УДК 517:330.101.542

В. І. Клочко
А. С. Сухоребра

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ЛАГРАНЖА В МІКРОЕКОНОМІЦІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація. *У статті показано застосування теореми Лагранжа до розв'язування деяких задач мікроекономіки, проаналізовано середні витрати як середнє значення функції.*
Ключові слова: мікроекономіка, теорема Лагранжа, середнє значення функції.

Abstract. The article shows the application of Lagrange's theorem to solving some problems of microeconomics, analyzed the average costs as the average value of the function.
Key words: microeconomics, theorem of Lagrange, mean value of the function.

В наш час деякі економісти погоджуються з тим, що середні витрати, що містять витрати на виробництво, управління, маркетинг, збут і т.д. протягом довготривалого періоду, зі зростанням масштабу виробництва зменшуються до певного рівня [4]. Розбіжності в думках стосуються того, яка буде поведінка затрат після того, як буде досягнуто критичного розміру, і чи завжди він може існувати. Зараз ми не можемо мати однозначної відповіді на ці запитання. На різних підприємствах ми можемо спостерігати такі різні випадки:

а) економічні резерви і результуюча крива середніх спільних витрат (LATC) знижується на всьому діапазоні можливого попиту;
б) після вичерпання ресурсів економічності LATC починають зростати;
в) після вичерпання резервів економчності LATC стабілізуються на незмінному рівні.
г) стадія незмінного рівня LATC змінюється при отриманні певного масштабу стадією неекономічності.

Знання функцій затрат, дуже важливе для прийняття рішень не лише на підприємстві, а й на урядовому рівні. Функції короткострокових витрат мають ключове значення при визначенні цін та об'ємів випуску, тоді як функції довготривалих затрат необхідні при плануванні розвитку підприємства та його інвестиційної політики. Оцінка економічності масштабу необхідна для проведення ефективної урядової політики регулювання ринку, насамперед у зв'язку з монополіями та об'єднаннями.

Середні витрати — витрати на одиницю продукції, що випускається.

Граничні витрати — витрати, необхідні для випуску додаткової одиниці продукції найефективнішим (найдешевшим) чином.

Постійні середні витрати – витрати, що обчислюються як частка від ділення постійних витрат на обсяг виробництва.

Формула Лагранжа (або формула про скінченні прирости). Якщо функція *f(x)* неперервна на проміжку $[a, b]$, диференційовна на (a, b), то знайдеться принаймні одна точка c $\in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ така, що має місце формула:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\varepsilon) \tag{1}$$

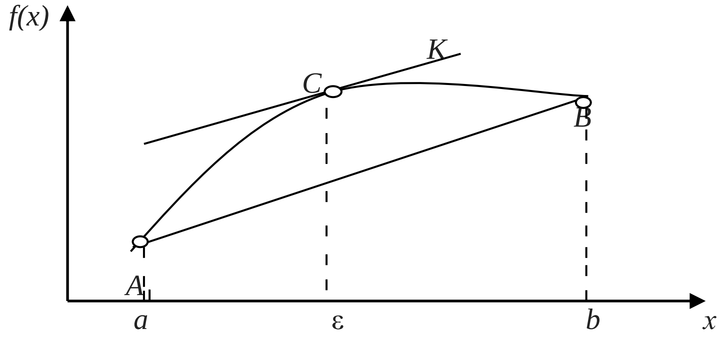

Рис. 1. Геометрична інтерпретація теореми Лагранжа

Поняття середніх витрат і їх взаємозв'язок з граничними витратами потребують додаткового дослідження. Важливо насамперед зрозуміти, що середні витрати не є середньою величиною незалежних випадкових величин. Якщо середні витрати при випуску 100 одиниць продукції складають 1000 грн., то це зовсім не означає, що одна її одиниця обходиться, скажімо, в 800 гр., інша в 1200 грн. і т.п. Насправді, коли ми говоримо про середні витрати, ми маємо на увазі середнє значення функції витрат від обсягу випуску.

Для з'ясування геометричного сенсу теореми Лагранжа зауважимо, що ліва частина (1) є кутовим коефіцієнтом січної, що проходить через точки $A\ (a, f(a))$ і B $(b, f(b))$ кривої $y = f(x)$, а права частина є кутовим коефіцієнтом дотичної до тієї ж кривої в точці $C\ (x, f(x))$. Теорема Лагранжа про середнє значення функції стверджує, що на кривій $y = f(x)$ між точками A і B завжди знайдеться така точка C, що дотична, яка проведена через неї, паралельна січній AB (Рис. 1).

