

ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ДЕЯКИХ ТИПІВ ЗАДАЧ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Запропоновано методи математичного аналізу, використовуючи які можливо ефективно доводити нерівності та розв'язувати рівняння з параметрами.

Ключові слова: похідна, інтеграл, рівняння, нерівність, функція.

Abstract

The methods of mathematical analysis are proposed, using which it is possible to effectively prove inequalities and solve the equations with parameters.

Keywords: derivative, integral, equation, inequality, function.

Вступ

Слухачі підготовчих курсів та учні фізико-математичної школи в шкільному курсі математики розглядають застосування похідної при дослідженні функцій та побудові їх графіків, а за допомогою визначеного інтеграла знаходять площу криволінійної трапеції і об'єм тіл обертання [1, 2].

Мета роботи – показати застосування методів математичного аналізу при розв'язуванні задач, які традиційно відносять до елементарної математики.

Результати дослідження

1) Доведення нерівностей. Використання інтегралів при доведенні нерівностей базується на теоремі: якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на $[a; b]$ і задовольняють

нерівність $f(x) \leq g(x)$, тоді при $x \in [a; b]$ $\int_a^x f(x)dx \leq \int_a^x g(x)dx$.

Наприклад, довести нерівність $x - \sin x \leq 1 - \cos x \leq x\sqrt{2} - \sin x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Запишемо дану нерівність як $x - 1 \leq \sin x - \cos x \leq x\sqrt{2} - 1$ і оцінимо різницю $\sin x - \cos x$, яку можна отримати при інтегруванні функції $\sin x + \cos x$. На відрізку

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, функція $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ і задовольняє нерівність

$1 \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$. Проінтегруємо цю нерівність $\int_0^x dx \leq \int_0^x (\sin x + \cos x) dx \leq \int_0^x \sqrt{2} dx$,

тобто $x \leq \sin x - \cos x + 1 \leq x\sqrt{2}$ або $x - 1 \leq \sin x - \cos x \leq x\sqrt{2} - 1$, що і потрібно було довести.

2) Розв'язування рівнянь з параметром. При розв'язуванні рівнянь часто виникає необхідність дослідження функції, яка входить в це рівняння. При дослідженні функції використовують методи математичного аналізу.

Наприклад, визначити скільки коренів має рівняння $x = a + 2 \cos \frac{x+a}{2}$ залежно від параметра a .

Розглянемо функцію $f(x) = x - a - 2 \cos \frac{x+a}{2}$, її похідна $f'(x) = 1 + \sin \frac{x+a}{2} \geq 0$ при $x \in \mathbb{R}$. Отже функція $f(x)$ зростає на будь-якому проміжку між коренями рівняння $\sin \frac{x+a}{2} = -1$, а оскільки $f(x)$ неперервна, то і на всій числовій прямій, тому дане рівняння не може мати більше одного кореня. Очевидно, що $f(a-3) < 0$, а $f(a+3) > 0$ тому $f(x) = 0$ хоча б в одній точці із проміжку $[a-3; a+3]$. Таким чином дане рівняння має один корінь при довільному a .

Висновки

При вивченні елементів математичного аналізу зі слухачами підготовчих курсів і учнями фізико-математичної школи потрібно в першу чергу звертати увагу на змістовний, а не на технічний аспект навчання. Правильно підібрані задачі переконують в доцільності вивчення елементів математичного аналізу і сприяють більш свідомому його засвоєнню.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- 1) Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу / Є. П. Нелін. – Харків: Світ дитинства, 2007. – 413 с.
- 2) Горнштейн П. И. Задачи с параметрами/ П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир – Киев: РИА «Текст» МП «ОКО», 1992. – 287 с.

Кашканова Галина Григорівна – канд. пед. наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: galka210154@gmail.com.

Kashkanova Galyna – Ph.D., associate professor of higher mathematics department, Vinnitsia National Technical University, Vinnitsia, e-mail: galka210154@gmail.com