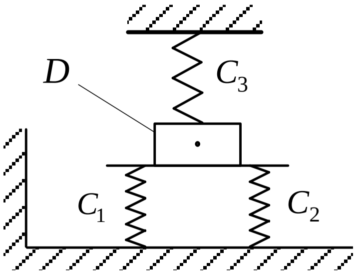


Рисунок 4.13

Плита (рис. 4.13) лежить на двох однакових паралельних пружинах, коефіцієнти жорсткості яких $c_1=c_2=400\ Н/см$. У деякий момент часу вантаж *D (m=200кг)* встановлюють на середину плити і одночасно закріплюють до третьої, розташованої зверху вантажу недеформованої пружини. З коефіцієнтом жорсткості $c_3=200\ Н/см$. У той же час (при недеформованих пружинах) вантажу надають швидкість $V_0=0{,}6\,м/сек$, спрямовану донизу.

Нехтуючи масою плити і вважаючи, що при подальшому русі вантаж від плити не відділяється, знайти рівняння коливального руху вантажу *D*. Рух вантажу віднести до осі *x,* прийнявши за початок відліку положення статичної рівноваги вантажу (при статичній деформації пружин).

Розв′язання. Знаходимо еквівалентну жорсткість. Дві паралельні пружини з однаковими жорсткостями c_1 і c_2 мають еквівалентну жорсткість $c_{1,2} = c_1 + c_2 = 400 \cdot 2 = 800\, Н/см = 80000\, Н/м$.

Статичні деформації пружин з еквівалентною жорсткістю $c_{1,2}$ і c_3 однакові. При цьому сила $\bar{P} = m\bar{g}$ врівноважена силами пружності $c_{12} \cdot f_{CT}$ і $c_3 \cdot f_{CT}$ пружин, тобто $P=(c_{1,2}+c_3)\, f_{cm}$.

Звідси $c_{ЕКВ}=c=c_{1,2}+c_3=80000+20000=100000$ *Н/м.*

$$mg = c \cdot f_{CT},$$

$$f_{CT} = \frac{mg}{c} = \frac{200 \cdot 10}{100000} = 0{,}02\ м.$$

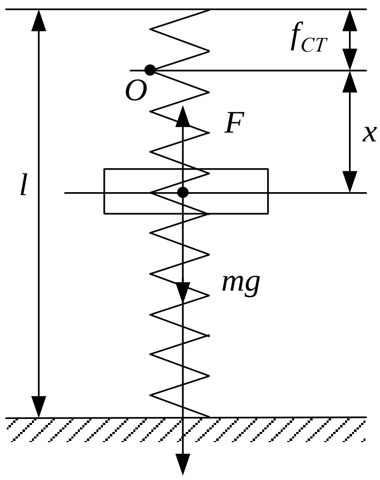


Рисунок 4.14

2. Вибираємо початок координат. Точка *O* визначає положення статичної рівноваги вантажу. Вісь *x* спрямовуємо вниз.

3. Зображуємо вантаж у проміжному положенні і діючі на нього сили:

$\bar{P} = m\bar{g}$ – сила ваги, $\bar{F}$ – сила пружності.

4. Визначаємо початкові умови руху вантажу

При $t = 0$, $x_0 = -f_{CT} = -0{,}02 м$, $v_0 = 0{,}6 \, м/сек$.

4. Вантаж рухається під дією сили ваги вантажу $P = m \cdot g$, сили пружності пружини $F = -c(x + f_{CT})$ і здійснює вільні коливання.

5. Диференціальне рівняння руху вантажу

$m\ddot{x} = mg - c(x + f_{CT}) = -cx$,

$m\ddot{x} + cx = 0$ – диференціальне рівняння вільних коливань,

$$\ddot{x} + \kappa^2 x = 0,$$

де – $k^2 = \frac{c}{m} = \frac{100000}{200} = 500;$

$k = \sqrt{500} = 22{,}4c^{-1}$.

6. Закон руху вантажу $x = A \cdot \cos 22{,}4t + B \cdot \sin 22{,}4t.$

7. Використовуємо початкові умови і визначаємо постійні інтегрування A і B.

При $t = 0$: $x_0 = -0{,}02\ м$; $V_0 = 0{,}6\ ^{м}\!/_{c}$,

$x_0 = -0{,}02 = A \rightarrow A = -0{,}02\,м$,

$\dot{x} = -22{,}4 \cdot A \cdot \sin 22{,}4t + 22{,}4 \cdot \cos 22{,}4t$,

$\dot{x}_0 = V_0 = 0{,}6 = 22{,}4B \rightarrow B = \frac{0{,}6}{22{,}4} = 0{,}027\,м.$

Звідси закон руху вантажу $x = f(t)$ має вигляд

$$x = -0{,}02 \cdot cos \cdot 22{,}4t + 0{,}027 \cdot \sin \cdot 22{,}4t(м).$$

8. Визначаємо параметри коливання вантажу:

$k = 22{,}4\ сек^{-1}$ – власна частота коливань,

$T = \frac{2 \cdot \pi}{22{,}4} = 0{,}28\,сек$ – період коливань,

$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}027^2} = 0{,}034\,м = 3{,}4\,см$ – амплітуда коливань (найбільше відхилення вантажу від положення рівноваги),

$\alpha = arctg\,\frac{A}{B} = arctg\,\frac{-0{,}02}{0{,}027} = arctg(-0{,}74) = 324°$ – початкова фаза коливань,

$\sin\alpha = \frac{x_0}{a} = -0{,}58, \qquad \alpha = 324°,$

$\cos\alpha = \frac{V_0}{ka} = \frac{0{,}6}{22{,}4 \cdot 0{,}034} = 0{,}78$.

Будуємо графік коливань вантажу (рис. 4.15).

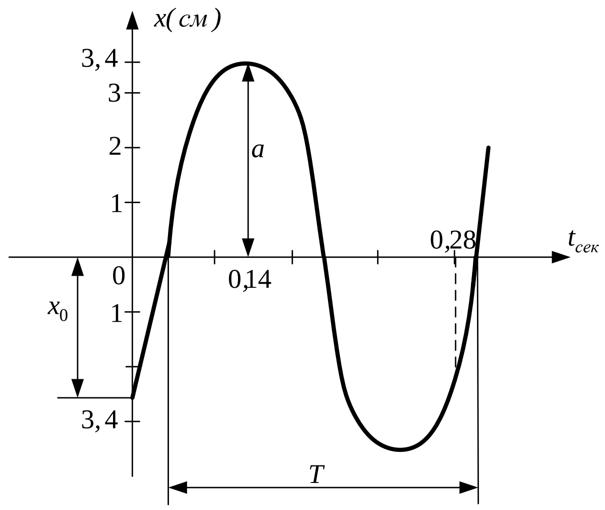


Рисунок 4.15

Відповідь: вантаж здійснює вільні коливання за законом

$$x = -0{,}02 \cdot cos 22{,}4t + 0{,}027 \cdot \sin 22{,}4t \text{ м}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Які сили називають відновлювальними?
2. Які є основні види коливального руху матеріальної точки?
3. Які коливання називають вільними?
4. Що називають періодом вільних коливань?
5. Як визначається колова частота та період вільних коливань?
6. За якою формулою визначається декремент затухань?
7. Що називають збурювальною силою?
8. Що називають биттям?
9. Що називають резонансом?

ЛЕКЦІЯ 5

Динаміка системи матеріальних точок

5.1 Загальні відомості про механічну систему

Системою матеріальних точок називається сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємопо’язані. Розрізняють **вільні і невільні** системи.

Якщо на рух точок системи не накладені наперед задані обмеження, що не залежать від закону руху, то система називається вільною. Невільною називається така система матеріальних точок, на рух яких накладені в’язі.

В’язі поділяються на **геометричні і кінематичні**. Геометричні в’язі накладають обмеження на координати точок системи. Рівняння геометричної в’язі мають вигляд $f(t, x_i, y_i, z_i) = 0$, $(i = 1,2,3 \ldots n)$.

Кінематичні в’язі накладають обмеження на швидкості точок системи. Рівняння кінематичного зв’язку записуються у формі

$$f(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0, \quad (i = 1,2,3 \ldots n).$$

За класифікацією німецького фізика Герца, в’язі поділяються на **голономні і неголономні.**

Голономними називаються в’язі, рівняння яких можуть бути зінтегровані. Неголономними називаються в’язі, в диференціальні рівняння яких явно входять швидкості так, що для цих рівнянь не існує інтегруючого множника і рівняння не можуть бути зінтегровані.

Сили, що діють на механічну систему, поділяються на:

1) зовнішні і внутрішні;

2) активні і реакції в'язів.

Зовнішні сили $\overline{F}^{e}$ – це сили взаємодії між матеріальними точками певної системи та іншими фізичними тілами, що не входять у систему.

Внутрішні сили $\overline{F}^{вн}$ – сили взаємодії між матеріальними точками однієї системи.

Властивості внутрішніх сил

1. Головний вектор внутрішніх сил системи дорівнює нулю:

$$\overline{F}^{вн} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{вн} = 0, \qquad i = 1,2,3 \ldots n.$$

2. Головний момент внутрішніх сил системи відносно деякої точки, наприклад O, дорівнює нулю:

$$\overline{M}_0^{вн} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_0(\overline{F}_i^{вн}) = 0, \qquad i = 1,2,\ldots n.$$

Активні сили $-\overline{F}$, реакція в'язів $-\overline{R}$. Ця класифікація застосовується у разі невільної системи матеріальних точок. Реакціями в'язів $\overline{R}$ називають сили, з якими в'язі діють на систему матеріальних точок.

Реакції в'язів на відміну від активних сил є невідомими величинами і в загальному випадку залежать від закону руху механічної системи.

5.2 Диференціальне рівняння руху системи матеріальних точок

Диференціальне рівняння руху вільної системи матеріальних точок має вигляд:

$$m_i \overline{a}_i = \overline{F}_i^{e} + \overline{F}_i^{вн}, \qquad i = 1,2,3 \ldots n$$

або в координатній формі:

$$m_i \ddot{x}_i = X_i^{e} + X_i^{вн},$$
$$m_i \ddot{y}_i = Y_i^{e} + Y_i^{вн},$$
$$m_i \ddot{z}_i = Z_i^{e} + Z_i^{вн}, \qquad i = 1,2,3 \ldots n.$$

Диференціальне рівняння руху невільної системи матеріальних точок має вигляд

$$m_i \cdot \overline{a}_i = \overline{F}_i + \overline{R}_i, \qquad i = 1,2,3 \ldots n,$$

де $\overline{F}_i$ – рівнодійна активних сил, прикладених до i-точки системи,

$\overline{R}_i$ – рівнодійна реакція в'язів, прикладених до i-точки системи.

Це рівняння в координатній формі:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + R_{ix},$$

$$m_i \frac{d^2 y}{dt^2} = Y_i + R_{iy},$$

$$m_i \frac{d^2 z}{dt^2} = Z_i + R_{iz},$$

де X, Y, Z – проекції рівнодійної активних або заданих сил на осі декартових координат;

R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} – проекції рівнодійної реакції $\overline{R}_i$ на ті ж самі осі координат.

5.3 Центр мас системи

Масою системи, що складається з n матеріальних точок M, називається сума мас точок системи

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

Центром мас механічної системи (centre of mass of the mechanical system) (рис. 5.1) називається геометрична точка C, положення якої визначається радіусом-вектором

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

де $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$ – маса системи.

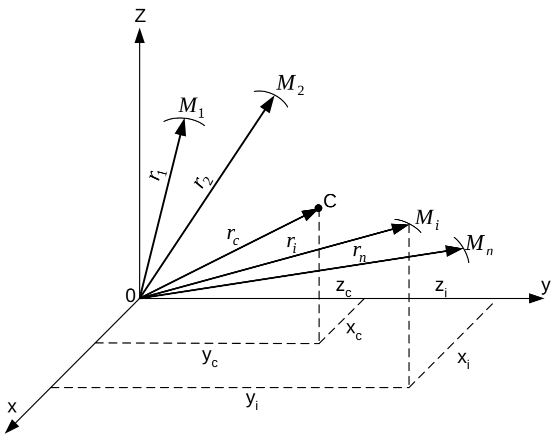


Рисунок 5.1

Координати центра мас системи визначають за формулами

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Центр ваги тіла геометрично завжди збігається з центром мас.

Запитання для самоконтролю

1. Що називають системою матеріальних точок?
2. Яку класифікацію в’язей запропонував німецький фізик Г. Герц?
3. Які класифікації сил застосовують у механіці? У чому їх умовність?
4. Що спільного і чим відрізняються диференціальні рівняння вільної і невільної систем матеріальних точок?
5. Що називають центром мас системи і за якими формулами обчислюють його координати?
6. Які властивості мають внутрішні сили? Чому дорівнює головний вектор і головний момент внутрішніх сил для твердого тіла?

ЛЕКЦІЯ 6

Елементи геометрії мас

6.1 Моменти інерції механічної системи. Радіус інерції

При дослідженні рухів механічної системи недостатньо знати її масу і положення центра мас. Для характеристики розподілу мас в системах, елементи яких беруть участь в обертальному русі, вводять поняття моменту інерції. Розрізняють моменти інерції відносно довільного центра (*полярний момент інерції*), відносно осі (*осьовий момент інерції*), відносно площини (*планарний момент інерції*), а також *відцентрові* моменти інерції.

Моментом інерції матеріальної точки відносно осі (осьовим моментом інерції), називають добуток маси цієї точки m на квадрат її відстані h до цієї осі, наприклад Oz:

$$I_z = m \cdot h^2.$$

Моментом інерції системи (*moment of inertia of the system*), що складається з n матеріальних точок, відносно осі називають суму добутків мас точок системи на квадрати відстаней h_k від точок до осі $I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2$.

У разі неперервного розподілу маси замість суми буде інтеграл, що поширений на всю масу.

Моментом інерції твердого тіла відносно осі, наприклад Oz, називають інтеграл, що поширений на всю масу і має вигляд $I_z = \int\limits_{(m)} h_z^2 dm$ або

$$I_x = \int\limits_{(m)} (y^2 + z^2) \cdot dm,$$

$$I_y = \int\limits_{(m)} (x^2 + z^2) \cdot dm,$$

$$I_z = \int\limits_{(m)} (y^2 + x^2) \cdot dm,$$

де h_z – відстань від осі частини тіла масою dm;

x, y, z – координати частини тіла.

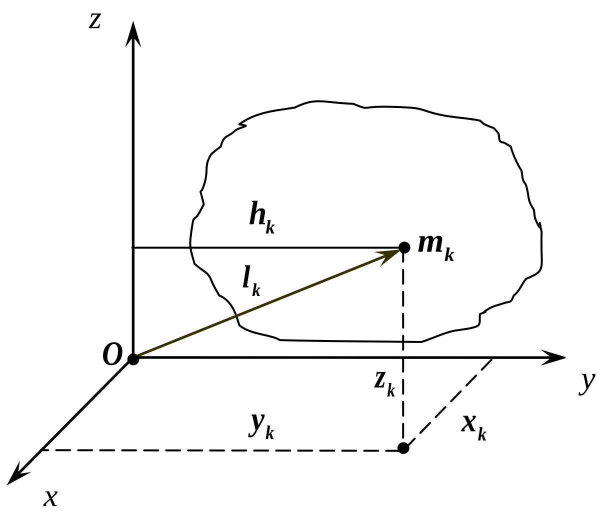


Рисунок 6.1

Полярним моментом інерції механічної системи, що складається з n матеріальних точок, відносно деякого центра O називається сума добутків мас точок системи на квадрати їх відстаней від цього центра (рис. 6.1):

$$I_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k l_k^2 .$$

Полярний момент інерції тіла відносно полюса O:

$$I_0 = \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot dm \cdot$$

Примітка. Полярні та осьові моменти інерції завжди додатні ($I_0, I_x, I_y, I_z > 0$).

Планарним моментом інерції називають скалярну величину, яка дорівнює сумі добутків маси кожної точки системи на квадрат відстані цієї точки до певної площини.

Планарні моменти інерції тіла відносно координатних площин:

$$I_{xoy} = \int_{(m)} z^2 dm; \qquad I_{xoz} = \int_{(m)} y^2 dm; \qquad I_{yoz} = \int_{(m)} x^2 dm.$$

Крім осьових і полярних моментів інерції, при розв'язанні деяких задач динаміки (наприклад, в теорії зрівноважування роторів) користуються **відцентровими моментами інерції (ВМІ).**

Відцентровим моментом інерції механічної системи називають величину, яка дорівнює сумі добутків маси кожної точки системи на дві її координати, тобто: $I_{yz} = \sum_{1}^{n} m_k y_k z_k; \quad I_{xz} = \sum_{1}^{n} m_k x_k z_k; \quad I_{xy} = \sum_{1}^{n} m_k x_k y_k$ або у разі неперервного розподілу маси замість суми буде інтеграл, що поширений на всю масу: $I_{xy} = \int_{(m)} xydm; \quad I_{xz} = \int_{(m)} xzdm; \quad I_{yz} = \int_{(m)} yzdm.$

Відцентрові моменти інерції залежать не тільки від напряму координатних осей, а і від вибору початку координат. Тому, коли іде мова про відцентровий момент інерції у певній точці, то під цим розуміють, що початок координат збігається з цією точкою.