Використовуємо тепер теорему Лагранжа для визначення середніх змінних витрат [1]. На підставі (1) ми можемо стверджувати, що середні змінні витрати при випуску Q_i, тобто в інтервалі (Q_0, Q_i), дорівнюють граничним витратам при деякому невизначеному обсязі випуску Q_x, причому

$Q_0 \le Q_x \le Q_1.$

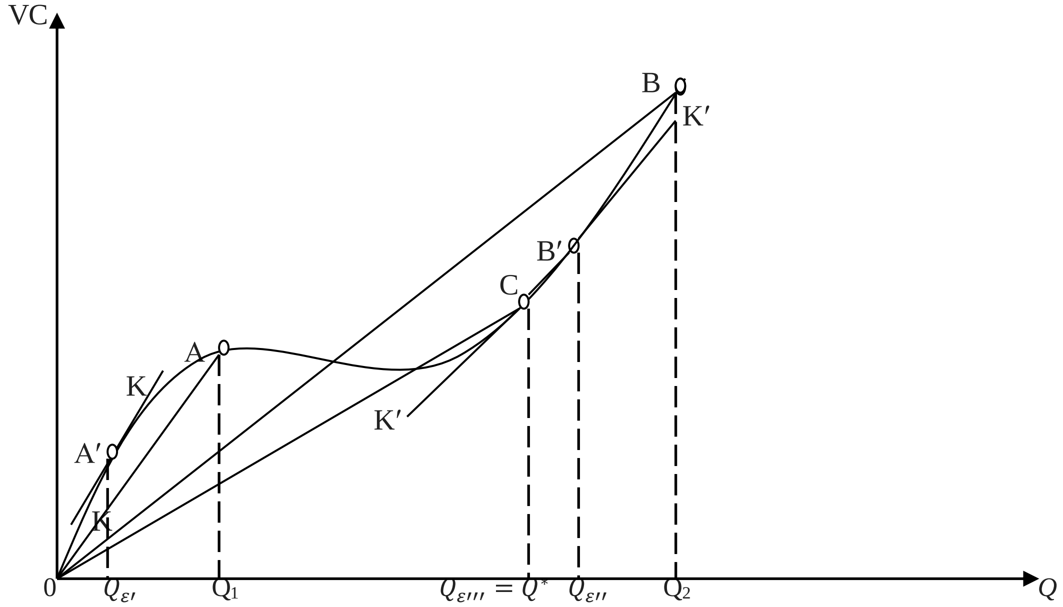

Рис. 2. Середні змінні витрати як середнє значення функції спільних середніх витрат

Тобто
$$AVC(Q_0,Q_i)=\frac{VC(Q_1)-VC(Q_0)}{Q_1-Q_0}=VC'(Q_\varepsilon)=MC(Q_\varepsilon) \qquad (2)$$
при цьому $Q_{\varepsilon'} \le Q_1$. Як слідує з рисунка 2,
$$AVC(Q_1)=MC\left(Q'_{\varepsilon}\right),\quad Q'_{\varepsilon}< Q_1\quad (OA||KK),$$
$$AVC(Q_2)=MC\left(Q''_{\varepsilon}\right),\quad Q''_{\varepsilon}< Q_2\quad (OB||K'K'),$$
$$AVC(Q^*)=MC\left(Q'''_{\varepsilon}\right),\quad Q'''_{\varepsilon}=Q^* \qquad (3)$$
Ті ж висновки можна отримати також на основі формули кінцевих приростів
$$VC(Q_0+\Delta Q)-VC(Q_0)=VC'(Q_\varepsilon)\Delta Q \qquad (4)$$

або на основі теореми інтегрального числення про загальне середнє, згідно з якою певний інтеграл дорівнює добутку довжини проміжку інтегрування на значення підінтегральної функції в деякій точці всередині цього проміжку.

Розглянемо тепер середні загальні витрати. Середнє значення функції загальних витрат $TC\ (Q)$ складе
$$ATC(Q_0,Q_1)=\frac{TC(Q_1)-TC(Q_0)}{Q_1-Q_0}=TC'(Q_\varepsilon)=MC(Q_\varepsilon) \qquad (5)$$

