

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТРИФАЗНОГО ТРАНСФОРМАТОРА ЯК ЕЛЕМЕНТА ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНОЇ СИСТЕМИ

<sup>1</sup>Публічне акціонерне товариство «Хмельницькобленерго»

*Розглядається задача побудови математичних моделей трифазного трансформатора, зручних для розв'язування чисельними методами і комп'ютерної імітації. Запропоновано дві математичні моделі трифазних трансформаторів, що відрізняються з точки зору їх чисельної реалізації, а також універсальності, тобто можливості аналізу автономної роботи трансформатора і складних енергетичних систем. Математичну модель трифазного трансформатора утворюють диференціальні й алгебраїчні рівняння, що аналітичним шляхом приводяться до нормальної форми Коші. Така форма рівнянь усуває потребу у використанні на кожному кроці чисельного інтегрування процедури обернення матриці коефіцієнтів, що уповільнює накопичення помилок і зменшує затрати комп'ютерного часу.*

**Ключові слова:** математична модель, електромагнітне коло, трифазний трансформатор, електроенергетична система.

### Вступ

Теорія електричних кіл є одним із важливих розділів теоретичної електротехніки. В рамках цієї теорії розробляються основоположні для прикладних дисциплін методи описування електромагнітних явищ в електричних колах і побудова математичних моделей процесів, які в них відбуваються. На базі теорії кіл створюються способи фізичного і чисельного експериментів, здійснюється імітація їх результатів.

Тісний зв'язок теорії кіл з відповідними розділами фізики і математики, а також їх направленість на розв'язування нових прикладних задач, якими зараз є передача і розподіл енергії та інформації у складних електричних і інформаційних системах, визначає їх розвиток.

Не менш важливим питанням для теорії електричних кіл є проблеми створення математичних моделей таких кіл. Особливої гостроти вона набуває у випадку моделювання об'єктів, структура яких складається з електричних і магнітних контурів.

*Аналіз останніх наукових досліджень.* Трифазний трансформатор — один із найпоширеніших електротехнічних пристроїв, основними конструктивними елементами якого є електричні і магнітні контури.

Аналіз будь-якого фізичного об'єкта пов'язаний зі знаходженням тих чи інших невідомих, що характеризують його стан у перехідних і стаціонарних процесах. В електричних колах до основних невідомих належать електричні струми і напруги. Характерною ознакою магнітного кола є те, що основними невідомими тут є магнітні потоки і магнітні напруги. В електромагнітному колі до невідомих відносяться одночасно струми, потоки і обидві напруги, що і зумовило її складність. Воно може мати як завгодно складні розгалужені електричне та магнітне субкола. Вхідними параметрами у таких випадках вважаються джерела електричних напруг і струму.

Електромагнітні пристрої містять електромагнітні кола, в яких здійснюється перетворення електричної енергії у магнітну і навпаки. Отже, в процесі математичного моделювання електромагнітних пристроїв виникає потреба формувати рівняння електромагнітного кола [1, 2].

В таких складних електромагнітних пристроях взаємодіють процеси різної природи — електричні, магнітні, теплові. Всі вони мають бути враховані з достатньо високою точністю, чого можна досягти лише за рахунок використання відповідного математичного апарату, узгодженого з обчислювальними методами.

Відсутність такої узгодженості в сучасних математичних моделях трансформаторів, коефіцієнтами диференціальних рівнянь яких є само- і взаємоіндуктивності, вимагає на кожному кроці чисельного інтегрування виконувати процедуру обернення матриці коефіцієнтів — найбільш трудо-

місткої операції. У випадку довготривалих процесів мають місце зниження точності розрахунку через накопичення похибок і значні затрати комп'ютерного часу. Усунути проблеми вдалось поєднанням методів теорії електричних і електромагнітних кіл, в результаті чого диференціальні рівняння об'єкта аналітично можна представити у нормальній формі Коші [3].

*Метою роботи* є побудова математичних моделей трифазного трансформатора, зручних для розв'язування чисельними методами і комп'ютерної імітації, універсальних з точки зору можливості аналізу не лише їх автономної роботи, а й складних електроенергетичних систем, елементами яких є такі трансформатори.

### Основний матеріал дослідження

Конструкція трифазного трансформатора складається з Ш-подібного магнітопроводу з розміщеними на кожному стрижні первинної та вторинної обмоток, з'єднаних трикутником або зіркою. Схематично магнітопровід замінимо трьома зосередженими нелінійними магнітними опорами стрижнів фаз та лінійним магнітним опором шляхів некомпенсованих у вузлі фазних потоків.