На відміну від осьових, відцентрові моменти інерції можуть бути додатними, від'ємними або перетворюватись на нуль.

Головними осями інерції називаються осі відносно яких відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю.

Центральними осьовим моментом інерції називається момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас.

Залежність між полярними, осьовими і планарними моментами інерції визначається за формулами

$$I_x + I_y + I_z = 2I_0;$$

$$I_{xoy} + I_{xoz} + I_{yoz} = I_0.$$

Тобто, сума осьових моментів інерції дорівнює подвоєному полярному моменту інерції, а сума планарних моментів інерції – полярному моменту інерції.

Властивості головних осей інерції

1. Головна вісь інерції завжди перпендикулярна до площини матеріальної системи тіла.

2. Якщо у тіла є вісь матеріальної симетрії, то ця вісь буде головною центральною віссю.

У ряді випадків для обчислення моментів інерції користуються поняттям радіуса інерції або плеча інерції.

Якщо тіло має форму аналітично невизначену, то момент інерції знаходять за загальною формулою $I_z = m \cdot \rho^2$, де ρ – радіус інерції.

Радіусом інерції (*radius inertia*) тіла ρ називають відстань від осі обертання до точки де потрібно зосередити масу тіла *m*, щоб отримати еквівалентний момент інерції $\rho = \sqrt{I_z / m}$.

6.2 Теорема Гюйгенса – Штейнера

Моменти інерції даного тіла відносно різних осей будуть мати різні значення. Залежність між моментами інерції тіла відносно двох паралельних осей визначається теоремою Гюйгенса – Штейнера.

Момент інерції I_z тіла відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції цього тіла відносно осі Z_C, яка проходить паралельно до неї крізь центр мас системи, і добутку маси тіла на квадрат відстані між осями:

$$I_Z = I_{ZC} + mh^2,$$

де h – відстань між осями.

6.3 Обчислення осьових моментів інерції деяких однорідних тіл

1.Тонкий однорідний стержень довжиною l і масою M.

Підрахуємо момент інерції стержня відносно осі Az, що проходить через його кінець A перпендикулярно до осі стержня. Координатну вісь Ax направляємо вздовж стержня (рис. 6.2).

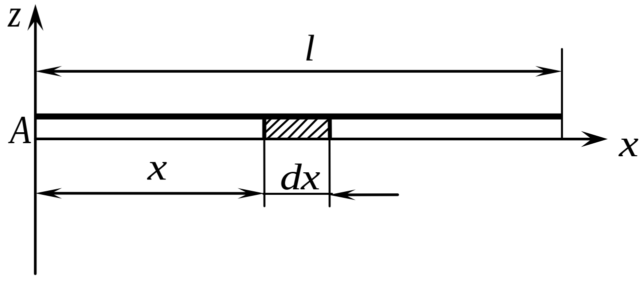


Рисунок 6.2

Оскільки стержень однорідний, то маса елементарного відрізка довжиною dx, який знаходиться на відстані x від осі Az, $dm = \dfrac{M}{l} dx$.

Тоді : $I_{Az} = \int\limits_0^l x^2 dm = \frac{M}{l}\int\limits_0^l x^2 dx = \frac{1}{3}Ml^2$.

2. Тонке однорідне кільце масою M і радіусом R.

Визначимо момент інерції кільця відносно осі Cz, що проходить через його центр мас C перпендикулярно до площини кільця (рис. 6.3). Оскільки всі елементарні маси кільця знаходяться на однаковій відстані R від осі Cz, то:

$$I_{Cz} = \sum_1^n m_k \cdot R^2 = (\sum_1^n m_k) \cdot R^2 = M \cdot R^2 .$$

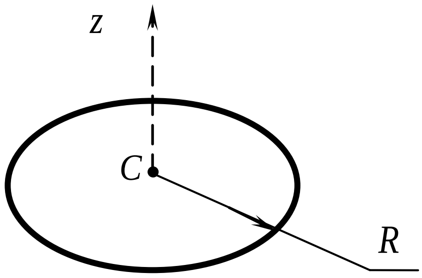


Рисунок 6.3

3. Кругла однорідна пластина чи циліндр радіусом R і масою M.

Підрахуємо момент інерції круглої пластини відносно осі Cz, перпендикулярної до пластини (рис. 6.4). Площа елементарного кільця радіусом r і шириною dr дорівнює $2\pi r \cdot dr$. Маса одиниці площі $\frac{M}{\pi R^2}$.

Тоді маса елементарного кільця $dm = 2\frac{M}{R^2}rdr$, а момент інерції $dI_{Cz} = r^2 \cdot dm = 2\frac{M}{R^2}r^3 dr$.

Для всієї пластини : $I_{Cz} = 2\frac{M}{R^2}\int\limits_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}MR^2$.

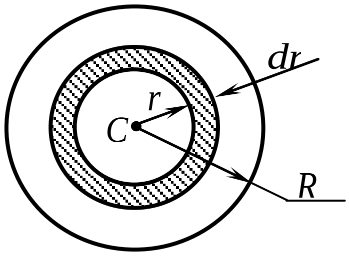


Рисунок 6.4

Момент інерції I_{Cz} для однорідного круглого циліндра масою M і радіусом R відносно його поздовжньої центральної осі (рис. 6.5) буде визначатися такою ж формулою.

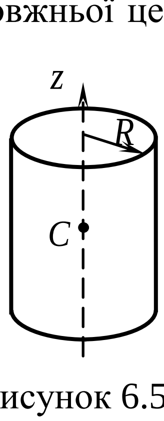


Рисунок 6.5

Запитання для самоконтролю

1. Що називають моментом інерції матеріальної точки відносно осі?
2. Що називають моментом інерції системи?
3. Що називають полярним моментом інерції механічної системи?
4. Що називають планарним моментом інерції?
5. Що називають відцентровим моментом інерції механічної системи?
6. Які осі інерції тіла називають головними осями інерції?
7. Що називають центральним осьовим моментом інерції?
8. Які властивості мають головні осі інерції?
9. Що називають радіусом інерції тіла?
10. Як формулюється теорема Гюйгенса – Штейнера?

ЛЕКЦІЯ 7

Основні теореми динаміки

В лекції наведено основні (загальні) теореми динаміки, які дозволяють розв'язувати задачі, що часто виникають у техніці.

7.1 Теорема про рух центра мас механічної системи

Центр мас механічної системи рухається як вільна матеріальна точка, яка має масу цієї системи і до якої прикладені всі зовнішні сили, що діють на систему: $$m\overline{a}_C = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\,e} = \overline{F}^{\,e}, \qquad i = 1,2,3 \ldots n,$$

де $\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{\,e}$ – сили, які діють на тіло і точки системи з боку тіл, що не входять до системи.

Диференціальні рівняння руху центра мас:

$$m\ddot{x}_c = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}^{e} = F_x^{e};$$

$$m\ddot{y}_c = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}^{e} = F_y^{e};$$

$$m\ddot{z}_c = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}^{e} = F_z^{e}.$$

Наслідки теореми

1. Внутрішні сили безпосередньо не впливають на рух центра мас матеріальної системи.

2. Якщо головний вектор $\overline{F}^e$ зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю ($\overline{F}^e = 0$), то центр мас перебуває у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно залежно від початкових умов.

3. Якщо одна з проекцій головного вектора зовнішніх сил на вісь нерухомої системи координат дорівнює нулю (наприклад $F_{ix}^e = 0$), то проекція швидкості центра мас на цю вісь (V_{cx}) не змінюється, тобто є сталою величиною $V_{cx} = \dot{x}_C = const$.

Задача

По похилій площині (рис. 7.1) призми 1 масою m_1 = 10 кг спускається вантаж 2 (m_2 = 6 кг), який тягне за допомогою невагомої нитки вантаж 3 масою m_3 = 4 кг.

Знайти переміщення призми 1 по гладенькій горизонтальній площині, якщо тіло 2 опустилось по похилій площині на S = 0,5 м.

Розв'язання. Покажемо зовнішні сили, які прикладені до матеріальної системи, що складається з призми 1 та тіл 2, 3. Такими самими є: $P_1 = m_1 g$ – сила ваги призми, $P_2 = m_2 g$ і $P_3 = m_3 g$ – вага відповідно другого та третього вантажів, N – реакція гладенької горизонтальної поверхні.

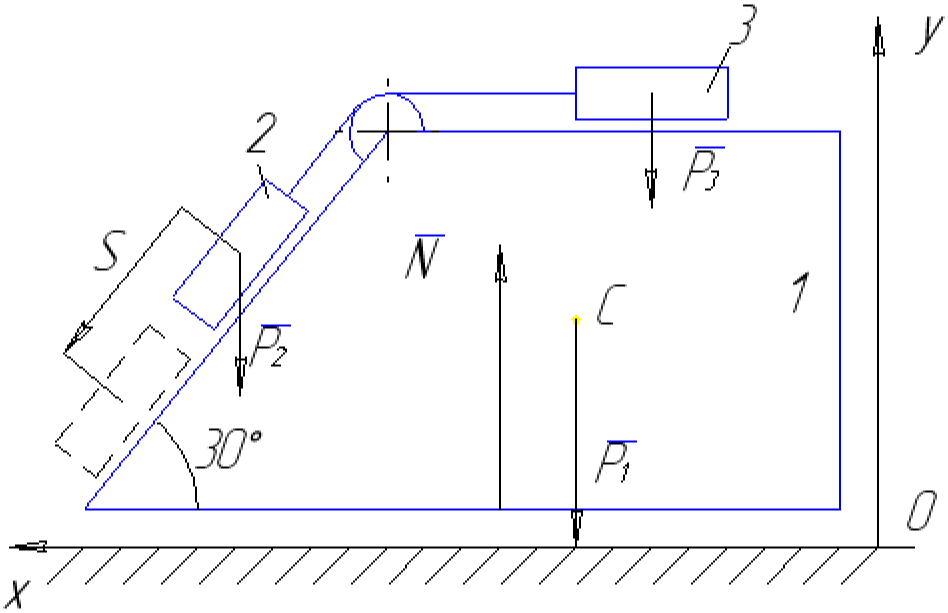


Рисунок 7.1

Запишемо теорему про рух центра мас матеріальної системи в проекціях на вісь X:

$$M\ddot{x}_C = F_X^e, \tag{7.1}$$

де $M = m_1 + m_2 + m_3$;

F_X^e – проекція головного вектора зовнішніх сил на вісь X.

Оскільки $F_X^e = 0$, то $M\ddot{x}_C = 0$. Тоді $M\dot{x}_C = C_1$.

В початковий момент часу система знаходилась у спокої і тому $C_1 = 0$. Із формули (7.1) маємо:

$$Mx_C = C_2 .$$

Таким чином, координата X_C центра мас матеріальної системи залишається сталою незалежно від переміщень тіл, що входять у систему.

Визначимо положення центра мас системи в початковий момент часу:

$$X_C = \frac{\sum_{k=2}^{n} m_k \cdot x_k}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M}. \qquad (7.2)$$

Якщо вантаж 2 переміститься на величину ΔX_2, тоді тіло 3 – на ΔX_3, а призма 1 – ΔX_1 і положення X_C центра мас знайдемо за формулою:

$$X_C = \frac{m_1(x_1 + \Delta x_1) + m_2(x_2 + \Delta x_2) + m_3(x_3 + \Delta x_3)}{M}. \qquad (7.3)$$

Враховуючи (7.2), із формули (7.3) отримаємо:

$$m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 = 0. \qquad (7.4)$$

Переміщення ΔX_2 та ΔX_3 складається із відносного по призмі і переносного разом із призмою.

$$\Delta x_2 = S \cdot cos 30^\circ + \Delta x_1,$$

$$\Delta x_3 = S + \Delta x_1.$$

Тепер із формули (7.4) знаходимо переміщення призми.

$$10 \cdot \Delta x_1 + 6(S \cdot cos 30^\circ + \Delta x_1) + 4(S + \Delta x_1) = 0,$$

$$\Delta x_1 = -\frac{(6 \cdot cos 30^\circ + 4)S}{10 + 6 + 4} = -0{,}229 \, м.$$

Знак «мінус» вказує на те, що призма 1 перемістилася в сторону, протилежну додатному напрямку осі X.

7.2 Теореми про зміну кількості руху матеріальної точки і кількості руху механічної системи

Кількістю руху (мірою механічного руху) матеріальної точки масою m_i називається вектор $\overline{q}_i$, який дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості $\overline{q}_i = m_i \overline{V}_i$.

Кількістю руху системи матеріальних точок називається головний вектор (векторна сума) кількостей руху всіх точок системи:

$$\overline{Q} = \sum_{i=1}^{n} \overline{q}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overline{V}_i .$$

Або кількість руху всієї системи дорівнює кількості руху однієї матеріальної точки, маса якої дорівнює масі системи, а швидкість – швидкості центра мас: $\overline{Q} = m\overline{V}_C$.

Векторній формі цього рівняння відповідають три рівності в координатній формі:

$$Q_x = mV_{CX}; \quad Q_y = mV_{CY}; \quad Q_z = mV_{CZ}.$$

Імпульсом сталої сили $\overline{S}$ називається векторна величина, яка дорівнює добутку сили на час її дії

$$\overline{S} = \overline{F} \cdot \Delta t.$$

Повний імпульс сили $\overline{S} = \int_{t_0}^{t} \overline{F} \cdot dt.$

Проекції імпульсу сили на координатні осі

$$S_X = \int_{t_0}^{t} F_X \cdot dt; \quad S_Y = \int_{t_0}^{t} F_Y \cdot dt; \quad S_Z = \int_{t_0}^{t} F_Z \cdot dt.$$

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі: похідна за часом від кількості руху матеріальної точки геометрично дорівнює рівнодійній сил, прикладених до точки $\frac{d\overline{q}}{dt} = \frac{d(m\overline{V})}{dt} = \overline{R}$:

або $\frac{d(mV_x)}{dt} = R_X; \quad \frac{d(mV_y)}{dt} = R_Y; \quad \frac{d(mV_z)}{dt} = R_Z.$

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі: зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу рівнодійної сили за той же проміжок часу: $m\overline{V_i} - m\overline{V_0} = \overline{S}$, або в проекціях на осі координат:

$$mV_{1x} - mV_{0x} = S_x; \quad mV_{1y} - mV_{0y} = S_y; \quad mV_{1z} - mV_{0z} = S_z.$$

Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок у диференціальній формі: похідна за часом від кількості руху системи матеріальних точок дорівнює головному вектору зовнішніх сил, що діють на систему:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{F}^e$$

або в проекціях на осі координат:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}^e.$$

Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок в інтегральній формі: зміна кількості руху системи за якийсь проміжок часу дорівнює сумі імпульсів, що діють на систему зовнішніх сил, за цей же проміжок часу:

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \overline{S}^e,$$

у проекціях на осі:

$$Q_{lx} - Q_{0x} = \sum_{i=1}^{n} S_{ix}^{e};$$

$$Q_{ly} - Q_{0y} = \sum_{i=1}^{n} S_{iy}^{e};$$

$$Q_{lz} - Q_{0z} = \sum_{i=1}^{n} S_{iz}^{e}.$$

Наслідки теореми

1. Внутрішні сили системи безпосередньо не впливають на зміну вектора кількості руху системи.

2. Якщо сума всіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю $\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^e = 0$, то вектор кількості руху системи буде постійним за модулем і напрямком $\overline{Q} = const\,.\,\overline{Q} = const$ – закон збереження кількості руху системи.

3. Якщо сума проекцій всіх діючих сил на будь-яку вісь F_{ix}^e дорівнює нулю $\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_{ix}^e = 0$, то проекція кількості руху системи на цю вісь є величиною постійною, $Q_x = const$.

Задача По горизонтальній ділянці шляху рухається тіло масою m зі швидкістю 10 м/с, і зустрічає силу опору $\overline{R}$, яка дорівнює 0,2 від ваги тіла (рис. 7.2).

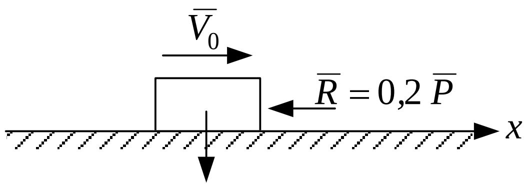


Рисунок 7.2

У деякий момент часу рушійна сила – сила тяги – відмикається, а тіло продовжує рухатися далі. Визначити, через який час тіло зупиниться?

Розв'язання. За теоремою імпульсів

$$mV_x - mV_{ox} = \int_0^t -0{,}2Pdt = -0{,}2Pt,$$

$$V_x = 0, \quad \overline{P} = m\overline{g}, \quad \overline{R} = 0{,}2m\overline{g},$$

$$-mV_{0x} = -0{,}2mgt.$$

Тоді
$$t = \frac{V_{ox}}{0{,}2g} = \frac{10}{0{,}2 \cdot 10} = 5\ c.$$

Відповідь: тіло зупиниться за 5 с після вимкнення тяги.

