

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ПЕДАГОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У статті розглянуто використання математичних методів в педагогічних дослідженнях, а саме теорії перевірки гіпотез відносно числових характеристик (статистичної середньої та дисперсії), які вказують на суттєвість відмінностей між досліджуваними параметрами. Приведено для прикладу статистичну обробку даних однієї із складових базового рівня професійної мобільності майбутніх фахівців машинобудівної галузі у процесі вивчення фундаментальних дисциплін.

Ключові слова: математичні методи, числові характеристики, досліджувані параметри.

Abstract

The article discusses the use of mathematical methods in pedagogical research, namely, the theory of testing hypotheses with respect to numerical characteristics (statistical average and dispersion), which indicate the significance of differences between the investigated parameters. For example, statistical processing of one of the components of the basic level of professional mobility of future specialists in the machine-building industry is given. in the process of studying fundamental disciplines.

Key words: mathematical methods, numerical characteristics, investigated parameters.

Вступ

Математичні методи описують кількісні характеристики педагогічних явищ, визначають оптимальні умови управління процесом навчання і виховання. Використовують їх для кількісного аналізу фактичного матеріалу, отриманого у процесі дослідження. Вони надають процесу дослідження чіткості, структурованості, раціональності, ефективності під час опрацювання великої кількості емпіричних даних. У педагогічних дослідженнях широко використовують такі їх види:

- *метод реєстрування* – виявлення певної якості в явищах та її кількості (наприклад, кількості запізнь на уроки);
- *метод ранжування* – класифікація даних у певній послідовності (спадання чи зростання показників), визначення місця в цьому ряду (наприклад, складання списку учнів залежно від рівня успішності тощо);
- *метод моделювання* – створення і дослідження моделей. Є засобом теоретичного дослідження психологічних явищ через уявне створення життєвих ситуацій, в яких може відбуватися діяльність людини, змодельованої системи. Допомагає пізнати закономірність поведінки людини у певних ситуаціях;
- *статистичні методи* – методи математичної статистики, що використовуються для опрацювання експериментальних даних з метою підвищення обґрунтованості висновків. У педагогіці та психології вони представлені: а) описовою статистикою (табулювання, графічний вираз та кількісне оцінювання даних); б) теорією статистичного висновку (передбачення результатів за даними обстеження вибірок); в) теорією планування експериментів (виявлення та перевірка причинних зв'язків між змінними).

Питання про системний підхід до наукових досліджень з використанням обробки результатів педагогічних досліджень вперше поставили С. І. Архангельський, М. А. Данилов, Ф. Ф. Королєв, Е. Г. Юдін. Пізніше цей підхід до аналізу науково-дослідної діяльності застосовували І. І. Андреев, Л. Г. Вяткін, В. С. Ільїн, Л. Б. Ітельсон, Н. В. Кузьміна, В. С. Ледньов, М. І. Махмутов, В. А. Поляков, В. А. Сластьонін, Н. Ф. Тализіна та ін. На жаль, недостатньо розробленим напрямом залишається

застосування методів математичної статистики в педагогічних дослідженнях. Тому сучасне наукознавство зосереджує останнім часом на цій проблемі значну увагу (А. А. Греков, В. І. Загвязінський, Н. В. Кузьміна, Є. А. Мамчур, В. С. Стюпін, В. С. Швирьов та інші). Слід відзначити, що не зважаючи на зростання актуальності та практичної значущості, недослідженим залишаються особливості та проблеми застосування методів математичної статистики під час проведення педагогічних досліджень.

Результати дослідження

У математичній статистиці розроблено велике число критеріїв, які призначені для перевірки статистичних гіпотез [1; 2; 3]. О. Рудницька вважає, що статистична характеристика проведеного педагогічного дослідження обов'язкова, оскільки крім неї немає інших засобів підтвердження вірогідності отриманих результатів. Розрахунок кількісних характеристик дослідних результатів важливий не тільки для виміру їхніх абсолютних або відносних значень, але й для порівняння об'єктів, ефективності процесів, прогнозування найбільш ймовірного перебігу розвитку явищ, які вивчаються [4, с. 261]. При оцінюванні результатів експерименту у педагогічних дослідженнях в основному використовують критерії згоди (наприклад, Пірсона), які дають відповідь лише на наявність розбіжностей результатів параметрів, що досліджуються, але суттєвість відмінностей не визначають. Тому для впевненості отриманих даних нами використано теорія перевірки гіпотез відносно числових характеристик (статистичної середньої та дисперсії), які вказують на суттєвість відмінностей між досліджуваними параметрами.