Рівняння напруги електричних кіл запишемо за другим законом Кірхгофа

$$\frac{d\Psi_j}{dt} = U_j - \mathbf{R}_j \mathbf{I}_j, \quad j=1, 2, \quad (1)$$

де  $\Psi_j$ ,  $U_j$ ,  $\mathbf{I}_j$  — матриці-стовпці фазних повних потокозчеплень, напруг і струмів первинної  $j=1$  і вторинної  $j=2$  обмоток, що стисло можна подати у вигляді:  $h_j(h = \Psi, U, \mathbf{I}) = (h_{jA}, h_{jB}, h_{jC})$ ;  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ , — діагональні матриці опорів:  $\mathbf{R}_j = \text{diag}(r_{jA}, r_{jB}, r_{jC})$ .

Допустимо, що повне потокозчеплення складається з основного і потокозчеплення розсіяння (дисипації)

$$\Psi_j = \psi_j + \psi_{\sigma j}, \quad j=1, 2, \quad (2)$$

де  $\psi_j$  — робоче потокозчеплення  $h_j(h = \psi) = (h_{jA}, h_{jB}, h_{jC})$ ;  $\psi_{\sigma j}$  — потокозчеплення розсіяння  $h_j(h = \psi_{\sigma}) = (h_{jA}, h_{jB}, h_{jC})$ .

Оскільки потоки розсіяння замикаються у лінійному середовищі, то можна вважати залежність між потокозчепленнями розсіяння і струмами лінійною, тобто

$$\psi_{\sigma j} = L_{\sigma j} \mathbf{I}_j, \quad j=1, 2, \quad (3)$$

де  $L_{\sigma j}$  — індуктивності розсіяння.

Підстановкою виразу (3) в (2) і розв'язуванням відносно струмів отримаємо:

$$\mathbf{I}_j = \frac{1}{L_{\sigma j}} (\Psi_j - \psi_j), \quad j=1, 2. \quad (4)$$

Враховуючи те, що робоче потокозчеплення — це добуток потоку  $\Phi$  на кількість витків  $w_j$

$$\psi_j = w_j \Phi, \quad j=1, 2, \quad (5)$$

а також, ввівши позначення обернених індуктивностей розсіяння  $\alpha_j = \frac{1}{L_{\sigma j}}$ , струми знайдемо за виразом

$$\mathbf{I}_j = \alpha_j (\Psi_j - w_j \Phi), \quad j=1, 2, \quad (6)$$

де  $\Phi = (\Phi_A, \Phi_B, \Phi_C)$  — матриця-стовпець основних потоків;  $\alpha_1, \alpha_2$  — обернені, індуктивності розсіяння;  $w_1, w_2$  — кількість витків обмоток.

Структурні рівняння магнітопроводу сформуємо на основі першого і другого законів Кірхгофа для магнітних кіл

$$\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C + \Phi_0 = 0; \quad V_A = V_B = V_C = V_0, \quad (7)$$

де  $\Phi_0$  — магнітний потік у немагнітному середовищі,  $V_0$  — магнітна напруга, створена потоком  $\Phi_0$ .

Рівняння магнітної вітки відображає залежність між її магнітною напругою й потоком

$$V_k = \sum_{i=1}^2 F_{ik} - V_k(\Phi_k), \quad k = A, B, C, \quad V_0 = \rho_0 \Phi_0, \quad (8)$$

де  $V_k(\Phi_k)$  — магнітна напруга  $k$ -ї вітки (стрижня);  $F_{ik} = w_i i_{ik}$  — магніторушійна сила  $ik$ -ї обмотки;  $\rho_0$  — опір потоку  $\Phi_0$ .

Для визначення магнітної напруги  $V$  стрижнів необхідна крива намагнічування магнітопроводу, яку представимо у вигляді функції магнітної напруги від потоку

$$V = V(\Phi). \quad (9)$$

За кривою намагнічування (9) визначимо статичний магнітний опір

$$\rho'_k(\Phi_k) = \frac{V_k}{\Phi_k}, \quad (10)$$

звідки магнітна напруга стрижня буде дорівнювати

$$V_k = \rho'_k(\Phi_k) \cdot \Phi_k. \quad (11)$$

Рівняння (1), (6), (7), (8), (11) утворюють математичну модель трифазного трансформатора. Незручність такої моделі зумовлена складністю розв'язання системи нелінійних алгебро-диференціальних рівнянь через потребу застосування на кожному часовому кроці інтегрування ітераційних циклів. Для реалізації такої моделі доцільно використовувати неявні методи чисельного інтегрування, в яких ітераційні цикли є невід'ємною процедурою. Уникнути цієї незручності можна заміною алгебраїчних рівнянь (7), (8) диференціальними.