7.3 Теореми про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і механічної системи

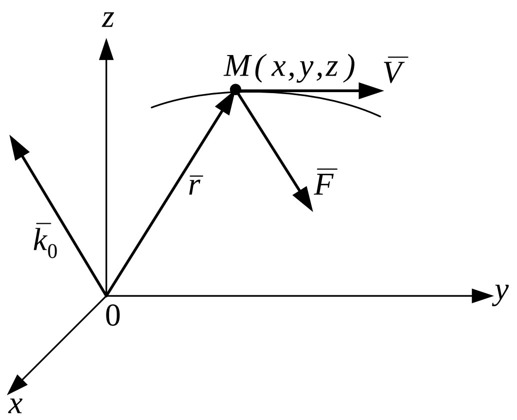


Рисунок 7.3

Моментом кількості руху точки *M* відносно центра О називається величина $\overline{k}_0$, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\overline{r}$ матеріальної точки, проведеного з цього центра, на кількість її руху (рис. 7.3)

$$\overline{k}_0 = \overline{r} \times \overline{q} = \overline{r} \times m\overline{v} \ .$$

Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки: похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомого центра *O* (або осі) дорівнює моменту рівнодійної сил, прикладених до точки, відносно того самого центра (або осі): $\dfrac{d\overline{k}_0}{dt} = \overline{M}_0(\overline{F})$

$$\text{або } \frac{dk_x}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_x(\overline{F}_i); \quad \frac{dk_y}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_y(\overline{F}_i); \quad \frac{dk_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} M_z(F_i).$$

Кінетичним моментом системи матеріальних точок або головним моментом кількості руху системи ($\overline{K}_0$) відносно центра O називається векторна сума моментів кількостей руху точок системи відносно того самого центра:

$$\overline{K}_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{k}_{0i} = \sum \overline{r}_i \times m_i \overline{V}_i \ ,$$

де $\overline{k}_{oi}$ – момент кількості руху *i*-ї точки системи;

$m_i\overline{V}_i$ – кількість руху *i*-ї точки;

$\overline{r}_i$ – радіус-вектор, що з’єднує нерухомий центр *O* з *i*-ю точкою системи.

Кінетичний момент системи відносно координатних осей

$$K_x = \sum_{i=1}^{n} M_x(m_i\overline{V}_i); \quad K_y = \sum_{i=1}^{n} M_y(m_i\overline{V}_i); \quad K_z = \sum_{i=1}^{n} M_z(m_i\overline{V}_i).$$

Кінетичний момент (*kinetic moment*) **твердого тіла відносно осі обертання**

Розглянемо тверде тіло, яке обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю ω (рис. 7.4).

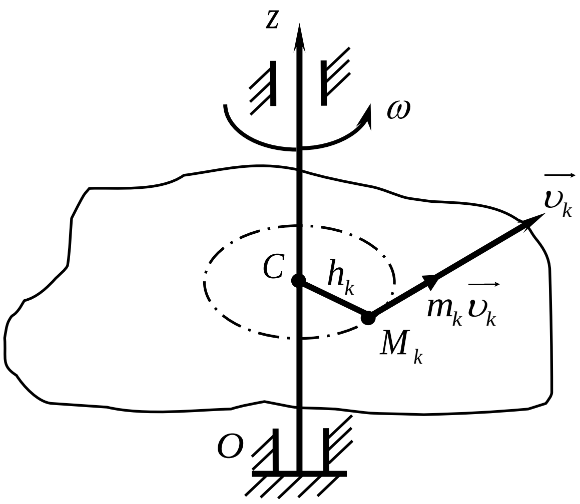


Рисунок 7.4

Для довільної точки тіла M_k масою m_k, яка розташована на відстані h_k від осі обертання і має швидкість $\overrightarrow{\upsilon_k}$, кінетичний момент:

$$K_{kz} = M_z\left(m_k\overrightarrow{\upsilon_k}\right).$$

Але $\upsilon_k = h_k \cdot \omega$, причому вектор кількості руху точки перпендикулярний до h_k, тобто він лежить у площині, перпендикулярній до осі Oz. Отже виходить, що: $K_{kz} = h_k \cdot m_k \cdot \upsilon_k = m_k h_k^2 \omega$.

Кінетичний момент всього тіла: $K_z = \sum_1^n m_k h_k^2 \omega$.

Як було визначено раніше, $\sum_1^n m_k h_k^2$ є моментом інерції тіла відносно осі Oz тому, остаточно, $K_z = J_z \cdot \omega$

Таким чином, **кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання** дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно цієї осі на кутову швидкість тіла.

Знак кінетичного моменту збігається зі знаком кутової швидкості.

Теорема про зміну моменту кількості руху механічної системи: похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи відносно будь-якого нерухомого центра $\overline{K}_0$ дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил системи відносно того ж центра:

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \sum_{i=1}^n \overline{M}_0(\overline{F}_i^{\,e})$$

або в проекціях на осі:

$$\frac{dK_x}{dt}=\sum_{i=1}^{n}M_x(\overline{F}_i^e);\qquad \frac{dK_y}{dt}=\sum_{i=1}^{n}M_y(\overline{F}_i^e);\qquad \frac{dK_z}{dt}=\sum_{i=1}^{n}M_z(\overline{F}_i^e)$$

або похідна за часом від кінетичного моменту системи відносно будь-якої нерухомої осі дорівнює головному моменту зовнішніх сил, діючих на систему відносно тієї ж осі.

Для осей, що рухаються поступово: $\frac{d\overline{K}_C}{dt}=\sum_{i=1}^{n}M_C(\overline{F}_i^e)$.

Наслідки теореми

1. Внутрішні сили безпосередньо не впливають на зміну моменту кількості руху системи.

2. Якщо сума моментів відносно даного центра всіх прикладених до системи зовнішніх сил дорівнює нулю $\overline{M}_0^e=0,$ то $\overline{\text{K}}_0=const$. $\overline{\text{K}}_0=const$ – закон збереження головного моменту кількості руху (закон збереження кінетичного моменту відносно центра *O*). За допомогою даного закону створені всі системи навігації.

3. Якщо $\sum_{i=1}^{n}M_z(\overline{F}_i^e)=0$, то головний момент кількості руху системи відносно цієї осі буде величиною постійною $K_z=const$.

7.4 Диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Припустимо, що певне тверде тіло обертається навколо нерухомої осі Oz під дією системи зовнішніх сил $\left\{\overrightarrow{F_k^e}\right\}$. Тоді:

$$\frac{dK_z}{dt}=\sum_{1}^{n}M_z\left(\overrightarrow{F_k^e}\right),$$

де K_z – кінетичний момент тіла відносно осі Oz.

В той же час, як відомо, $K_z=J_z\cdot\omega$, і попереднє співвідношення набуває вигляду:

$$J_z\frac{d\omega}{dt}=\sum_{1}^{n}M_z\left(\overrightarrow{F_k^e}\right).$$

Отримана формула і є диференціальним рівнянням обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

При обчисленні суми моментів зовнішніх сил відносно осі обертання твердого тіла потрібно мати на увазі, що реакції ідеальних в’язей (реакції опор осі) в рівняння не входять, бо лінії їх дії перетинають вісь.

З диференціального рівняння обертання тіла виходить:

1. Якщо $\sum M_z(\overline{F_k^e})=const$, то $\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}$ також є сталою, тобто обертання тіла є рівнозмінним.

2. Якщо $\sum M_z(\overline{F_k^e}) = 0$, $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt} = 0$ і $\omega = const$ – маємо випадок рівномірного обертання тіла навколо осі.

Примітка. Кінетичний момент системи матеріальних точок (головний момент кількості руху системи) позначають $\overline{K}_0$ або $\overline{L}_0$.

Задача. (Використання теорем про рух центра мас та кінетичного моменту для дослідження руху матеріальної системи)

Матеріальна система (рис. 7.5) починає рухатись із стану спокою під дією моменту М, що прикладається до тіла 1. Осі тіл 1 та 2 горизонтальні. Коефіцієнт тертя ковзання f. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Масою паса знехтувати. Тіло 1 – однорідний циліндр.

Визначити прискорення тіла 3, натяг S_5 у веденій 5 та ведучій 4 (S_4) частині паса (прийняти $S_4 = 2S_5$), зусилля в точці контакту тіл 1 та 2, реакції в'язей циліндричних (нерухомих) шарнірів тіл 1, 2 та 3.

Прийняти : $R_1 = 0{,}25$ м; $R_2 = 0{,}45$ м; $r_2 = 0{,}15$ м; $i_2 = 0{,}4$ м; $L = 0{,}7$ м; $m_1 = 0{,}5$ кг; $m_2 = 5$ кг; $m_3 = 4$ кг; $M = 3t^3$ Н·м; $t_1 = 2$ с; $f = 0{,}4$.

Розв'язання. Розглянемо окремо рух кожного тіла матеріальної системи (рис. 7.5).

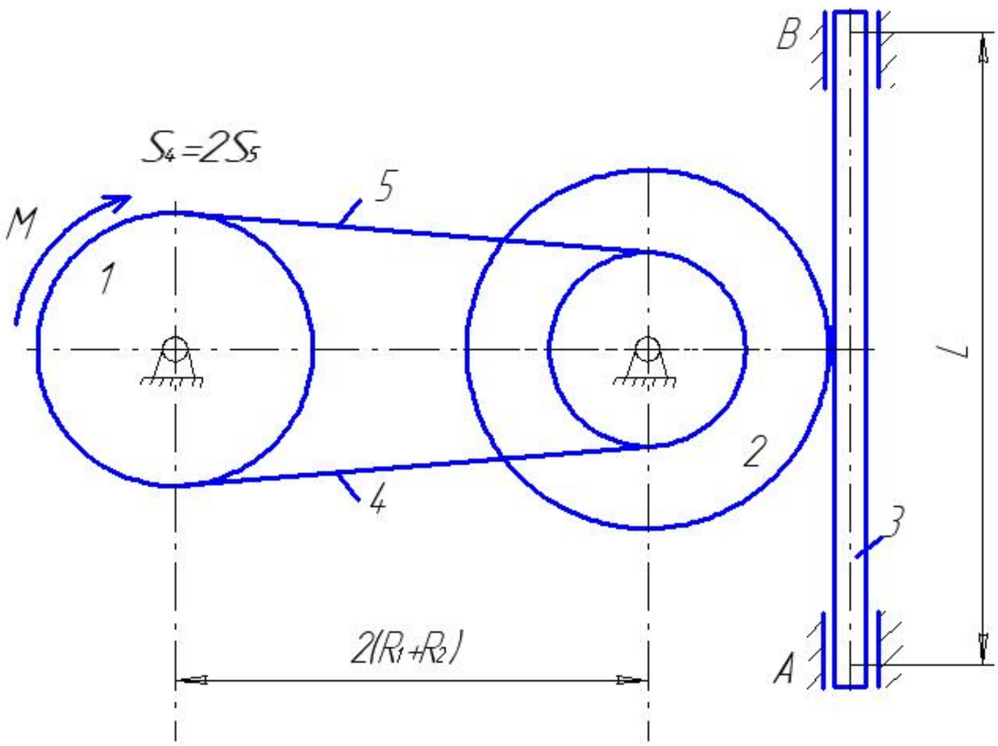


Рисунок 7.5

Визначення прискорення тіла 3

Однорідне тіло 1 обертається навколо горизонтальної осі під дією моменту М (рис. 7.6) і до нього прикладені зовнішні сили: сила тяжіння

$P_1 = m_1g$; реакції циліндричного шарніра X_1 та Y_1; зусилля у ланках паса S_5 та S_4.

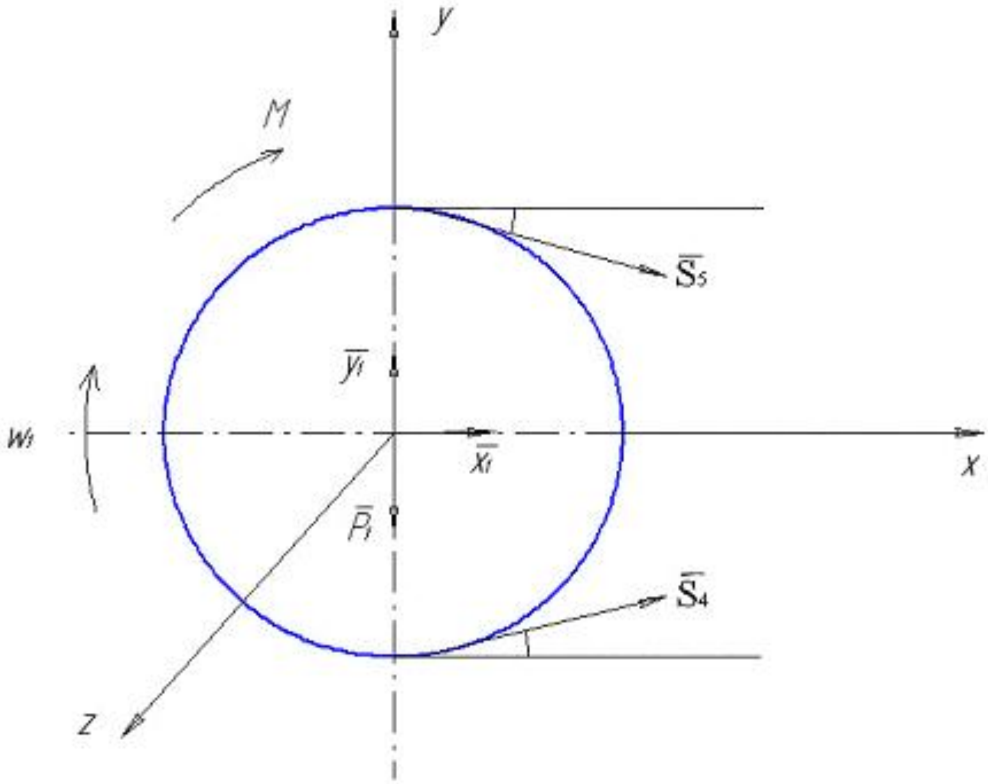


Рисунок 7.6

Запишемо диференціальне рівняння обертання тіла 1 навколо нерухомої осі Z:

$$I_{Z1}\ddot{\varphi}_1 = M + S_5R_1 - S_4 \cdot R_1 . \qquad (7.5)$$

Необхідно врахувати, що момент сили або пари сил буде додатним, якщо він діє у напрямку руху тіла. Так, у рівнянні (7.5) момент сили S_5 та пари сил з моментом M беремо із додатним знаком, а момент сили S_4 – з від'ємним.

Момент інерції тіла 1 відносно осі Z

$$I_{Z1} = \frac{1}{2}m_1R_1^2 . \qquad (7.6)$$

На тіло 2 (рис 7.7) під час руху діють зовнішні сили: сила тяжіння $P_2 = m_2g$, реакції нерухомого шарніра X_2 та Y_2, зусилля у ланках паса S_5' та S_4', реакції тіла 3 – S_2 та N_2.

У диференціальному рівнянні руху тіла 2 (рис. 7.7) навколо горизонтальної осі Z

$$I_{Z2} \cdot \ddot{\varphi}_2 = -S_5'r_2 + S_4'r_2 - S_2R_2 \qquad (7.7)$$

сили $S_5' = S_5$ та $S_4' = S_4$, а момент інерції тіла 2 відносно осі Z знайдемо через радіус інерції i_2

$$I_{Z2} = m_2 i_2^2 . \tag{7.8}$$

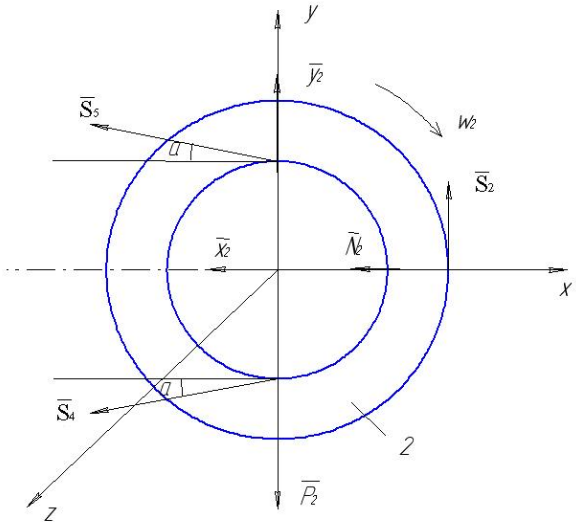


Рисунок 7.7

Для тіла 3 (рис. 7.8), що переміщується під дією сили тяжіння $P_3 = m_3g$, реакції нерухомих шарнірів N_A та N_B, реакції S_2' та N_2' тіла 2, запишемо теорему про рух центра мас в проекціях на вісь Y (вісь Y направляється в сторону руху тіла 3)

$$m_3 \ddot{y}_3 = P_3 + S_2' . \tag{7.9}$$

Звичайно $S_2' = S_2$.

