

## Побудова математичної моделі максимального діаметру циліндричного зразка під час торцевого стиснення на основі математичного аналізу

Вінницький національний технічний університет

### Анотація.

*Розроблено методику для отримання співвідношення для максимального радіуса із урахуванням основних фізичних особливостей процесу торцевого стиснення. Використовуючи СКМ Maple і розроблену методику, проведено аналіз отриманої моделі та побудовано залежність, яка характеризує залежність максимального радіуса зразка від коефіцієнта тертя та етапу деформування під час торцевого стиснення.*

**Ключові слова:** торцеве стиснення, формозміна, бічна поверхня, циліндричний зразок, максимальний діаметр, Maple, диференціальне рівняння.

### Abstract.

*The technique for obtaining the ratio for barrel's maximum radius taking into account the main physical characteristics during face-end compression is developed. Using SCM Maple and the developed technique, the analysis of the obtained model is carried out and the dependences characterizing the dependence of the barrel's maximum radius on the friction coefficient and the strain stage during face-end compression are constructed.*

**Keywords:** face-end compression, forming, lateral surface, cylindrical barrel, maximum diameter, Maple, differential equation.

Торцеве стиснення циліндричних зразків є одним із важливих способів лабораторних досліджень для визначення механічних властивостей матеріалів, а також є основою деяких технологічних операцій, зокрема операції осадження. Під час стиснення циліндричних зразків із малопластичних матеріалів на бічній поверхні утворюються тріщини. Причому ступінь деформування, при якому з'являються тріщини, залежить від інтенсивності бочкоутворення, яке, у свою чергу, залежить від умов тертя на торцях зразка [1 - 12].

Під час торцевого стиснення, у зв'язку із нерівномірністю деформацій, відбувається викривлення форми вільної поверхні, так зване бочкоутворення, від якого залежить напружено-деформований стан та граничні деформації матеріалу [1 - 7]. Комплексна характеристика процесу торцевого стиснення включає як аналіз напружено-деформованого та граничного станів [3 - 12], так і отримання аналітичного опису геометричних параметрів зразка під час процесу деформування [13 - 16].

Аналітичний опис формозміни зразка під час нестационарного деформування є досить важливою задачею під час дослідження та удосконалення технологічних процесів, в основу виготовлення яких покладено процес торцевого стиснення. Зокрема для прогнозування якості поверхонь, можливості їх руйнування, а також забезпечення певної конфігурації деталей під час їх виготовлення [1 - 14].

Розробка аналітичного представлення геометричних параметрів зразка під час торцевого стиснення базується на врахуванні таких припущень [13, 14, 16]:

- забезпечення умови незмінного об'єму зразка під час деформування  $V = S_0 \cdot H = const$ , де  $S_0$ ,  $H$  – площа поперечного перерізу та висота зразка до деформування;
- течія матеріалу має лише радіальний та осьовий компоненти;
- під час стиснення забезпечується симетрія зразка відносно її вісі, тобто розглядається вісесиметричний процес деформування;
- будь-який осьовий переріз є симетричною кривою.

Оскільки процес торцевого стиснення симетричний, то далі будемо досліджувати максимальний радіус циліндричного зразка.

Розглянемо процес торцевого стиснення за умови відсутності тертя на торцях ( $k=1$ ), тобто за умови ідеального стиснення, що супроводжується відсутністю бочкоутворення бічної поверхні

зразка. Математичну модель для максимального радіуса циліндричного зразка отримуємо із умови сталості об'єму

$$V = h \cdot \pi \cdot r^2(h) = H \cdot \pi \cdot r_0^2. \quad (1)$$

$$r_b(h)|_{k=1} = r(h) = r_0 \cdot \sqrt{\frac{H}{h}}, \quad (2)$$

де  $r_0$ ,  $r$  – початковий та поточний радіуси торців.