Продиференціюємо рівняння (7), (8) за часом

$$\frac{d\Phi_A}{dt} + \frac{d\Phi_B}{dt} + \frac{d\Phi_C}{dt} + \frac{d\Phi_0}{dt} = 0, \quad \frac{dV_A}{dt} = \frac{dV_B}{dt} = \frac{dV_C}{dt} = \frac{dV_0}{dt}. \quad (12)$$

Перед диференціюванням рівняння (8) виконаємо необхідні перетворення в його правій частині, якою є різниця двох членів, після чого продиференціюємо кожний член окремо.

1. Перетворення першого члена виразу (8). Так як ним є магніторушійна сила обмоток  $F_{ik} = w_i i_{ik}$ , то підставимо замість  $i_{ik}$  його значення з (6) і отримаємо:

$$\sum_{i=1}^2 w_i \alpha_i (\Psi_k - w_i \Phi_k), \quad k = A, B, C. \quad (13)$$

Тепер продиференціюємо (13) за часом. Матимемо

$$\sum_{i=1}^2 w_i \alpha_i \frac{d\Psi_k}{dt} - \sum_{i=1}^2 w_i^2 \alpha_i \frac{d\Phi_k}{dt}. \quad (14)$$

2. Диференціювання другого виразу (8) дасть

$$\frac{dV_k}{d\Phi_k} = \frac{d\Phi_k}{dt}. \quad (15)$$

Першим множником (15) є диференціальний магнітний опір стрижнів фаз, що знаходиться з кривої намагнічування (9)

$$\rho''_k(\Phi) = \frac{dV_k}{d\Phi_k}. \quad (16)$$

Після підстановки (16) в (15) отримаємо

$$\rho''_k(\Phi) = \frac{d\Phi_k}{dt}. \quad (17)$$

Підставивши (14) і (17) у праву частину і виконавши прості перетворення, отримаємо диференціальне рівняння магнітних напруг

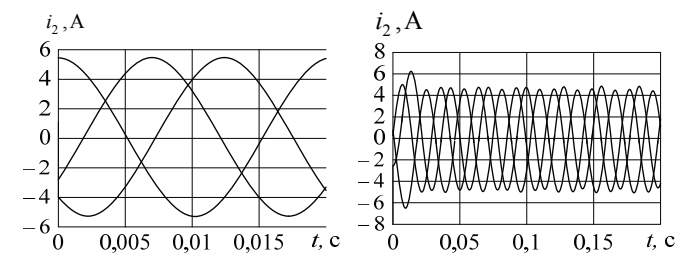
$$\frac{dV_k}{dt} = \sum_{i=1}^2 w_i \alpha_i \frac{d\Psi_k}{dt} - \sum_{i=1}^2 w_i \alpha_i (w_i \alpha_i^2 + \rho_k'') \frac{d\Phi_k}{dt}. \quad (18)$$

Магнітна напруга нульової вітки дорівнює

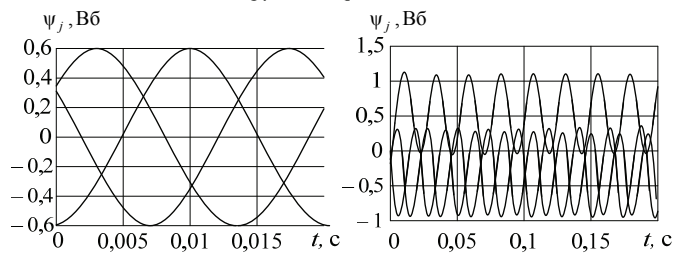
$$\frac{dV_0}{dt} = \rho_0 \frac{d\Phi_0}{dt}. \quad (19)$$

Диференціальні рівняння (1), (12), (18) і алгебраїчне рівняння (6) утворюють повну систему рівнянь стану електромагнітного пристрою. Нормальна форма Коші цих диференціальних рівнянь, отримана аналітичним шляхом, дає змогу проводити аналіз процесів не лише автономно працюючого трансформатора, а й складної енергетичної системи, елементами якої він є.

Рисунок ілюструє використання отриманої математичної моделі для розрахунку стаціонарного та перехідного процесів струму вторинної обмотки  $i_2$  та робочого потокозчеплення  $\Psi_j$  трифазного трансформатора ТС-1,5/1 під час його роботи на симетричне активне навантаження.