Якщо диференціальні рівняння (7.5), (7.7) і (7.9) розглянути з кінематичними співвідношеннями, то

$$\ddot{y}_3 = \ddot{\varphi}_2 R_2 , \;\; \ddot{\varphi}_2 r_2 = \ddot{\varphi}_1 R_1 . \tag{7.10}$$

Тоді отримаємо п’ять рівнянь з невідомими $\ddot{y}_3, \ddot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_1, S_5, S_2$, $(S_4 = 2S_5)$.

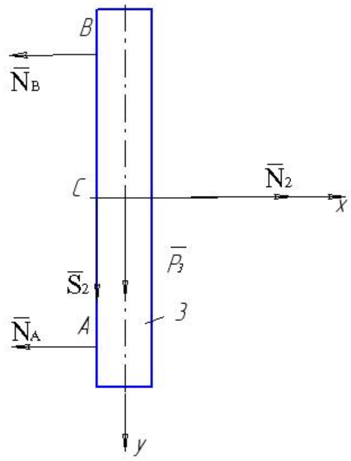


Рисунок 7.8

Розв’язуючи систему рівнянь (7.5), (7.7), (7.9), (7.10), і, враховуючи (7.6) та (7.8), маємо

$$S_5 = \frac{M}{R_1} - \frac{1}{2} m_1 \frac{r_2}{R_2} \ddot{y}_3,$$
$$S_2 = m_3(\ddot{y}_3 - g),$$
$$\ddot{Y}_3 = \frac{M \cdot r_2 + m_3 R_1 R_2 \cdot g}{R_1 (m_2 \frac{i_2^2}{R_2} + \frac{1}{2} m_1 \frac{r_2^2}{R_2} + m_3 R_2)}.$$

Або, підставляючи дані умови задачі, отримаємо

$$\ddot{Y}_3 = 4{,}92 + 0{,}5t^3,$$
$$S_2 = 4y_3^3 - 39{,}24\ddot{y}_3,$$
$$S_5 = 12t^3 - 0{,}083\ddot{y}_3.$$

При $t_1 = 2$ с, $\ddot{y}_3 = 8{,}92 \frac{м}{с^2}, S_5 = 95{,}26 H, S_2 = -3{,}6 H.$

7.5 Теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки і механічної системи

7.5.1 Кінетична енергія (*kinetic energy*)

Кінетичною енергією матеріальної точки називається скалярна міра механічного руху в нерухомій системі координат, що дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості $T = \frac{mV^2}{2}$.

Кінетичною енергією системи матеріальних точок називають суму кінетичних енергій всіх точок, що входять у систему:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i V_i^2 ,$$

де m_i – маса *i*-точки системи;

V_i – швидкість *i*-точки.

Якщо система складається з кількох твердих тіл, то її кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій всіх тіл, що входять в систему.

1. При поступальному русі твердого тіла:

$$T = \frac{M \cdot V_C^2}{2}.$$

2. При обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі z:

$$T = \frac{1}{2} I_z \cdot \omega^2.$$

3. При плоскопаралельному русі:

$$T = \frac{MV_C^2}{2} + \frac{1}{2} I_{cz} \cdot \omega^2,$$

де M – маса тіла;

V_c – швидкість центра мас тіла;

I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання z;

I_{zc} – момент інерції тіла відносно осі Z_c, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно до площини руху;

ω – миттєва кутова швидкість тіла.

Наприклад, для колеса масою М, яке котиться без ковзання по прямолінійній рейці (рис. 7.9).

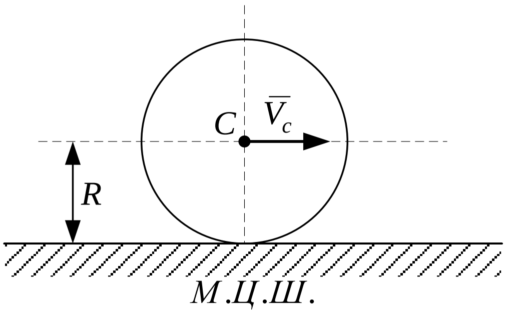


Рисунок 7.9

М. Ц. Ш. – миттєвий центр швидкостей.

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{MR^2}{2} \cdot \left(\frac{V_c}{R} \right)^2 = \frac{3}{4} M V_c^2 .$$

7.5.2 Робота сили (*work of force*)

Елементарною роботою δA **сили** F називається скалярна величина, що дорівнює скалярному добутку $\overline{F}$ на вектор елементарного переміщення $d\bar{r}$ точки її прикладення (рис. 7.10):

$$\delta A = \overline{F} \cdot d\bar{r} = F \cdot dr \cdot \cos\left(\overline{F}, d\bar{r}\right).$$

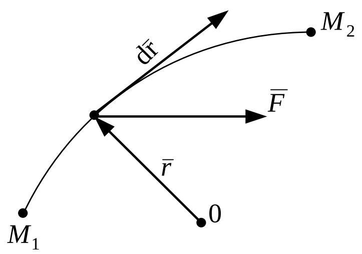


Рисунок 7.10

Якщо під дією сили $\overline{F}$ матеріальна точка переміщується з положення M_1 в положення M_2, то робота сили $\overline{F}$ на шляху $M_1 M_2$ дорівнює

$$A = \int_{M_1 M_2} \delta A = \int_{M_1 M_2} \overline{F} \cdot d\bar{r} = \int_{M_1 M_2} F \cdot dr \cdot \cos(\overline{F}, \mathrm{dr}) .$$

Враховуючи властивості скалярного добутку, маємо

$$dA = F_X dx + F_Y dy + F_Z dz .$$

Робота на скінченному переміщенні

$$A_{M_1 M_2} = \int_{M_1 M_2} F_X dx + F_Y d_y + F_Z dz .$$

Одиниця вимірювання роботи $[A] = H \cdot M = 1Дж = 1 \frac{кг \cdot м^2}{c^2}$.

1. Робота сталої сили $\overline{F}$ на прямолінійному переміщенні S (рис. 7.11):

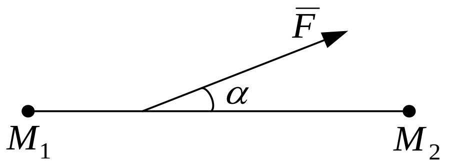


Рисунок 7.11

$$A = F \cdot S \cdot \cos\alpha.$$

2. Робота сили тяжіння (рис. 7.12)

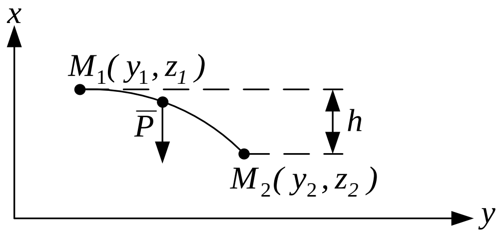


Рисунок 7.12

$A = \pm F \cdot h$

(„+” коли точка опускається,

„–” коли точка підіймається),

де h – різниця кінцевого і початкового положень.

3. Робота пружної сили:

$$A = \frac{c}{2}\left[(\Delta l_{поч})^2 - (\Delta l_{кін})^2\right],$$

де c – коефіцієнт пружності;

$\Delta l_{поч}$ – початкова деформація пружини;

$\Delta l_{кін}$ – кінцева деформація пружини.

4. Робота сили тертя:

$$A = -F_{TP} \cdot S.$$

5. Робота сили, прикладеної до твердого тіла, що обертається:

$$A = M_{OZ} \cdot \varphi,$$

де $M_{OZ} = const$ – момент сили відносно осі обертання;

φ – кут повороту.

Потужність (*power*) – це робота, виконана в одиницю часу.

$$N = \frac{dA}{dt} = \overline{F} \cdot V = F_\tau \cdot V,$$

де F_τ – проекція сили на дотичну вісь;

V – швидкість точки прикладення сили.

Потужність сили, прикладеної до тіла, що обертається

$$N = M_Z(\overline{F}) \cdot \omega,$$

де $M_Z(\overline{F})$ – момент сили відносно осі обертання z;

ω – кутова швидкість тіла.

7.5.3 Теореми про зміну кінетичної енергії

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки: приріст кінетичної енергії точки на деякому відрізку дуги її траєкторії дорівнює роботі рівнодійної всіх сил, що прикладені до точки на цьому самому відрізку дуги траєкторії:

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A,$$

де V_2 – швидкість точки в кінці пройденого шляху;

V_1 – швидкість точки на початку шляху;

$A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ – алгебраїчна сума роботи сил, прикладених до точки, на пройденому шляху.

Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи в інтегральній формі: приріст кінетичної енергії системи матеріальних точок за деякий проміжок часу дорівнює сумі робіт зовнішніх сил, що діють на точки системи, протягом розглянутого проміжку часу

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i ,$$

де T_0, T – кінетична енергія системи відповідно в початковому і кінцевому її положеннях;

$\sum_{i=1}^{n} A_i$ – сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на систему.

У випадку абсолютно твердого тіла (незмінна система), внутрішні сили урівноважуються і їхня робота дорівнює нулю. Також дорівнює нулю робота ідеальних зв'язків.

Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи у диференціальній формі:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} N_i ,$$

тобто, похідна від кінетичної енергії за часом дорівнює сумі потужностей усіх зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до системи.

Задача. Використання теореми про зміну кінетичної енергії для вивчення руху матеріальної системи

Матеріальна система (рис. 7.13) рухається під дією моменту М, що діє на тіло 1. Осі тіла 1 та 2 горизонтальні. В точках контакту тіл та паса ковзання відсутнє. Масою тіла знехтувати. Тіло 1 – однорідний циліндр.

Визначити прискорення тіла 3 та кутові прискорення тіл 1 та 2 якщо: R_1 = 0,25 м; R_2 = 0,45 м; r_2 = 0,15 м; i_2 = 0,4 м; l = 0,7 м; m_1 = 0,5 кг; m_2 = 5 кг; m_3 = 4 кг; $M = 3t^3$ Н·м; t_2 = 2 с.

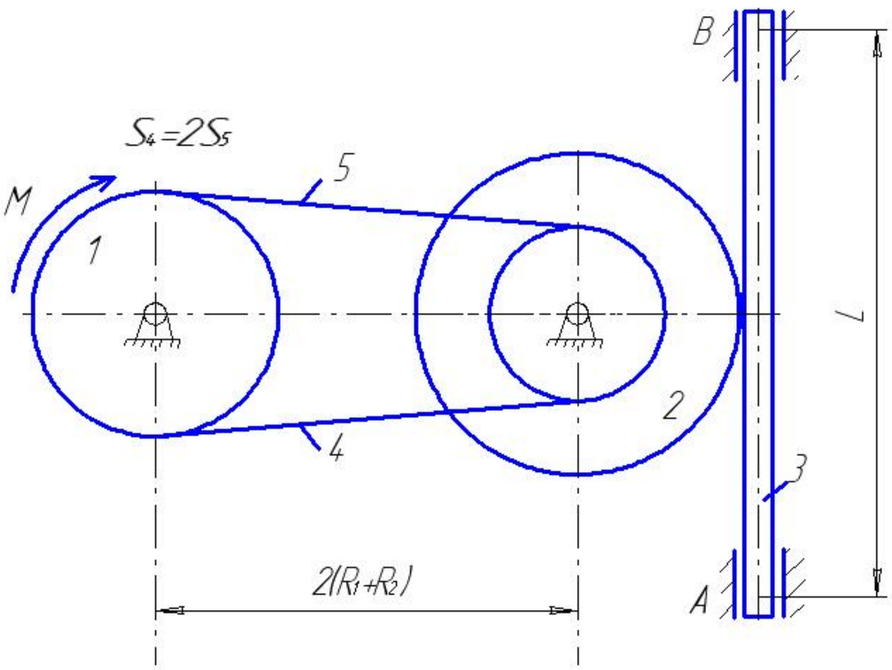


Рисунок 7.13

Розв'язання. Для дослідження руху матеріальної системи (рис. 7.13) використаємо теорему про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i, \qquad (7.11)$$

де T – кінетична енергія системи;

N^e – потужність зовнішніх сил системи;

N^i – потужність внутрішніх сил системи;

$N^i = 0$ – тіла тверді, а пас абсолютно гнучкий та нерозтяжний.

Кінетична енергія системи складається із кінетичної енергії тіл, що входять в систему

$$T=T_1+T_2+T_3.$$

Тіла 1 та 2 обертаються навколо нерухомих горизонтальних осей і їх кінетична енергія знаходиться за формулами:

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2, T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2, \qquad (7.12)$$

де $I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_1^2$ – момент інерції тіла 1;

$I_2 = m_2 i_2^2$ – момент інерції тіла 2;

w_1, w_2 – кутові швидкості тіл.

Тіло 3 переміщується поступально зі швидкістю V_3, тоді

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2. \qquad (7.13)$$

Взаємозв’язок між кінематичними характеристиками руху тіл (рис. 7.14)

$$\omega_2 = \frac{V_3}{R_2}\ ,\ \omega_1 = \omega_2 \frac{r_2}{R_1} = V_3 \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2}\ . \qquad (7.14)$$

Запишемо кінетичну енергію системи, враховуючи (7.12), (7.13) та (7.14), як функцію швидкості V_3 тіла 3

$$T = \frac{V_3^2}{4R_2^2}(m_1 r_2^2 + 2m_2 i_2^2 + 2m_3 R_2^2)\ . \qquad (7.15)$$

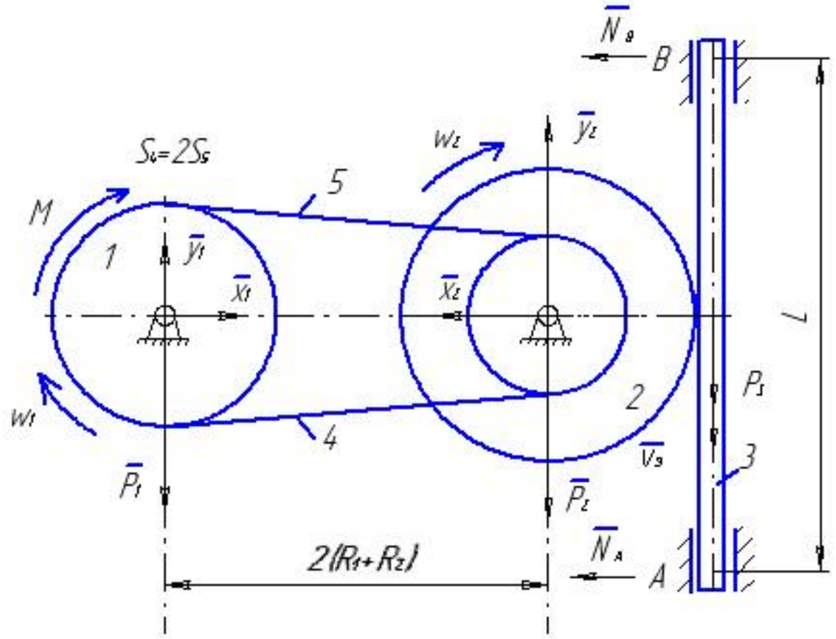


Рисунок 7.14

Знайдемо потужність зовнішніх сил (рис. 7.14) матеріальної системи: сили тяжіння $P_1 = m_1 g$, $P_2 = m_2 g$, $P_3 = m_3 g$ моменту M; реакції в’язей нерухомих (циліндричних) шарнірів X_1, Y_1, X_2, Y_2, N_A, N_B.

Потужність сил X_1, Y_1, P_1, X_2, Y_2, P_2, N_A і N_B дорівнює нулю тому, що точки прикладення сил не переміщуються. Тоді потужність N^e зовнішніх сил буде складатися із потужності моменту M та сили тяжіння тіла 3 – P_3.

$$N^e = N(M) + N(\overline{P}_3),$$

де $N(M) = M \cdot \omega_1 = MV_3 \dfrac{r_2}{R_1 R_2}$;

$$N(\overline{P}_3) = P_3 \cdot V_3 = m_3 g V_3.$$

Або

$$N^e = V_3\left(m_3 g + M \frac{r_2}{R_1 \cdot R_2}\right). \qquad (7.16)$$

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи з врахуванням (7.15) та (7.16) запишеться:

$$\frac{1}{4R_2^2}(m_2r_2^2+2m_2i_2^2+2m_3R_2^2)\frac{dV_3^2}{dt}=V_3(m_3g+M\,\frac{r_2}{R_1\cdot R_2}).$$

Оскільки $\dfrac{dV_3^2}{dt}=2V_3\cdot a_3$, тоді

$$a_3=\frac{4R_2^2(m_3g+M\,\dfrac{r_2}{R_1\cdot R_2})}{m_1r_2^2+2m_2i_2^2+2m_3R_2^2}\,. \qquad (7.17)$$

Кутові прискорення тіл

$$\ddot{\varphi}=\frac{a_3}{R_2}\ ,\quad \ddot{\varphi}_1=a_3\,\frac{r_2}{R_1\cdot R_2}\,.$$

Підставляючи дані з умови задачі, отримаємо :

$$a_3=(4{,}93+0{,}50t^3)\,{}^{M}\!/_{c}\,,$$

$$\ddot{\varphi}_2=(10{,}96+1{,}11t^3)\frac{1}{c^2}\,,$$

$$\ddot{\varphi}_1=(6{,}57+0{,}67t^3)\frac{1}{c^2}\,.$$

При t_1 = 2 с, $a_3=8{,}93\,{}^{M}\!/_{c^2}$, $\ddot{\varphi}_2=19{,}84\frac{1}{c^2}$, $\ddot{\varphi}_1=11{,}9\frac{1}{c^2}$.