Побудову математичної моделі для максимального радіуса (радіуса бочки)  $r_b$  із врахуванням коефіцієнта тертя на торцях  $k$  виконуємо на основі узагальнення співвідношення (2). При цьому для отриманого співвідношення має виконуватися початкова умова

$$r_b(H) = r_0. \quad (3)$$

Диференціальне рівняння, що характеризує швидкість зміни радіуса бочки під час торцевого стиснення за умов ідеального тертя, отримано диференціюванням співвідношення (2):

$$\frac{dr_b(h)}{dh} = -\frac{1}{2} \cdot r_0^2 \cdot \frac{H}{h^2} \cdot \frac{1}{r_b(h)}. \quad (4)$$

Для узагальнення співвідношення (4) з метою врахування наявності тертя на торцях, мають виконуватись нерівності:

$$r_b(h, k) > r_b(h, k=1); k > 1. \quad (5)$$

$$\left| \frac{dr_b(h, k)}{dh} \right| > \left| \frac{dr_b(h, k=1)}{dh} \right|. \quad (6)$$

$$1 \leq k < \infty. \quad (7)$$

Враховуючи отримані залежності, висуваємо гіпотезу, що швидкість зміни радіуса бочки прямо пропорційна коефіцієнту тертя на торцях. Диференціальне рівняння, що характеризує швидкість зміни максимального радіуса зразка під час торцевого стиснення за умов бочкоутворення набуває вигляду:

$$\frac{\partial r_b(h, k)}{\partial h} = -k \cdot \frac{1}{2} \cdot r_0^2 \cdot \frac{H}{h^2} \cdot \frac{1}{r_b(h)} \quad (8)$$

Розв'язанням диференціального рівняння (8), отримуємо співвідношення для аналітичного представлення максимального радіуса зразка під час торцевого стиснення за наявності тертя на торцях. Функцію  $C(k)$  знаходимо із необхідності виконання початкової умови диференціального рівняння(3), що набуває вигляду  $r_b(h = H, k) = r_0$ .

$$\int r_b(h, k) \cdot dr_b(h) = -\frac{1}{2} \cdot k \cdot r_0^2 \cdot H \cdot \int \frac{dh}{h^2} \quad (9)$$

$$r_b^2(h, k) = k \cdot r_0^2 \cdot \frac{H}{h} + C(k) \quad (10)$$

$$C(k) = \left( r_b^2(h, k) - k \cdot r_0^2 \cdot \frac{H}{h} \right) \Big|_{h=H, r_b(H, k)=r_0} = r_0^2 - k \cdot r_0^2 \cdot \frac{H}{H} = (1-k) \cdot r_0^2 \quad (11)$$

Аналітичне представлення радіуса бочки під час торцевого стиснення при нестационарному деформуванні, тобто за умови наявності тертя на торцях зразка, набуває вигляду:

$$r_b(h, k) = r_0 \cdot \sqrt{k \cdot \left( \frac{H}{h} - 1 \right) + 1}. \quad (12)$$

Для спрощення побудови та розширення можливостей дослідження математичної моделі максимального діаметра циліндричного зразка під час торцевого стиснення також використовували СКМ Maple.

Для отримання загального та частинного розв'язку отриманого диференціального рівняння застосовували функцію  $Dsolve()$ , яка використовується для знаходження розв'язків звичайних ДР та систем ДР. Для детального аналізу отриманої математичної моделі було побудовано, за допомогою функції  $plot3D()$  та  $display()$  з графічного пакету програм MAPLE, графіки та поверхні залежності максимального радіуса зразка від коефіцієнта тертя та етапу деформування (рис. 1).

```
> restart;
with(plots):
diff(r[b](h), h) = 1/2 * H * k * r[0]^2 / (h^2 * r[b](h));
```

$$\frac{d}{dh} r_b(h) = \frac{1}{2} \frac{H k r_0^2}{h^2 r_b(h)}$$

```
> dsolve(%, r[b](h));
```

$$r_b(h) = \frac{\sqrt{-h (H k r_0^2 - C1 h)}}{h}, r_b(h) = -\frac{\sqrt{-h (H k r_0^2 - C1 h)}}{h}$$

```
> H := 10; r[0] := 5;
```

$$H := 10 \\ r_0 := 5$$

```
> diff(r[b](h), h) = 1/2 * H * k * r[0]^2 / (h^2 * r[b](h));
```

$$\frac{d}{dh} r_b(h) = \frac{125 k}{h^2 r_b(h)}$$

```
> dsolve({%, r[b](H)=r[0]}, r[b](h));
```