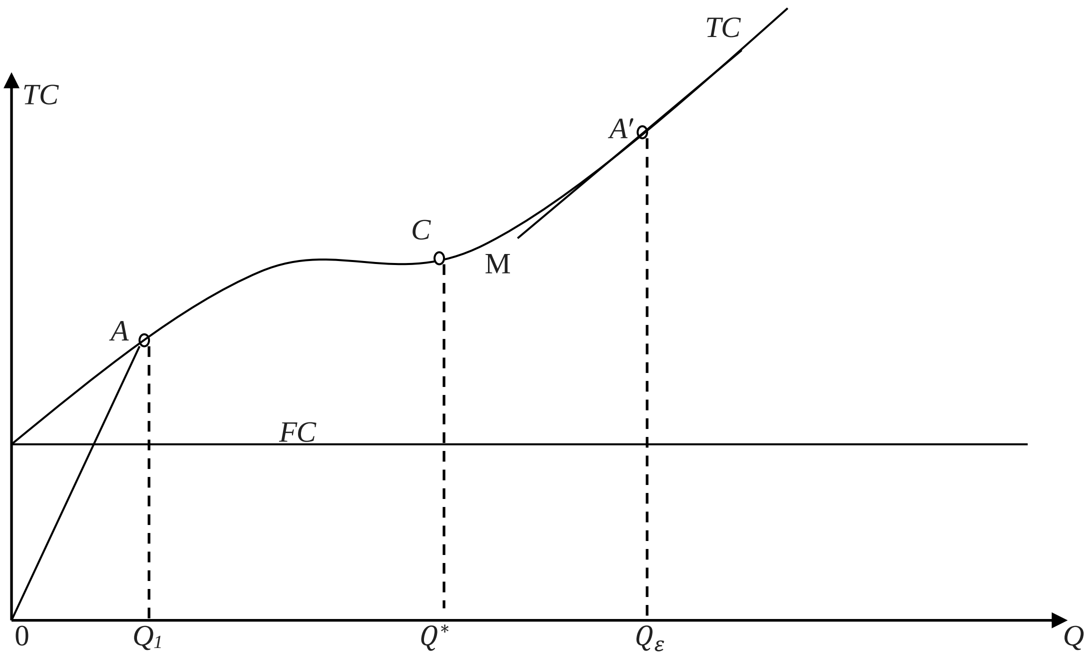

Рис. 3. Середні спільні витрати як середнє значення функції спільних витрат

Формули (2) і (5) схожі, проте звернемо увагу і на істотну різницю. Зупинимося на випадку, коли $Q_\varepsilon > Q_i$. Зауважимо, що, оскільки *TC* = *FC* + *VC*, ОК ≈ FC (правостороння границя). Тому на дузі *КА* не вистачатиме точки, дотична в якій була б паралельна променю *ОА*. Але така точка (A_1) знайдеться значно правіше точки *A*, так що в даному випадку $Q_x > Q_1$. Зауважимо, що відповідно до зміни точки *A* вправо точка *A*' зміщуватиметься вліво, поки їх взаємне розташування відносно точки *C*, в якій *ATC* (*Q**) = *MC* (*Q**), не зміниться на протилежне.

Середнє значення функції, або середні витрати можуть збігатися, а можуть і не збігатися з жодним граничним значенням. Пояснення студентам важливості застосування математичного апарату, зокрема теореми Лагранжа, в реальному житті є неодмінним чинником фундаментальної математичної підготовки майбутніх економістів [2].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гальперин В.М. Микроэкономика: у 2т. / Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И – Санкт-Петербург. Институт «Экономическая школа» 2004 –Т.1: гл.8 - 338-348 с.
2. Клочко В.І. Фундаменталізація математичної освіти майбутніх економістів як чинник розвитку їх логічного мислення / В. І. Клочко, А. А. Коломієць // Economics, science, education : integration and synergy : materials of international scientific and practical conference (Bratislava, 18-21 January 2016).: in 3 V. – V 3 - K.: Publishig outfit “Centre of educational literature”, 2016 -129 p. С. 62-63.
3. Литвинюк В.П. Диференціальне числення: Навч. Посібн. – ВНТУ, 2012. - 109 с.
4. Уфімцева О. Ю. Мікроекономіка. Курс лекцій : Підручник. – Дніпропетровськ : ПДБА, 2012. 172 с.

Ангеліна Сергіївна Сухоребра — студентка 1 курсу ФІТКІ, групи 2БС-17б, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: suhorebraangelina@gmail.com.

Науковий керівник: ***Віталій Іванович Клочко*** – доктор пед. наук, проф. кафедри вищої математики Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: vi.klochko.7@gmail.com

Angelina Sergiivna Suhorebra - student of 1 course, Department of Informatic Technologies and Computer Engineering, group 2CS-17b, Vinnitsa National Technical University, Vinnytsia, e-mail: suhorebraabgelina@gmail.com.

Supervisor: ***Vitaliy Ivanovich Klochko*** – Dr. Sc. (Eng.), Professor, doctor ped. Sciences, prof. Department of Higher Mathematics Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia,
e-mail: vi.klochko.7@gmail.com