Запитання для самоконтролю

1. У чому суть теореми про рух центра мас механічної системи і які наслідки випливають із неї?
2. Що називають кількістю руху матеріальної точки?
3. Що називають кількістю руху системи матеріальних точок?
4. Що називають імпульсом сили?
5. У чому суть теореми про зміну кількості руху системи матеріальних точок і які наслідки випливають із неї?
6. Що називають моментом кількості руху точки відносно деякого центра?
7. Що називають кінетичним моментом системи матеріальних точок або головним моментом кількості руху системи відносно деякого центра?

8. Чому дорівнює кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомої осі обертання?
9. У чому суть теореми про зміну моменту кількості руху механічної системи і які наслідки випливають із неї?
10. Як записується диференціальне рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі?
11. Що називають кінетичною енергією матеріальної точки?
12. Що називають кінетичною енергією системи матеріальних точок?
13. Що називають елементарною роботою?
14. Що називають потужністю?
15. У чому суть теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи?

ЛЕКЦІЯ 8

Елементи аналітичної механіки. Метод кінетостатики

Розглянуті вище рівняння руху матеріальних об'єктів (матеріальних точок, твердих тіл і механічних систем) і загальні теореми, що є висновками з них, виходять безпосередньо із законів Галілея – Ньютона.

Але є багато таких інженерних задач динаміки, розв'язання яких методами ньютонівської механіки потребує дуже великих зусиль, а інколи і взагалі неможливе. В таких випадках користуються методами іншої, так званої ***аналітичної механіки,*** в основу яких покладено принципи, відмінні від ньютонівських. Засновником цієї вітки механіки був Лейбниць.

Аналітична механіка являє собою великий, багатий ідеями, розділ механіки. Її положення поширюються на такі області, як теорія відносності і квантова механіка, де закони Галілея – Ньютона не можуть бути застосовані.

Для спрощення, щоб не виходити за межі ньютоновської механіки, будемо розглядати ці принципи як такі, що є наслідками законів класичної механіки з додаванням до них аксіоми про звільнення від в'язей. В той же час потрібно розуміти, що це не теореми, які доводяться за допомогою законів Галілея – Ньютона, а саме принципи. Якщо взяти їх за основу, можна отримати і закони Ньютона, і всю ньютонівську механіку.

Розробниками основних принципів аналітичної механіки були французькі вчені Даламбер (1717-1783) і Лагранж (1736-1813).

Принцип Даламбера дозволяє приводити всі задачі, які відносяться до руху тіл, до більш простої задачі про рівновагу.

Сучасне трактування принципу Даламбера з використанням поняття *сили інерції*, яке було уведено в механіку на початку XIX століття, є фундаментом важливого методу технічної механіки – *методу кінетостатики.*

Кінетостатика (*kinetostatics*)– галузь технічної механіки, метою якої є застосування методів статики до розв'язання динамічних задач теорії машин і механізмів.

Методом кінетостатики називається формальний прийом, що дає можливість записати рівняння руху у вигляді рівнянь рівноваги.

8.1 Принцип Даламбера для матеріальної точки

Принцип Даламбера дає можливість врівноважити систему сил.

Для невільної матеріальної точки, що рухається, в кожний момент часу векторна сума активних сил, що прикладені до точки, реакції в'язів і сил інерції дорівнює нулю:

$$\overline{F} + \overline{R} + \overline{\Phi} = 0,$$

де $\overline{F}, \overline{\Phi}$ – рівнодійні активних сил і сил інерції, прикладених до точки; $\overline{R}$ – реакція в'язів.

Тобто, рівняння руху записується у вигляді умови рівноваги статики.

Силою інерції $\overline{\Phi}$ **матеріальної точки** називається вектор, який дорівнює за модулем добутку маси точки на її прискорення і спрямований у бік, протилежний прискоренню точки: $\overline{\Phi} = -m \cdot \overline{a}$. Її називають даламберовою силою інерції.

При координатному способі задання руху в системі відліку $Oxyz$ векторне рівняння переходить в систему скалярних рівнянь:

$$F_x + R_x + \Phi_x = 0;$$

$$F_y + R_y + \Phi_y = 0;$$

$$F_z + R_z + \Phi_z = 0.$$

Якщо ж рух точки задано натуральним способом, то будемо мати систему таких рівнянь:

$$F_\tau + R_\tau + \Phi_\tau = 0;$$

$$F_n + R_n + \Phi_n = 0;$$

$$F_b + R_b + \Phi_b = 0.$$

8.2 Принцип Даламбера для матеріальної системи

Для невільної матеріальної системи, що рухається, в кожний момент часу векторні суми головних векторів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції і головних моментів цих же сил відносно вибраного центра дорівнюють нулю.

За принципом Даламбера:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{R}_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{\Phi}_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_0(\bar{F}_i) + \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_0(\bar{R}_i) + \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_0(\bar{\Phi}_i) = 0.$$

Принцип Даламбера дає єдиний метод складання диференціальних рівнянь руху невільних систем.

Векторним рівнянням відповідають шість алгебраїчних рівнянь в координатній формі:

$$\sum_{1}^{n}\left(F_{kx} + R_{kx} + \Phi_{kx}\right) = 0; \quad \sum_{1}^{n}\left(M_x\left(\overrightarrow{F_k}\right) + M_x\left(\overrightarrow{R_k}\right) + M_x\left(\overrightarrow{\Phi_k}\right)\right) = 0;$$

$$\sum_{1}^{n}\left(F_{ky} + R_{ky} + \Phi_{ky}\right) = 0; \quad \sum_{1}^{n}\left(M_y\left(\overrightarrow{F_k}\right) + M_y\left(\overrightarrow{R_k}\right) + M_y\left(\overrightarrow{\Phi_k}\right)\right) = 0;$$

$$\sum_{1}^{n}\left(F_{kz} + R_{kz} + \Phi_{kz}\right) = 0; \quad \sum_{1}^{n}\left(M_z\left(\overrightarrow{F_k}\right) + M_z\left(\overrightarrow{R_k}\right) + M_z\left(\overrightarrow{\Phi_k}\right)\right) = 0.$$

Оскільки головний вектор і головний момент внутрішніх сил дорівнюють нулю, то в рівняннях внутрішні сили відсутні.

8.3 Приведення сил інерції

Сили інерції для кожного тіла системи приводяться окремо.

Головний вектор сил інерції $\bar{\Phi}$ твердого тіла дорівнює добутку маси тіла М на прискорення його центра мас $\bar{a}_C$ і спрямований у бік, протилежний цьому прискоренню $\bar{\Phi} = -M \cdot \bar{a}_C$.

а) поступальний рух – сили інерції приводяться до $\bar{\Phi}_C$, який прикладено у центрі мас тіла;

б) плоский рух твердого тіла (тіло має площину матеріальної симетрії, яка збігається з площиною руху) – сили інерції приводяться до головного вектора $\bar{\Phi}_C = -M \cdot \bar{a}_C$ ($\bar{a}_c$ – прискорення центра мас) і головного моменту $\overline{M}_c^{ін} = -I_{zc} \cdot \bar{\varepsilon}$. Знак « – » означає, що момент пари сил інерції спрямований у бік, протилежний кутовому прискоренню тіла $\bar{\varepsilon}$.

в) обертальний рух твердого тіла:

головний момент $\overline{M}^i = -I_Z \cdot \bar{\varepsilon},$

де I_Z − момент інерції відносно осі обертання.

Якщо центр маси системи лежить на осі обертання, то сили інерції приводяться тільки до пари $\overline{M}^i$.

Задача. Застосування принципу Даламбера для дослідження обертального руху твердого тіла

Система тіл, що складається з стержня 1 вагою P, однорідного диска 2 та кільця 3, що мають відповідно вагу Q_2 та Q_3 та радіус R, обертається навколо горизонтальної осі O (рис. 8.1) під дією пари сил з моментом M. Знайти кутове прискорення, кутову швидкість та зусилля в опорах осі при повороті матеріальної системи на кут α, якщо в початковий момент часу система знаходилася в спокої.

Прийняти: P = 10 Н; Q_2 = 20 Н; M = 30 Нм; Q_3 = 10 Н; R = 0,2 м; AO = 0,8 м; α = 60°.

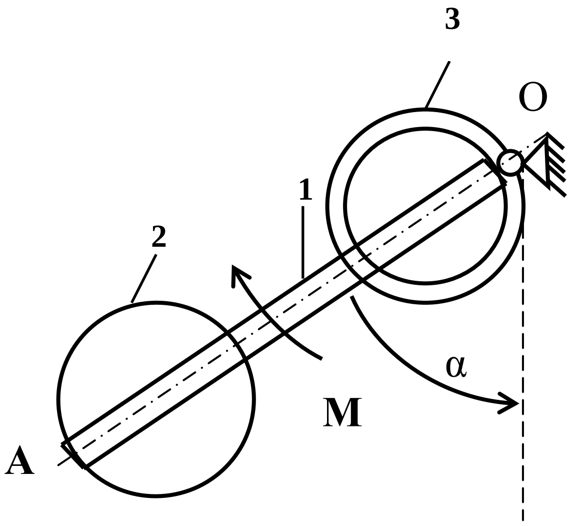


Рисунок 8.1

Розв'язання. Для дослідження системи використаємо ***метод кінетостатики*** в проекціях на осі *x, y* для плоскої довільної системи сил.

$$\begin{aligned} &F_x + R_x + F_x^{in} = 0, \\ &F_y + R_y + F_y^{in} = 0, \\ &M_z^R + M_z^F + M_z^{in} = 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Визначення кутового прискорення ε системи тіл

Кутове прискорення тіл знайдемо на підставі третього рівняння системи (8.1)

$$M_z^R + M_z^F + M_z^{in} = 0. \tag{8.2}$$

На систему тіл діють активні сили $\overline{Q_1}, \overline{Q_2}, \overline{P}$ та пара сил з моментом M (рис. 8.1); переміщенню тіл перешкоджає в'язь: циліндричний шарнір O, дію якого на тіло, на підставі аксіоми звільнення від в'язів, замінюємо реакціями в'язей $\overline{X}_o$ та $\overline{Y}_o$.

Знайдемо головний момент сил інерції M_z^{in}

$$M_z^{in} = I_z \cdot \varepsilon. \tag{8.3}$$

Момент інерції тіл I_z, відносно осі Z, знайдемо як суму моментів інерції тіл 1, 2, 3 відносно осі Z:

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}.$$

Момент інерції диска 2 відносно осі Z:

$$I_{z2} = \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (OA - R)^2 = \frac{Q_2}{g}\left[\frac{1}{2} R^2 + (OA - R)^2\right] =$$

$$= \frac{20}{9{,}81}\left[\frac{1}{2} 0{,}2^2 + (0{,}8 - 0{,}2)^2\right] = 0{,}775 \quad \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Момент інерції кільця 3 відносно осі Z:

$$I_{z3} = m_3 R^2 + m_3 R^2 = 2\frac{Q_3}{g} R^2 = 2 \cdot \frac{10}{9{,}81} \cdot 0{,}2^2 = 0{,}082 \text{ кг·м}^2.$$

Момент інерції стержня 1 відносно осі Z:

$$I_{z1} = \frac{1}{3} m_1 \cdot OA^2 = \frac{1}{3}\frac{P_1}{g} \cdot OA^2 = \frac{1}{3} \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}8^2 = 0.217 \text{ кг·м}^2.$$

Тоді $I_z = 0{,}775 + 0{,}082 + 0{,}217 = 1{,}07$ кг·м^2.

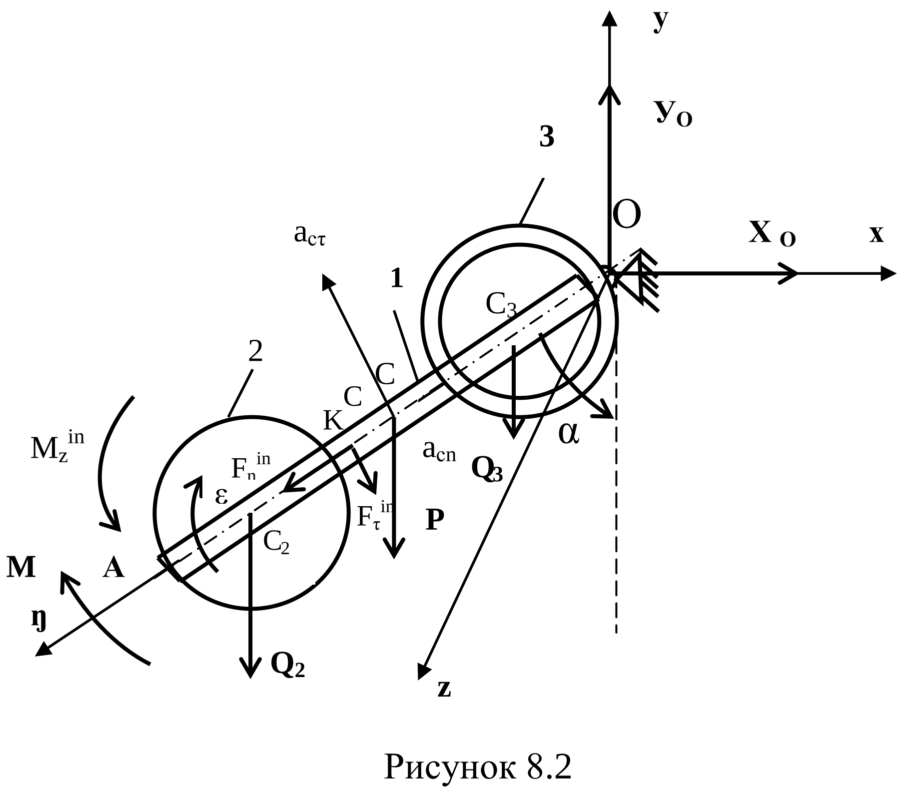


Рисунок 8.2

Головний момент сил інерції M_z^{in} направлений в напрямку, протилежному кутовому прискоренню ε. Запишемо рівняння (8.2) для системи сил, що прикладена до тіл 1, 2, 3 (рис 8.2).

$$-M+Q_2\cdot OC_2\sin\alpha+P\cdot OC_1\sin\alpha+Q_3\cdot OC_3\sin\alpha+M_z^{in}=0$$

$$I_z\varepsilon=M-\left(Q_2\cdot OC_2+P\cdot OC_1+Q_3\cdot OC_3\right)\sin\alpha.$$

Звідки:

$$\varepsilon=\frac{M}{I_z}-\frac{Q_2\cdot OC_2\sin\alpha+P\cdot OC_1\sin\alpha+Q_3\cdot OC_3}{I_z}\cdot\sin\alpha,$$

$$\varepsilon=\frac{30}{1{,}074}-\frac{20\cdot 0{,}6+10\cdot 0{,}4+10\cdot 0{,}2}{1{,}074}\cdot\sin\alpha=27{,}93-16{,}76\cdot\sin\alpha. \qquad (8.4)$$

При α = 60°, $\varepsilon=27{,}93-16{,}76\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=13{,}4\ {}^{1}\!/\!_{c^2}$.