$$r_b(h) = \frac{5 \sqrt{h (-10 k + h + k h)}}{h}$$

```
>
```

```
g1 := plot3d(5 * sqrt(k * (x-1) + 1), x = 1 .. 5, k = 1 .. 5, axes
= boxed):
g2 := plot3d(8 * sqrt(k * (x-1) + 1), x = 1 .. 5, k = 1 .. 5, axes
= boxed):
g3 := plot3d(10 * sqrt(k * (x-1) + 1), x = 1 .. 5, k = 1 .. 5, axes
= boxed):
g4 := plot3d(10 * sqrt(k * (x-1) + 1), x = 1 .. 5, k = 3 .. 3, axes
= boxed, thickness = 2):
display({g4, g1, g2, g3});
```

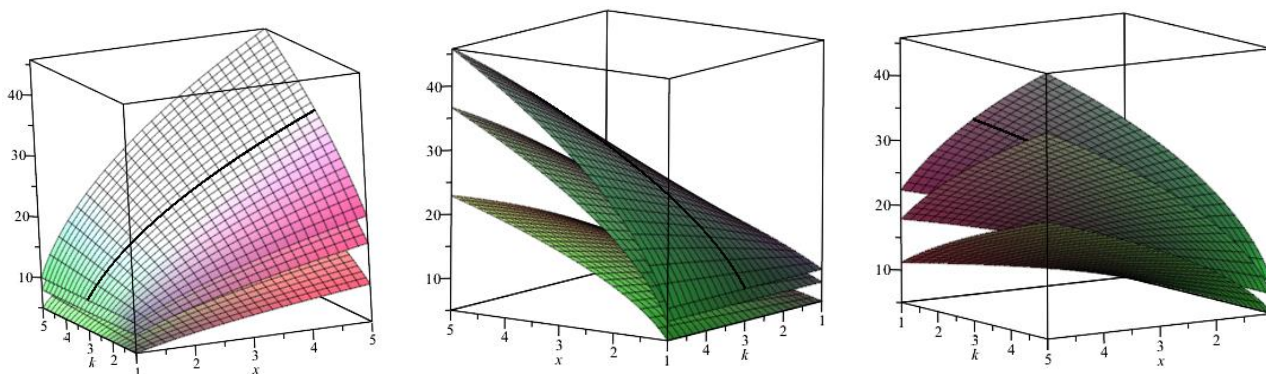


Рис. 1 – Залежність максимального радіуса зразка від етапу торцевого стиснення ( $x=N/h$ ), для різних значення початкового радіуса:  $r_0 = 6$ ,  $r_0 = 8$ ,  $r_0 = 10$

Розроблена методика побудови математичної моделі для аналітичного опису максимального радіуса бочки в залежності від умов тертя та ступеня стиску під час торцевого стиснення циліндричних зразків в явному вигляді містить закладені гіпотези та умови механіки формозміни.

Вказану методику покладено в основу створення математичної моделі динаміки формозміни бічної поверхні циліндричного зразка під час торцевого стиснення.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ / REFERENCES