Згідно з запропонованою методикою, а саме запропонованим алгоритмом [3] висунемо і перевіримо гіпотезу H_0 : запропонована система суттєво впливає на сформованість базового рівня професійної мобільності майбутніх інженерів. Задамо надійною ймовірністю $P=1-\alpha=0,95$.

Проаналізуємо отримані статистичні дані показників рівнів усіх виділених нами раніше складових базового рівня професійної мобільності майбутніх фахівців машинобудівної галузі у процесі вивчення фундаментальних дисциплін [5].

Проведемо для прикладу статистичну обробку даних однієї із складових професійної мобільності, наприклад когнітивної. За результатами випробувань отримана вибірка і обчислені точкові оцінки (табл. 1): математичного сподівання та середньої

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (1)$$

$$\text{і дисперсії – вибіркова дисперсія } S^2 = \frac{N}{N-1} (\overline{X^2} - (\bar{X})^2), \quad (2)$$

$$\text{де } \overline{X^2} = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i \quad (3)$$

Таблиця 1

Вибірка та точкові оцінки для рівнів сформованості когнітивної складової

Експериментальна група ЕГ (277)				
інтервали	(0; 3,89)	(3,9; 4,49)	(4,5; 5,39)	(5,4; 6)
x_i	1,945	4,195	4,945	5,7
p_i	0,08	0,36	0,39	0,17
\bar{X}_1	0,1556	1,5102	1,928	0,969
S_1^2	0,279	4,093	5,843	4,59
Контрольна група ЕГ (276)				
x_i	1,945	4,195	4,945	5,7
p_i	0,18	0,5	0,24	0,08
\bar{X}_2	0,3501	2,0975	1,1868	0,456
S_2^2	0,5603	4,41	4,47	2,39

Перевіримо гіпотезу про рівність математичних сподівань $m_1 = m_2$ випадкових величин X_1 та X_2 проти альтернативи $m_1 \neq m_2$. Для цього розглянемо випадкову величину $Y = X_1 - X_2$. Вона дорівнює різниці двох незалежних випадкових величин, які мають нормальний розподіл, математичні сподівання m_1, m_2 і дисперсії σ_1^2, σ_2^2 . За теоремою додавання числових характеристик незалежних випадкових величин маємо $m_y = m_{X_1} - m_{X_2}$; $\sigma_y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

Оцінкою математичного сподівання випадкової величини Y є середня

$$\bar{Y} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 = \sum_{i=1}^{n_1} X_i p_{i1} - \sum_{i=1}^{n_2} X_i p_{i2}, \quad (4)$$

а оцінкою дисперсії цієї статистики є вибіркова дисперсія

$$S_y^2 = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \left((n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2 \right) \quad (5)$$

Отже, задача порівняння середніх двох вибірок може бути сформульована таким чином. Характеристика вихідних даних:

$$Y \in N(0, \sigma_y), \quad Y = X_1 - X_2; \quad X_1(n) = (X_{11}, \dots, X_{1n1})^T; \quad X_2(n) = (X_{21}, \dots, X_{2n2})^T,$$

$$\text{відомі оцінки } \bar{X}_1, S_1^2, \bar{X}_2, S_2^2, \bar{Y} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2; \quad S_y^2 = \left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right) \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Гіпотеза $H_0: m_y = 0$. Альтернативна гіпотеза $H_1: m_y \neq 0$. Рівень значущості α . Критерій (критична статистика):

$$t = \frac{|\bar{Y} - 0|}{S_y} = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{S_y}, \quad (5)$$

де $\bar{X}_1, \bar{X}_2, S_1^2, S_2^2$ визначаються за формулами (1), (2), а S_y – за (5).

Перевіримо гіпотезу про рівність математичних сподівань для рівнів сформованості когнітивної складової професійної мобільності.

а) низький рівень:

$$\bar{Y} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 0,1556 - 0,3501 = -0,1941.$$

$$S_y^2 = \left(\frac{1}{276} + \frac{1}{277} \right) \frac{1}{276 + 277 - 2} \left((277 - 1)0,279 + (276 - 1)0,5603 \right) \approx 0,003.$$

Обчислюємо критерій Стьюдента:

$$t = \frac{|-0,1941|}{\sqrt{0,003}} \approx 3,54.$$

Для заданого рівня значущості $\alpha = 0,05$ і числа ступенів вільності

$\nu = n_1 + n_2 - 2 = 277 + 276 - 2 = 551$ за таблицею квантилів розподілу Стьюдента знаходимо

$t_{0,025;551} = t_{kp} = 1,96$. Оскільки $t = 3,54 > 1,96$, то гіпотезу H_0 слід відхилити і прийняти їй

альтернативну $H_1: m_1 \neq m_2$. Це означає, що різниця в середніх на користь вдосконаленої системи є статистично значущою.