Визначення кутової швидкості

Оскільки

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{d\alpha}{d\alpha}=\frac{d\alpha}{dt}\cdot\frac{d\omega}{d\alpha}=\omega\frac{d\omega}{d\alpha},$$

то вираз (8.4) запишеться

$$\omega\frac{d\omega}{d\alpha}=27{,}93-16{,}76\cdot\sin\alpha\ . \qquad (8.5)$$

При $t=0$; $\omega=\omega_0=0$; $\alpha=0$,

При $t=t_1$; $\omega_1=\omega_\alpha$; $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Інтегруємо рівняння (8.5)

$$\int_0^{\omega_\alpha}\omega d\omega=\int_0^{\frac{\pi}{3}}27{,}93d\alpha-\int_0^{\frac{\pi}{3}}16{,}76\sin\alpha d\alpha,$$

$$\frac{\omega_\alpha^2}{2}=27{,}93\cdot\frac{\pi}{3}+16{,}76\cos\frac{\pi}{3}-16{,}76,$$

$$\omega_\alpha=\sqrt{2\cdot(27{,}93\frac{3.14}{3}+16{,}76\frac{1}{2}-16{,}76)}=6{,}46\ \frac{1}{\text{c}},$$

$$\omega_\alpha=6{,}46\ \frac{1}{\text{c}}.$$

Визначення реакцій опор

Знайдемо координати центра мас системи тіл.

$$\eta_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i\eta_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}=\frac{m_1\cdot OC_1+m_2\cdot OC_2+m_3\cdot OC_3}{m_1+m_2+m_3};$$

$$\eta_c = \frac{P\cdot 0{,}4 + Q_2\cdot 0{,}6 + Q_3\cdot 0{,}2}{P + Q_2 + Q_3} = \frac{10\cdot 0{,}4 + 20\cdot 0{,}6 + 10\cdot 0{,}2}{10 + 20 + 10} = 0{,}45 \text{ м.}$$

Проекції прискорення центра мас при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ на натуральні осі координат:

$$a_{c\tau} = \varepsilon\cdot\eta_c = \varepsilon\cdot OC = 13{,}4\cdot 0{,}45 = 6{,}03 \text{ м}/\text{с}^2,$$

$$a_{cn} = \omega_\alpha^2\cdot\eta_c = \omega_\alpha^2\cdot OC = 6{,}46\cdot 0{,}45 = 18{,}78 \text{ м}/\text{с}^2.$$

Запишемо перші два рівняння системи (8.1) для сил, що прикладені до тіл 1, 2, 3 (рис. 8.2).

$$X_0 - F_n^{in}\sin\alpha + F_\tau^{in}\cos\alpha = 0,$$

$$Y_0 - P - Q_2 - Q_3 - F_n^{in}\cos\alpha - F_\tau^{in}\sin\alpha = 0,$$

де:

$$F_n^{in} = (m_1 + m_2 + m_3)\cdot a_{cn} = \frac{P + Q_2 + Q_3}{g}\cdot a_{cn} = \frac{10 + 20 + 10}{9{,}81}\cdot 18{,}78 = 76{,}57 \text{ Н;}$$

$$F_\tau^{in} = (m_1 + m_2 + m_3)\cdot a_{c\tau} = \frac{P + Q_2 + Q_3}{g}\cdot a_{c\tau} = \frac{10 + 20 + 10}{9{,}81}\cdot 6{,}03 = 24{,}59 \text{ Н.}$$

Сили інерції $\overline{F}_n^{in}$ та $\overline{F}_\tau^{in}$ прикладені в точці К стержня ОА.

$$OK = \frac{I_z\cdot\varepsilon}{F_\tau^{in}} = \frac{13{,}4\cdot 1{,}074}{24{,}59} = 0{,}59 \text{ м.}$$

Звідси знаходимо реакції опор X_0 та Y_0.

$$X_0 = \overline{F}_n^{in}\sin\alpha - \overline{F}_\tau^{in}\cos\alpha = 76{,}57\sin 60^\circ - 24{,}59\cos 60^\circ,$$

$$X_0 = 54{,}02 \text{ Н.}$$

$$Y_0 = P + Q_2 + Q_3 + \overline{F}_n^{in}\cos\alpha + \overline{F}_\tau^{in}\sin\alpha,$$

$$Y_0 = 10 + 20 + 10 + 76{,}57\cos 60^\circ + 24{,}59\sin 60^\circ,$$

$$Y_0 = 99{,}58 \text{ Н.}$$

Відповідь: $\omega_\alpha = 6{,}46\,\frac{1}{с}$; $\varepsilon = 13{,}4\,\frac{1}{c^2}$; $X_0 = 54{,}02$ Н; $Y_0 = 99{,}58$ Н.

Запитання для самоконтролю

1. Що називають методом кінетостатики?
2. Як формулюється принцип Даламбера для матеріальної точки?
3. Що називають силою інерції матеріальної точки?
4. Як формулюється принцип Даламбера для матеріальної системи?

ЛЕКЦІЯ 9

Аналітична статика. Принцип можливих переміщень (Принцип Лагранжа)

9.1 Дійсні і можливі переміщення. Число ступенів вільності

Дійсними (*actual moving*) називаються такі переміщення точок системи, що не суперечать в'язям і відбуваються під дією зовнішніх сил. Ці переміщення відповідають дійсному руху системи.

Можливими (*possible moving*) називаються такі елементарні уявні переміщення точок системи, що не суперечать в′язам і відбуваються у фіксований момент часу.

Можливі переміщення механічної системи визначаються будь-якою сукупністю можливих переміщень окремих точок системи. Можливі переміщення не можна плутати з дійсним переміщенням. Так, якщо точка лежить на площині, то її можливими переміщеннями є нескінченно малі переміщення в будь-якому напрямі по цій площині. Дійсним же переміщенням точки може бути одне з цих можливих, саме те, котре обумовлено не тільки характером в'язі, але і діючими на точку силами і початковими умовами руху.

На відміну від дійсних елементарних переміщень, які ми позначали через $d\vec{r}$ або $d\vec{S}$, можливі переміщення будемо позначати через $\delta\vec{r}$, $\delta\vec{S}$ тощо.

Число незалежних між собою можливих переміщень механічної системи називають **числом ступенів вільності** цієї системи.

Точці, яка лежить на поверхні, можна надати два незалежних можливих переміщення, наприклад, вздовж двох осей (рис. 9.1). Будь-яке третє можливе переміщення можна виразити через ці два, тобто вона має два ступені свободи.

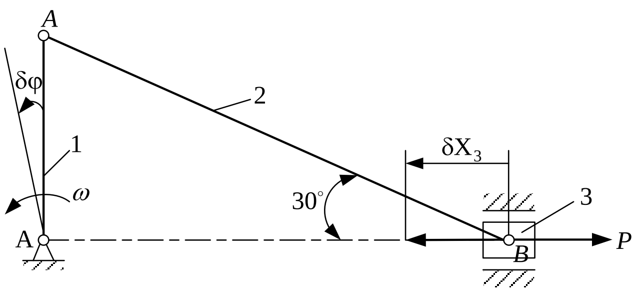


Рисунок 9.1

Система (рис. 9.1) має один ступінь свободи, тому що $\delta\varphi$ залежить від δx_3 і навпаки.

9.2 Поняття про ідеальні в’язі

Ідеальними називають в′язі, алгебраїчна сума елементарних робіт реакцій яких на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнює нулю: $\sum_{i=1}^{n} R_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0$.

Ідеальні в′язі: шарнір, поверхня, невагомий стержень, ідеальна нитка – без урахування сил тертя.

Сили, які не є реакціями в′язів, називаються **активними** (*force activity*).

9.3 Принцип можливих переміщень (Принцип Лагранжа)

Принцип можливих переміщень це найзагальніший принцип аналітичної статики. Із нього можна вивести умови рівноваги будь-якої механічної системи. Принцип можливих переміщень встановив Ж. Лангранж у 1788 р.

Принцип можливих переміщень: для рівноваги системи, що підпорядкована утримувальним, голономним, ідеальним і стаціонарним в′язям, необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт активних сил на будь-якому можливому переміщенні системи з розглядуваного положення рівноваги дорівнювала нулю, за умов, що в початковий момент система нерухома:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i^a = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i \, \delta \bar{S}_i = 0,$$

$$\text{або } \sum_{i=1}^{n} F_i \delta S_i \cdot \cos(\overline{F}_i, \delta S_i) = 0,$$

$$\text{або } \sum_{i=1}^{n} (F_{xi} \cdot \delta x_i + F_{yi} \cdot \delta y_i + F_{zi} \cdot \delta_{zi}) = 0.$$

Принцип можливих переміщень дає у загальній формі умови рівноваги для будь-якої механічної системи, тоді як умови рівноваги статики розглядають рівновагу кожного тіла системи відокремлено.

9.4 Методика розв’язування задач за принципом можливих переміщень

При застосуванні принципу можливих переміщень до розв’язування конкретних задач можна рекомендувати додержуватись такої послідовності дій:

1. Визначити систему матеріальних точок або тіл, рух яких необхідно розглянути.

2. Визначити число ступенів вільності цієї системи.

3. Визначити характер в'язей, які накладені на дану матеріальну систему, тобто визначити, чи є ці в'язі ідеальними, чи ні. В останньому випадку, як було вказано вище, сили тертя слід віднести до заданих сил.

4. Якщо деякі з реакцій в'язей, які здебільшого виключаються з розгляду внаслідок їх ідеальності, необхідно визначити, то в цьому випадку, уявно відкидаючи в'язь, заміняють її реакцією і, переводячи реакцію в розряд заданих сил, застосовують принцип можливих переміщень. При цьому в'язі, реакції яких необхідно визначити, по черзі відкидають так, щоб у рівняння входила тільки одна невідома сила. Якщо необхідно визначити реакцію шарніра, то її розкладають по напрямах осей координат і після цього визначають спочатку одну складову, а потім іншу. Щоб визначити горизонтальну складову, шарнір слід замінити ротком на горизонтальній площині, а не відкидати в'язь повністю, бо реакція має ще й вертикальну складову, яка на можливому у цьому випадку горизонтальному переміщенні роботи не створює і, таким чином, буде виключена з відповідного рівняння. Після цього аналогічним способом визначають вертикальну складову, замінивши шарнір ротком на вертикальній площині.

5. Скласти схему заданих сил, прикладених до точок матеріальної системи.

6. Надати системі одне з можливих переміщень. При виборі цього переміщення, якщо система має кілька ступенів вільності, слід простежити за тим, щоб з рівняння не були виключені елементи, які необхідно визначити, і щоб рівняння мало найбільш простий вигляд.

7. Показати напрями переміщень окремих точок матеріальної системи, до яких прикладені задані сили.

8. Визначити роботу заданих сил на відповідних можливих переміщеннях і скласти рівняння на підставі принципу можливих переміщень. Очевидно, що таких рівнянь можна скласти стільки, скільки ступенів вільності має дана матеріальна система.

9. Встановити залежність між можливими переміщеннями точок системи і визначити, таким чином, можливі переміщення всіх точок системи у функції від незалежних одне від одного можливих переміщень, виходячи з міркувань, вказаних вище.

10. В результаті цього виходить система рівнянь, кількість яких відповідає кількості ступенів вільності матеріальної системи. Виключивши з цих рівнянь незалежні одне від одного можливі переміщення внаслідок їх довільності, можна визначити шукані сили або інші величини.

Запитання для самоконтролю

1. Що спільного між дійсними та можливими переміщеннями і чим вони відрізняються?
2. Що називають дійсними переміщеннями?
3. Що називають можливими переміщеннями?

4. Які в’язі називають ідеальними?
5. Як формулюється принцип можливих переміщень (принцип Лагранжа)?

ЛЕКЦІЯ 10

Аналітична динаміка

10.1 Загальне рівняння динаміки (Принцип Даламбера – Лагранжа)

Загальне рівняння динаміки дістанемо, об’єднуючи принцип Даламбера з принципом можливих переміщень Лагранжа: *при русі матеріальної системи з ідеальними, утримувальними, голономними в'язями сума робіт усіх $\overline{F}^a$ активних сил і сил інерції $\overline{\Phi}$ усіх точок системи в кожен момент часу, на будь-якому її можливому переміщенні дорівнює нулю, тобто*

$$\sum_{i=1}^{n}\delta A(\overline{F}_i^{\,a})+\sum_{i=1}^{n}\delta A(\overline{\Phi}_i)=0,$$

$$\text{або } \sum_{i=1}^{n}\left[\left(F_{ix}^{a}+\Phi_{ix}\right)\delta x_i+\left(F_{yi}^{a}+\Phi_{iy}\right)\delta y_i+\left(F_{iZ}^{a}+\Phi_{iZ}\right)\delta z_i\right]=0,$$

$$\text{або } \sum_{i=1}^{n}\left[(F_{ix}-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+\left(F_{iy}^{a}-m_i\ddot{y}_i\right)\delta y_i+\left(F_{iZ}-m_i\ddot{Z}_i\right)\delta z_i\right]=0,$$

де $F_{ix}, F_{iy,} F_{iz}$ – проекції активних сил на осі декартових координат,
$\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}$ – проекція прискорення і-ї точки системи;
$\delta x_i \delta y_i, \delta z_i$ – проекції можливих переміщень точки на ті самі осі координат.

Приклад

Матеріальна система (рис. 10.1) починає рухатись із стану спокою під дією моменту М, що прикладається до тіла 1. Осі тіл 1 та 2 горизонтальні. Коефіцієнт тертя ковзання f. В точках контакту тіл ковзання відсутнє. Масою паса знехтувати. Тіло 1 – однорідний циліндр.

Визначити прискорення тіла 3, натяг S_5 у веденій частині паса 5 та натяг S_4 у ведучій частині 4 (прийняти $S_4 = 2S_5$) і зусилля в точці контакту тіл 1 та 2 при $t = t_1$.

Прийняти : $R_1 = 0{,}25$ м; $R_2 = 0{,}45$ м; $r_2 = 0{,}15$ м; $i_2 = 0{,}4$ м; $L = 0{,}7$ м; $m_1 = 0{,}5$ кг; $m_2 = 5$ кг; $m_3 = 4$ кг; $M = 3t^3$ Нм; $t_1 = 2$ с; $f = 0{,}4$.

Розв’язання. Для дослідження руху матеріальної системи (рис. 10.1) застосуємо загальне рівняння динаміки.

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \overline{F}_{\kappa} \cdot \delta \overline{r}_{\kappa} + \sum_{\kappa=1}^{n} \overline{F}_{\kappa}^{in} \cdot \delta \overline{r}_{\kappa} = 0. \quad (10.1)$$

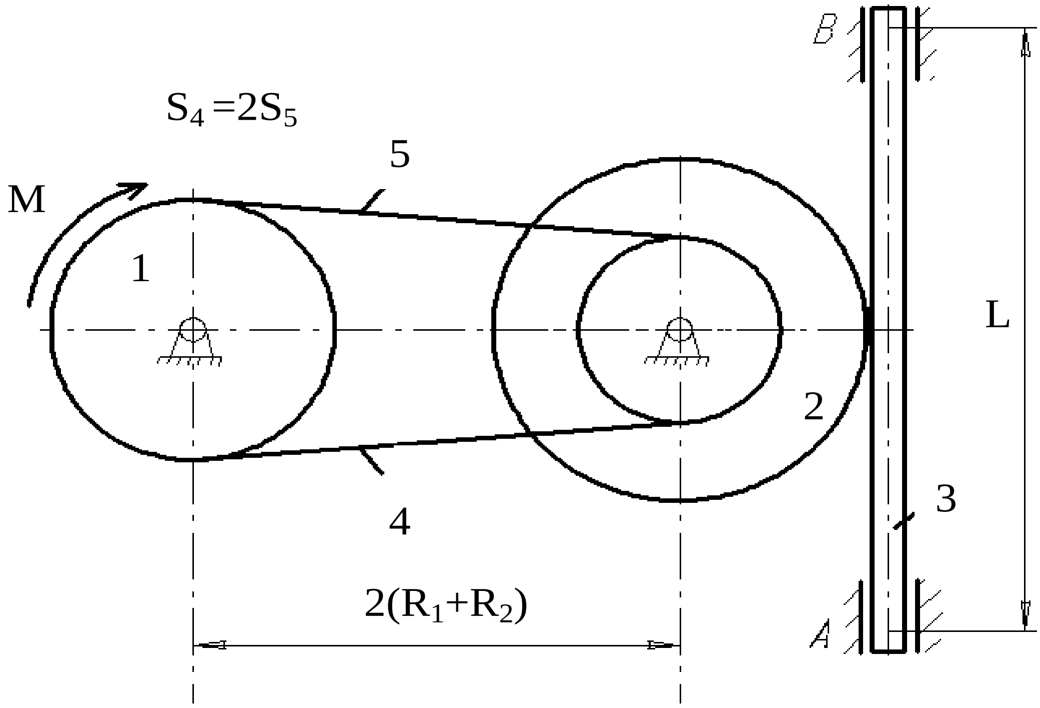


Рисунок 10.1

Визначення прискорення тіла 3

Однорідне тіло 1 обертається навколо горизонтальної осі під дією моменту M_1 (рис. 10.1) з кутовим прискоренням ε_1. Рух від тіла 1 до тіла 2 передається пасом, прискорення точок якого на прямолінійних ділянках $\overline{a}_n$:

$$a_n = \varepsilon_1 R_1 = \varepsilon_2 r_2 . \quad (10.2)$$

Для того, щоб рух матеріальної системи відбувався без ударів, прискорення тіла 3 $\overline{a}_3$ повинне дорівнювати дотичному прискоренню точок тіла 2, що знаходиться на відстані R_2 від осі обертання:

$$a_3 = \varepsilon_2 R_2 . \quad (10.3)$$

До матеріальної системи (рис. 10.2) прикладені активні сили: момент M , вага $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$, $(\overline{P}_1 = m_1 g, \overline{P}_2 = m_2 g, \overline{P}_3 = m_3 g)$ відповідно тіл 1, 2 та 3. Центр мас тіл 1 та 2 знаходиться на осі обертання, тому головні вектори сил інерції тіл 1 та 2 дорівнюють нулю.