1. Михалевич В. М. Моделювання напружено-деформованого та граничного станів поверхні циліндричних зразків при торцевому стисненні: монографія / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк. – Вінниця: ВНТУ, 2013. – 180 с. ISBN 978-966-641-532-8.
2. Михалевич В. М. Моделирование пластического деформирования цилиндрического образца при торцевом сжатии / В. М. Михалевич, А. А. Лебедев, Ю. В. Добранюк // Пробл. прочности. – 2011. – № 6. – С. 5–22.
3. Mikhalevich V. M. Modeling of plastic deformation in a cylindrical specimen under edge compression / V. M. Mikhalevich, A. A. Lebedev and Yu. V. Dobranyuk // Strength of Materials. – Volume 43, Number 6 (2011), P. 591–603, DOI: 10.1007/s11223-011-9332-7.
4. Михалевич В. М. Прогнозування граничного стану бічної поверхні циліндричних зразків при торцевому стисненні / В. М. Михалевич, В. А. Матвійчук, Ю. В. Добранюк, Є. А. Трач // Обработка металлов давлением: сборник научных трудов. – Краматорск: ДГМА – 2012 – №1(30) – С. 24–30.
5. Добранюк Ю. В. Моделювання за допомогою програмного комплексу DEFORM 3D напружено-деформованого стану на бічній поверхні циліндричного зразка під час торцевого стиснення / Ю. В. Добранюк, Л. І. Алієва, В. М. Михалевич // Обработка металлов давлением: сборник научных трудов. – Краматорск: ДГМА – 2010 – №4(25) – С. 3–10.
6. Михалевич В. М. Удосконалення експериментальної частини експериментально-аналітичної методики дослідження напружено-деформованого стану бічної поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричної осадки [Електронний ресурс] / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, Є. А. Трач // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – №4. – Київ: Національна бібліотека ім. В. І. Вернадського. – 2011. – 8 с. – Режим доступу до журн.: [http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2011\\_4/2011-4.files/uk/11vmmwas\\_ua.pdf](http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2011_4/2011-4.files/uk/11vmmwas_ua.pdf).
7. Михалевич В. М. Визначення за початковою ділянкою траєкторії деформацій граничного стану бічної поверхні циліндричних зразків під час вісесиметричного осадження / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, Є. А. Трач // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2012. – №2 – С. 163–167.
8. Гунько И. В. Оценка деформируемости заготовок в процессе вальцовки / И. В. Гунько, Ю. В. Добранюк // MOTROL. Commission of motorization and energetics in agriculture. – 2013. – Vol. 15 – №4. – P. 254–261.
9. Михалевич В. М. Напружений стан товстостінної труби під рівномірним тиском / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк // Вісник машинобудування та транспорту. – Вінниця: ВНТУ, 2016. – №1 – С. 67–72.
10. Севостьянов І. В. Розвиток процесів вальцювання криволінійних заготовок із алюмінієвих сплавів / І. В. Севостьянов, Ю. В. Добранюк, І. А. Бубновська // Вісник машинобудування та транспорту. – Вінниця: ВНТУ, 2017. – №2(6) – С. 150–157.
11. Михалевич В. М. Узагальнення експериментально-аналітичної методики оцінки НДС бічної поверхні циліндричних заготовок при вісесиметричному осадженні / В. М. Михалевич, В. А. Матвійчук, Ю. В. Добранюк, Є. А. Трач // Обработка металлов давлением: сборник научных трудов. – Краматорск: ДГМА – 2014 – №1(38) – С. 41–47.
12. Михалевич В. М. Моделювання граничних деформацій на вільній бічній поверхні під час високотемпературного торцевого осадження / В. М. Михалевич, В. О. Краєвський, Ю. В. Добранюк // Вісник машинобудування та транспорту. – Вінниця: ВНТУ, 2015. – №2 – С. 54–60.
13. Михалевич В. М. Формозміна бічної поверхні циліндричних заготовок під час вісесиметричного осадження / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, Є. А. Трач // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Нові рішення в сучасних технологіях. – Харків: НТУ "ХПІ" – 2013. – №42(1015) – С. 126 – 131.
14. Михалевич В. М. Аналітичне представлення радіуса торців циліндричних заготовок під час вісесиметричного осадження / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк, Є. А. Трач // Обработка металлов давлением: сборник научных трудов. – Краматорск: ДГМА – 2015 – №2(41) – С. 56–62.
15. Михалевич В. М. Залежність максимального діаметру заготовки від ступеня деформування під час вісесиметричного осадження / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк // Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта: Тези доповідей XVI Міжнародної науково-технічної конференції – НТУУ «КПІ» – Одеса – 22-25 червня 2015р. – С. 83–84.
16. Михалевич В. М. Аналітичне представлення максимального радіуса циліндричних заготовок під час вісесиметричного осадження із бочкоутворенням / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк // Вісник машинобудування та транспорту. – Вінниця: ВНТУ – 2015 – №1 – С. 59–66.

*Лєбідь Яна Дмитрівна* — студентка групи ТЕ-176, факультет будівництва, теплоенергетики та газопостачання, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Науковий керівник: *Юрій Володимирович Добранюк* — кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: [dobranukyuriy@gmail.com](mailto:dobranukyuriy@gmail.com)

*Lebidy Yana D.* — Student of the Faculty of Civil Engineering, Thermal Power Engineering and Gas Supply, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Supervisor: *Dobranjuk Yuriy V.* — Ph.D., Associate Professor of Department of Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: [dobranukyuriy@gmail.com](mailto:dobranukyuriy@gmail.com).