Перевіримо гіпотезу відносно дисперсій двох вибірок [3].

Дисперсія характеризує стабільність будь-якого процесу, зокрема навчального. Будь-які управлінські рішення спрямовані на зменшення дисперсії. Тому перевірка гіпотези про значущість зміни дисперсії - важлива задача, яка формулюється таким чином: є дві нормально розподілені випадкові величини $X_j \in N(m_j, \sigma_j^2), j = 1, 2$, для яких відомі вибіркові дисперсії $S_1^2 \neq S_2^2$ і об'єми вибірок n_1, n_2 . Потрібно прийняти рішення про значущість відмінностей між дисперсіями σ_1^2 і σ_2^2 . Це рішення може бути прийнятим за результатами перевірки нульової гіпотези $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

проти альтернативи $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Гіпотеза H_0 перевіряється за схемою. Характеристика вихідних даних: $X_j \in N(m_j, \sigma_j^2), j=1,2$, відомі вибіркові дисперсії σ_j^2 , об'єми вибірок n_j .

1. Гіпотеза $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
2. Альтернативна гіпотеза $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
3. Рівень значущості α .
4. Критерій (критична статистика): $F = \frac{S_A^2}{S_B^2}$,

де S_A^2, S_B^2 - відповідно, більша та менша з порівнюваних дисперсій S_j^2 .

Ця статистика має F -розподіл Фішера.

Перевіримо гіпотезу відносно дисперсій двох вибірок для когнітивної складової базового рівня професійної мобільності.

а) низький рівень:

Обчислимо спостережувальне значення F – критерію

$$F = \frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{0,5603}{0,279} \approx 2,008.$$

У даному випадку критична область є одностороння, тому критичний квантиль знаходимо для рівня значущості $\alpha = 0,05$ і числа ступенів вільності

$\nu_1 = n_1 - 1 = 277 - 1 = 276$, $\nu_2 = n_2 - 1 = 276 - 1 = 275$ з таблиці квантилів розподілу Фішера $F_{(276,275,0,05)} = 1$. Оскільки $F = 2,008 > 1$, то є підстави відхилити нульову гіпотезу і прийняти

альтернативну $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Розбіжність між дисперсіями $S_A^2 - S_B^2 = 0,5603 - 0,279 = 0,2813$ є статистично значущою й дає підстави прийняти рішення про те, що запропонована система суттєво впливає на сформованість когнітивної складової базового рівня професійної мобільності майбутніх інженерів-машинобудівників.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Венецкий И. Г. Основные математическо-статистические понятия и формулы в экономическом анализе / И. Г. Венецкий, В. И. Венецкая. – М. : Статистика. – 1974. – 277 с.
2. Гласс Дж. Статистические методы в педагогике и психологии / Дж. Гласс, Дж. Стенли. – М. : Прогресс, 1976. – 490 с.
3. Петрук В. А. Ймовірно-статистичні моделі та статистична оцінка рішень / В. А. Петрук, Г. Г. Кашканова // Навч. посіб. – Вінниця: ВДГУ, 2000. – 147 с.
4. Рудницька О. П. Основи педагогічних досліджень / О. П. Рудницька. – К. : Експрес, 1998 – 143 с.
5. Хом'юк І.В. Використання методів математичної статистики в педагогічних дослідженнях / І.В.Хом'юк // Збірник наукових праць «Педагогічна освіта: теорія і практика». – Випуск 14. – Кам'янець-Подільський: Видавець ПП Зволейко Д. Г., 2013. – С. 250–257.

Хом'юк Ірина Володимирівна – д.пед.н., професор, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: vikiravvh@gmail.com

Петрук Віра Андріївна – д.пед.н., професор, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, , e-mail: petruk-va@ukr.net

Хом'юк Віктор Вікторович, – к.т.н., доцент, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: vikiravvh@gmail.com

Irina V. Khomyuk – Doctor of Science (Ped.), Professor of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: vikiravvh@gmail.com

Vira A. Petruk – Doctor of Science (Ped.), Professor of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: petruk-va@ukr.net

Viktor V. Khomyuk – PhD, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: vikiravvh@gmail.com