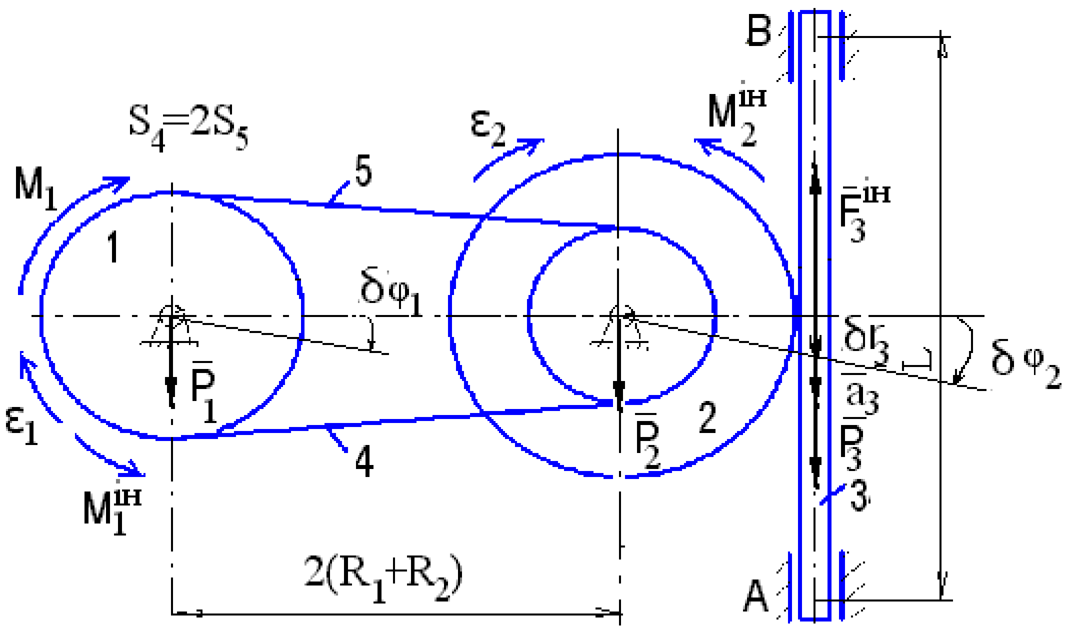


Рисунок 10.2

Головні моменти сил інерції тіла 1 $M_1^{ін}$ та 2 $M_2^{ін}$ направлені протилежно кутовим прискоренням тіл ε_1 та ε_2.

$$M_1^{ін} = I_1\varepsilon_1,\; M_2^{ін} = I_2\varepsilon_2, \tag{10.4}$$

де $I_1 = \dfrac{1}{2}m_1R_1^2$ –момент інерції тіла 1 відносно осі обертання;

$I_2 = m_2 i_2^2$ – момент інерції тіла 2 відносно осі обертання.

Головний вектор сил інерції $\bar{F}_3^{ін}$ тіла 3 направлений в протилежну сторону прискорення $\bar{a}_3$ (рис. 10.2).

$$\bar{F}_3^{ін} = m_3 a_3\,. \tag{10.5}$$

Якщо тіло 3 віртуально перемістити $\delta\bar{r}_3$, то тіло 2 повернеться на кут $\delta\varphi_2$, а тіло 1 – кут $\delta\varphi_1$ (рис.10.2).

Знайдемо взаємозв’язок між віртуальними переміщеннями тіл системи:

$$\begin{aligned} \delta r_3 &= \delta\varphi_2 R_2, \\ \delta\varphi_2 r_2 &= \delta\varphi_1 R_1. \end{aligned} \tag{10.6}$$

Запишемо загальне рівняння динаміки (10.1) для досліджуваної матеріальної системи (рис. 10.2):

$$P_3\cdot\delta r_3 - F_3^{ін}\cdot\delta r_3 - M_2^{ін}\cdot\delta\varphi_2 - M_1^{ін}\cdot\delta\varphi_1 + M\cdot\delta\varphi_1 = 0. \tag{10.7}$$

Або, враховуючи (10.2) – (10.6):

$m_3 g\delta r_3 - m_3 a_3 \delta r_3 - m_2 i_2^2 a_3 \dfrac{1}{R_2^2}\delta r_3 - \dfrac{1}{2} m_1 R_1^2 a_3 \dfrac{r_2^2}{R_2^2 R_1^2}\delta r_3 + M\dfrac{r_2}{R_2 R_1}\delta r_3 = 0.$ Оскільки $\delta r_3 \neq 0$, то маємо:

$$m_3 g - m_3 a_3 - m_2 i_2^2 a_3 \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{2} m_1 R_1^2 a_3 \frac{r_2^2}{R_2^2 R_1^2} + M\frac{r_2}{R_2 R_1} = 0.$$

Звідки знаходимо прискорення a_3 тіла 3.

$$a_3 = \frac{m_3 g + M\dfrac{r_2}{R_2 R_1}}{m_3 + m_2\dfrac{i_2^2}{R_2^2} + \dfrac{1}{2} m_1 \dfrac{r_2^2}{R_2^2}}. \tag{10.8}$$

Підставляючи дані умови задачі, отримуємо:

$$a_3 = 4{,}92 + 0{,}5t^3. \tag{10.9}$$

При $t_1 = 2c,\quad a_3 = 8{,}92\, м/c^2$.

Визначення натягу в пасах і зусилля між тілами

Розглянемо рух тіла 3 . Сили $\overline{N}_2$ та $\overline{S}_2$, з якими тіло 2 діє на тіло 3, віднесемо до активних сил (рис. 10.3).

Надаємо тілу 3 віртуальне переміщення $\delta\overline{r}_3$ і знаходимо роботу активних сил $\overline{P}_3, \overline{S}_2, \overline{N}_2$ та сил інерції $\overline{F}_3^{ін}$ на цьому переміщенні (10.1).

$$P_3 \cdot \delta r_3 + S_2 \cdot \delta r_3 - F_3^{ін} \cdot \delta r_3 = 0.$$

Оскільки $\delta\overline{r}_3 \neq 0$, тоді

$P_3 + S_2 - F_3^{ін} = 0.$

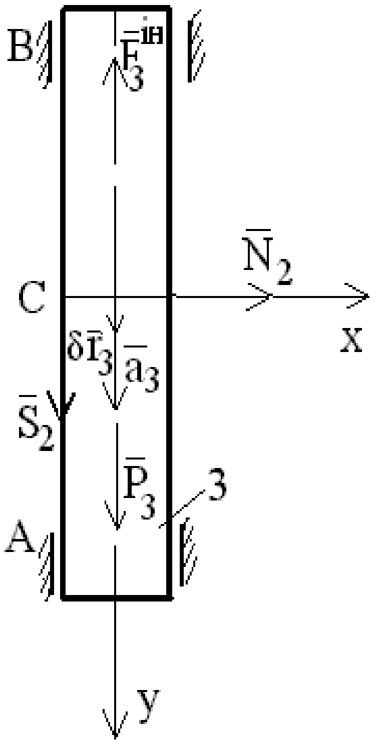


Рисунок 10.3

Звідки, враховуючи (10.4) та (10.9), знаходимо:

$$S_2 = m_3\left(4.92 + 0.5t^3\right) - m_3 g .$$

При $t_1 = 2c, S_2 = -3{,}6H.$

За законом Амонтона – Кулона: $S_2 = | fN_2 |$, тоді $N_2 = \left|\frac{S_2}{f}\right|$.

При $t_1 = 2c,\ N_2 = 9H.$

Для визначення зусиль в пасах розглянемо рух тіла 2 (рис 10.4).

Реакції в'язей $\overline{S_2'}$, $\overline{N_2'}$, $\overline{S}_5$, $\overline{S}_4$ відносимо до активних сил. Причому

$$\overline{S_2'} = -\overline{S}_2,\ \overline{N_2'} = -\overline{N}_2 .$$

Головний момент сил інерції тіла 2 $M_2^{ін}$ направлений в протилежну сторону кутового прискорення ε_2 тіла (рис. 10.4). Надаємо тілу 2 віртуальне переміщення $\delta\varphi_2$ і запишемо загальне рівняння динаміки :

$$-S_2' R_2 \cdot \delta\varphi_2 - M_2^{ін} \cdot \delta\varphi_2 - S_5 r_2 \cdot \delta\varphi_2 + S_4 r_2 \cdot \delta\varphi_2 = 0 .$$

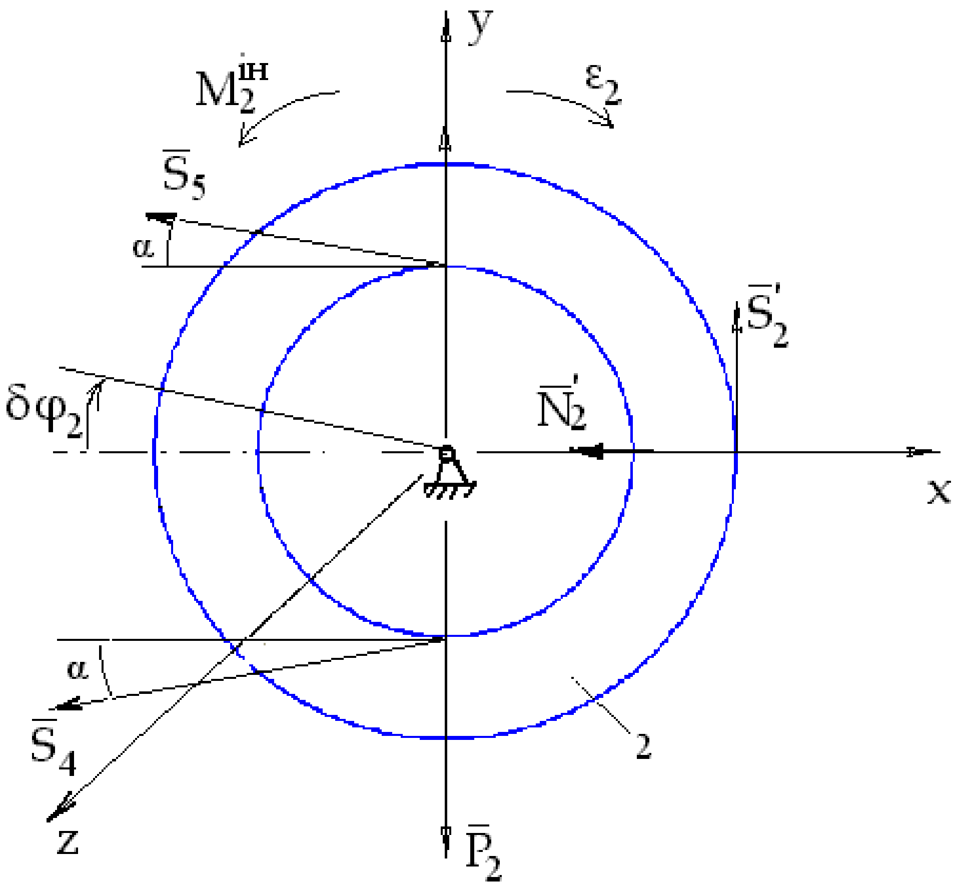


Рисунок 10.4.

Враховуючи, що $\delta\varphi_2 \neq 0$ і $S_4 = 2S_5$, знаходимо:

$S_5 = 12t^3 - 0{,}083\,a_3.$

При $t_1 = 2c$ $\quad S_5 = 95{,}26H$, $S_4 = 190{,}52H$.

Відповідь: $a_3 = 8{,}92\,{}^{м}\!/_{c^2}$, $S_2 = -3{,}6H$, $N_2 = 9H$, $S_4 = 2 \cdot S_5 = 190{,}52H$

10.2 Узагальнені координати, швидкості і сили

Положення механічної системи, яка складається з «n» матеріальних точок, визначається $3 \cdot n$ декартовими координатами. Якщо на систему накладені в'язі, що обмежують рух цієї системи, то визначити її положення можна меншою кількістю координат. Припустимо, що на систему накладено S голономних (в'язі, які обмежують тільки положення, але не швидкості точок системи) стаціонарних утримувальних в'язей.

Тоді число незалежних координат, за допомогою яких можна визначити положення системи, буде дорівнювати $3n - S$. При розв'язанні інженерних задач для визначення положення механічної системи замість декартових координат часто використовують інші геометричні параметри (кути, довжини, площі, криволінійні координати), що мають різні розмірності.

Будь-які незалежні між собою параметри, які однозначно визначають положення механічної системи, називаються **узагальненими координатами** цієї системи і позначаються літерою q.

Кількість узагальнених координат збігається з числом незалежних декартових координат і визначає **число ступенів вільності системи m**:

$$m = 3n - S.$$

Рівняння $q_1 = f_1(t); q_2 = f_2(t); ...; q_m = f_m(t)$ являють собою кінематичні рівняння руху механічної системи в узагальнених координатах.

Приклад. Розглянемо кривошипно-повзунний механізм (рис. 10.5), положення якого визначається положенням його точок *O, A, B*, тобто шістьма координатами: $x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2$.

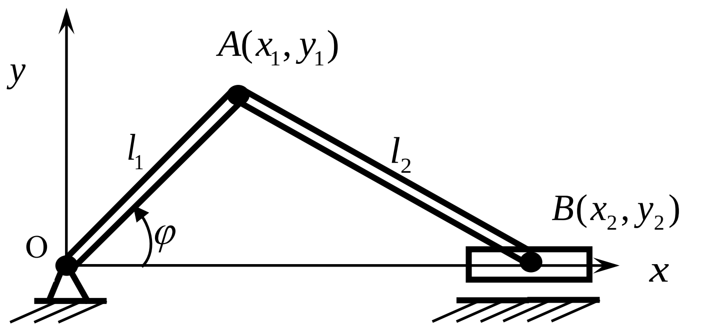


Рисунок 10.5

На систему накладено 5 обмежень (в'язей), рівняння яких мають вигляд:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad x_1^2 + y_1^2 = l_1^2; \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 = l_2^2; \; y_2 = 0.$$

Тому незалежною буде тільки одна координата з шести. За узагальнену координату можна прийняти будь-яку з трьох: x_1, y_1, x_2, але зручніше взяти кут повороту φ кривошипа, оскільки через нього легко виразити всі інші координати.

Для характеристики руху системи користуються поняттям ***узагальненої швидкості***, якою називають похідну за часом від відповідної узагальненої координати:

$$\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}.$$

Число узагальнених швидкостей дорівнює числу узагальнених координат системи.

Положення механічної системи, що складається з «*n*» матеріальних точок і має «*m*» ступенів вільності визначається $q_1, q_2, ..., q_m$ узагальненими координатами. Тоді радіус-вектор кожної точки системи буде функцією цих узагальнених координат:

$$\vec{r}_k = f\left(q_1, q_2, ..., q_m\right).$$

Нехай за час dt точки системи здійснили переміщення $d\overrightarrow{r_1}, d\overrightarrow{r_2}, ..., d\overrightarrow{r_n}$. Очевидно, що сума елементарних робіт сил, прикладених до системи з ідеальними в'язями на цих переміщеннях, буде дорівнювати:

$$\sum_1^n \delta A_k = \sum_1^n \overrightarrow{F_k} \cdot d\overrightarrow{r_k}\,.$$

Розглянемо диференціал радіуса-вектора k-точки як функцію узагальнених координат:

$$d\overrightarrow{r_k} = \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_2} \cdot dq_2 + ... + \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_m} \cdot dq_m\,.$$

Тоді вираз для елементарних робіт набуває вигляду:

$$\sum_1^n \delta A_k = \sum_1^n \overrightarrow{F_k} \cdot \sum_1^m \frac{d\overrightarrow{r_k}}{\partial q_i} \cdot dq_i$$

або, після зміни порядку підсумовування,

$$\sum_1^n \delta A_k = \sum_1^m \left(\sum_1^n \overrightarrow{F_k} \cdot \frac{d\overrightarrow{r_k}}{\partial q_i} \right) dq_i\,.$$

Величину, що стоїть в круглих дужках, називають **узагальненою силою**, яка відповідає i-й узагальненій координаті (позначається через Q_i). Тобто:

$$Q_i = \sum_1^n \overrightarrow{F_k} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_i} = \sum_1^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).$$

З урахуванням останнього співвідношення вираз для суми елементарних робіт сил системи запишеться так:

$$\sum_1^n \delta A_k = \sum_1^m Q_i \cdot dq_i = Q_1 \cdot dq_1 + Q_2 \cdot dq_2 + ... + Q_m \cdot dq_m\,.$$

Для визначення узагальненої сили Q_i, яка відповідає узагальненій координаті q_i, надамо механічній системі таке переміщення, щоб при цьому змінилася тільки координата q_i, а всі інші узагальнені координати залишилися б без змін. Тоді $dq_i \neq 0$; $dq_1 = dq_2 = ... = dq_{i-1} = dq_{i+1} = ... = dq_m = 0$. На даному переміщенні сума елементарних робіт всіх активних сил системи, як виходить з рівняння $\left(\sum_1^n \partial A_k \right)_{q_i} = Q_i dq_i$, звідки:

$$Q_i = \frac{\left(\sum_1^n \partial A_k \right)_{q_i}}{dq_i}\,.$$

В цій формулі індекс q_i при сумі робіт показує, що робота здійснюється тільки на переміщеннях системи, які викликані зміною координати q_i.