а) струм  $i_2$  вторинної обмотки



б) робоче потокозчеплення  $\Psi_j$  ( $j=2$ ) вторинної обмотки

Стаціонарний та перехідний процеси роботи трифазного трансформатора ТС-1,5/1 у разі симетричного активного навантаження

Опори обмоток первинної сторони

$$r_{1A} = r_{1B} = r_{1C} = 1,25 \text{ Ом.}$$

Опори обмоток вторинної сторони

$$r_{2A} = r_{2B} = r_{2C} = 2,08 \text{ Ом.}$$

Опори навантаження

$$r_{nA} = r_{nB} = r_{nC} = 10 \text{ Ом.}$$

Обернена індуктивність первинної сторони

$$\alpha_{1A} = \alpha_{1B} = \alpha_{1C} = 170 \text{ Гн}^{-1}.$$

Обернена індуктивність вторинної сторони

$$\alpha_{2A} = \alpha_{2B} = \alpha_{2C} = 170 \text{ Гн}^{-1}.$$

Обернена індуктивність 0-послідовності

$$\alpha_0 = 0,1 \text{ Гн}^{-1}.$$

Індуктивність навантаження вторинної сторони  $L_{nA} = L_{nB} = L_{nC} = 0,1 \text{ Гн.}$

Максимум вхідних напруг

$$U_{mA} = U_{mB} = U_{mC} = 200 \text{ В.}$$

Частота вхідних напруг  $f = 50 \text{ Гц.}$

Кількість періодів перехідного процесу  $N = 10.$

## Висновки

1. Система рівнянь, яку складають диференціальне рівняння (1) і алгебраїчні рівняння (6), (7), (8), (11) утворюють математичну модель трифазного трансформатора. Незручністю цієї моделі з точки зору її чисельної реалізації є необхідність використання на кожному кроці інтегрування ітераційних циклів для розв'язування системи нелінійних алгебро-диференціальних рівнянь. Тому для реалізації моделі доцільно використовувати неявні методи чисельного інтегрування, в яких ітераційні цикли є невід'ємною процедурою.

2. Система диференціальних рівнянь (1), (12), (18) і алгебраїчне рівняння (6) утворюють математичну модель трифазного трансформатора, диференціальні рівняння якої аналітичним шляхом приведені до нормальної форми Коші. Така форма рівнянь усунула потребу у використанні на кожному кроці чисельного інтегрування процедури обернення матриці коефіцієнтів — основного джерела накопичення помилок і затрати комп'ютерного часу. Універсальність цієї моделі зумовлена можливістю аналізу роботи як автономно працюючого трансформатора, так і складної енергетичної системи.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Блажкевич Б. І. Основні методи аналізу електричних кіл / Б. І. Блажкевич. — К. : вид-во АНУРСР, 1961. — 127 с.

2. Чабан В. Й. Теоретична електротехніка : навч. посіб. для студ. електротехн. і мех. спец. / В. Й. Чабан ; укл. В. Чабан. — Львів : Сорока, 2008. — 176 с. — ISBN 978-966-8460-39-5.

3. Чабан В. Й. Математичне моделювання електромеханічних процесів : навч. посіб. / В. Й. Чабан. — Львів : Львівська політехніка, 1997. — 341 с.

Рекомендована кафедрою електричних станцій та систем ВНТУ

Стаття надійшла 4.03.2016

**Шпак Олександр Леонідович** — заступник генерального директора.

Публічне акціонерне товариство «Хмельницькобленерго», Хмельницький

**O. L. Shpak<sup>1</sup>**

## Mathematical Model of Three-Phase Transformer as Part of Electric Power System

<sup>1</sup>Public Joint-Stock Company «Khmelnyskoblenergo»

*A problem of developing mathematical models for the three-phase transformer is considered, which are convenient to solve numerically and by the method of computer simulation. Two mathematical models of three-phase transformers are suggested, which are different from the point of view of their numerical realization and universality that is the possibility to analyze the offline operation of the transformer and complex energy systems. The three-phase mathematical model of the transformer consists of differential and algebraic equations, which are analytically reduced to Cauchy's normal form. Such a form of the equations removes necessity of inverting the coefficient matrix at every step of numerical integration, what slows the error accumulation down, and decreases the computing time.*

**Keywords:** mathematical model, electromagnetic circuit, three-phase transformer, power system.

*Shpak Oleksandr L.* — Deputy General Director

**А. Л. Шпак<sup>1</sup>**

## Математическая модель трёхфазного трансформатора как элемент электроэнергетической системы

<sup>1</sup>Публичное акционерное общество «Хмельницкоблэнерго»

*Рассмотрена задача построения математических моделей трёхфазного трансформатора, удобных для решения численными методами и компьютерной имитации. Предложены две математические модели трёхфазных трансформаторов, отличающихся с точки зрения их численной реализации, а также универсальности, то есть возможности анализа автономной работы трансформатора и сложных энергетических систем. Математическую модель трёхфазного трансформатора образуют дифференциальные и алгебраические уравнения, которые аналитическим путем приводятся к нормальной форме Коши. Такая форма уравнений устраняет потребность в использовании на каждом шагу численного интегрирования процедуры обращения матрицы коэффициентов, что замедляет накопление ошибок и уменьшает затраты компьютерного времени.*

**Ключевые слова:** математическая модель, электромагнитная цепь, трёхфазный трансформатор, электроэнергетическая система.

*Шпак Александр Леонидович* — заместитель генерального директора