На основі цієї ж формули можна отримати і розмірність узагальненої сили:

$$[Q] = {[A]}/{[q]}.$$

Так, якщо узагальнена координата має розмірність довжини, то узагальнена сила має розмірність сили /Н/, якщо ж узагальненою координатою є кут, то узагальнена сила має розмірність моменту сили /Н·м/.

Приклад

Визначити узагальнені сили системи, що складається з вантажу *A* масою m_1, надітого на однорідний стержень *OB* довжиною l і масою m_2. Вантаж, зв'язаний з нерухомою точкою *O* пружиною жорсткістю *C* (довжина пружини в недеформованому стані дорівнює *a*), може ковзати вздовж стержня, який коливається у вертикальній площині навколо осі *O* (рис. 10.6). Масою пружини і силами тертя нехтувати.

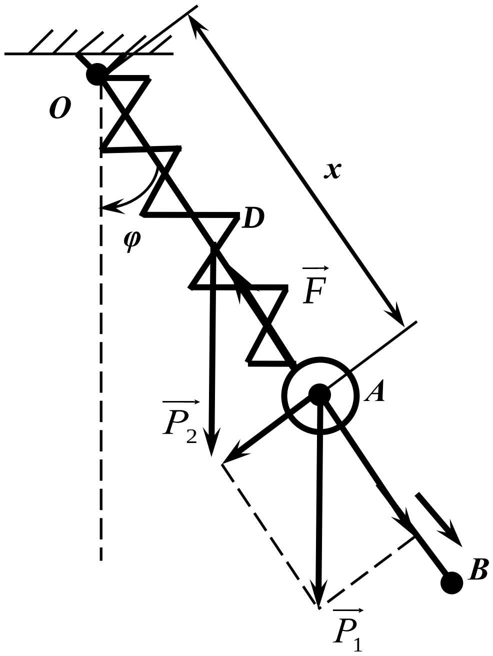


Рисунок 10.6

Розв'язання

Система має два ступені вільності. За узагальнені координати приймаємо кут φ і відстань *x* вантажу від осі *O*: $q_1 = \varphi$, $q_2 = x$. Зображуємо систему в довільному положенні і прикладемо до неї активні сили: $P_1 = m_1 g$, $P_2 = m_2 g$ і силу пружності $F = c(x - a)$. Причому реакцію пружини, як реакцію ідеальної в'язі, розглядаємо як активну силу. Дамо координаті φ приріст $d\varphi$ в бік її збільшення; координату x залишаємо без зміни. Підраховуємо суму робіт активних сил на цьому переміщенні:

$$\left(\sum \partial A_k\right)_{\varphi} = \sum M_0\left(\overrightarrow{F_k^a}\right) d\varphi = \left(-P_1 \cdot \sin\varphi \cdot x - P_2 \cdot \sin\varphi \cdot \frac{l}{2}\right) d\varphi = Q_{\varphi} \cdot d\varphi,$$

звідки: $Q_{\varphi} = -g(m_1 x + m_2 \frac{l}{2}) \cdot \sin\varphi$.

Змінимо тепер координату *x* на $dx > 0$ при $\varphi = const$.

Тоді $\left(\sum \partial A_k\right)_x = \sum F_{kx}^a \cdot dx = \left(P_1 \cos\varphi - c(x-a)\right) dx = Q_x \cdot dx$

і $Q_x = m_1 g \cos\varphi - c(x-a)$.

10.3 Рівняння Лагранжа 2-го роду (Рівняння руху в узагальнених координатах)

Рівняння Лагранжа другого роду, за своєю суттю є рівнянням динаміки Даламбера – Лагранжа, записаним в узагальнених координатах. Рівняння Лагранжа другого роду дають загальний метод складання диференціальних рівнянь руху механічної системи з голономними, ідеальними, утримувальними в’язями.

Рух будь-якої системи з геометричними ідеальними в′язями описується такими диференціальними рівняннями:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_i}\right) - \frac{dT}{dq_i} = Q_i \qquad (i = 1,2,3.....-S),$$

де S – кількість ступенів свободи;

T – кінетична енергія;

q_i – і-а узагальнена координата;

$\dot{q}_i$ – і-а узагальнена швидкість;

Q_i – і-а узагальнена сила, яка відповідає і-й узагальненій координаті.

Методика розв′язання задач на складання диференціальних рівнянь руху системи з використанням рівняння Лагранжа 2-го рода

1. Установити кількість ступенів свободи і обрати узагальнені координати (їх кількість дорівнює кількості ступенів свободи системи).
2. Обчислити кінетичну енергію системи в її абсолютному русі, виразивши її через q_i і $\dot{q}_i$.
3. Зобразити на схемі системи всі активні сили (реакції в′язів зображувати не треба: якщо є сили тертя, то їх слід вважати активними силами і вказати на схемі).
4. Обчислити узагальнені сили системи Q_i, для чого надати системі можливі переміщення: відповідні позитивні прирости відповідним узагальненим координатам і обчислити на цих переміщеннях можливу роботу активних сил системи.
5. Підрахувати відповідні частинні похідні від T за q_i і $\dot{q}_i$ і підставити всі обчислені величини в диференціальне рівняння.

Приклад

Визначити прискорення та закон руху центра мас тіла 1, якщо матеріальна система (рис.10.7) починає рухатися із стану спокою, масами шнурів знехтувати. Тіла 1 та 3 рухаються без ковзання.

Дано: $m_1 = 10\,кг$; $m_2 = 2\,кг$; $m_3 = m_4 = 1\,кг$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $R_2 = 0{,}4\,м$; $r_2 = 0{,}2\,м$; $R_3 = 0{,}3\,м$; $r_3 = 0{,}2\,м$; $\rho_2 = 0{,}35\,м$; $\rho_3 = 0{,}29\,м$.

Початкові умови: $q_{10} = 0$; $\dot{q}_{10} = 0$.

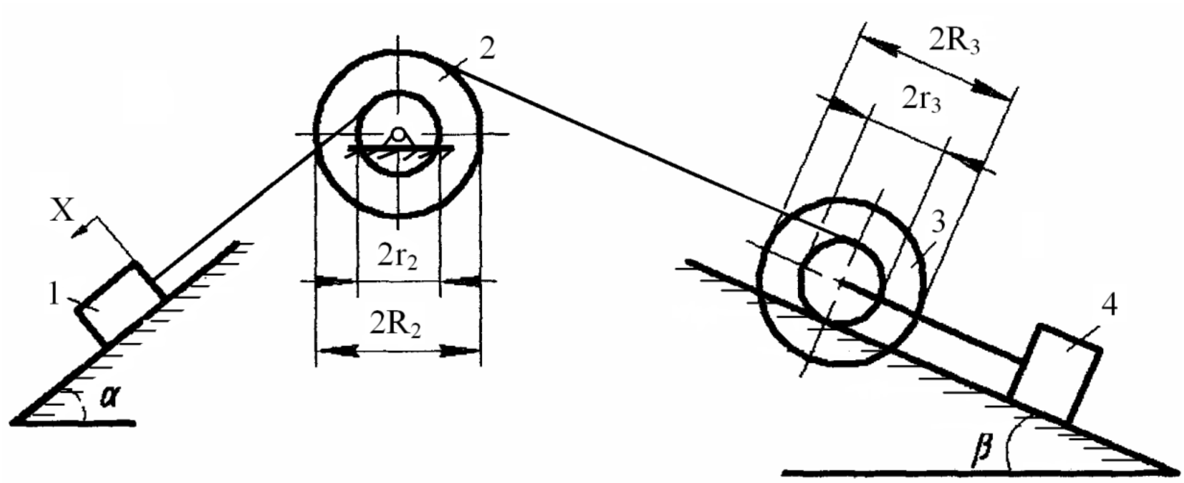


Рисунок 10.7

Розв'язання. За узагальнену координату виберемо переміщення x тіла 1 вздовж похилої площини. Для розв'язання задачі використаємо рівняння Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q, \qquad (10.10)$$

де T – кінетична енергія системи;

Q – узагальнена сила.

Визначаємо швидкості центрів мас та нульові швидкості твердих тіл системи через узагальнену швидкість $\dot{x}$:

$V_1 = \dot{x}, \quad \omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{\dot{x}}{r_2}$ – кутова швидкість блока 2,

$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot R_2}{2r_3} = \frac{V_1}{r_3} = \frac{\dot{x}}{r_3}$ – кутова швидкість блока 3.

$V_3 = \omega_3 \cdot r_3 = \dot{x}$

$V_4 = V_3 = \dot{x}$

Моменти інерції блоків відносно центральних осей:

$I_2 = m_2\rho_2^2 , \quad I_3 = m_3\rho_3^2 .$

Кінетична енергія тіл 1 – 4:

$T_1 = m_1 \dfrac{\dot{x}^2}{2}$ – поступальний рух тіла 1;

$T_2 = \dfrac{I_2\omega_2^2}{2} = \dfrac{m_2\rho_2^2 \cdot \dot{x}^2}{2r_2^2}$ – обертальний рух блока 2;

$T_3 = \dfrac{I_3\omega_3^2}{2} + \dfrac{m_3V_3^2}{2} = \dfrac{m_3\rho_3^2 \cdot \dot{x}^2}{2r_3^2} + \dfrac{m_3\dot{x}^2}{2}$ – блок 3 звершує плоскопаралельний рух;

$T_4 = \dfrac{m_4V_4^2}{2} = \dfrac{m_4\dot{x}^2}{2}$ – поступальний рух тіла 4.

Для даної системи

$$T = \sum_{i=1}^{4} T_i \ . \qquad (10.11)$$

Підставимо знайдені кінетичні енергії в формулу (10.11), маємо:

$$T = \frac{m_1\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2\rho_2^2\dot{x}^2}{2r_2^2} + \frac{m_3\rho_3^2\dot{x}^2}{2r_3^2} + \frac{m_3\dot{x}^2}{2} + \frac{m_4\dot{x}^2}{2} = \qquad (10.12)$$
$$= \dot{x}^2(5 + 3{,}0625 + 1{,}0512 + 0{,}5 + 0{,}5) = 10{,}1137\,\dot{x}^2 .$$

Тоді $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 20{,}2274\,\dot{x}; \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 20{,}2274\,\ddot{x};$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \qquad (10.13)$$

Знайдемо узагальнену силу Q за формулою:

$$Q = \frac{\delta A}{\delta q} = \frac{\delta A}{\delta x} . \qquad (10.14)$$

Для знаходження елементарної роботи δA спочатку визначаємо роботу сил, діючих на механічну систему з врахуванням переміщення x.

$A = A_{m1g} + A_{m2g} + A_{m3g} + A_{m4g}$,

$A_{m1g} = m_1 g\, x \sin\alpha$;

$A_{m_2g} = 0$ – центр мас блока 2 не переміщується.

Оскільки $V_3 = V_4 = V_1 = \dot{x}$, то $S_4 = S_3 = x$, тоді

$$A_{m_3 g} = -m_3 g\, S_3 \sin\beta = -m_3 g\, x \sin\beta .$$

$$A_{m_4 g} = -m_4 g\, S \sin\beta = -m_4 g x \sin\beta .$$

Отже, робота зовнішніх сил, які діють на механічну систему, має вигляд:

$$A = xg(m_1 \sin\alpha - m_3 \sin\beta - m_4 \sin\beta). \qquad (10.15)$$

Звідки $\delta A = g(m_1 \sin\alpha - m_3 \sin\beta - m_4 \sin\beta)\delta x$. (10.16)

Підставимо (10.16) в формулу (10.14):

$$Q = g(m_1 \sin\alpha - m_3 \sin\beta - m_4 \sin\beta) = g(10 \cdot 0{,}5 - 1 \cdot 0{,}87 - 1 \cdot 0{,}87) = 31{,}98\, H. \qquad (10.17)$$

Тоді з врахуванням (10.13) і (10.17) рівняння Лагранжа (10.10) запишеться у вигляді:

$$20{,}2274\ddot{x} = 31{,}98. \qquad (10.18)$$

Звідки знаходимо прискорення тіла 1:

$$\ddot{x} = 1{,}58\, м/с^2 . \qquad (10.19)$$

Проінтегруємо двічі рівняння (10.19) з врахуванням початкових умов.

$$\int_0^{V_K} d\dot{x} = 1{,}58 \int_0^t dt ,$$

$$V_X = 1{,}58\, t ,$$

$$V_X = \frac{dx}{dt},$$

$$\int_0^{x(t)} dx = 1{,}58 \int_0^t t\,dt ,$$

$$x(t) = 0{,}79 t^2 \ (м) .$$

СЛОВНИК НАЙУЖИВАНІШИХ ТЕРМІНІВ

Активні сили	activity forces
Амплітуда	amplitude
Вільний рух	free movement
Відстань	distance
Віртуальні(можливі) переміщення	virtual move
Графік	graph
Динаміка	dynamics
Закон	law
Збурення	perturbation
Звільнення від в'язей	liberation from tie
Зовнішні сили	outward forces
Зусилля	effort (force)
Зусилля в опорах	effort in the bearing
Ідеально тверде тіло	perfectly hard body
Кінетичний момент	kinetic moment
Ковзання	slip
Коефіцієнт тертя	friction coefficient
Колове зусилля	district effort
Координата	coordinate
Кут	corner
Кутова швидкість	angular velocity
Кутове прискорення	angular acceleration
Матеріальна точка	particle
Метод кінетостатики	cinetostatic method
Момент інерції	moment of inertia
Момент сил інерції	moment of force inertia
Напрямок руху	direcion motion
Натяг паса	tensioning of the belt
Невільна матеріальна точка	constrained material point
Нормальний тиск	normal force
Обертальний рух	rotational motion
Параметр	parameter
Пас	belt
Період	period
Перпендикулярно	perpendicularly

Постійна швидкість	constant speed
Поступальний рух	translational motion
Початкова швидкість	elementary speed
Прискорення	acceleranion
Промінь, пучок	beam
Радіус інерції	radius inertia
Реакції в’язей	force tie
Реакція	answer
Результат	result
Рівняння	equation
Рух	motion
Сила опору	force resistance
Сила тертя	force fiction
Сила тяжіння	gravity
Тверде тіло	rigid body
Траєкторія	trajektory
Трос	rope
Узагальнена координата	generalize coordinate
Центр мас	centre of mass
Циклічна частота	frequency cyclical
Циліндричний шарнір	immovable bearing
Час	time
Частота	frequency
Швидкість	speed
Шорстка поверхня	not smoothly surfase

ЛІТЕРАТУРА

1. Павловський М. А. Теоретична механіка : [підручник] / М. А. Павловський – К. : Техніка, 2002. – 512 с.
2. Теоретична механіка : збірник задач / [О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов, Д. І. Ільчишина та ін.]; За ред. М. А. Павловського – К. : Техніка, 2007. – 400 с.
3. Ільчишина Д. І. Теоретична механіка : навч. посіб. / Д. І. Ільчишина, Л. М. Шальда – К. : УМК ВО, 1991 – 252 с.
4. Яблонский А. А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пос. для техн. вузов / [А. А. Яблонский, С. С. Норейко, С. А. Вольфсон и др.]; под ред. Яблонского А. А. – [4-е изд. перер. и доп.]. – М. : ВШ, 1985. – 367 с.
5. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. т. 2. Динамика / Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. – М. : Наука, 1985. – 560 с.
6. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики. т. 2. Динамика / Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. – М. : Наука, 1979. – 461 с.
7. Лойценский Л. Г. Курс теоретической механики. т. 2. Динамика / Л. Г. Лойценский, А. И. Лурье – М. : Наука, 1984. – 640 с.
8. Тарг С. М. Кратний курс теоретической механіки / Тарг С. М. – М. : Наука, 1974. – 400 с.
9. Приятельчук В. О. Теоретична механіка. Динаміка точки . Розрахунково-графічні та контрольні завдання : збірник завдань / Приятельчук В. О., Риндюк В. І., Федотов В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 100 с.
10. Приятельчук В. О. Теоретична механіка. Динаміка матеріальної системи. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : [навч. пос.] / Приятельчук В. О., Риндюк В. І., Федотов В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 85 с.
11. Видмиш А. А. Теоретична механіка. Динаміка. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : [навч. посіб.] / Видмиш А. А., Приятельчук В. О., Федотов В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 143 с.
12. Приятельчук В. О.Теоретична механіка. Аналітична механіка. Розрахунково-графічні та контрольні завдання : навчальний посібник / Приятельчук В. О., Риндюк В. І., Федотов В. О. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 71с.
13. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://essuir.sumdu.edu.ua/retrieve/36503/Dinamika.pdf

Навчальне видання

Огородніков Віталій Антонович
Федотов Валерій Олександрович
Кириця Інна Юріївна

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
ДИНАМІКА
САМОСТІЙНА ТА ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА СТУДЕНТІВ

Конспект лекцій

Редактор В. Дружиніна
Коректор З. Поліщук
Оригінал-макет підготовлено І. Ю. Кирицею

Підписано до друку 19.04.2016 р.
Формат 29,7×42 1/4. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 5,2.
Наклад 75 пр. Зам. № 2016-070

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
publish.vntu.edu.ua; email: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.